相転移の位置と意味について

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{F}}_1 = \gamma^2 \sum_{C\in\Pi_+} \log\left(1-f_C(g,u)^2\right) \\ \tilde{\mathcal{F}}_2 = 2\gamma \sum_{C\in\Pi_+} \log\left(1-f_C(g,u)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log M_G + g(\gamma) \end{cases}$$

特に、$u=0$ では、

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{F}}_1 = -\frac{\gamma^2}{2}\log \zeta_G(g^2) \\ \tilde{\mathcal{F}}_2 = -\gamma\log\zeta_G(g) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log M_G + g(\gamma) \end{cases}$$

比熱

$$C = -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\mathcal{F} \quad , \quad \left(\mathcal{F} = -\frac{1}{N_c^2}\log Z\right)$$

より

$$\begin{cases} C_1 = -2\gamma^2 \log \zeta_G(g^2) \\ C_2 = -\gamma^2 g''(\gamma) \end{cases}$$

非閉じ込め相について

observation 1

simulation で、$C_2 = \frac{R}{2}$, $dC_2 = R$ $\quad$ (R: rank G)

fact

N コの free particle の比熱は $\frac{N}{2}$, 比熱のビブンは N

$$\left(\because\ Z = \int \prod dx_i\, e^{-\beta\cdot g_i x_i^2} = \prod_i \left(\frac{\pi}{\beta g_i}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F = -\log Z = \frac{N}{2}\log\beta + \cdots \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = -\beta^2 \frac{d^2F}{d\beta^2} = \frac{N}{2} \\ dC = \beta^3\frac{d^3F}{d\beta^3} = N \end{cases} \qquad \begin{aligned} F' &= \frac{N}{2\beta} \\ F'' &= -\frac{N}{2\beta^2} \\ F''' &= \frac{N}{\beta^3} \end{aligned} \left. \vphantom{\int} \right)$$

予想 $\quad$ 弱、GW に記述があると思う、要カクニン

この相 (deconfined phase) では、$R\times N_c^2$ コの自由度が free particle のように振舞っているとみなせる。

$$\to C = \frac{1}{N_c^2}\times\frac{1}{2}RN_c^2 = \frac{R}{2}, \quad dC = \frac{1}{N_c^2}\times RN_c^2 = R$$

閉じ込め相について

$$C_1 = -2\gamma^2 \log \zeta_G(g^2)$$

$$= -2\gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} g^{2n}$$

$$\xrightarrow[\substack{\gamma\to\infty \\ g\to 0}]{} 2\gamma^2 \cdot \frac{N_\ell}{\ell} g^{2\ell} \quad (\ell : \text{minimal length}, \ N_\ell = [\#\text{ of cycles w/ } |C| = \ell])$$

$$\parallel$$

$$2\gamma^2 n_\ell \, g^{2\ell} \quad (n_\ell = \#\{[C] \mid |C| = \ell\}),$$

observation 2

相転移は $C_1 = \frac{n_\ell}{2}$ で起こる

$$\Rightarrow C_1^{(c)} = 2\gamma^2 n_\ell \cdot g_c^{2\ell} = \frac{n_\ell}{2}$$

$$\Rightarrow g_c^\ell = \frac{1}{2\gamma}$$ → 相転移の位置に説明がつく。

(※ K4 でも、g_c の位置はここだった。)

→ $\boxed{g_c = (2\gamma)^{-\frac{1}{\ell}} \text{ であることと、} C_1 = \frac{n_\ell}{2} \text{ であることは同根}}$