Trabalho 2

Investigação operacional

26/04/2024

Ana Sá Oliveira a104437
Inês Silva Marques a104263
José Rafael De Oliveira Vilas Boas a76350
Tomás Pinto Rodrigues a104448

Índice

Introdução

Neste trabalho iremos resolver um problema de fluxo máximo, ou seja, iremos determinar o fluxo máximo entre dois vértices não adjacentes de um determinado grafo. Para resolver este problema iremos transformar um problema de fluxo máximo num problema de minimização do custo do fluxo em rede, para assim podermos usar um solver (Relax4) que nos irá dar a solução ótima.

Primeiro, vamos obter os dados do problema e depois iremos formular o problema, construir um modelo de fluxos em rede, colocar este modelo num solver, obter a solução ótima, interpretá-la e representá-la, e por fim iremos validar o modelo.

Determinação dos dados do problema

O número de inscrição do estudante do grupo com maior número de inscrição é 104448, logo:

xABCDE = 104448

x=1
A=0
B=4
C=4
D=4
E=8

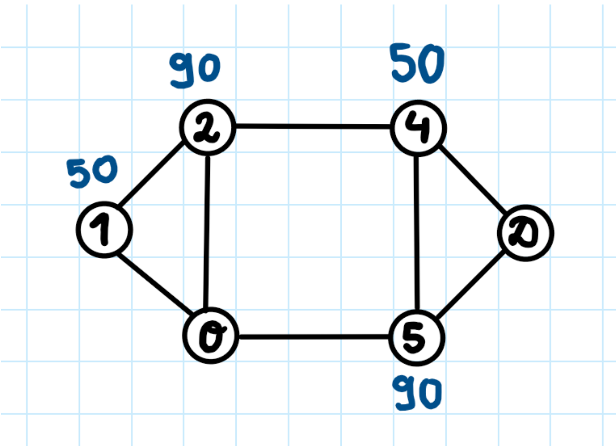
Como D=4 e E=8 e como k = DE mod(14), então, no nosso grupo, k = 48 mod(14) = 6, uma vez que o resto da divisão de 48 por 14 é 6 (48=3*14+6). Então, consultando a tabela do enunciado, para k=6 temos que (O,D)=(3,6) - o vértice 3 é a origem do grafo (vértice O) e o vértice 6 é o destino do grafo (vértice D).

Agora só falta calcular a capacidade de cada vértice seguindo as regras dadas no enunciado e tendo em conta que quando o vértice é a origem O ou o destino D, o valor da sua capacidade é substituído por +∞. Assim, na capacidade do vértice 3 (origem) e 6 (destino) colocamos +∞ e nas outras capacidades dos outros vértices seguimos as regras.

Capacidades dos vértices:

Vértice	Capacidade
1	10*(A+C+1)=10*(0+4+1)=50
2	10*(B+D+1)=10*(4+4+1)=90
3	+∞ - origem
4	10*(D+1)=10*(4+1)=50
5	10*(E+1)=10*(8+1)=90
6	+∞ - destino

Com estes dados, o grafo resultante é:



Formulação do problema

Descrição do problema

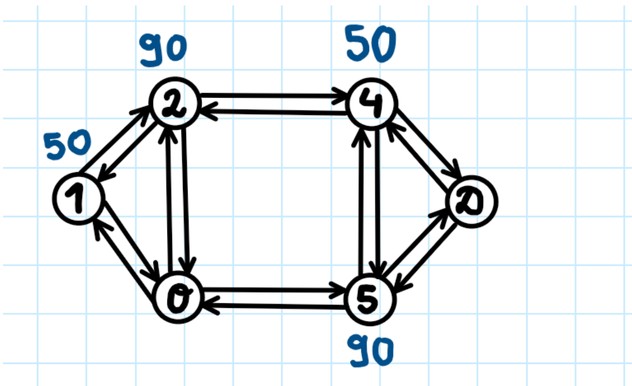
O problema que iremos abordar baseia-se nos dados calculados anteriormente. Queremos determinar o fluxo máximo entre os vértices não adjacentes O e D do grafo anteriormente representado. Naquele grafo temos 6 vértices, o vértice 1, 2, O, 4, 5 e D. O vértice 1 tem capacidade de 50, o vértice 2 tem capacidade de 90, o vértice 4 tem capacidade de 50 e o vértice 5 tem capacidade de 90. Os vértices O e D têm capacidade ilimitada. Neste grafo, a capacidade das arestas é virtualmente infinita e o fluxo numa aresta pode ter qualquer um dos dois sentidos (por isso que representamos um grafo não orientado). Este grafo, assim, apresenta 16 arcos, por exemplo, o arco (1,2) e o arco (2,1). Neste problema não nos apresentam custos unitários de fluxo, pois são irrelevantes, afinal, apenas queremos saber o fluxo máximo, não importa o seu custo.

Objetivo

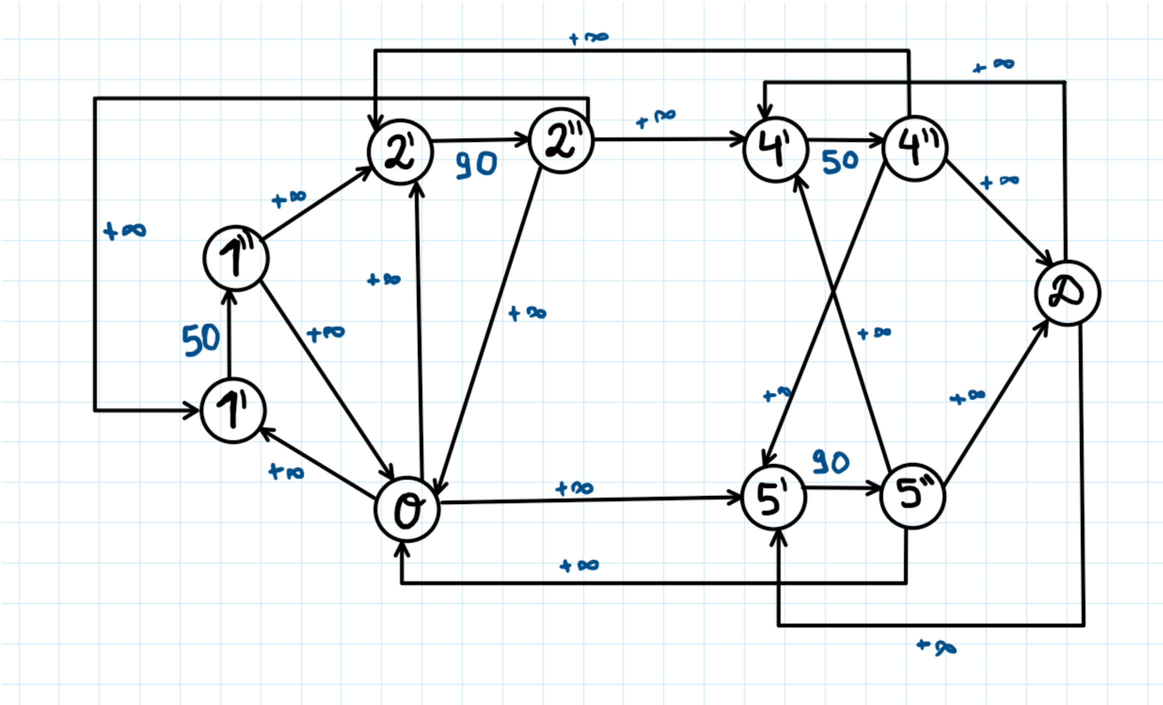
O objetivo deste problema é determinar o fluxo em cada arco, de modo a maximizar o fluxo entre os vértices não adjacentes O e D do grafo e determinar o valor deste fluxo máximo. Uma forma de determinar este fluxo máximo é transformar este problema num problema de minimização de custo dos fluxos em rede. Ou seja, ao minimizar o custo de um determinado fluxo em rede, podemos descobrir o fluxo máximo que procuramos. Assim, o nosso objetivo será determinar o fluxo de cada arco, de modo a minimizar o custo de um determinado fluxo em rede para assim descobrir o custo mínimo e consequentemente descobrir o fluxo máximo do grafo inicial.

Explicação da rede

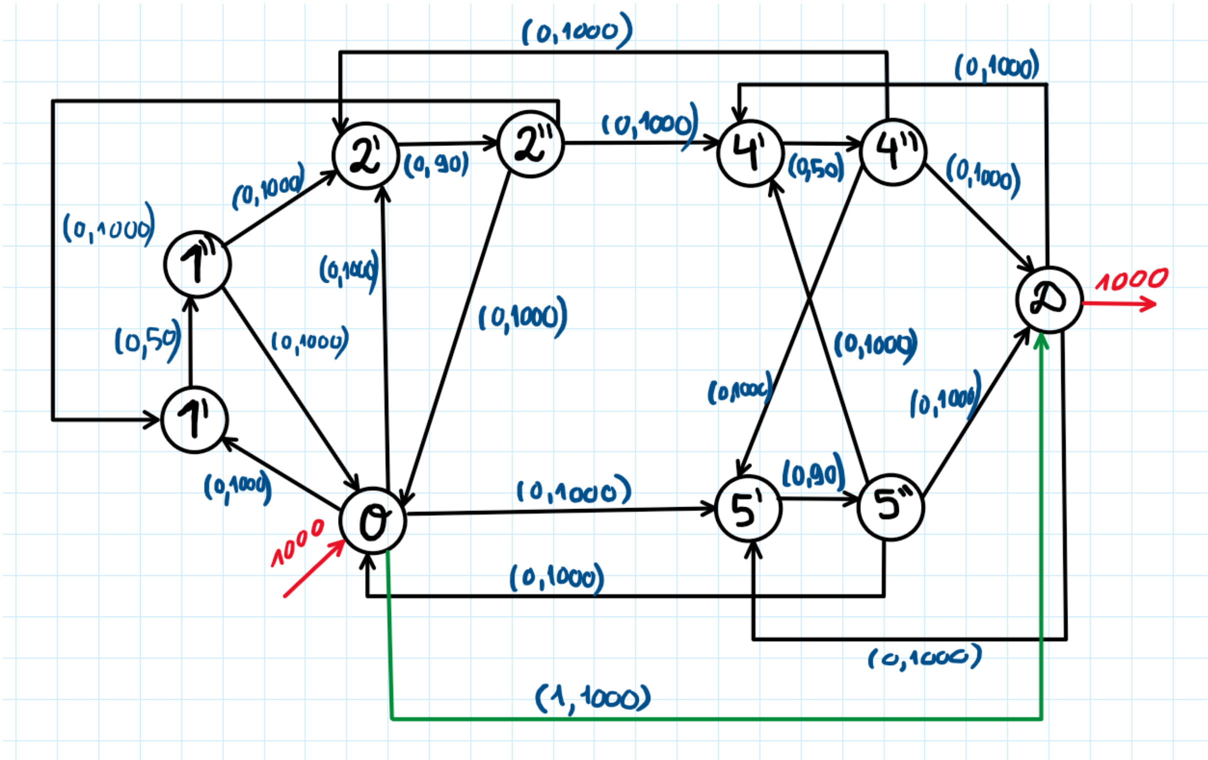
Temos um problema de maximização de fluxos numa rede, com um grafo não orientado, e capacidades nos vértices do grafo, logo, vão ter de ser feitas várias transformações ao grafo antes de o poder colocar no Relax4. Começámos por transformar cada arco não orientado em 2 arcos orientados, o que resultou no seguinte grafo:



De seguida construímos um grafo equivalente apenas com capacidades nos arcos, transformando cada vértice com capacidade limitada, por exemplo o vértice 1, em dois vértices - 1′ e 1′′, ligados por um arco com capacidade igual à do vértice original, e ligando todos os arcos com destino em 1 ao 1′ e fazendo todos os arcos com origem em 1 passarem a ter origem em 1′′, assim garantindo que todo o fluxo que passava em 1, no novo grafo passa no arco (1′,1′′), que tem a mesma capacidade de 1. O grafo resultante deste processo é o seguinte:



Depois, para transformar o problema num de minimização de custos de transporte, introduzimos uma oferta de 1000 na origem e uma procura de 1000 no destino (virtualmente ilimitada neste contexto), definimos o custo de todos os arcos como 0 e acrescentamos um novo arco da origem para o destino com custo 1 e capacidade ilimitada.
Assim, como o arco que vai de O para D tem um custo maior do que os outros, na solução ótima do problema de minimização de custo do transporte das 1000 unidades pelo grafo, só vão passar por esse arco as unidades que não conseguirem passar nos outros (que têm custo 0, e assim seriam preferíveis para minimizar o custo).
Logo, como (O,D) tem custo de transporte 1 e todos os outros arcos têm custo 0, o valor da função objetivo (custo do transporte das 1000 unidades) corresponderá ao número de unidades que passam em (O,D), e, na solução ótima esse número será a quantidade que não consegue passar no resto do grafo (com custo menor), o que equivale a dizer que o valor da função objetivo é 1000 menos o fluxo no grafo original, e na solução ótima 1000 menos o fluxo máximo no grafo original. Afinal, se queremos minimizar 1000 menos um fluxo, basta maximizar o fluxo.
Assim, iremos conseguir através de um problema de minimização de custo de fluxo em rede, obter o fluxo máximo. O grafo final será este:



Fluxos na rede

Neste problema, as variáveis de decisão são o fluxo de um único tipo de entidades nos arcos orientados. Ou seja, aquilo que podemos decidir é o fluxo em cada arco orientado.

Custos e capacidades

Como já referimos anteriormente, o custo do arco (O,D) será 1 e os custos dos restantes arcos são nulos (0). Os custos dos arcos do grafo inicial são nulos porque assim, como o objetivo é minimizar o custo, então o fluxo entre O e D (apenas nestes arcos) será o máximo (fluxo máximo que queremos calcular) para se evitar adicionar fluxo desnecessário no arco (O,D) que tem custo 1 e não pertence ao grafo original, o que iria aumentar o custo desnecessariamente, sendo que nós queremos o custo mínimo. Assim, podemos descobrir o fluxo máximo através da minimização destes custos. O custo do arco (O,D) também é 1 porque assim o custo total será mesmo igual ao fluxo do arco (O,D), uma vez que 1 é o elemento neutro da multiplicação (qualquer número multiplicado por 1 é igual a ele mesmo). O custo total ser igual a este fluxo facilita as contas para depois descobrirmos o fluxo máximo.

Como já referimos anteriormente, a capacidade do arco (1′,1′′) e do arco (4′,4′′) é 50, a capacidade do arco (2′,2′′) e do arco (5′,5′′) é 90 e os restantes arcos tem capacidade ilimitada. A capacidade dos arcos (1′,1′′), (2′,2′′), (4′,4′′) e (5′,5′′) foram retiradas das capacidades dos vértices 1, 2, 4 e 5 do grafo inicial. As restantes capacidades dos arcos do grafo original mantiveram-se iguais. A capacidade do arco (O,D) que foi adicionado decidimos que seria ilimitada para que quando o fluxo fosse o máximo no grafo inicial, o restante fluxo existente pudesse circular neste arco, sem quaisquer limitações, para assim garantirmos que a oferta na origem conseguia chegar ao destino, para o problema não ser considerado impossível pelo solver Relax4. Para além disso, não ganhamos nada em limitar esta capacidade, limitá-la traria apenas problemas (como o modelo ser considerado impossível de resolver) e por isso esta capacidade é ilimitada.

Ofertas e consumos

Introduzimos uma oferta de 1000 na origem e uma procura de 1000 no destino (virtualmente ilimitada neste contexto). Escolhemos o número 1000 por ser um número elevado e por ser superior ao fluxo máximo (mesmo não sabendo ainda o valor exato do fluxo máximo). Afinal, se no grafo original os vértices 2 e 5 tinham capacidade 90 e o vértice 1 tinha capacidade 50, e como apenas estes vértices pertenciam a arcos com origem no vértice 3 (na origem) então podemos concluir que o fluxo máximo não podia ultrapassar o valor 230 (90+90+50) porque era impossível o fluxo entre a origem e o destino ultrapassar este valor. Afinal, de onde iria surgir o resto do fluxo, se apenas tínhamos estes arcos a sair da origem e se estes vértices tinham estas capacidades? O fluxo de um grafo pode ser expresso como a quantidade de fluxo que sai no vértice origem, com isto e com as capacidades nos vértices podemos obter o tal limite superior do fluxo máximo do grafo inicial:

- $\sum_{(O,j)\in A'} x_{O,j} = x_{O,1} + x_{O,2} + x_{O,5} = 50 + 90 + 90 = 230$ → limite superior

Assim, escolhemos o valor 1000 pois 1000 é muito maior que 230 e deste modo iremos obrigar a que haja fluxo máximo entre O e D (sem contar com o arco (O,D)) e que o resto vai para o arco (O,D).
Apenas temos oferta na origem e consumo no destino, porque nós queremos saber o fluxo máximo entre O e D. Se puséssemos ofertas e consumos noutros vértices, estaríamos a modificar o problema. No entanto não precisamos de fazer isto. Afinal, o problema apenas quer saber o fluxo máximo entre O e D, então apenas colocamos oferta no O e

consumo no D. A oferta no O será igual ao consumo no D, afinal a oferta total tem de ser igual ao consumo total.

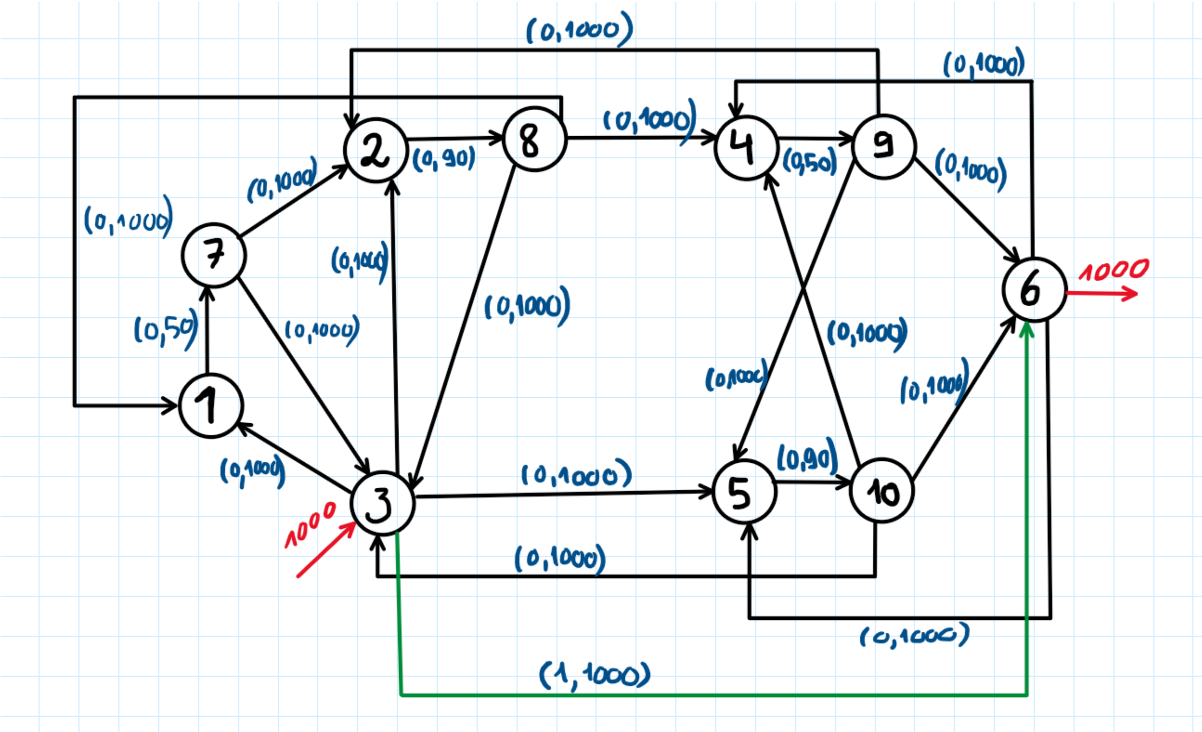
Coerência do modelo de fluxos em rede

O objetivo deste modelo é descobrir o fluxo máximo da rede, através de um grafo não orientado com capacidades nos vértices, começando por decompor os arcos não orientados em dois arcos orientados em sentidos opostos, passamos a poder ter direcionalidade do fluxo na rede. Fazendo a transformação de capacidade de vértices para capacidade de arcos (introduzindo novos arcos com a capacidade dos vértices, forçando a passagem do fluxo num único sentido, mas mantendo a direcionalidade dos fluxos iniciais) é possível passar o problema inicial para um equivalente em que apenas temos capacidades nos arcos (o que permite utilizar o relax4). Adicionando um novo arco desde a origem até ao destino sendo apenas este arco o único com custo não nulo, igual a 1 (sendo este arco apenas escolhido para a passagem do fluxo, quando não seja possível passar fluxo pelos outros arcos, em outras palavras, quando for atingido o fluxo máximo da rede), permite com que o resultado do problema inicial possa ser derivado através da modelação de um problema de minimização de custos o que nos permite utilizar o relax4 para derivar o resultado do problema inicial. Definindo uma oferta no vértice inicial e uma procura no vértice final iguais a 1000 podemos derivar o fluxo máximo como esta quantidade (1000) menos o custo mínimo obtido como solução pelo relax4. Assim, este modelo é coerente com o problema que queremos resolver.

Modelo de fluxos em rede

Rede

Como queremos um modelo de fluxos em rede para colocar no solver Relax4, temos de ter em conta que neste software é necessário que os vértices do modelo sejam números sequenciais, logo os vértices O, D, 1′, 1′′, 2′, 2′′, 4′, 4′′, 5′ e 5′′ foram alterados para os números 3, 6, 1, 7, 2, 8, 4, 9, 5 e 10 respetivamente. Os arcos consequentemente também mudaram. Deste modo, obtemos o seguinte grafo para usar no modelo:



Conjuntos

$G = (V, A) :$ $Grafo\ da\ rede\ G\ constituído\ pelo\ conjunto\ de\ vértices\ V\ e\ arcos\ A$;

$V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} :$ $conjunto\ dos\ vértices$;

$A = \{(1,7), (2,8), (3,1), (3,2), (3,5), (4,9), (5,10), (6,4), (6,5), (7,2), (7,3), (8,1), (8,3),$ $(8,4), (9,2), (9,5), (9,6), (10,3), (10,4), (10,6), (3,6)\} :$ $conjunto\ dos\ arcos$;

Variáveis de decisão

Sendo as variáveis de decisão os fluxos de cada arco, então as variáveis de decisão são números inteiros não negativos (pertencem a $\mathbb{Z}_{\geq 0}$). Assim, as variáveis de decisão são:

- $x_{i,j}$ - O fluxo de cada arco (i,j), com (i,j) ∈ A e $x_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
  - $x_{1,7}, x_{2,8}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,5}, x_{4,9}, x_{5,10}, x_{6,4}, x_{6,5}, x_{7,2}, x_{7,3}, x_{8,1}, x_{8,3}, x_{8,4}, x_{9,2}, x_{9,5}, x_{9,6}, x_{10,3}, x_{10,4}, x_{10,6}, x_{3,6} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
  - $x_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall((i,j) \in A)$.

Parâmetros

Os parâmetros deste problema são:

- Cada vértice do grafo, v ∈ V.

- Cada arco orientado do grafo, (i,j) $\in A$.
- Custo unitário de transporte de cada arco orientado (i,j) $\in A$, $c_{i,j}$.
    - $c_{1,7} = c_{2,8} = c_{3,1} = c_{3,2} = c_{3,5} = c_{4,9} = c_{5,10} = c_{6,4} = c_{6,5} = c_{7,2} = c_{7,3} = c_{8,1} = c_{8,3} = c_{8,4} = c_{9,2} = c_{9,5} = c_{9,6} = c_{10,3} = c_{10,4} = c_{10,6} = 0$.
    - $c_{3,6} = 1$.
- Capacidade de cada arco orientado (i,j) $\in A, u_{i,j}$.
    - $u_{1,7} = u_{4,9} = 50$.
    - $u_{2,8} = u_{5,10} = 90$.
    - $u_{3,1} = u_{3,2} = u_{3,5} = u_{6,4} = u_{6,5} = u_{7,2} = u_{7,3} = u_{8,1} = u_{8,3} = u_{8,4} = u_{9,2} = u_{9,5} = u_{9,6} = u_{10,3} = u_{10,4} = u_{10,6} = u_{3,6} = 1000\ (não\ limitada)$
    - As capacidades ilimitadas terão o valor 1000 porque o Relax4 precisa que coloquemos um valor finito em tudo. Para além disso, se a oferta na origem é 1000 e o consumo no destino é -1000, então mesmo que as unidades sejam transportadas por apenas um arco, sabemos que esse arco não irá precisar de ter capacidade superior (afinal o arco teria fluxo 1000 e a sua capacidade permite isso). Assim, 1000 é o valor ideal para representar as capacidades ilimitadas.
- Oferta ou consumo em cada vértice v $\in V$, b_v.
    - $b_3 = 1000$, oferta (valor positivo).
    - $b_6 = -1000$, consumo/procura (valor negativo).
    - $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = b_7 = b_8 = b_9 = b_{10} = 0$.

Função objetivo

A função objetivo linear z é a soma de todos os custos unitários de transporte de cada arco a multiplicar pelo fluxo desse arco. Neste problema, queremos minimizar a função objetivo (problema de minimização), para assim obtermos um menor custo total.

$$min: \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j}x_{i,j}$$

Restrições

Num modelo do fluxo de uma rede temos dois tipos de restrições: restrições da conservação de fluxo em cada vértice e restrições da capacidade de cada arco.
As restrições de conservação de fluxo são obtidas igualando o fluxo total que entra num vértice mais o valor da oferta ou do consumo desse vértice ao fluxo total que sai desse vértice, para todos os vértices. Sendo assim, obtemos as seguintes restrições de conservação de fluxo:

- Vértice 1: $x_{3,1} + x_{8,1} + 0 = x_{1,7}$;
- Vértice 2: $x_{3,2} + x_{7,2} + x_{9,2} + 0 = x_{2,8}$;
- Vértice 3: $x_{7,3} + x_{8,3} + x_{10,3} + 1000 = x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,5} + x_{3,6}$;
- Vértice 4: $x_{6,4} + x_{8,4} + x_{10,4} + 0 = x_{4,9}$;
- Vértice 5: $x_{3,5} + x_{6,5} + x_{9,5} + 0 = x_{5,10}$;
- Vértice 6: $x_{3,6} + x_{9,6} + x_{10,6} - 1000 = x_{6,4} + x_{6,5}$.
- Vértice 7: $x_{1,7} + 0 = x_{7,2} + x_{7,3}$;
- Vértice 8: $x_{2,8} + 0 = x_{8,1} + x_{8,3} + x_{8,4}$;
- Vértice 9: $x_{4,9} + 0 = x_{9,2} + x_{9,5} + x_{9,6}$;
- Vértice 10: $x_{5,10} + 0 = x_{10,3} + x_{10,4} + x_{10,6}$.

Se quisermos generalizar estas restrições em apenas uma:

- $\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j} + b_j = \sum_{(j,k)\in A} x_{j,k}, \forall(j \in V)$: forma geral da conservação dos fluxos.

As restrições da capacidade de cada arco são obtidas com base nas capacidades de cada arco, alguns arcos têm capacidades limitadas e os restantes arcos têm capacidade virtualmente ilimitada, o que se traduz no uso de um coeficiente arbitrariamente grande para representar essa capacidade, foi escolhido o coeficiente 1000, uma vez que o Relax4 precisa que coloquemos um número finito nas capacidades ilimitadas para resolver o modelo. Sendo assim obtemos as seguintes restrições de capacidade de cada arco:

- $x_{1,7} \leq 50$;
- $x_{2,8} \leq 90$;
- $x_{4,9} \leq 50$;
- $x_{5,10} \leq 90$;
- $x_{i,j} \leq 1000, \forall(i,j) \in A\backslash\{(1,7),(2,8),(4,9),(5,10)\}$;

Se quisermos generalizar estas restrições em apenas uma:

- $x_{i,j} \leq u_{i,j}, \forall(i,j) \in A$

Ficheiro de input

Para resolver este modelo de fluxos em rede usamos o software relax4. O ficheiro de input é um ficheiro de texto, contendo na primeira linha o número de vértices e na segunda o número de arcos, seguidos das restrições em cada arco e por último as ofertas ou consumos de cada vértice. Cada arco é representado pelo vértice de origem do arco, pelo vértice de destino, pelo custo unitário de transporte deste arco e pela capacidade deste arco. As ofertas ou consumos só são enumerados sequencialmente sendo o primeiro correspondente ao vértice 1 e assim sucessivamente.

Print do ficheiro de input do programa relax4:

Número de vértices do grafo

Número de arcos do grafo

Arco (i,j): **vértice_i vértice_j custo capacidade**

```
  10
  21
  3  1  0 1000
  8  1  0 1000
  1  7  0 50
  7  3  0 1000
  7  2  0 1000
  3  2  0 1000
  9  2  0 1000
  2  8  0 90
  8  4  0 1000
  10 4  0 1000
  6  4  0 1000
  4  9  0 50
  9  5  0 1000
  9  6  0 1000
  6  5  0 1000
  3  5  0 1000
  5  10 0 90
  10 6  0 1000
  10 3  0 1000
  8  3  0 1000
  3  6  1 1000
```

Ofertas ou consumos de cada vértice:

V:	
1	0
2	0
3	1000
4	0
5	0
6	-1000
7	0
8	0
9	0
10	0

Ficheiro de output

O ficheiro de output é um ficheiro de texto. Todos os arcos que não aparecerem no output, significa que o seu fluxo foi nulo (0). Os outros arcos irão aparecer no output com a origem do arco, o destino do arco e o seu fluxo. Por fim também será apresentado o valor ótimo (custo mínimo).

Print do ficheiro de output do programa relax4:

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 10, NUMBER OF ARCS = 21
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
***********************************
TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
  3 1  50.
  1 7  50.
  7 2  50.
  2 8  50.
  8 4  50.
  4 9  50.
  9 6  50.
  3 5  90.
  5 10  90.
  10 6  90.
  3 6  860.
OPTIMAL COST =   860.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 11
NUMBER OF ITERATIONS =  2
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  0
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  0
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  0
***********************************
```

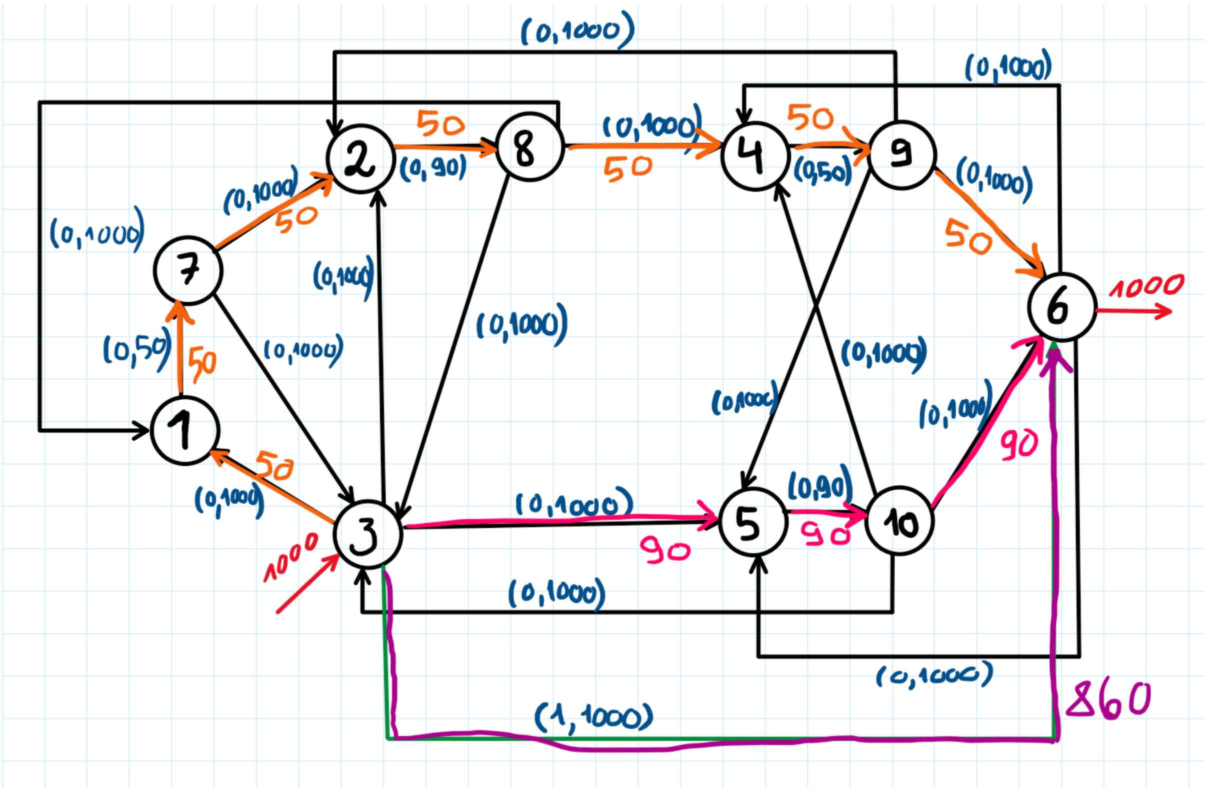
Interpretação e apresentação da solução ótima

A solução ótima do problema de minimização do custo dos fluxos em redes consiste em:

- o arco (3,1) ter fluxo igual a 50;
- o arco (1,7) ter fluxo igual a 50;
- o arco (7,2) ter fluxo igual a 50;
- o arco (2,8) ter fluxo igual a 50;
- o arco (8,4) ter fluxo igual a 50;
- o arco (4,9) ter fluxo igual a 50;

- o arco (9,6) ter fluxo igual a 50;
- o arco (3,5) ter fluxo igual a 90;
- o arco (5,10) ter fluxo igual a 90;
- o arco (10,6) ter fluxo igual a 90;
- o arco (3,6) ter fluxo igual a 860;
- os restantes arcos terem fluxo igual a 0.

Na solução ótima, o custo é 860, ou seja, o custo mínimo é **860**, o que significa que das 1000 entidades que foram da origem ao destino, apenas 860 foram pelo arco que une diretamente a origem e o destino, o único arco com custo igual a 1 (todos os outros arcos tem custo nulo). As restantes entidades (1000-860=140) foram da origem ao destino sem atravessar este arco, atravessando arcos com custo nulo. Como o objetivo era minimizar o custo, queríamos que as entidades atravessassem ao máximo os caminhos com custo nulo, logo, o fluxo pelos arcos que não o arco (3,6) foi o máximo possível. Assim podemos concluir que o fluxo máximo entre a origem e o destino (excluindo o arco que liga a origem e o destino diretamente) é **140**, 1000 - 860.
Na figura abaixo temos representada esta solução:

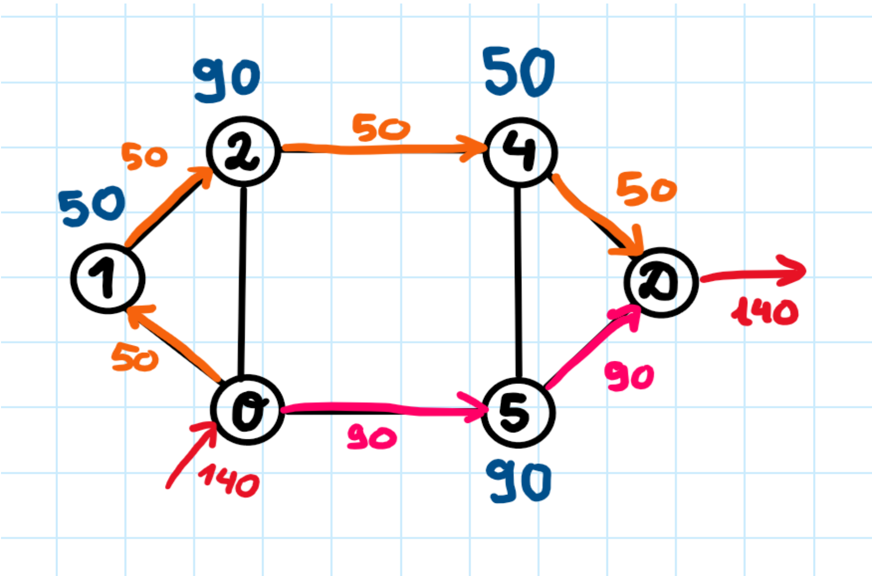


Fazendo a correspondência entre os vértices e os arcos do grafo inicial e os colocados no relax4, obtemos a seguinte solução no grafo inicial:

- o arco (O,1) ter fluxo igual a 50;

- o arco (1,2) ter fluxo igual a 50;
- o arco (2,4) ter fluxo igual a 50;
- o arco (4,D) ter fluxo igual a 50;
- o arco (O,5) ter fluxo igual a 90;
- o arco (5,D) ter fluxo igual a 90;
- os restantes arcos terem fluxo igual a 0.

Na solução ótima, o fluxo máximo é **140**.
Na imagem abaixo, temos representada esta solução:



Validação do modelo

Para validar o modelo, iremos verificar se a solução obtida pelo solver é uma decisão admissível e correta do modelo e que pode ser traduzida numa decisão adequada ao sistema real.
Para a solução ser admissível, esta tem de respeitar todas as restrições do modelo, o que realmente acontece como podemos verificar pelos cálculos apresentados posteriormente.
Em primeiro lugar, vamos ver se as restrições de conservação de fluxo (fluxo que entra num vértice tem de ser igual ao que saí dele) foram respeitadas:

- Vértice 3: $x_{7,3} + x_{8,3} + x_{10,3} + 1000 = x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,5} + x_{3,6} \leftrightarrow 0 + 0 + 0 + 1000 = 50 + 0 + 90 + 860 \leftrightarrow 1000 = 1000$ Verdadeiro;
- Vértice 1: $x_{3,1} + x_{8,1} = x_{1,7} \leftrightarrow 50 + 0 = 50 \leftrightarrow 50 = 50$ Verdadeiro;
- Vértice 7: $x_{1,7} = x_{7,2} + x_{7,3} \leftrightarrow 50 = 50 + 0 \leftrightarrow 50 = 50$ Verdadeiro;
- Vértice 2: $x_{3,2} + x_{7,2} + x_{9,2} = x_{2,8} \leftrightarrow 0 + 50 + 0 = 50 \leftrightarrow 50 = 50$ Verdadeiro;

- Vértice 8: $x_{2,8} = x_{8,1} + x_{8,3} + x_{8,4} \leftrightarrow 50 = 0 + 0 + 50 \leftrightarrow 50 = 50$ Verdadeiro;
- Vértice 4: $x_{6,4} + x_{8,4} + x_{10,4} = x_{4,9} \leftrightarrow 0 + 50 + 0 = 50 \leftrightarrow 50 = 50$ Verdadeiro;
- Vértice 9: $x_{4,9} = x_{9,2} + x_{9,5} + x_{9,6} \leftrightarrow 50 = 0 + 0 + 50 \leftrightarrow 50 = 50$ Verdadeiro;
- Vértice 5: $x_{3,5} + x_{6,5} + x_{9,5} = x_{5,10} \leftrightarrow 90 + 0 + 0 = 90 \leftrightarrow 90 = 90$ Verdadeiro;
- Vértice 10: $x_{5,10} = x_{10,3} + x_{10,4} + x_{10,6} \leftrightarrow 90 = 0 + 0 + 90 \leftrightarrow 90 = 90$ Verdadeiro;
- Vértice 6: $x_{3,6} + x_{9,6} + x_{10,6} - 1000 = x_{6,4} + x_{6,5} \leftrightarrow 860 + 50 + 90 - 1000 = 0 + 0 \leftrightarrow 1000 - 1000 = 0 \leftrightarrow 0 = 0$ Verdadeiro.

Todas as restrições de conservação de fluxo foram respeitadas.
Em segundo lugar, vamos ver se as restrições de capacidade dos arcos (fluxo que passa num arco tem de ser igual ou inferior à sua capacidade) foram respeitadas:

- $x_{3,1} \leq 1000 \leftrightarrow 50 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{1,7} \leq 50 \leftrightarrow 50 \leq 50$ Verdadeiro;
- $x_{7,2} \leq 1000 \leftrightarrow 50 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{2,8} \leq 90 \leftrightarrow 50 \leq 90$ Verdadeiro;
- $x_{8,4} \leq 1000 \leftrightarrow 50 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{4,9} \leq 50 \leftrightarrow 50 \leq 50$ Verdadeiro;
- $x_{9,6} \leq 1000 \leftrightarrow 50 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{3,5} \leq 1000 \leftrightarrow 90 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{5,10} \leq 90 \leftrightarrow 90 \leq 90$ Verdadeiro;
- $x_{10,6} \leq 1000 \leftrightarrow 90 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{3,6} \leq 1000 \leftrightarrow 860 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{3,2} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{8,1} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{7,3} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{9,2} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{8,3} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{6,4} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{10,4} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{9,5} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{6,5} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro;
- $x_{10,3} \leq 1000 \leftrightarrow 0 \leq 1000$ Verdadeiro.

Todas as restrições de capacidade dos arcos foram respeitadas e assim podemos concluir que todas as restrições do modelo foram respeitadas, logo a solução obtida é uma solução admissível.
Por fim, iremos calcular a função objetivo para verificar se o solver não cometeu nenhum erro.

- $\sum_{(i,j)\in A} c_{i,j}x_{i,j} = c_{3,1}x_{3,1} + c_{1,7}x_{1,7} + c_{7,2}x_{7,2} + c_{2,8}x_{2,8} + c_{8,4}x_{8,4} + c_{4,9}x_{4,9} + c_{9,6}x_{9,6} + c_{3,5}x_{3,5} + c_{5,10}x_{5,10} + c_{10,6}x_{10,6} + c_{3,6}x_{3,6} + c_{3,2}x_{3,2} + c_{8,1}x_{8,1} + c_{7,3}x_{7,3} + c_{9,2}x_{9,2} + c_{8,3}x_{8,3} + c_{6,4}x_{6,4} + c_{10,4}x_{10,4} + c_{9,5}x_{9,5} + c_{6,5}x_{6,5} + c_{10,3}x_{10,3} = 0 \times 50 + 0 \times 50 + 0 \times 50 + 0 \times 50 + 0 \times 50 + 0 \times 50 + 0 \times 50 + 0 \times 90 + 0 \times 90 + 0 \times 90 + 1 \times 860 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 860.$

Como a solução respeita todas as restrições do modelo, então é uma solução admissível. Como o valor da função objetivo dá 860 tanto no solver como à mão, então a solução está correta.
Sabemos que se o valor ótimo da função objetivo é 860 então este é igual a 1000 menos o valor do fluxo máximo do grafo original.

- $860 = 1000 - fluxo_{máximo} \leftrightarrow fluxo_{máximo} = 1000 - 860 \leftrightarrow fluxo_{máximo} = 140.$

Assim, o fluxo máximo que podemos calcular a partir deste modelo é 140.
Anteriormente já justificamos porque podemos garantir que o fluxo máximo entre a origem e o destino no grafo inicial é igual a 1000 menos o custo mínimo no grafo final. No entanto, para validarmos ainda mais este raciocínio, podemos calcular o fluxo máximo, tendo em conta o resultado que nos deu no grafo inicial e ver se dá mesmo 140. O fluxo de um grafo pode ser expresso como a quantidade de fluxo que sai no vértice origem e consideramos A' os arcos do grafo inicial (o grafo do enunciado) e $x_{i,j}$ os fluxos de um arco (i,j) pertencente a A'.

- $\sum_{(O,j)\in A'} x_{O,j} = x_{O,1} + x_{O,2} + x_{O,5} = 50 + 0 + 90 = 140.$

Observando o grafo inicial com a solução que nós encontramos, também facilmente percebemos que existe conservação de fluxo (fluxo que entra num vértice tem de ser igual ao que saí dele) e que são respeitadas as restrições de capacidade dos vértices (fluxo que passa num vértice tem de ser igual ou inferior à sua capacidade).
Assim, podemos concluir que este modelo serviu para sabermos que decisão tomar no sistema real, mesmo o modelo sendo sobre minimização de custos e o problema ser sobre fluxo máximo. Independentemente disso, ficamos a saber o que tínhamos de fazer para obter o fluxo máximo.
Depois desta análise, como tudo o que foi verificado está de acordo com as restrições e com o resultado esperado, podemos então concluir que o modelo é um modelo válido.

Conclusão

Para descobrirmos o fluxo máximo entre dois vértices não adjacentes num grafo, utilizando o solver relax4, tivemos de transformar este problema de fluxo máximo num problema de minimização do custo de transportes numa rede.
Começamos por transformar o grafo inicial num novo grafo, orientado, e apenas com capacidades nos arcos. Depois definimos a oferta na origem e a procura no destino de forma que não limitassem o valor do fluxo máximo obtido, acrescentamos um arco adicional da origem para o destino com capacidade que garantisse que toda a oferta chegasse ao destino, e definimos os custos dos arcos de maneira que, tentando minimizar o custo, o máximo de unidades possíveis passassem pelos arcos correspondentes ao grafo original.
Colocamos este modelo no solver e calculamos o fluxo máximo a partir do valor da função objetivo na solução ótima obtida. De seguida estabelecemos a correspondência entre a solução obtida e o grafo original, verificando que respeitava as restrições.
Assim, conseguimos formular o problema, construir um modelo de fluxos em rede, colocá-lo num solver, obter a solução ótima, interpretá-la e representá-la e, por fim, validar o modelo.