

# 关于制定护士工作时间的数学模型

——太和顾问杯数学建模初赛论文

姓名：高 齐

学号：14061128

学院：数理学院

原创声明：本论文所有内容均为原创，未经允许禁止转载。

—— 2017 年 4 月 11 日

# 关于制定护士工作时间的数学模型

## 摘要

本文通过建立数学模型的方法对护士工作时间表问题进行线性规划, 结合给定的条件进行最优化分析和设计。

对于问题一基于 414 绑定的原理, 即是每个人工作 4 个小时然后只休息一个小时, 再继续工作 4 个小时, 建立方程组, 运用 lingo 软件线性规划, 解出方程组算出最小值, 最后逐渐优化并找出最佳排班方案, 让晚上加入工作的人数最少。

对于问题二是基于 416 绑定和 414 绑定的原理, 即 416 是每个人工作 4 个小时后然后休息一个小时, 再继续工作 6 个小时, 建立不等式方程组, 让加班的护士 (416) 最少, 用 Lingo 程序解决问题, 算出加班人数最小值, 再优化工作早晚时间, 并找出最佳排班方案。

关键词: 414, 416 绑定, 线性规划, lingo 软件, 时间优化。

## 一, 问题重述

背景: 某医院的心脑血管科需要制定护士的工作时间表。在心脑血管科的一个工作日分为 12 个两小时的时段, 每个时段的人员要求不同。例如, 在夜间只要求有很少几名护士就足够了, 但在早晨为了给病人提供特殊报务, 需要很多护士。表 B1 列出了每个时段的人员需求量。

表B1 每个时段的人员需求

编号	时段	需要护士人数
1	0:00——2:00	15
2	2:00——5:00	15
3	4:00——6:00	15
4	6:00——8:00	35
5	8:00——10:00	40
6	10:00——12:00	40
7	12:00——14:00	40
8	14:00——16:00	30
9	16:00——18:00	31
10	18:00——20:00	35
11	20:00——22:00	30
12	22:00——24:00	20

**需要解决的问题：**

**问题 1：** (1) 为满足需求最少需要多少名护士？这里假定每位护士每天工作 8 小时，且在工作 4 小时后需要休息 1 小时。(2) 如果满足需求的排班方案不止一种，请给出你认为最合理的排班方案，并说明其理由。

**问题 2：** 目前心脑血管科只有 80 名护士，如果这个数目不能满足指定的需求，只能考虑让部分护士加班。如果加班，每天加班的时间为 2 小时，且紧随在后一个 4 小时工作时段之后，中间没有休息。(1) 请给出护士工作时间安排的方案，以使需要加班的护士数目最少。(2) 如果排班（包括加班）的方案不止一种，请给出你认为最合理的排班和加班方案，并说明其理由。

## 二，问题分析

此类排班问题属于经典的线性规划问题，用之前所有加入的人数表示某时间点的人数总和，而每个时间点的人数总和必须满足约束条件，列出方程组。

### 2.1 问题 1：

#### 2.1.1 数学分析：

假设某个小时里工作的总人数为  $m$ ， $X_n$  表示在第  $n$  点开始加入工作的人数。向之前的时间逆推，就能得到这帮人开始工作的时间。

例如，设在 0 点到 1 点这个时间段的总人数为  $m$ ，就能得知这些人是从 0 时刻之前的 8 个小时段及第 0 时加入的人数之和，则第 0 时的总人数为前一天 16 时到第 0 点加入的总人数。即： $m$  为  $X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{19}, X_{20}, X_{21}, X_{22}, X_{23}$  及  $X_0$  之和。但是由于题目条件工作 4 个小时需要休息 1 个小时，所以在 20 点到 21 点内开始工作的人在 0 到 1 点这个时间段正在休息，即  $X_{20}=0$ 。这些人数加起来需要满足约束条件即大于等于 15，这里的  $m \geq 15$ 。基于这个模型剩下的 23 个小时以此类推，就可以得到这个题目的所有约束条件，而目标函数为从  $X_0$  到  $X_{23}$  求和，使其总人数最小。

### 2.1.2 最佳方案：

以护士加入工作的时间尽量是在白天为条件，设总人数为定值，改变各个时段加入的人数，不断优化，解出晚上（20 点到 4 点）加入的最少人数，即最佳方案。

## 2.2 问题 2：

### 2.2.1 数学分析：

在问题 1 的基础上，问题 2 给出了总的人数 80 小于最少人数，里面是需要一部分人加班两个小时才能完成这项工作，所以把人数分为两组分别用 X,Y 表示，X 的表示方法和问题 1 的表示相同，Y 是表示加班的人，而 Y 则是在后一个 4 小时加了两个小时。人数还是已 0 点到 1 点为例，则可以得到在这个时间段里工作的人数是  $Y_0, Y_{23}, Y_{22}, Y_{21}, Y_{20}, Y_{19}, Y_{17}, Y_{16}, Y_{15}, Y_{14}$  加入的,其中 18 点到 19 点这个时间段里加入开始工作的人已经在 0 点到 1 点这个时间段里开始休息了。根据这个模型，写出表达式

$$\sum_{n=0}^{23} X_n + Y_n = 80$$
，即 414 和 416 的总人数为 80。约束条件还是每个小时工作的人数大于等于题目所给的条件，可解出最少加班人数。

### 2.2.2 最佳方案：

和问题一同理，让晚上加入工作的护士尽可能少。设加班的人数为定值，列出表达式，不断优化，解出晚上（20 点到 4 点）加入工作最少的人数。

## 三，模型的建立和解决

### 3.1：问题 1

3.1.1 基于前面的问题分析，能够用 Lingo 写出解决问题的程序。

设  $X_n$  为第  $n$  个时段加入工作的人数，

则第  $n$  时上班的总人数为：

$X_n + X_{n-8} + X_{n-7} + X_{n-6} + X_{n-5} + X_{n-3} + X_{n-2} + X_{n-1} \geq$  限制人数。

使得目标函数  $\min$ （为  $x_0$  到  $x_{23}$  之和）最小，数学表达式如下：

$\min = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} +$   
 $x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23};$

$x_0 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 15;$   
 $x_1 + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{22} + x_{23} + x_0 \leq 15;$   
 $x_2 + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{23} + x_0 + x_1 \leq 15;$   
 $x_3 + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_0 + x_1 + x_2 \leq 15;$   
 $x_4 + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_1 + x_2 + x_3 \leq 15;$   
 $x_5 + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_0 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15;$   
 $x_6 + x_{22} + x_{23} + x_0 + x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 35;$   
 $x_7 + x_{23} + x_0 + x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 35;$   
 $x_8 + x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 40;$   
 $x_9 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 40;$   
 $x_{10} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 40;$   
 $x_{11} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 40;$   
 $x_{12} + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{11} \leq 40;$   
 $x_{13} + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 40;$   
 $x_{14} + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30;$   
 $x_{15} + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 30;$   
 $x_{16} + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 31;$   
 $x_{17} + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 31;$   
 $x_{18} + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \leq 35;$   
 $x_{19} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \leq 35;$   
 $x_{20} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \leq 30;$   
 $x_{21} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{18} + x_{19} + x_{20} \leq 30;$   
 $x_{22} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{19} + x_{20} + x_{21} \leq 20;$   
 $x_{23} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{20} + x_{21} + x_{22} \leq 20;$

简化程序如图：

The screenshot displays the Lingo 12.0 interface with a model for nurse scheduling. The main window shows the objective function and constraints, while a solver status window on the right provides details about the solution process.

**Lingo 12.0 - [Lingo Model - shuxue剑魔]**

File Edit LINGO Window Help

min=x0+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17+x18+x19+x20+x21+x22+x23;

x0+ x16+ x17+ x18+ x19+ x21+ x22+ x23>=15;  
x1+ x17+ x18+ x19+ x20+ x22+ x23+ x0>=15;  
x2+ x18+ x19+ x20+ x21+ x23+ x0+ x1>=15;  
x3+ x19+ x20+ x21+ x22+ x0+ x1+ x2>=15;  
x4+ x20+ x21+ x22+ x23+ x1+ x2+ x3>=15;  
x5+ x21+ x22+ x23+ x0+ x2+ x3+ x4>=15;  
x6+ x22+ x23+ x0+ x1+ x3+ x4+ x5>=35;  
x7+ x23+ x0+ x1+ x2+ x4+ x5+ x6>=35;  
x8+ x0+ x1+ x2+ x3+ x5+ x6+ x7>=40;  
x9+ x1+ x2+ x3+ x4+ x6+ x7+ x8>=40;  
x10+ x2+ x3+ x4+ x5+ x7+ x8+ x9>=40;  
x11+ x3+ x4+ x5+ x6+ x8+ x9+ x10>=40;  
x12+ x4+ x5+ x6+ x7+ x9+ x10+ x11>=40;  
x13+ x5+ x6+ x7+ x8+ x10+ x11+ x12>=40;  
x14+ x6+ x7+ x8+ x9+ x11+ x12+ x13>=30;  
x15+ x7+ x8+ x9+ x10+ x12+ x13+ x14>=30;  
x16+ x8+ x9+ x10+ x11+ x13+ x14+ x15>=31;  
x17+ x9+ x10+ x11+ x12+ x14+ x15+ x16>=31;  
x18+ x10+ x11+ x12+ x13+ x15+ x16+ x17>=35;  
x19+ x11+ x12+ x13+ x14+ x16+ x17+ x18>=35;  
x20+ x12+ x13+ x14+ x15+ x17+ x18+ x19>=30;  
x21+ x13+ x14+ x15+ x16+ x18+ x19+ x20>=30;  
x22+ x14+ x15+ x16+ x17+ x19+ x20+ x21>=20;  
x23+ x15+ x16+ x17+ x18+ x20+ x21+ x22>=20;

@gin(x0); @gin(x1); @gin(x2); @gin(x3); @gin(x4); @gin(x5);  
@gin(x6); @gin(x7); @gin(x8); @gin(x9); @gin(x10); @gin(x11); @gin(x12); @gin(x13); @gin(x14); @gin(x15); @gin(x16);  
@gin(x17); @gin(x18); @gin(x19); @gin(x20); @gin(x21); @gin(x22); @gin(x23);  
End

**Lingo 12.0 Solver Status [shuxue剑魔]**

<b>Solver Status</b>		<b>Variables</b>	
Model Class:	PILP	Total:	24
State:	Global Opt	Nonlinear:	0
Objective:	91	Integers:	24
Infeasibility:	0	<b>Constraints</b>	
Iterations:	63	Total:	25
		Nonlinear:	0
<b>Extended Solver Status</b>		<b>Nonzeros</b>	
Solver Type:	B-and-B	Total:	216
Best Obj:	91	Nonlinear:	0
Obj Bound:	91	<b>Generator Memory Used (K)</b>	
Steps:	0	30	
Active:	0	<b>Elapsed Runtime (hh:mm:ss)</b>	
		00:00:00	

Update Interval: 2 Interrupt Solver Close

可得出  $\min X=91$ ，即 414 排班至少要 91 个护士

## 3.1.2

### 最佳方案及优化：

设总人数为定值（ $x$  之和为 91），先找出  $x_0$  到  $x_4$  之和的最小值（ $\min=x_0+x_1+x_2+x_3+x_4$ ）。

Lingo 12.0 - [Lingo Model - shuxue剑魔]

File Edit LINGO Window Help

min=x0+x1+x2+x3+x4;

x0+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17+x18+x19+x20+x21+x22+x23=91;

x0+	x16+	x17+	x18+	x19+	x21+	x22+	x23>=15;
x1+	x17+	x18+	x19+	x20+	x22+	x23+	x0>=15;
x2+	x18+	x19+	x20+	x21+	x23+	x0+	x1>=15;
x3+	x19+	x20+	x21+	x22+	x0+	x1+	x2>=15;
x4+	x20+	x21+	x22+	x23+	x1+	x2+	x3>=15;
x5+	x21+	x22+	x23+	x0+	x2+	x3+	x4>=15;
x6+	x22+	x23+	x0+	x1+	x3+	x4+	x5>=35;
x7+	x23+	x0+	x1+	x2+	x4+	x5+	x6>=35;
x8+	x0+	x1+	x2+	x3+	x5+	x6+	x7>=40;
x9+	x1+	x2+	x3+	x4+	x6+	x7+	x8>=40;
x10+	x2+	x3+	x4+	x5+	x7+	x8+	x9>=40;
x11+	x3+	x4+	x5+	x6+	x8+	x9+	x10>=40;
x12+	x4+	x5+	x6+	x7+	x9+	x10+	x11>=40;
x13+	x5+	x6+	x7+	x8+	x10+	x11+	x12>=40;
x14+	x6+	x7+	x8+	x9+	x11+	x12+	x13>=30;
x15+	x7+	x8+	x9+	x10+	x12+	x13+	x14>=30;
x16+	x8+	x9+	x10+	x11+	x13+	x14+	x15>=31;
x17+	x9+	x10+	x11+	x12+	x14+	x15+	x16>=31;
x18+	x10+	x11+	x12+	x13+	x15+	x16+	x17>=35;
x19+	x11+	x12+	x13+	x14+	x16+	x17+	x18>=35;
x20+	x12+	x13+	x14+	x15+	x17+	x18+	x19>=30;
x21+	x13+	x14+	x15+	x16+	x18+	x19+	x20>=30;
x22+	x14+	x15+	x16+	x17+	x19+	x20+	x21>=20;
x23+	x15+	x16+	x17+	x18+	x20+	x21+	x22>=20;

@gin (x0); @gin (x1); @gin (x2); @gin (x3); @gin (x4); @gin (x5);  
@gin (x6); @gin (x7); @gin (x8); @gin (x9); @gin (x10); @gin (x11); @gin (x12); @gin (x13); @gin (x14); @gin (x15); @gin (x16);  
@gin (x17); @gin (x18); @gin (x19); @gin (x20); @gin (x21); @gin (x22); @gin (x23);  
End

Lingo 12.0 Solver Status [shuxue剑魔]

Solver Status		Variables	
Model Class:	PIIP	Total	24
State:	Global Opt	Nonlinear:	0
Objective:	16	Integers:	24
Infeasibility:	0	Constraints	
Iterations:	32	Total	26
		Nonlinear:	0
Extended Solver Status		Nonzeros	
Solver Type:	B-and-B	Total	221
Best Obj:	16	Nonlinear:	0
Obj Bound:	16	Generator Memory Used (K)	
Steps:	0	30	
Active:	0	Elapsed Runtime (hh:mm:ss)	
		00:00:00	
Update Interval: 2		Interrupt Solver	
		Close	

Ready

Windows taskbar icons: Windows, Search, File Explorer, Edge, Lingo 12.0, and others.

再设  $x_0$  到  $x_4$  之和为定值，分别找出  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  最小和相对最好的值。

Lingo 12.0 - [Lingo Model - shuxue剑魔]

File Edit LINGO Window Help

min=x1;  
 $x_1+x_2+x_3+x_4=16$ ;  
 $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19}+x_{20}+x_{21}+x_{22}+x_{23}=91$ ;

x0+	x16+	x17+	x18+	x19+	x21+	x22+	x23>=15;
x1+	x17+	x18+	x19+	x20+	x22+	x23+	x0>=15;
x2+	x18+	x19+	x20+	x21+	x23+	x0+	x1>=15;
x3+	x19+	x20+	x21+	x22+	x0+	x1+	x2>=15;
x4+	x20+	x21+	x22+	x23+	x1+	x2+	x3>=15;
x5+	x21+	x22+	x23+	x0+	x2+	x3+	x4>=15;
x6+	x22+	x23+	x0+	x1+	x3+	x4+	x5>=35;
x7+	x23+	x0+	x1+	x2+	x4+	x5+	x6>=35;
x8+	x0+	x1+	x2+	x3+	x5+	x6+	x7>=40;
x9+	x1+	x2+	x3+	x4+	x6+	x7+	x8>=40;
x10+	x2+	x3+	x4+	x5+	x7+	x8+	x9>=40;
x11+	x3+	x4+	x5+	x6+	x8+	x9+	x10>=40;
x12+	x4+	x5+	x6+	x7+	x9+	x10+	x11>=40;
x13+	x5+	x6+	x7+	x8+	x10+	x11+	x12>=40;
x14+	x6+	x7+	x8+	x9+	x11+	x12+	x13>=30;
x15+	x7+	x8+	x9+	x10+	x12+	x13+	x14>=30;
x16+	x8+	x9+	x10+	x11+	x13+	x14+	x15>=31;
x17+	x9+	x10+	x11+	x12+	x14+	x15+	x16>=31;
x18+	x10+	x11+	x12+	x13+	x15+	x16+	x17>=35;
x19+	x11+	x12+	x13+	x14+	x16+	x17+	x18>=35;
x20+	x12+	x13+	x14+	x15+	x17+	x18+	x19>=30;
x21+	x13+	x14+	x15+	x16+	x18+	x19+	x20>=30;
x22+	x14+	x15+	x16+	x17+	x19+	x20+	x21>=20;
x23+	x15+	x16+	x17+	x18+	x20+	x21+	x22>=20;

@gin (x0); @gin (x1); @gin (x2); @gin (x3); @gin (x4); @gin (x5);  
 @gin(x6);@gin (x7); @gin (x8); @gin (x9); @gin (x10); @gin (x11);@gin (x12);@gin (x13);@gin (x14); @gin (x15); @gin (x16);  
 @gin (x17); @gin (x18);@gin (x19);@gin (x20);@gin (x21);@gin (x22);@gin (x23);  
 End

Lingo 12.0 Solver Status [shuxue剑魔]

Solver Status		Variables	
Model Class:	PILP	Total:	24
State:	Global Opt	Nonlinear:	0
Objective:	1	Integers:	24
Infeasibility:	0	Constraints	
Iterations:	24	Total:	27
		Nonlinear:	0
Extended Solver Status		Nonzeros	
Solver Type:	B-and-B	Total:	221
Best Obj:	1	Nonlinear:	0
Obj Bound:	1	Generator Memory Used (K)	
Steps:	0	30	
Active:	0	Elapsed Runtime (hh:mm:ss)	
		00:00:00	

Update Interval: 2 Interrupt Solver Close

Ready



同理，找出  $x_{20}$  到  $x_{23}$  之和最小的值，及相对最好的值。

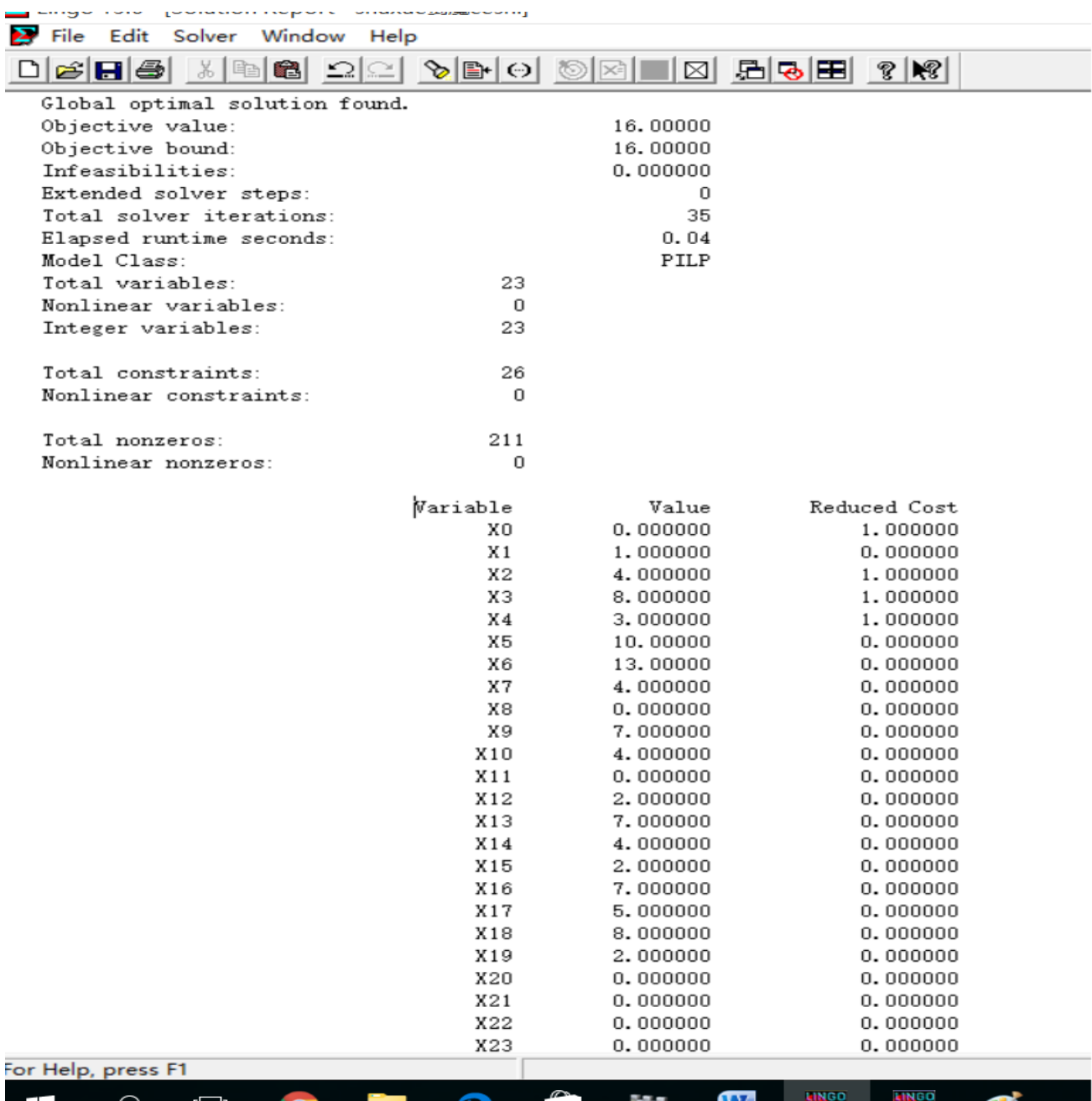
优化依据是：让 20：00 到 24：00 和 0:00 到 4:00 的加入工作的人数最少，

且尽量让  $x_1$ ， $x_2$ ， $x_3$ ， $x_4$  依次最少。

最后得出以下具体时刻数据  $x_n$ ： 基于前面的模型得到问题的最优解，排班表格；

时间段	加入工作的人数 $x_n$
00：00—01：00	0
01：00—02：00	1
02：00—03：00	4
03：00—04：00	8
04：00—05：00	3
05：00—06：00	10
06：00—07：00	13
07：00—08：00	4
08：00—09：00	0
09：00—10：00	7
10：00—11：00	4
11：00—12：00	0
12：00—13：00	2
13：00—14：00	7
14：00—15：00	4
15：00—16：00	2
16：00—17：00	7
17:00—18:00	5
18:00—19:00	8
19:00—20:00	2
20:00—21:00	0
21:00—22:00	0
22:00—23:00	0
23:00—00:00	0

附：程序结果图



## 3.2 问题 2 :

### 3.2.1 根据前面的问题分析可以得到线性规划的条件。

$X_n$  为不加班的开始工作人数,  $Y_n$  为加班的开始工作人数。所有  $X$  和  $y$  之和为 80, 使得目标函数  $\min (y \text{ 之和})$  最小。

则第  $n$  时上班的总人数为:  $X_n + X_{n-8} + X_{n-7} + X_{n-6} + X_{n-5} + X_{n-3} + X_{n-2} + X_{n-1} + Y_n + Y_{n-10} + Y_{n-9} + Y_{n-8} + Y_{n-7} + Y_{n-5} + Y_{n-4} + Y_{n-3} + Y_{n-2} + Y_{n-1} \geq$  限制人数。

数学表达式如下 :

$\min = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23};$

$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80;$

$x_0 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_0 + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} \geq 15;$   
 $x_1 + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{22} + x_{23} + x_0 + y_1 + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_0 \geq 15;$   
 $x_2 + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{23} + x_0 + x_1 + y_2 + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_0 + y_1 \geq 15;$   
 $x_3 + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_0 + x_1 + x_2 + y_3 + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{22} + y_{23} + y_0 + y_1 + y_2 \geq 15;$   
 $x_4 + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_1 + x_2 + x_3 + y_4 + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{23} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 15;$   
 $x_5 + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_0 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 15;$   
 $x_6 + x_{22} + x_{23} + x_0 + x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + y_6 + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 35;$   
 $x_7 + x_{23} + x_0 + x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + y_7 + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_0 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \geq 35;$   
 $x_8 + x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + y_8 + y_{22} + y_{23} + y_0 + y_1 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \geq 40;$   
 $x_9 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + y_9 + y_{23} + y_0 + y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \geq 40;$   
 $x_{10} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 + x_8 + x_9 + y_{10} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 \geq 40;$   
 $x_{11} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + y_{11} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} \geq 40;$   
 $x_{12} + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{11} + y_{12} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} \geq 40;$   
 $x_{13} + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + y_{13} + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} \geq 40;$   
 $x_{14} + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_{14} + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} \geq 30;$   
 $x_{15} + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + y_{15} + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} \geq 30;$   
 $x_{16} + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + y_{16} + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} \geq 31;$   
 $x_{17} + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + y_{17} + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} \geq 31;$   
 $x_{18} + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + y_{18} + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} \geq 35;$   
 $x_{19} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + y_{19} + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} \geq 35;$   
 $x_{20} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + y_{20} + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} \geq 30;$   
 $x_{21} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + y_{21} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} \geq 30;$   
 $x_{22} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + y_{22} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} \geq 20;$   
 $x_{23} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + y_{23} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} \geq 20;$

简化程序如图：

The screenshot displays the Lingo 12.0 interface with a linear programming model and its solver status.

**Model Code:**

```

min=y0+y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8+y9+y10+y11+y12+y13+y14+y15+y16+y17+y18+y19+y20+y21+y22+y23;

y0+y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8+y9+y10+y11+y12+y13+y14+y15+y16+y17+y18+y19+y20+y21+y22+y23
+x0+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17+x18+x19+x20+x21+x22+x23=80;

x0+ x16+ x17+ x18+ x19+ x21+ x22+ x23+ y0+ y14+ y15+ y16+ y17+ y19+ y20+ y21+ y22+ y23>=15;
x1+ x17+ x18+ x19+ x20+ x22+ x23+ x0+ y1+ y15+ y16+ y17+ y18+ y20+ y21+ y22+ y23+ y0>=15;
x2+ x18+ x19+ x20+ x21+ x23+ x0+ x1+ y2+ y16+ y17+ y18+ y19+ y21+ y22+ y23+ y0+ y1+ y2>=15;
x3+ x19+ x20+ x21+ x22+ x0+ x1+ x2+ y3+ y17+ y18+ y19+ y20+ y22+ y23+ y0+ y1+ y2+ y3>=15;
x4+ x20+ x21+ x22+ x23+ x1+ x2+ x3+ y4+ y18+ y19+ y20+ y21+ y23+ y0+ y1+ y2+ y3+ y4>=15;
x5+ x21+ x22+ x23+ x0+ x2+ x3+ x4+ y5+ y19+ y20+ y21+ y22+ y0+ y1+ y2+ y3+ y4+ y5>=35;
x6+ x22+ x23+ x0+ x1+ x3+ x4+ x5+ y6+ y20+ y21+ y22+ y23+ y1+ y2+ y3+ y4+ y5+ y6>=35;
x7+ x23+ x0+ x1+ x2+ x4+ x5+ x6+ y7+ y21+ y22+ y23+ y0+ y2+ y3+ y4+ y5+ y6+ y7>=40;
x8+ x0+ x1+ x2+ x3+ x5+ x6+ x7+ y8+ y22+ y23+ y0+ y1+ y3+ y4+ y5+ y6+ y7+ y8>=40;
x9+ x1+ x2+ x3+ x4+ x6+ x7+ x8+ y9+ y23+ y0+ y1+ y2+ y3+ y4+ y5+ y6+ y7+ y8+ y9>=40;
x10+ x2+ x3+ x4+ x5+ x7+ x8+ x9+ y10+ y0+ y1+ y2+ y3+ y4+ y5+ y6+ y7+ y8+ y9+ y10>=40;
x11+ x3+ x4+ x5+ x6+ x8+ x9+ x10+ y11+ y1+ y2+ y3+ y4+ y6+ y7+ y8+ y9+ y10+ y11>=40;
x12+ x4+ x5+ x6+ x7+ x9+ x10+ x11+ y12+ y2+ y3+ y4+ y5+ y7+ y8+ y9+ y10+ y11+ y12>=40;
x13+ x5+ x6+ x7+ x8+ x10+ x11+ x12+ y13+ y3+ y4+ y5+ y6+ y8+ y9+ y10+ y11+ y12+ y13>=30;
x14+ x6+ x7+ x8+ x9+ x11+ x12+ x13+ y14+ y4+ y5+ y6+ y7+ y9+ y10+ y11+ y12+ y13+ y14>=30;
x15+ x7+ x8+ x9+ x10+ x12+ x13+ x14+ y15+ y5+ y6+ y7+ y8+ y10+ y11+ y12+ y13+ y14+ y15>=30;
x16+ x8+ x9+ x10+ x11+ x13+ x14+ x15+ y16+ y6+ y7+ y8+ y9+ y11+ y12+ y13+ y14+ y15+ y16>=31;
x17+ x9+ x10+ x11+ x12+ x14+ x15+ x16+ y17+ y7+ y8+ y9+ y10+ y12+ y13+ y14+ y15+ y16+ y17>=31;
x18+ x10+ x11+ x12+ x13+ x15+ x16+ x17+ y18+ y8+ y9+ y10+ y11+ y13+ y14+ y15+ y16+ y17+ y18>=35;
x19+ x11+ x12+ x13+ x14+ x16+ x17+ x18+ y19+ y9+ y10+ y11+ y12+ y14+ y15+ y16+ y17+ y18+ y19>=30;
x20+ x12+ x13+ x14+ x15+ x17+ x18+ x19+ y20+ y10+ y11+ y12+ y13+ y15+ y16+ y17+ y18+ y19+ y20>=30;
x21+ x13+ x14+ x15+ x16+ x18+ x19+ x20+ y21+ y11+ y12+ y13+ y14+ y16+ y17+ y18+ y19+ y20+ y21>=20;
x22+ x14+ x15+ x16+ x17+ x19+ x20+ x21+ y22+ y12+ y13+ y14+ y15+ y17+ y18+ y19+ y20+ y21+ y22>=20;
x23+ x15+ x16+ x17+ x18+ x20+ x21+ x22+ y23+ y13+ y14+ y15+ y16+ y18+ y19+ y20+ y21+ y22>=20;

@gin(x0); @gin(x1); @gin(x2); @gin(x3); @gin(x4); @gin(x5); @gin(x6); @gin(x7); @gin(x8); @gin(x9); @gin(x10); @gin(x11); @gin(x12); @gin(x13); @gin(x14); @gin(x15); @gin(x16);
@gin(x17); @gin(x18); @gin(x19); @gin(x20); @gin(x21); @gin(x22); @gin(x23);
@gin(y0); @gin(y1); @gin(y2); @gin(y3); @gin(y4); @gin(y5); @gin(y6); @gin(y7); @gin(y8); @gin(y9); @gin(y10); @gin(y11); @gin(y12); @gin(y13); @gin(y14); @gin(y15); @gin(y16);
@gin(y17); @gin(y18); @gin(y19); @gin(y20); @gin(y21); @gin(y22); @gin(y23);

End

```

**Solver Status (Lingo 12.0 Solver Status [LINGO12]):**

Solver Status		Variables	
Model Class:	PIIP	Total:	48
State:	Global Opt	Nonlinear:	0
Objective:	38	Integers:	48
Infeasibility:	0	Constraints	
Iterations:	247	Total:	26
		Nonlinear:	0
Extended Solver Status		Nonzeros	
Solver Type:	B-and-B	Total:	504
Best Obj:	38	Nonlinear:	0
Obj Bound:	38	Generator Memory Used (K)	
Steps:	2	43	
Active:	0	Elapsed Runtime (hh:mm:ss)	
		00:00:00	

Update Interval: 2 | Interrupt Solver | Close

得出  $\min Y=38$ ，即至少要 38 个护士加班。

## 3.2.2

### 最佳方案及优化

设加班的护士人数也为定值，找出  $x_0$  到  $x_4$

和  $y_0$  到  $y_4$  之和的最小值，再考虑  $y_{20}$  到  $y_{24}$  及  $x_{20}$  到  $x_{24}$  之和的最小值。

LINGO - [LINGO Model - 优化程序2.01]

File Edit LINGO Window Help

min=x0+x1+x2+x3+x4+y0+y1+y2+y3+y4+y20+y21+y22+y23;

y0+y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8+y9+y10+y11+y12+y13+y14+y15+y16+y17+y18+y19+y20+y21+y22+y23=38;

y0+y1+y2+y3+y4+y5+y6+y7+y8+y9+y10+y11+y12+y13+y14+y15+y16+y17+y18+y19+y20+y21+y22+y23  
+x0+x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15+x16+x17+x18+x19+x20+x21+x22+x23=80;

x0+	x16+	x17+	x18+	x19+	x21+	x22+	x23+	y0+	y14+	y15+	y16+	y17+	y19+	y20+	y21+	y22+	y23>=15;
x1+	x17+	x18+	x19+	x20+	x22+	x23+	x0+	y1+	y15+	y16+	y17+	y18+	y20+	y21+	y22+	y23+	y0>=15;
x2+	x18+	x19+	x20+	x21+	x23+	x0+	x1+	y2+	y16+	y17+	y18+	y19+	y21+	y22+	y23+	y0+	y1>=15;
x3+	x19+	x20+	x21+	x22+	x0+	x1+	x2+	y3+	y17+	y18+	y19+	y20+	y22+	y23+	y0+	y1+	y2>=15;
x4+	x20+	x21+	x22+	x23+	x1+	x2+	x3+	y4+	y18+	y19+	y20+	y21+	y23+	y0+	y1+	y2+	y3>=15;
x5+	x21+	x22+	x23+	x0+	x2+	x3+	x4+	y5+	y19+	y20+	y21+	y22+	y0+	y1+	y2+	y3+	y4>=15;
x6+	x22+	x23+	x0+	x1+	x3+	x4+	x5+	y6+	y20+	y21+	y22+	y23+	y1+	y2+	y3+	y4+	y5>=35;
x7+	x23+	x0+	x1+	x2+	x4+	x5+	x6+	y7+	y21+	y22+	y23+	y0+	y2+	y3+	y4+	y5+	y6>=35;
x8+	x0+	x1+	x2+	x3+	x5+	x6+	x7+	y8+	y22+	y23+	y0+	y1+	y3+	y4+	y5+	y6+	y7>=40;
x9+	x1+	x2+	x3+	x4+	x6+	x7+	x8+	y9+	y23+	y0+	y1+	y2+	y4+	y5+	y6+	y7+	y8>=40;
x10+	x2+	x3+	x4+	x5+	x7+	x8+	x9+	y10+	y0+	y1+	y2+	y3+	y5+	y6+	y7+	y8+	y9>=40;
x11+	x3+	x4+	x5+	x6+	x8+	x9+	x10+	y11+	y1+	y2+	y3+	y4+	y6+	y7+	y8+	y9+	y10>=40;
x12+	x4+	x5+	x6+	x7+	x9+	x10+	x11+	y12+	y2+	y3+	y4+	y5+	y7+	y8+	y9+	y10+	y11>=40;
x13+	x5+	x6+	x7+	x8+	x10+	x11+	x12+	y13+	y3+	y4+	y5+	y6+	y8+	y9+	y10+	y11+	y12>=40;
x14+	x6+	x7+	x8+	x9+	x11+	x12+	x13+	y14+	y4+	y5+	y6+	y7+	y9+	y10+	y11+	y12+	y13>=30;
x15+	x7+	x8+	x9+	x10+	x12+	x13+	x14+	y15+	y5+	y6+	y7+	y8+	y10+	y11+	y12+	y13+	y14>=30;
x16+	x8+	x9+	x10+	x11+	x13+	x14+	x15+	y16+	y6+	y7+	y8+	y9+	y11+	y12+	y13+	y14+	y15>=31;
x17+	x9+	x10+	x11+	x12+	x14+	x15+	x16+	y17+	y7+	y8+	y9+	y10+	y12+	y13+	y14+	y15+	y16>=31;
x18+	x10+	x11+	x12+	x13+	x15+	x16+	x17+	y18+	y8+	y9+	y10+	y11+	y13+	y14+	y15+	y16+	y17>=35;
x19+	x11+	x12+	x13+	x14+	x16+	x17+	x18+	y19+	y9+	y10+	y11+	y12+	y14+	y15+	y16+	y17+	y18>=35;
x20+	x12+	x13+	x14+	x15+	x17+	x18+	x19+	y20+	y10+	y11+	y12+	y13+	y15+	y16+	y17+	y18+	y19>=30;
x21+	x13+	x14+	x15+	x16+	x18+	x19+	x20+	y21+	y11+	y12+	y13+	y14+	y16+	y17+	y18+	y19+	y20>=30;
x22+	x14+	x15+	x16+	x17+	x19+	x20+	x21+	y22+	y12+	y13+	y14+	y15+	y17+	y18+	y19+	y20+	y21>=20;
x23+	x15+	x16+	x17+	x18+	x20+	x21+	x22+	y23+	y13+	y14+	y15+	y16+	y18+	y19+	y20+	y21+	y22>=20;

@gin(x0); @gin(x1); @gin(x2); @gin(x3); @gin(x4); @gin(x5); @gin(x6); @gin(x7); @gin(x8); @gin(x9); @gin(x10); @gin(x11); @gin(x12); @gin(x13); @gin(x14); @gin(x15); @gin(x16);  
@gin(x17); @gin(x18); @gin(x19); @gin(x20); @gin(x21); @gin(x22); @gin(x23);  
@gin(y0); @gin(y1); @gin(y2); @gin(y3); @gin(y4); @gin(y5); @gin(y6); @gin(y7); @gin(y8); @gin(y9); @gin(y10); @gin(y11); @gin(y12); @gin(y13); @gin(y14); @gin(y15); @gin(y16);  
@gin(y17); @gin(y18); @gin(y19); @gin(y20); @gin(y21); @gin(y22); @gin(y23);  
End

For Help, press F1

NUM MOD Ln 1, Col 34

LINGO Solver Status (优化程序2.01)

Solver Status

Model	PILP
State	Global Opt
Objective:	8
Feasibility:	0
Iterations:	56

Variables

total:	48
nonlinear:	0
integers:	48

Constraints

total:	27
nonlinear:	0

Nonzeros

total:	518
nonlinear:	0

Extended Solver Status

Solver	B-and-B
Best	8
Obj Bound:	8
Steps:	0
Active:	0

Generator Memory Used (K)

total:	40
--------	----

Elapsed Runtime (hh:mm:ss)

00:00:00
----------

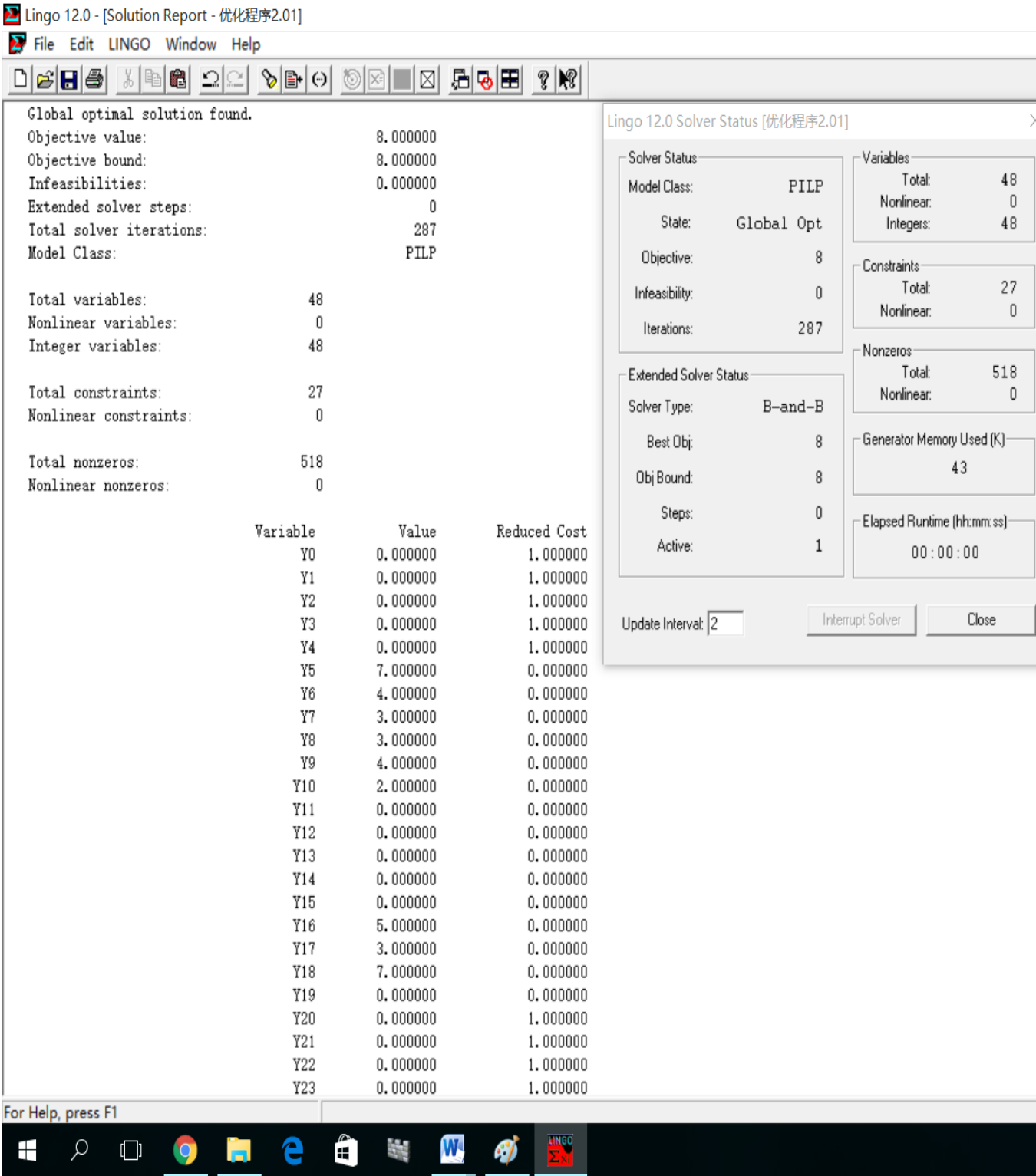
Update ☐ Interrupt Solver Close

同理，找出相对最好的值。

优化依据同样是：让 20：00 到 24：00 和 0:00 到 4:00 的加入工作的人数最少，

经过一系列对比和计算不断优化后，解出以下  $y_n$ ， $x_n$  数据。

$y_0$  到  $y_{23}$ ：



X0 到 X23 :

Lingo 12.0 - [Solution Report - 优化程序2.01]

File Edit LINGO Window Help



X0	0.000000	1.000000
X1	0.000000	1.000000
X2	0.000000	1.000000
X3	5.000000	1.000000
X4	3.000000	1.000000
X5	7.000000	0.000000
X6	9.000000	0.000000
X7	2.000000	0.000000
X8	0.000000	0.000000
X9	0.000000	0.000000
X10	0.000000	0.000000
X11	0.000000	0.000000
X12	0.000000	0.000000
X13	2.000000	0.000000
X14	5.000000	0.000000
X15	2.000000	0.000000
X16	3.000000	0.000000
X17	1.000000	0.000000
X18	3.000000	0.000000
X19	0.000000	0.000000
X20	0.000000	0.000000
X21	0.000000	0.000000
X22	0.000000	0.000000
X23	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	8.000000	-1.000000
4	0.000000	0.000000
5	4.000000	0.000000
6	3.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	0.000000	0.000000
9	7.000000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000
12	0.000000	0.000000
13	0.000000	0.000000
14	0.000000	0.000000
15	0.000000	0.000000
16	0.000000	0.000000
17	0.000000	0.000000

Lingo 12.0 Solver Status [优化程序2.01] X

Solver Status:

Model Class: PIIP

State: Global Opt

Objective: 8

Infeasibility: 0

Iterations: 287

Variables:

Total: 48

Nonlinear: 0

Integers: 48

Constraints:

Total: 27

Nonlinear: 0

Nonzeros:

Total: 518

Nonlinear: 0

Generator Memory Used (K):

43

Elapsed Runtime (hh:mm:ss):

00:00:00

Extended Solver Status:

Solver Type: B-and-B

Best Obj: 8

Obj Bound: 8

Steps: 0

Active: 1

Update Interval: 2

Interrupt Solver

Close

For Help, press F1



## 四，问题的数据和总结

### 问题 1

基于前面的模型可以得到线性规划问题的一组解，可以得到排班表格

时间段	加入工作的人数 $X_n$
00 : 00—01 : 00	0
01 : 00—02 : 00	1
02 : 00—03 : 00	4
03 : 00—04 : 00	8
04 : 00—05 : 00	3
05 : 00—06 : 00	10
06 : 00—07 : 00	13
07 : 00—08 : 00	4
08 : 00—09 : 00	0
09 : 00—10 : 00	7
10 : 00—11 : 00	4
11 : 00—12 : 00	0
12 : 00—13 : 00	2
13 : 00—14 : 00	7
14 : 00—15 : 00	4
15 : 00—16 : 00	2
16 : 00—17 : 00	7
17:00—18:00	5
18:00—19:00	8
19:00—20:00	2
20:00—21:00	0
21:00—22:00	0
22:00—23:00	0
23:00—00:00	0

得出 414 工作的护士最少需要的人数为 91 人，我们优化依据的理由是能够让在白天工作的人数最大化，即晚上

20 : 00 到 24 : 00 和 0:00 到 4:00 的加入工作的人数最少，为最佳方案如上图。



## 问题 2

时间段	每个时段加入工作的人数 $x_n$	每个时段加入工作的人数 $y_n$
00 : 00—01 : 00	0,	0
01 : 00—02 : 00	0	0
02 : 00—03 : 00	0	0
03 : 00—04 : 00	5	0
04 : 00—05 : 00	3	0
05 : 00—06 : 00	7	7
06 : 00—07 : 00	9	4
07 : 00—08 : 00	2	3
08 : 00—09 : 00	0	3
09 : 00—10 : 00	0	4
10 : 00—11 : 00	0	2
11 : 00—12 : 00	0	0
12 : 00—13 : 00	0	0
13 : 00—14 : 00	2	0
14 : 00—15 : 00	5	0
15 : 00—16 : 00	2	0
16 : 00—17 : 00	3	5
17:00—18:00	1	3
18:00—19:00	3	7
19:00—20:00	0	0
20:00—21:00	0	0
21:00—22:00	0	0
22:00—23:00	0	0
23:00—00:00	0	0

**得出最少要 38 个护士（416 绑定）加班。**

优化依据的理由是能够让在白天工作的人数最大化，即晚上

20 : 00 到 24 : 00 和 0:00 到 4:00 的加入工作的人数最少，为最佳方案如上图。