ExBook · 刷题本模板

此处填写主标题

此处填写副标题

A4 宽松版

“你这个年龄是怎么睡得着觉的”

制作人：研小布

最后更新时间：2025 年 1 月 3 日

声明

此刷题本只是对原书题目的二次排版，仅供个人学习交流使用，不得用于商业用途。如有侵权，请联系删除。

制作此刷题本的目的是方便大家在考研备考中多次刷题、记录自己的刷题过程和笔迹，以便日后复盘与巩固！此刷题本不包含答案，答案请参考原书！

此刷题本模板来自开源项目 **ExBook**（https://github.com/ExBook/ExBook）。如果你在利用此模板制作刷题本时遇到问题，请关注微信公众号：**研小布**（可使用微信扫描下面的二维码关注），后台回复“ExBook”进入交流群。

研小布

微信扫描二维码，关注我的公众号

目录

第 1 章 第一章标题

1 设定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数 $f(x)$ 对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

2 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x, & |x|>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}\arcsin x, & |x|\leqslant 1,\\ x, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)]=$ ________.

3 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,则 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=$ ________.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=$ ________.

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$ ________.

6 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^2-2(1-\cos x)\sin x}{x^4}=$ ________.

第 2 章　第二章标题

7　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2+1}=$ ________.

8　$I=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{x^2}+x^3)^{\frac{1}{x^2}}=$ ________.

9 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t}{x^2}=$ ________.

10 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right)=$ ________.

11 设 $\alpha > 0$,则 $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + x)^{x^\alpha} =$ ________.

12 数列极限 $I = \lim\limits_{n \to \infty} n^2 \left(\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} \right) =$ ________.

13 设 $x_0=0, x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ________.

14 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ________.

15 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \dfrac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} =$ ________.

16 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续，且 $f(1) = 1$，则 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln[2 + f(x^{\frac{1}{x}})] =$ ________.

17 设 a,b 为常数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

18 设 a,b,p 为非零常数，则 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin px}{|x|}=$ ________.

19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^x-1}=$ ________.

20 设 $f(x)$ 连续，当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小，则当 $x\to a$ 时 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $x-a$ 的________阶无穷小.（填阶数）

21 已知当 $x \to 0$ 时 $F(x) = \int_0^{x-\sin x} \ln(1+t)\mathrm{d}t$ 是 x^n 的同阶无穷小,则 $n =$ ________.

22 设 $a,b,c,d \in \mathbf{R}$,且满足 $a = -4c \neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\tan x + b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x) + d(1-\mathrm{e}^{-x^2})} =$ ________.

第 3 章 第三章标题

23 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0\\ 6, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 $a=$ ________.

24 设 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x=e$，可去间断点 $x=1$，则 $(a,b)=$ ________.

25 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$,则 $f(x)$ 的连续区间是________.

26 设 $f(x)=\begin{cases}\arctan x, & x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}(e^{x^2-1}-x)+\dfrac{\pi}{4}, & x>1\end{cases}$,则 $f'(x)=$ ________.

27 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$,其中 b 为某常数,$f(x)$ 在定义域上处处可导,则 $f'(x)=$________.

28 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 可导,则 α 应满足__________;若 $f'(x)$ 连续,则 α 应满足__________.

29 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且是偶函数，$f'(-2)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(5-2\sin h)-f(5)}=$ ______.

30 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f(0)=1$，$f'(0)=3$，则 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}=$ ______.

31 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶导数存在，则

$$I=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}=\underline{\qquad\qquad}.$$

32 设 $f(x)=x^{\sin x}(x>0)$，则 $f'(x)=\underline{\qquad\qquad}$.

33 $f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2$，则 $f''(0) =$ ________.

34 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx} =$ ________，$\dfrac{d^2y}{dx^2} =$ ________. $y = y(x)$ 在任意点处的曲率 $K =$ ________.

35 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = \sin(x + y)$ 确定，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ ________.

36 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 2$ 垂直的切线方程为________.

37 设 $f(x)=\int_0^x \ln(1+\sin t)\mathrm{d}t$，则 $f''(x)=$ __________.

38 设函数 $y=y(x)$ 为由方程 $x^2+\int_0^y(2+\sin t^2)\mathrm{d}t=1$ 确定的隐函数，则 $\mathrm{d}y=$ __________.

39 设 $y=y(x)$ 在 $(-1,1)$ 二阶可导，满足方程：$(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a^2y=0$，作变量替换 $x=\sin t$ 后，y 作为 t 的函数满足的方程是__________.

40 设 $f(x)=\ln\dfrac{1-2x}{1+3x}$，则 $f'''(0)=$ ________.

41 曲线 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ 在 $t=t_0$ 相应的点曲率最小，则在该点处的曲率半径为________.

42 设 $y=y(x)$ 是由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定的，则 $y=y(x)$ 的极值点是________.

43 函数 $y = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的单调增区间是________，单调减区间是________，极值是________，凹区间是________，凸区间是________.

44 设(1,3)是曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 14$ 的拐点，则 $a =$ ______，$b =$ ______.

45 设 $f(x)=3x^2+Ax^{-3}(x>0)$，A 为正常数，则 A 至少为______时，有 $f(x)\geqslant 20(x>0)$.

46 函数 $f(x)=|4x^3-18x^2+27|$ 在 $[0,2]$ 上的最小值等于________，最大值等于________.

47 设有界函数 $f(x)$ 在 $(c,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=b$，则 $b=$ _________.

48 曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线是________.

49 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x-1}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程为________.

50 设 $y=y(x)$ 二阶可导，且 $\dfrac{dy}{dx}=(4-y)y^{\beta}(\beta>0)$，若 $y=y(x)$ 的一个拐点是 $(x_0,3)$，则 $\beta=$ ________.

51 $\int f'(e^x)dx = -(1+x)e^{-x} + C, f(1) = 0$,则 $f(x) =$ ______.

52 $I = \int \sqrt{\dfrac{3-2x}{3+2x}}dx =$ ______.

53 $I=\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=$ ________.

54 $I=\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x=$ ________.

55 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x>0,\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的所有原函数为__________.

第 4 章 第四章标题

56 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}=$________.

57 $I_1=\int\cos^4 x\mathrm{d}x=$________, $I_2=\int\sin^4 x\mathrm{d}x=$________.

58 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$ ________.

59 $I=\int_0^1 \arcsin x \cdot \arccos x\mathrm{d}x=$ ________.

60 $I=\int_0^2\left(x\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)^3}\right)\mathrm{d}x=$ ________.

61 设 $f(x)$ 为连续函数，φ 为常数，$\int_0^{2\pi}f[\sin(x+\varphi)]\mathrm{d}x=A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$，则 $A=$ ________.

62 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$ 则 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x =$ ________.

63 设 $f(x)$ 有一阶导数且满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t = f(x)+x\sin x$，则 $f(x)=$ ________.

64 定积分 $I = \int_0^{\pi} \frac{x \mid \sin x \cos x \mid}{1 + \cos^2 x} dx =$ ________.

65 设 $f(x) = \max\{1, x^2\}$，则 $\int_1^x f(t) dt =$ ________.

66 在曲线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上取一点 $(t,t^2)(0<t<1)$，设 A_1 是曲线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$，直线 $y=t^2$ 和 $x=0$ 围成的面积；A_2 是由曲线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$，直线 $y=t^2$ 和 $x=1$ 围成的面积，则 t 取________ 时 $A=A_1+A_2$ 取最小值.

67 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x^2-1}}=$ ________.

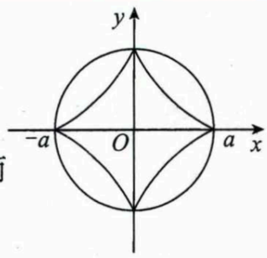
68 $I=\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=1$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

69 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x=$ ________.

70 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成图形绕 $y = 2a$ 旋转一周而得旋转体的体积 $V =$ ________.

71 设星形线方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$



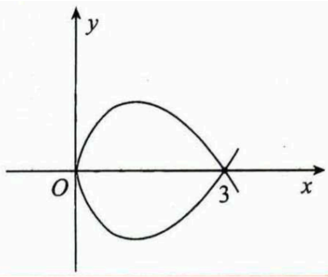
则它所围成的面积 A 为________，它的弧长 L 为________，它绕 x 轴旋转而生成的旋转体体积 V 为________，该旋转体的侧面积 $S =$ ________.

72 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，则以曲线、切线及 x 轴所围成平面图形绕 x 轴旋转一圈所得到的表面积为__________.

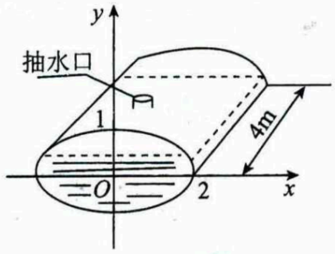
73 已知抛物叶形线的一部分：

$$y^2=\frac{x}{9}(3-x)^2\ (0\leqslant x\leqslant 3)$$

如图所示，它围成的图形为 M，则 M 的面积 $A=$________，M 的质心(形心)$(\bar{x},\bar{y})=$________.



74 在水平放置的椭圆底柱形容器内储存某种液体，容器的尺寸如图所示，其中椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$(单位:m)，则当液面过点$(0,y)(-1\leqslant y\leqslant 1)$处水平线时，容器内液体的体积是__________，当容器内储满了液体后，以 $0.16\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速度将液体从容器顶端抽出，则当液面降至 $y=0$ 时，液面下降的速度为__________，如果液体的密度为 $1000\mathrm{kg/m}^3$，抽出全部液体所做的功为__________.



75 设无穷长直线 L 的线密度为 1，引力常数为 k，则 L 对距直线为 a 的单位质点 A 的引力为________.

76 设 $y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导，在 $\forall x\in(0,+\infty)$ 处的增量 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$ 满足 $\Delta y(1+\Delta y)=\dfrac{y\Delta x}{1+x}+\alpha$，其中 α 当 $\Delta x\to 0$ 时是与 Δx 等价的无穷小. 又 $y(0)=1$，则 $y(x)=$ ________.

77 设 $a>0$ 是常数，连续函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，$y=y(x)$ 是微分方程

$$y''+ay'=f(x)\quad(x\in[0,+\infty))$$

的解，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)=$ ________，$\lim\limits_{x\to+\infty}y''(x)=$ ________.

第 5 章　第五章标题

78　若通过点(1,0)的曲线 $y=y(x)$ 上每一点 (x,y) 处切线的斜率等于 $1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$，则此曲线的方程是________.

79　当 $y>0$ 时，微分方程 $(x-2xy-y^2)\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$ 的通解为________.

80 设 $y=y(x)$ 是微分方程 $(3x^2+2)y''=6xy'$ 的一个特解，且当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 是与 e^x-1 等价的无穷小量，则该特解是________.

81 方程 $y''+y'-2y=(6x+2)e^x$ 满足 $y(0)=3,y'(0)=0$ 的特解 $y^*=$________.

82 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x + \sin x + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$，则 $f(x) =$ ________.

83 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + 2my' + n^2 y = 0$ 满足 $y(0) = a$ 与 $y'(0) = b$ 的特解，其中 $m > n > 0$，则 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x =$ ________.

84 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，则此微分方程为____________.

85 设 $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})(r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$ 有二阶连续的偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2,$$

则 $u(\sqrt{x^2 + y^2}) =$ ________.

86 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{e^{xy}+xy\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $f'_x(1,0)=$ ________.

87 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$，则 $2f'_x(0,0)+f'_y(0,0)=$ ________.

88 设 $z=\left(y^{x}+\frac{\sin x}{\sqrt{x^{2}+2y^{2}}}\right)^{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$ ________.

89 设 $f(x,y)=\ln|x+y|-\sin(xy)$，则 $\frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}$ 在点 $(1,\pi)$ 处的值为 ________.

90 已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=(u+v)e^{v}$，且 $f(0,v)=(v-2)e^{v}$. 则 $f(x,x+y)=$ ________.

91 设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$，$f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y}=$ ________.

92 已知函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处可微，且 $f(1,2) = 1, f'_x(1,2) = 2, f'_y(1,2) = 3$，设函数 $\varphi(x) = f(x, 2f(x, 2x))$，则 $\varphi'(1) =$ ________.

93 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$，又 $g(x,y) = f(x^2 + y^2, xy)$，则 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} =$ ________.

94 设 $z=\int_0^1 |xy-t| f(t)\mathrm{d}t, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $z''_{xx}+z''_{yy}=$ ________.

95 设 $f(x), g(x)$ 可微, $u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$,且满足 $u(x,0)=\sin 2x$, $u'_y(x,0)=0$,则 $f(x)=$ ________.

96 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且 $f(x,0)=x$，$f(0,y)=y^2$，则 $f(x,y)=$ ________.

97 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$ ________.

98 设可微函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\boldsymbol{u}=(-1,2)$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(0,0)=0$，沿 $\boldsymbol{v}=(3,4)$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0)=2$，$\boldsymbol{w}=(2,1)$，则 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}(0,0)=$ ________.

99 设 $(ax^2y^2-2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^3y+bx^2y+1)\mathrm{d}y$ 是一个函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 $a=$ ________，$b=$ ________，$f(x,y)=$ ________.

100 设 $f(x,y,z)=e^{x}yz^{2}+\dfrac{x\sin\pi y}{1+x^{2}}$,其中 $z=z(x,y)$ 由 $x+(y-1)z^{x}+2z+xyz=2$ 所确定. 则 $f'_{x}(0,1,1)=$ ________.