数学的帰納法に関するメモ

2023 年 8 月 18 日

1　記号

$\mathbb{N}$ は非負整数全体のなす集合, $\mathbb{Z}_{>0}$ は正の実数全体のなす集合.
$n!$ は階乗, つまり, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $n! = \prod_{i=1}^{n} i$; $0! = 1$.
$n!!$ は二重階乗, つまり, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $(2k-1)!! = \prod_{i=1}^{k}(2i-1)$, $(2k)!! = \prod_{i=1}^{k}(2i)$; $0!! = 1$.
$\binom{x}{n}$ は二項係数, つまり, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\binom{x}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)}{n!}$.

2　通常の数学的帰納法によるもの

2.1　等式に関するもの

2.1.1　整数や整式の和に関するもの

p:20230630 **Proposition 1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

証明 1.1. $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ である. また, $n + \sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=0}^{n} i$, $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 1.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case:　$P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0,$$
$$\frac{0(0+1)}{2} = 0.$$

■Induction Step:　$P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$ であるので,

$$\sum_{i=0}^{n} i = n + \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$
\begin{aligned}
&= n + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{2n + (n-1)n}{2} \\
&= \frac{2n + n^2 - n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

注 1.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i &= \frac{\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} i}{2} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} (n-i)}{2} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n} (i+n-i)}{2} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n} n}{2} \\
&= \frac{n \sum_{i=0}^{n} 1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

注 1.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる:

$$
\begin{aligned}
X &= \{\, (t_1, t_2) \mid 0 \leq t_1 < t_2 \leq n \,\} \\
X_i &= \{\, (t_1, i) \mid 0 \leq t_1 < i \,\}
\end{aligned}
$$

とおく. このとき,

$$
\coprod_{i=0}^{n} X_i = X
$$

であり,

$$
\begin{aligned}
|X| &= \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\
|X_i| &= i
\end{aligned}
$$

であるので,

$$
\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.
$$

注 1.5. Propositions 12 and 13 は, この一般化である.

p:20230703

Proposition 2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} 2i = n(n+1)$.

証明 2.1. $2 \cdot 0 = 0 = 0(0+1)$ である. また, $2n + \sum_{i=0}^{n-1} 2i = \sum_{i=0}^{n} 2i$, $2n + (n-1)n = n(n+1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 2.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = n(n+1).$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case:　$P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{0} 2i = 2 \cdot 0 = 0, \\ 0(0+1) = 0. \end{gathered}$$

■Induction Step:　$P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} 2i = (n-1)n$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} 2i &= 2n + \sum_{i=0}^{n-1} 2i \\ &= 2n + (n-1)n \\ &= 2n + n^2 - n \\ &= n^2 + n \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

注 2.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = 2\sum_{i=0}^{n} i = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

p:20230704 **Proposition 3.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

証明 3.1. $2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ である. また, $(2n-1) + \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, $(2n-1)+(n-1)^2 = n^2$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 3.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case:　$P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 0 - 1 = 1, \\ 1^2 = 1. \end{gathered}$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1) = (n-1)^2$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= 2n-1+\sum_{i=0}^{n-1}(2i-1)\\ &= 2n-1+(n-1)^2\\ &= 2n-1+n^2-2n+1\\ &= n^2.\end{aligned}$$

注 3.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2.$$

p:20230705

Proposition 4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

証明 4.1. $0^2 = 0 = \frac{0\cdot 1\cdot 1}{6}$ である. また, $n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2$, $n^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^3-3n^2+n+6n^2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 4.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 0^2 = 0,$$
$$\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i^2\\ &= \frac{6n^2+2n^3-3n^2+n}{6}\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

注 4.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$S = \sum_{i=0}^{n} i^2$$
$$T = \sum_{i=1}^{n} (i^3 - (i-1)^3)$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\ &= (n^3 + \sum_{i=1}^{n-1} i^3) - (\sum_{i=1}^{n-1} i^3) + 0^3) \\ &= n^3. \end{aligned}$$

一方次のようにも計算できる:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} (i^3 - (i^3 - 3i^2 + 3i - 1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1) \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= 3S - 3\frac{n(n+1)}{2} + n. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} n^3 &= 3S - 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\ 3S &= n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 2n}{2} \\ &= \frac{n(2n^2 + 3(n+1) - 2)}{2} \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \\ S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

p:20230706 **Proposition 5.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

証明 5.1. $1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3}$ である．また，

$$\begin{aligned} (2n-1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 \\ (2n-1)^2 + \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} &= \frac{3(2n-1)^2 + (n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\ &= \frac{(2n-1)(3(2n-1) + (n-1)(2n-3))}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2n-1)(6n-3+n^2-5n+3))}{3} \\
&= \frac{(2n-1)(2n^2+n)}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}
\end{aligned}
$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 5.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{1}(2i-1)^2 = 1^2 = 1, \\
\frac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3} = 1.
\end{aligned}
$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)^2 = \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 &= (2n-1)^2 + \sum_{i=0}^{n-1}(2i-1)^2 \\
&= (2n-1)^2 + \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\
&= \frac{3(2n-1)^2 + (n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\
&= \frac{(2n-1)(3(2n-1)+(n-1)(2n-3))}{3} \\
&= \frac{(2n-1)((6n-3)+(2n^2-5n+3))}{3} \\
&= \frac{(2n-1)(2n^2+n)}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}
$$

注 5.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 &= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{4n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 6n}{6} \\
&= \frac{n(4(n+1)(2n+1) - 12(n+1) + 6)}{6} \\
&= \frac{n((n+1)(4(2n+1) - 12) + 6)}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n((n+1)(8n-8)+6)}{6} \\
&= \frac{n(8(n+1)(n-1)+6)}{6} \\
&= \frac{n(8(n^2-1)+6)}{6} \\
&= \frac{n(8n^2-2)}{6} \\
&= \frac{n(4n^2-1)}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}
$$

p:20230707

Proposition 6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n}(2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

証明 6.1. $0^2 = 0 = \frac{2\cdot 0\cdot 1\cdot 1}{3}$ である. また, $(2n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(2i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i)^2$, $(2n)^2 + \frac{2(n-1)n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 6.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\sum_{i=0}^{0}(2i)^2 = 0^2 = 0,$$

$$\frac{2\cdot 0(0+1)(2\cdot 0+1)}{3} = 0.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1}(2i)^2 = \frac{2(n-1)n(2n-1)}{3}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 &= (2n)^2 + \sum_{i=0}^{n-1}(2i)^2 \\
&= (2n)^2 + \frac{2(n-1)n(2n-1)}{3} \\
&= \frac{3(2n)^2 + 2(n-1)n(2n-1)}{3} \\
&= \frac{2n(6n+(n-1)(2n-1))}{3} \\
&= \frac{2n(6n+2n^2-3n+1)}{3} \\
&= \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}
$$

注 6.3. Proposition 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = \sum_{i=1}^{n} 4i^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

p:20230709 **Proposition 7.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^2 = n(2n+1)$.

証明 7.1. $-1+2^2 = 3 = 1\cdot(2\cdot 1+1)$ である. また, $(2n)^2-(2n-1)^2+\sum_{i=1}^{2(n-1)}(-1)^i i^2 = \sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i$, $(2n)^2-(2n-1)^2+(n-1)(2n-1) = n(2n+1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 7.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^2 = n(2n+1)$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\sum_{i=1}^{2}(-1)^i i^2 = -1+4 = 3,$$
$$1(2\cdot 1+1) = 3.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{2(n-1)}(-1)^i i^2 = (n-1)(2n-1)$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^2 &= (2n)^2-(2n-1)^2+\sum_{i=1}^{2n-2}(-1)^i i^2 \\
&= (2n)^2-(2n-1)^2+(n-1)(2n-1) \\
&= (2n+2n-1)(2n-2n+1)+(n-1)(2n-1) \\
&= 4n-1+2n^2-3n+1 \\
&= 2n^2+n \\
&= n(2n+1).
\end{aligned}$$

注 7.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}(2i-1)^2+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i}(2i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}-(2i-1)^2+\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-(2i-1)^2+(2i)^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(2i-2i+1)(2i+2i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(4i-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 4\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= 2n(n+1) - n \\
&= n(2(n+1) - 1) \\
&= n(2n+1).
\end{aligned}
$$

p:20230710

Proposition 8. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

証明 8.1. $0^3 = 0 = \frac{0^2 \cdot 1^2}{4}$ である. また, $n^3 + \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3$, $n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{4n^3 + (n-1)^2 n^2}{4} = \frac{n^2(4n + (n-1)^2)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 8.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} i^3 &= 0, \\
\frac{0^2(0+1)^2}{4} &= 0.
\end{aligned}
$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} i^3 &= n^3 + \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\
& n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \\
&= \frac{4n^3 + (n-1)^2 n^2}{4} \\
&= \frac{n^2(4n + (n-1)^2)}{4} \\
&= \frac{n^2(4n + n^2 - 2n + 1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

注 8.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{n} i^3 \\
T &= \sum_{i=1}^{n} (i^4 - (i-1)^4)
\end{aligned}
$$

とする．このとき,

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{n} i^4 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^4 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^4 - \sum_{i=0}^{n-1} i^4 \\
&= (n^4 + \sum_{i=1}^{n-1} i^4) - (\sum_{i=1}^{n-1} i^4) + 0^4) \\
&= n^4.
\end{aligned}
$$

一方次のようにも計算できる:

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{n} (i^4 - (i^4 - 4i^3 + 6i^2 - 4i + 1)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 6i^2 + 4i - 1) \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1) \\
&= 4S - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= 4S - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n \\
&= 4S + n(-(n+1)(2n+1) + 2(n+1) - 1) \\
&= 4S + n((n+1)(-(2n+1) + 2) - 1) \\
&= 4S + n((n+1)(-2n+1) - 1) \\
&= 4S + n(-2n^2 - n + 1 - 1) \\
&= 4S + n(-2n^2 - n) \\
&= 4S + n^2(-2n - 1)
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
n^4 &= 4S + n^2(-2n-1) \\
4S &= n^4 + n^2(2n+1) \\
4S &= n^2(n^2 + (2n+1)) \\
4S &= n^2(n^2 + 2n + 1) \\
4S &= n^2(n+1)^2 \\
S &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

p:20230715 **Proposition 9.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^3$.

証明 9.1. $0^2 = 0 = 0^3$ である．また,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n-1} i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n-1} i\right) \\ &= n\left(-n + 2\sum_{i=0}^{n} i\right) \\ &= n(-n + n(n+1)) \\ &= n^3, \\ \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 9.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^3.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{0} i\right)^2 &= 0^2 = 0 \\ \sum_{i=0}^{0} i^3 &= 0^3 = 0.\end{aligned}$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n-1} i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n-1} i\right) \\ &= n\left(-n + 2\sum_{i=0}^{n} i\right) \\ &= n(-n + 2\frac{n(n+1)}{2}) \\ &= n(-n + n(n+1)) \\ &= nn^2 \\ &= n^3\end{aligned}$$

である．仮定から $\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3$ であるので,

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 \\ &\qquad = n^3 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} i\right)^2\end{aligned}$$

$$= n^3 + \sum_{i=0}^{n-1} i^3$$
$$= \sum_{i=0}^{n} i^3.$$

注 9.3. Propositions 1 and 8 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

であるので,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
$$= \sum_{i=0}^{n} i^3.$$

p:20230716 **Proposition 10.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

証明 10.1. $0(0+1) = 0 = \frac{0(0+1)(0+2)}{3}$ である. また, $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) - \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = n(n+1)$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)((n+2)-(n-1))}{3} = n(n+1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 10.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$0 \cdot 1 = 0,$$
$$\frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3} = 0.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(i+1) &= n(n+1) + \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) \\ &= n(n+1) + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\ &= \frac{3n(n+1) + (n-1)n(n+1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(3 + (n-1))}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\end{aligned}$$

注 10.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(i+1) &= \sum_{i=0}^{n}(i^2+i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)((2n+1)+3)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\end{aligned}$$

注 10.4. Proposition 13 は, この一般化である.

p:20230719 **Proposition 11.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)2i = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.

証明 11.1. $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1(1+1)(4-1)}{3}$ である. また, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)2i - \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)2i = (2n-1)2n$, $\frac{n(n+1)(4n-1)}{3} - \frac{(n-1)n(4n-5)}{3} = \frac{n(n+1)(4n-1)-(n-1)n(4n-5)}{3} = \frac{n((n+1)(4n-1)-(n-1)(4n-5))}{3} = \frac{n(4n^2+3n-1-4n^2+9n-5}{3} = \frac{n(12n-6)}{3} = \frac{6n(2n-1)}{3}2n(2n-1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 11.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)2i = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} 1\cdot 2 &= 2, \\ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3} &= 2.\end{aligned}$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)2i = \frac{(n-1)n(4n-5)}{3}$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)2i &= (2n-1)2n + \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)2i \\ &= (2n-1)2n + \frac{(n-1)n(4n-5)}{3} \\ &= \frac{(2n-1)6n+(n-1)n(4n-5)}{3} \\ &= \frac{n((2n-1)6+(n-1)(4n-5))}{3} \\ &= \frac{n(12n-6+4n^2-9n+5}{3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n(4n^2+3n-1}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+1)}{3}.
\end{aligned}
$$

注 11.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)2i &= \sum_{i=1}^{n}(4i^2-2i) \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i) \\
&= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1) \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(2(2n+1)-3)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+1)}{3}.
\end{aligned}
$$

p:20230717

Proposition 12. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n}\binom{i+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$

証明 12.1. $k \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$ である. また, $\sum_{i=0}^{n}\binom{i+k}{k} - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+k}{k} = \binom{n+k}{k}$, $\binom{n+k+1}{k+1} - \binom{n-1+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k+1} - \binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k}{k}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 12.2. $k \in \mathbb{N}$ とする.

$P(n)$ を次の命題とする:

$$
\sum_{i=0}^{n}\binom{i+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}.
$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0}\binom{i+k}{k} &= \binom{k}{k} = 1 \\
\binom{0+k+1}{k+1} &= \binom{k+1}{k+1} = 1.
\end{aligned}
$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+k}{k} = \binom{n+k}{k+1}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{i+k}{k} &= \binom{n+k}{k} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+k}{k} \\
&= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1}
\end{aligned}
$$

$$= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1}$$
$$= \binom{n+k+1}{k+1}.$$

注 12.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる:

$$X = \{ (t_1 \ldots, t_k, t_{k+1}) \mid 1 \le t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} \le n+k+1 \}$$
$$X_i = \{ (t_1 \ldots, t_k, k+1+i) \mid 1 \le t_1 < \cdots < t_k < k+1+i \}$$

とおく. このとき,

$$\coprod_{i=0}^{n} X_i = X$$

であり,

$$|X| = \binom{n+k+1}{k+1}$$
$$|X_i| = \binom{i+k}{k}$$

であるので,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i+k}{k} = \sum_{i=0}^{n} |X_i| = \left| \coprod_{i=0}^{n} X_i \right| = |X| = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

p:20230718

Proposition 13. *$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} \prod_{k=1}^{m} (i+k) = \frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n+k)}{m+1}$.*

証明 13.1. $m \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $\prod_{k=1}^{m}(k) = \frac{\prod_{k=1}^{m+1}(k)}{m+1}$ である. また,

$$\sum_{i=0}^{n} \prod_{k=1}^{m} (i+k) - \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{k=1}^{m} (i+k) = \prod_{k=1}^{m} (n+k)$$
$$\frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n+k)}{m+1} - \frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n-1+k)}{m+1} = \frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n+k) - \prod_{k=1}^{m+1}(n-1+k)}{m+1}$$
$$= \frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n+k) - \prod_{k=0}^{m}(n+k)}{m+1}$$
$$= \frac{\prod_{k=1}^{m}(n+k) \cdot ((n+m+1) - n)}{m+1}$$
$$= \frac{\prod_{k=1}^{m}(n+k) \cdot (m+1)}{m+1}$$
$$= \prod_{k=1}^{m} (n+k)$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 13.2. $m \in \mathbb{N}$ とする.

$P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} \prod_{k=1}^{m} (i+k) = \frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n+k)}{m+1}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case:　$P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\sum_{i=0}^{0}\prod_{k=1}^{m}(i+k)=\prod_{k=1}^{m}k=m!.$$
$$\frac{\prod_{k=1}^{m+1}k}{m+1}=\frac{(m+1)!}{m+1}=m!.$$

■Induction Step:　$P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}(i+k)=\frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n-1+k)}{m+1}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\prod_{k=1}^{m}(i+k) &= \prod_{k=1}^{m}(n+k)+\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}(i+k)\\
&= \prod_{k=1}^{m}(n+k)+\frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n-1+k)}{m+1}\\
&= \frac{(m+1)\prod_{k=1}^{m}(n+k)+\prod_{k=1}^{m+1}(n-1+k)}{m+1}\\
&= \frac{(m+1)\prod_{k=1}^{m}(n+k)+\prod_{k=0}^{m}(n+k)}{m+1}\\
&= \frac{(m+1)+(n))\prod_{k=1}^{m}(n+k)}{m+1}\\
&= \frac{(n+m+1)\prod_{k=1}^{m}(n+k)}{m+1}\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{m+1}(n+k)}{m+1}.
\end{aligned}$$

注 13.3. Proposition 12 を認めれば, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i+m}{m}=\binom{n+m+1}{m+1}$$
$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{m}(i+k)}{m!}=\frac{\prod_{i=1}^{m+1}(n+k)}{(m+1)!}$$
$$m!\sum_{i=0}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{m}(i+k)}{m!}=m!\frac{\prod_{i=1}^{m+1}(n+k)}{(m+1)!}$$
$$\prod_{k=1}^{m}(i+k)=\frac{\prod_{i=1}^{m+1}(n+k)}{m+1}.$$

p:20230720 **Proposition 14.** $\forall x\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

証明 14.1. $x\neq 0$ とする. このとき, $x^0=1=\frac{x-1}{x-1}$ である. また,

$$\sum_{i=0}^{n}x^i-\sum_{i=0}^{n-1}x^i=x^n$$
$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{-x^{n+1}+x^n}{1-x}=\frac{x^n(-x+1)}{1-x}=x^n$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 14.2. $x \neq 0$ とする.
$P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = 1,$$
$$\frac{1 - x^1}{1 - x} = 1.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} x^i &= x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x^i \\
&= x^n + \frac{1 - x^n}{1 - x} \\
&= \frac{x^n(1 - x) + 1 - x^n}{1 - x} \\
&= \frac{x^n - x^{n+1} + 1 - x^n}{1 - x} \\
&= \frac{-x^{n+1} + 1}{1 - x} \\
&= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.
\end{aligned}$$

注 14.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $x \neq 1$ とし, $S = \sum_{i=0}^{n} x^i$ とおく.

$$\begin{aligned}
(1 - x)S &= \sum_{i=0}^{n} x^i - x \sum_{i=0}^{n} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n+1} x^i \\
&= x^0 - x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^i \\
&= 1 - x^{n+1}. \\
S &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.
\end{aligned}$$

p:20230721 **Proposition 15.** $\forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n} i x^i = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$.

証明 15.1. $x \neq 0$ とする. このとき, $x^0 = 1$. $\frac{0x^2 - x^1 + x}{(x-1)^2} = 0$ である. また,

$$\sum_{i=0}^{n} ix^i - \sum_{i=0}^{n-1} ix^i = nx^n$$

$$\begin{aligned}\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - ((n-1)x^{n+1} - nx^n + x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - (n-1)x^{n+1} + nx^n - x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - 2nx^{n+1} + nx^n}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^n(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} \\ &= nx^n\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 15.2. $x \neq 0$ とする.

$P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^{n} ix^i = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\sum_{i=0}^{0} ix^i = 0,$$

$$\frac{0x^{0+2} - (0+1)x^{0+1} + x}{(x-1)^2} = \frac{0 - x + x}{(x-1)^2} = 0.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} ix^i = \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} ix^i &= nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} ix^i \\ &= nx^n + \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^n(x-1)^2 + (n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^n(x^2 - 2x + 1) + (n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - 2nx^{n+1} + nx^n + (n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

注 15.3. Proposition 14 を認めて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $x \neq 1$ とし, $S = \sum_{i=0}^{n} ix^i$ とおく.

$$\begin{aligned}
(1-x)S &= \sum_{i=0}^{n} ix^i - x\sum_{i=0}^{n} ix^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} ix^i - \sum_{i=0}^{n} ix^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} ix^i - \sum_{i=1}^{n+1} (i-1)x^i \\
&= 0x^0 - nx^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} ix^i - \sum_{i=1}^{n} (i-1)x^i \\
&= -nx^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (ix^i - (i-1)x^i) \\
&= -nx^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} x^i \\
&= -nx^{n+1} - 1 + \sum_{i=0}^{n} x^i \\
&= -nx^{n+1} - 1 + \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \\
&= \frac{-(nx^{n+1}+1)(x-1) + x^{n+1} - 1}{x-1} \\
&= \frac{-nx^{n+2} - x + nx^{n+1} + 1 + x^{n+1} - 1}{x-1} \\
&= \frac{-nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - x}{x-1}. \\
S &= \frac{-nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - x}{(1-x)(x-1)} \\
&= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x)}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

注 15.4. Proposition 14 を認めて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $x \neq 1$ とし, $S(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$ とおく.

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i. \qquad S(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

$$\frac{d}{dx}S(x) = \sum_{i=0}^{n} ix^{i-1}. \qquad \begin{aligned}
\frac{d}{dx}S(x) &= \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(n+1)(x^{n+1}-x^n) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

$$x\frac{d}{dx}S(x) = \sum_{i=0}^{n} ix^i. \qquad x\frac{d}{dx}S(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

p:20230722 **Proposition 16.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1} = (3n-5)2^n + 5$.

証明 16.1. $(3-2)2^{1-1} = 1 = (3-5)2^1 + 5$ である．また,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1}(3i-2)2^{i-1} &= (3n-2)2^{n-1} \\
(3n-5)2^n + 5 - ((3(n-1)-5)2^{n-1} + 5) &= (2(3n-5) - (3(n-1)-5))2^{n-1} \\
&= (6n - 10 - 3n + 8)2^{n-1} \\
&= (3n-2)2^{n-1}
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる．

証明 16.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1} = (3n-5)2^n + 5.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す．

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{1}(3i-2)2^{i-1} = (3i-1)2^{1-1} = 1, \\
&(3n-5)2^n + 5 = (3-5)2^1 + 5 = -4 + 5 = 1.
\end{aligned}$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す．仮定から $\sum_{i=1}^{n-1}(3i-2)2^{i-1} = (3n-8)2^{n-1} + 5$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1} &= (3n-2)2^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1}(3i-2)2^{i-1} \\
&= (3n-2)2^{n-1} + (3n-8)2^{n-1} + 5 \\
&= 2^{n-1}3n - 2^{n-1}2 + 2^{n-1}3n - 2^{n-1}8 + 5 \\
&= 2^{n-1}3n + 2^{n-1}3n - 2^{n-1}2 - 2^{n-1}8 + 5 \\
&= 2 \cdot 2^{n-1}3n - 2^{n-1}(2+8) + 5 \\
&= 2 \cdot 2^{n-1}3n - 2^{n-1}10 + 5 \\
&= 2^n 3n - 2^n 5 + 5 \\
&= (3n-5)2^n + 5.
\end{aligned}$$

注 16.3. Proposition 14 を認めて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $S = \sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1}$ とおく．

$$\begin{aligned}
(1-2)S &= \sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1} - 2\sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i-1} - \sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^{i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1}(3i+1)2^i - \sum_{i=1}^{n}(3i-2)2^i \\
&= (3\cdot 0+1)2^0 - (3n-2)2^n + \sum_{i=1}^{n-1}(3i+1)2^i - \sum_{i=1}^{n-1}(3i-2)2^i \\
&= 1-(3n-2)2^n + \sum_{i=1}^{n-1}((3i+1)2^i - (3i-2)2^i) \\
&= 1-(3n-2)2^n + \sum_{i=1}^{n-1} 3\cdot 2^i \\
&= 1-(3n-2)2^n + 3\cdot 2\sum_{i=1}^{n-1} \cdot 2^{i-1} \\
&= 1-(3n-2)2^n + 3\cdot 2\sum_{i=0}^{n-2} \cdot 2^{i} \\
&= 1-(3n-2)2^n + 3\cdot 2\frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\
&= 1-(3n-2)2^n - 6 + 3\cdot 2^n \\
&= -5 + (-3n+5)2^n. \\
S &= 5 + (3n-5)2^n.
\end{aligned}
$$

2.1.2 整数や整式の積に関するもの

p:20230723 **Proposition 17.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n)!! = 2^n n!$.

証明 17.1. $0!! = 1 = 2^0 0!$ である. また,

$$
\frac{(2n)!!}{(2n-2)!!} = 2n
$$
$$
\frac{2^n n!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{2^n}{2^{n-1}}\frac{n!}{(n-1)!} = 2n
$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 17.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$
(2n)!! = 2^n n!.
$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$
0!! = 1.
$$
$$
2^0 0! = 1.
$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $(2n-2)!! = 2^{n-1}(n-1)!$ であるので,

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2n(2n-2)!! \\ &= 2n2^{n-1}(n-1)! \\ &= 2^n n(n-1)! \\ &= 2^n n!.\end{aligned}$$

注 17.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $n = 0$ のときは, 定義から $0!! = 1 = 2^0 0!$. $n > 0$ のときは,

$$\begin{aligned}(2n)!! &= \prod_{i=1}^{n}(2i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} 2 \prod_{i=1}^{n} i \\ &= 2^n n!.\end{aligned}$$

p:20230724

Proposition 18. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

証明 18.1. $1!! = 1 = \frac{1}{2^0 \cdot 1!}$ である. また,

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} = 2n+1$$

$$\frac{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}}{\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}} = \frac{(2n+1)! \cdot 2^{n-1}(n-1)!}{2^n n! \cdot (2n-1)!} = \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \frac{(n-1)!}{n!} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{2n(2n+1) \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot n} = 2n+1$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 18.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}1!! &= 1. \\ \frac{(0+1)!}{2^0 0!} &= 1.\end{aligned}$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $(2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$ であるので,

$$\begin{aligned}(2n+1)!! &= (2n+1) \cdot (2n-1)!! \\ &= (2n+1) \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)2n}{2n} \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.\end{aligned}$$

注 18.3. Proposition 17 をみとめて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

p:20230725

Proposition 19. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(2n-1)!!$.

証明 19.1. $\frac{2!}{1!} = 2 = 2^1 1!$ である. また,

$$\frac{\frac{(2n)!}{n!}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}} = \frac{(2n)!(n-1)!}{(2n-2)!n!} = \frac{2n \cdot 2n-1}{n} = 2(2n-1)$$
$$\frac{2^n(2n-1)!!}{2^{n-1}(2n-3)!!} = 2(2n-1)$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 19.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(2n-1)!!.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\frac{2!}{1!} = 2,$$
$$2^1 1! = 2.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} = 2^{n-1}(2n-3)!!$ であるので,

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!}{n!} &= \frac{2n \cdot (2n-1)}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\ &= 2(2n-1)\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} \\ &= 2(2n-1)2^{n-1}(2n-3)!! && = 2^n(2n-1)!!.\end{aligned}$$

注 19.3. Proposition 17 をみとめて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$n! \cdot 2^n(2n-1)!! = 2^n n! \cdot (2n-1)!! = (2n)!!(2n-1)!! = (2n)!.$$
$$2^n(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{n!}.$$

2.1.3 有理式などの和に関するもの

p:20230726

Proposition 20. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

証明 20.1. $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ である. また,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} - \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \frac{2n-(2n-1)}{2n(2n-1)} \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)} \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1+i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n+i} \\
&= (\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{n+i}) - (\frac{1}{n} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n+i}) \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{2n-1+2n-2(2n-1)}{2n(2n-1)} \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)}
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 20.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}. \\
\frac{1}{1+1} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{2n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i-1}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i-1} \\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n+i} \\
&= -\frac{1}{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} \\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.
\end{aligned}
$$

p:20230727 **Proposition 21.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

証明 21.1. $\frac{1}{1(2)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ である. また,

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{n(n+1)}
$$

$$
\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}
$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 21.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.
$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1(1+1)} &= \frac{1}{2}. \\
\frac{1}{1+1} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n-1}{n}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n} \\
&= \frac{1+(n+1)(n-1)}{n(n+1)} \\
&= \frac{1+n^2-1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2}{n(n+1)} \\
&= \frac{n}{(n+1)}.
\end{aligned}
$$

注 21.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \\
&= (1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}) - (\frac{1}{n+1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

p:20230728 **Proposition 22.** $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{i+k} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{n+k} \right)$.

証明 22.1.

$$
\prod_{k=0}^{m} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{(m+1)!}
$$

$$
\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1+k} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(1+m)!} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{m+1}{(m+1)!} - \frac{1}{(1+m)!} \right) = \frac{1}{m} \frac{m}{(1+m)!} = \frac{1}{(m+1)!}
$$

である. また,

$$
\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{i+k} - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{i+k} = \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{n+k}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{n+k} \right) - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{n-1+k} \right) &= \frac{1}{m} \left(- \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{n+k} + \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{n-1+k} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{-n+n+m}{\prod_{k=0}^{m} n+k} \right) \\
&= \frac{1}{m} \frac{m}{(n+m)!} \\
&= \frac{1}{(n+m)!}
\end{aligned}
$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 22.2. $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $P(n)$ を次の命題とする:

$$
\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{i+k} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{n+k} \right).
$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\prod_{k=0}^{m} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{(m+1)!}.$$

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1+k}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(1+m)!}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{m+1}{(m+1)!} - \frac{1}{(1+m)!}\right) = \frac{1}{m}\frac{m}{(1+m)!} = \frac{1}{(m+1)!}.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{m}\frac{1}{i+k} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m}\frac{1}{n-1+k}\right)$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=0}^{m}\frac{1}{i+k} &= \prod_{k=0}^{m}\frac{1}{n+k} + \sum_{i=1}^{n-1}\prod_{k=0}^{m}\frac{1}{i+k} \\
&= \prod_{k=0}^{m}\frac{1}{n+k} + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m}\frac{1}{n-1+k}\right) \\
&= \frac{1}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)} + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(n-1+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} + \frac{m}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(n-1+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} + \frac{m}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)} - \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(n+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} + \frac{m}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)} - \frac{n+m}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} + \frac{m-(n+m)}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{n}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m}\frac{1}{n+k}\right).
\end{aligned}$$

証明 22.3. Proposition 21 から,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1}\left(\frac{1}{1!} - \prod_{k=1}^{1}\frac{1}{n+k}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}$$

である. また,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=0}^{m}\frac{1}{i+k} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{m+i-i}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m+i}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} - \frac{i}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(i+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(i+k)}. \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(i-1+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} + \frac{1}{m} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(1+k)} \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} + \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(1+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} + \frac{1}{m!} \right)
\end{aligned}
$$

であるが,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+k} \right) - \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+1+k} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+k)} \right) - \frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+1+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+1+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=2}^{m}(n+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{n+m}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} + \frac{n+1}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \frac{1-m}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} \right)
\end{aligned}
$$

であるので, m に関する数学的帰納法により示せる.

証明 22.4. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $P(m)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{i+k} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{n+k} \right).$$

このとき, 全ての $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(m)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \\
&= (1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}) - (\frac{1}{n+1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

であるので, $P(1)$ が成り立つ.

■Induction Step: $P(m-1) \implies P(m)$ を示す. 仮定から

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i+k} &= \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+k} \right) \\
\sum_{i=1}^{n+1} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i+k} &= \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+1+k} \right)
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=0}^{m} \frac{1}{i+k} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{m+i-i}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m+i}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} - \frac{i}{\prod_{k=0}^{m}(i+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(i+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(i+k)}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m}\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(i-1+k)} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m}\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} + \frac{1}{m}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(1+k)} \\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} + \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(1+k)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1}(i+k)} + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1}\frac{1}{n+1+k}\right) + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m-1}\left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+k)}\right) - \frac{1}{m-1}\left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+1+k)}\right) + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m-1}\left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+1+k)}\right) + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m-1}\left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1}(n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=2}^{m}(n+k)}\right) + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m-1}\left(-\frac{n+m}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} + \frac{n+1}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)}\right) + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m-1}\frac{1-m}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)} + \frac{1}{m!}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(n+k)}\right).
\end{aligned}
$$

`p:20230729` **Proposition 23.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

証明 23.1. $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$ である. また,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
\frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} &= \frac{n(2n-1)-(n-1)(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{(2n^2-n)-(2n^2-n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}
\end{aligned}
$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 23.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}.$$
$$\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n-1}{2n-1}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\
&= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{n-1}{2n-1} \\
&= \frac{1+(2n+1)(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1+(2n^2-n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{2n^2-n}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{n(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

注 23.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{(2i-1)(2i+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(2i+1)-(2i-1)}{(2i-1)(2i+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} - \frac{(2i-1)}{(2i-1)(2i+1)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 0+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2i+1}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2n+1-1}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2n}{2n+1} \\
&= \frac{n}{2n+1}.
\end{aligned}
$$

p:20230730

Proposition 24. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

証明 24.1. $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$ である. また,

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = \frac{n}{2^n}
$$

$$
2 - \frac{n+2}{2^n} - (2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}), = -\frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n-1}} = -\frac{n+2}{2^n} + \frac{2n+2}{2^n} = \frac{n}{2^n}
$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 24.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.
$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$
\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}.
$$

$$
2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.
$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} &= \frac{n}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} \\
&= \frac{n}{2^n} + 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \\
&= 2 + \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n-1}} \\
&= 2 + \frac{n}{2^n} - \frac{2(n+1)}{2^n} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}
$$

注 24.3. Proposition 15 つまり

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} ix^i &= x\frac{d}{dx}\sum_{i=0}^{n} x^i \\ &= x\frac{d}{dx}\frac{1-x^n}{1-x} \\ &= x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i} &= \frac{1}{2}\frac{n\frac{1}{2^{n+1}}-(n+1)\frac{1}{2^n}+1}{(\frac{1}{2}-1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{(n+1)}{2^n}+1}{\frac{1}{2^2}} \\ &= \frac{2^2}{2}\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{(n+1)}{2^n}+1\right) \\ &= \frac{n}{2^n}-\frac{2(n+1)}{2^n}+2 \\ &= 2-\frac{n+2}{2^n}.\end{aligned}$$

p:20230731 **Proposition 25.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \sqrt{n+1}-1$.

証明 25.1. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{(-1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})} = (-1+\sqrt{2})$ である. また,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{-n+n+1)} \\ &= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \\ (\sqrt{n+1}-1)-(\sqrt{n}-1) &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 25.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \sqrt{n+1}-1.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{(-1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})} = -1+\sqrt{2}. \\ \sqrt{1+1}-1 = \sqrt{2}-1.\end{aligned}$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \sqrt{n}-1$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \sqrt{n}-1 \\
&= \frac{-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} + \sqrt{n}-1 \\
&= \frac{-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{-n+n+1} + \sqrt{n}-1 \\
&= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1 \\
&= \sqrt{n+1}-1.
\end{aligned}$$

注 25.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{-\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}{(\sqrt{i}+\sqrt{i+1})(-\sqrt{i}+\sqrt{i+1})} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{-\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}{-i+i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-\sqrt{i}+\sqrt{i+1}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i+1}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} + \sum_{i=2}^{n+1} \sqrt{i}) \\
&= -\sqrt{1} - \sum_{i=2}^{n} \sqrt{i} + \sqrt{n+1} + \sum_{i=2}^{n} \sqrt{i}) \\
&= -\sqrt{1} + \sqrt{n+1} \\
&= \sqrt{n+1}-1.
\end{aligned}$$

2.1.4 合同式に関するもの

p:20230801 **Proposition 26.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 2n - 1 \equiv 0 \pmod 4$.

証明 26.1. $7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ である. また,

$$(7^n - 2n - 1) = 7(7^{n-1} - 2(n-1) - 1) + 12n - 8$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 26.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$7^n - 2n - 1 \equiv 0 \quad \pmod 4.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $7^{n-1} - 2(n-1) - 1 \equiv 0 \pmod 4$ であるので,

$$\begin{aligned} 7^n - 2n - 1 &= 7(7^{n-1} - 2(n-1) - 1) + 12n - 8 \\ &\equiv 7 \cdot 0 + 0n - 0 \pmod 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

証明 26.3. $7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$, $7^1 - 2 \cdot 1 - 1 = 7 - 2 - 1 = 4 \equiv 0 \pmod 4$ である. また,

$$(7^n - 2n - 1) - (7^{n-2} - 2(n-2) - 1) = 7^{n-2}(7^2 - 1) - 4 = 7^{n-2}48 - 4 = 4(7^{n-2}12 - 1) \equiv 0 \pmod 4$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 26.4. $P(n)$ を次の命題とする:

$$7^n - 2n - 1 \equiv 0 \pmod 4.$$

また, $P(2n)$ を $P'(n)$ とし, $P(2n+1)$ を $P''(n)$ とおく. このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを示すには, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P'(n)$ が成り立つことと全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P''(n)$ が成り立つことを示せば良い.

まず, $P(n-2) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $7^{n-2} - 2(n-2) - 1 = 7^{n-2} - 2n + 3 \equiv 0 \pmod 4$ であるので,

$$\begin{aligned} 7^n - 2n - 1 &= 7^2(7^{n-2} - 2n + 3) + 96n - 148 \\ &= 7^2(7^{n-2} - 2n + 3) + 4(24n - 37) \\ &\equiv 0 \pmod 4. \end{aligned}$$

次に, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P'(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

■Induction Step: $P(n-2) \implies P(n)$ はすでに示した. したがって, $P(2n-2) \implies P(2n)$ が成り立つ. つまり, $P'(n-1) \implies P'(n)$ が成り立つ.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$7^1 - 2 \cdot 1 - 1 = 7 - 2 - 1 = 4 \equiv 0 \pmod 4.$$

■Induction Step: $P(n-2) \implies P(n)$ はすでに示した. したがって, $P(2n-1) \implies P(2n+1)$ が成り立つ. つまり, $P''(n-1) \implies P''(n)$ が成り立つ.

注 26.5. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$7^n - 2n - 1 \equiv (-1)^n - 2n - 1 \pmod 4$$

である. $n = 2k$ のとき,

$$(-1)^n - 2n - 1 = (-1)^{2k} - 2(2k) - 1 = 1 - 4k - 1 = 4k \equiv 0 \pmod 4.$$

$n = 2k - 1$ のとき,

$$(-1)^n - 2n - 1 = (-1)^{2k-1} - 2(2k-1) - 1 = -1 - 4k + 2 - 1 = 4k \equiv 0 \pmod 4.$$

注 26.6. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $n = 2k$ のとき,

$$\begin{aligned}
7^n - 2n - 1 &= 7^{2k} - 2(2k) - 1 \\
&= -2(2k) - 1 + 7^{2k} \\
&= -4k - 1 + 7^{2k} \\
&= -4k - 1 + (8-1)^{2k} \\
&= -4k - 1 + \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\
&= -4k - 1 + (-1)^{2k} 8^0 + \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\
&= -4k - 1 + 1 + \sum_{i=1}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\
&= -4k + \sum_{i=1}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\
&= -4k + \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^{i+1} \\
&= -4k + 8 \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\
&= 4 \left(-k + 2 \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \right).
\end{aligned}$$

$n = 2k + 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
7^n - 2n - 1 &= 7^{2k+1} - 2(2k+1) - 1 \\
&= -2(2k+1) - 1 + 7^{2k+1} \\
&= -4k - 3 + (8-1)^{2k+1} \\
&= -4k - 3 + \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\
&= -4k - 3 + (-1)^{2k+1} 8^0 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\
&= -4k - 3 - 1 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\
&= -4k - 4 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -4k - 4 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\
&= -4k - 4 + \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^{i+1} \\
&= -4k - 4 + 8 \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\
&= 4 \left(-k - 1 + 2 \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \right).
\end{aligned}
$$

p:20230802 **Proposition 27.** $\forall n \in \mathbb{N},\ 1000^n + (-1)^{n-1} \equiv 0 \pmod 7$.

証明 27.1. $1000^0 + (-1)^{-1} = 1 - 1 = 0$ である. また,

$$
\begin{aligned}
1000^n + (-1)^{n-1} &= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1000(-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1001(-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 7 \cdot 143(-1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 27.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$1000^n + (-1)^{n-1} \equiv 0 \pmod 7.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$1000^0 + (-1)^{-1} = 1 - 1 = 0.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $1000^{n-1} + (-1)^{n-2} \equiv 0 \pmod 7$ であるので,

$$
\begin{aligned}
1000^n + (-1)^{n-1} &= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1000(-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1001(-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 7 \cdot 143(-1)^{n-1} \\
&\equiv 1000 \cdot 0 + 0 \cdot 143(-1)^{n-1} \pmod 7 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

注 27.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$
\begin{aligned}
1000^n + (-1)^{n-1} &\equiv (-1)^n + (-1)^{n-1} \pmod 7 \\
&= (-1)^n - (-1)^n \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

p:20230803 **Proposition 28.** $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{3n} - 2^n \equiv 0 \pmod{25}$.

証明 28.1. $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ である．また,

$$\begin{aligned}(3^{3n} - 2^n) - 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) &= (3^{3n} - 2^n) - (3^{3n} - 3^3 2^{n-1}) \\ &= -2^n + 3^3 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}(-2 + 3^3) \\ &= 2^{n-1}(-2 + 27) \\ &= 2^{n-1}25\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 28.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^{3n} - 2^n \equiv 0 \pmod{25}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す．仮定から $3^{3n-3} - 2^{n-1} \equiv 0 \pmod{25}$ であるので,

$$\begin{aligned}3^{3n} - 2^n &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 3^3 2^{n-1} - 2^n \\ &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 2^{n-1}(3^3 - 2) \\ &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 2^{n-1}(27 - 2) \\ &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 2^{n-1}(25) \\ &\equiv 3^3 0 + 2^{n-1}0 \pmod{25} \\ &= 0.\end{aligned}$$

注 28.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}3^{3n} - 2^n = (3^3)^n - 2^n = 27^n - 2^n = (25+2)^n - 2^n &\equiv 2^n - 2^n \pmod{25} \\ &= 0.\end{aligned}$$

p:20230804

Proposition 29. $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n - 2n + 3 \equiv 0 \pmod 4$.

証明 29.1. $3^0 - 2 \cdot 0 + 3 = 1 - 0 + 3 = 4$ である．また,

$$\begin{aligned}3^n - 2n + 3 &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) - 3(-2(n-1) + 3) - 2n + 3 \\ &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 6n - 15 - 2n + 3 \\ &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 4n - 12\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 29.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^n - 2n + 3 \equiv 0 \pmod 4.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$3^0 - 2 \cdot 0 + 3 = 1 - 0 + 3 = 4.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $3^{n-1} - 2(n-1) + 3 \equiv 0 \pmod 4$ であるので,

$$\begin{aligned}
3^n - 2n + 3 &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) - 3(-2(n-1) + 3) - 2n + 3 \\
&= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 6n - 15 - 2n + 3 \\
&= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 4n - 12 \\
&= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 4(n-3) \\
&\equiv 3 \cdot 0 + 0 \cdot (n-3) \pmod 4 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

注 29.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$3^n - 2n + 3 \equiv (-1)^n - 2n - 1 \pmod 4.$$

$n = 2k$ のとき,

$$(-1)^{2k} - 2(2k) - 1 = 1 - 4k - 1 = 4k \equiv 0 \pmod 4.$$

$n = 2k+1$ のとき,

$$(-1)^{2k+1} - 2(2k+1) - 1 = -1 - 4k - 2 - 1 = 4k - 4 = 4(k-1) \equiv 0 \pmod 4.$$

p:20230805

Proposition 30. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $3^{3n+1} + 7^{2n-1} \equiv 0 \pmod{11}$

証明 30.1. $3^{3+1} + 7^{2-1} = 81 + 7 = 88 = 8 \cdot 11 \equiv 0 \pmod{11}$ である. また,

$$\begin{aligned}
3^{3n+1} + 7^{2n-1} &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) - 7^{2n-3}3^3 + 7^{2n-1} \\
&= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-3^3 + 7^2) \\
&= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-27 + 49) \\
&= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}22 \\
&= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}2 \cdot 11
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 30.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^{3n+1} + 7^{2n-1} \equiv 0 \pmod{11}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$3^{3+1} + 7^{2-1} = 81 + 7 = 88 = 8 \cdot 11 \equiv 0 \pmod{11}.$$

■Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $3^{3n-2}+7^{2n-3} \equiv 0 \pmod{11}$ であるので,

$$\begin{aligned}
3^{3n+1}+7^{2n-1} &= 3^3(3^{3n-2}+7^{2n-3}) - 7^{2n-3}3^3 + 7^{2n-1} \\
&= 3^3(3^{3n-2}+7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-3^3+7^2) \\
&= 3^3(3^{3n-2}+7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-27+49) \\
&= 3^3(3^{3n-2}+7^{2n-3}) + 7^{2n-3}22 \\
&= 3^3(3^{3n-2}+7^{2n-3}) + 7^{2n-3}2\cdot 11 \\
&\equiv 3^3\cdot 0 + 7^{2n-3}2\cdot 0 \pmod{11} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

注 30.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
3^{3n+1}+7^{2n-1} &= 3^{3n}3 + 7^{2n-2}7 \\
&= 27^n3 + 49^{n-1}7 \\
&\equiv 5^n3 + 5^{n-1}7 \pmod{11} \\
&= 5^{n-1}(5\cdot 3+7) \\
&= 5^{n-1}22 \\
&= 5^{n-1}2\cdot 11 \\
&\equiv 0 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

注 30.4. $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ は体であり, 7^{-1} が存在する. この意味で, この命題は $n=0$ のときも成り立つ.

p:20230807 **Proposition 31.** $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $4\cdot 3^{2n-1}+2^{4n} \equiv 0 \pmod{28}$

証明 31.1. $4\cdot 3^1+2^4 = 12+16 = 28 \equiv 0 \pmod{28}$ である. また,

$$\begin{aligned}
4\cdot 3^{2n-1}+2^{4n} &= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4}) - 3^2 2^{4n-4} + 2^{4n} \\
&= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4})2^{4n-4}(-3^2+2^4) \\
&= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4})2^{4n-4}(-9+16) \\
&= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4}) - 2^{4n-4}7
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 31.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$4\cdot 3^{2n-1}+2^{4n} \equiv 0 \pmod{28}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$4\cdot 3^{2-1}+2^4 = 12+16 \equiv 0 \pmod{28}$$

■Induction Step: $n>1$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4} \equiv 0 \pmod{28}$ であるので,

$$\begin{aligned}4\cdot 3^{2n-1}+2^{4n} &= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4}) - 3^2 2^{4n-4} + 2^{4n}\\ &= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4}) + 2^{4n-4}(-3^2+2^4)\\ &= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4}) + 2^{4n-4}(-9+16)\\ &= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4}) - 2^{4n-4}7.\end{aligned}$$

$n>1$ であるので, $4n-4 \geq 4$ である. したがって,

$$\begin{aligned}4\cdot 3^{2n-1}+2^{4n} &= 3^2(4\cdot 3^{2n-3}+2^{4n-4}) - 2^{4n-4}7\\ &\equiv 3^2\cdot 0 - 0 \pmod{28}\\ &= 0.\end{aligned}$$

注 31.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}9^{n-1}3+16^{n-1}4 &\equiv 2^{n-1}3+2^{n-1}4 \pmod 7\\ &= 2^{n-1}(3+4)\\ &= 2^{n-1}7\\ &\equiv 0 \pmod 7.\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}4\cdot 3^{2n-1}+2^{4n} &= 4(3^{2n-1}+2^{4n-2})\\ &= 4(9^{n-1}3+16^{n-1}4)\\ &\equiv 0 \pmod{28}.\end{aligned}$$

2.2 不等式に関するもの

p:20230808 **Proposition 32.** *$\forall n\in\mathbb{N}$, $2^n>n$.*

証明 32.1. $2^0=1>0$ である. また, $n=(n-1)+1$ であるが, $n\geq 1$ に対し, $2^{n-1}+1\leq 2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 32.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n>n.$$

このとき, 全ての $n\in\mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^0=1>0.$$

■Induction Step: $n \geq 1$ とする．$P(n-1) \implies P(n)$ を示す．仮定から $2^{n-1} > n-1$ である．また, $n \geq 1$ であるので $2^{n-1} \geq 1$ であるので,

$$n = (n-1) + 1 < 2^{n-1} + 1 \geq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n.$$

注 32.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x$$

とおく．

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 1$$

であるので, $x \geq 0$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加．また $f(0) = 1 > 0$ であるので, $x \geq 0$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 0$ において $2^x > x$.

注 32.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $2^0 = 1 > 0$ である．また, $n \geq 1$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n > n.$$

p:20230809 **Proposition 33.** $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \implies 2^n \geq n+2$.

証明 33.1. $2^2 = 4 = 2 + 2$ である．また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 2$ に対し, $2^{n-1} > 1$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる．

証明 33.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n+2.$$

このとき, 2 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す．

■Base Case: $P(2)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^2 = 4 = 2 + 2.$$

■Induction Step: $n \geq 3$ とする．$P(n-1) \implies P(n)$ を示す．仮定から $2^{n-1} \geq n+1$ である．また, $n \geq 3$ であるので $2^{n-1} \geq 1$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq n + 1 + 2^{n-1} \geq n + 1 + 1 = n + 2.$$

注 33.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x - 2$$

とおく．

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 1$$

であるので, $x \geq 0$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加．また $f(2) = 0$ であるので, $x \geq 2$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 2$ において $2^x > x + 2$.

注 33.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 2$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n} = 1 + n + 1 = n + 2.$$

p:20230810 **Proposition 34.** $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \implies 2^n \geq n + 5$.

証明 34.1. $2^3 = 8 = 3 + 5$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 2$ に対し, $2^{n-1} > 1$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 34.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n + 5.$$

このとき, 3 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(3)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^3 = 8 = 3 + 5.$$

■Induction Step: $n \geq 4$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq n + 4$ である. また, $n \geq 1$ であるので $2^{n-1} \geq 1$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq n + 4 + 2^{n-1} \geq n + 4 + 1 = n + 5.$$

注 34.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x - 5$$

とおく.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 1$$

であるので, $x \geq 0$ において, $\frac{d}{dx} f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加. また $f(3) = 0$ であるので, $x \geq 3$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 3$ において $2^x > x + 3$.

注 34.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 3$ に対し, $n + 2 \geq 5$ であるから,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 1 + n + n + 1 = n + (n+2) \geq n + 5.$$

p:20230813 **Proposition 35.** $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \implies 2^n > 2n + 1$.

証明 35.1. $2^3 = 8 > 7 = 6 + 1$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 2$ に対し, $2^{n-1} \geq 2$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 35.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > 2n + 1.$$

このとき, 3 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case:　$P(3)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^3 = 8 > 7 = 6 + 1.$$

■Induction Step:　$n \geq 4$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq 2n-1$ である. また, $n \geq 2$ であるので $2^{n-1} \geq 2$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq 2n - 1 + 2^{n-1} \geq 2n - 1 + 2 = 2n + 1.$$

注 35.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - 2x - 1$$

とおく.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 2$$

であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d}{dx} f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加. また $f(3) = 8 - 6 - 1 = 1$ であるので, $x \geq 3$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 3$ において $2^x > 2x + 1$.

注 35.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 3$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 1 + n + n + 1 = 2n + 2 > 2n + 1.$$

p:20230814 **Proposition 36.** $n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \implies 2^n > 3n$.

証明 36.1. $2^4 = 16 > 12 = 3 \cdot 4$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 3$ に対し, $2^{n-1} \geq 3$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 36.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > 3n.$$

このとき, 4 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case:　$P(4)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^4 = 16 > 12 = 3 \cdot 4.$$

■Induction Step:　$n \geq 5$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq 3n-3$ である. また, $n \geq 3$ であるので $2^{n-1} \geq 4$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq 3n - 3 + 2^{n-1} \geq 3n - 3 + 4 = 3n + 1 > 3n.$$

注 36.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - 3x$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 3$$

であるので, $x \geq 2$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 2$ において単調増加. また $f(4) = 16 - 12 = 4$ であるので, $x \geq 4$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 4$ において $2^x > 3x$.

注 36.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 4$ に対し, $\frac{n+2}{2} \geq 3$

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} &> \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-1} \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \left(\frac{n+3}{2}\right) n \\ &= \left(\frac{n+2}{2} + \frac{1}{2}\right) n > 3n. \end{aligned}$$

p:20230815 **Proposition 37.** $n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \implies 2^n \geq n^2$.

証明 37.1. $2^4 = 16 \geq 16$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 4$ に対し, $2(n-1)^2 - n^2 = n^2 - 4n + 1 = (n-2)^2 - 3 \geq 1 > 0$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 37.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n^2.$$

このとき, 4 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(4)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^4 = 16 = 4^2.$$

■Induction Step: $n \geq 5$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq (n-1)^2$ である. また,

$$2(n-1)^2 - n^2 = n^2 - 4n + 1 = (n-2)^2 - 3$$

であり, $n \geq 3$ であるので, $2(n-1)^2 - n^2 > 0$, つまり

$$2(n-1)^2 > n^2.$$

よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \geq 2(n-1)^2 > n^2.$$

注 37.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x^2$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 2x$$
$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = (\log 2)^2 \cdot 2^x - 2$$

であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. また, $\frac{d}{dx}f(1) > 0$ であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加. また $f(4) = 16 - 16 = 0$ であるので, $x \geq 4$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 4$ において $2^x \geq x^2$.

注 37.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n = 4$ に対し, $2^4 = 16 = 4^2$. $n \geq 5$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} > \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

p:20230816

Proposition 38. $n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \implies 2^n > n^2 - 2n + 15$.

証明 38.1. $n^2 - 2n + 15 = (n-1)^2 + 14$ である. $2^5 = 32 > 30 = 4^2 + 14$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 6$ に対し, $2((n-2)^2 + 14) - ((n-1)^2 + 14) = 2(n^2 - 4n + 4) - (n^2 - 2n + 1) + 14 = n^2 - 6n + 21 = (n-3)^2 + 12 > 0$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 38.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > n^2 - 2n + 15.$$

このとき, 5 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(5)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^5 = 32$$
$$5^2 - 2 \cdot 5 + 15 = 30.$$

■Induction Step: $n \geq 6$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} > (n-1)^2 - 2(n-1) + 15$ である. また,

$$2((n-1)^2 - 2(n-1) + 15) - (n^2 - 2n + 15) = 2(n^2 - 4n + 4) - (n^2 - 2n + 1) + 14 = n^2 - 6n + 21 = (n-3)^2 + 12 > 0$$

であるので,

$$2((n-1)^2 - 2(n-1) + 15) > n^2 - 2n + 15.$$

よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2((n-1)^2 - 2(n-1) + 15) > n^2 - 2n + 15.$$

注 38.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - (x^2 - 2x + 15)$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 2x + 2$$
$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = (\log 2)^2 \cdot 2^x - 2$$

であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. また, $\frac{d}{dx}f(1) = 2\log 2 > 0$ であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加. また $f(5) = 32 - 25 + 10 - 15 = 2 > 0$ であるので, $x \geq 5$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 5$ において $2^x > x^2$.

注 38.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 5$ に対し, $n-(-2n+15) = 3n-15 \geq 0$ であるので, $n > -2n+15$. よって,

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} &> \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= n^2 + n \\ &> n^2 - 2n + 5. \end{aligned}$$

p:20230817 **Proposition 39.** $n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \implies 2^n > 10n^2$.

証明 39.1. $2^{10} = 1024 > 1000 = 10n^2$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 6$ に対し, $2 \cdot 10(n-1)^2 - 10n^2 = 10(n^2 - 4n + 2) = 10((n-2)^2 - 4) \geq 0$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 39.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > 10n^2.$$

このとき, 10 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(10)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^{10} = 1024$$
$$10 \cdot 10^2 = 1000$$

■Induction Step: $n \geq 11$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} > 10(n-1)^2$ である. また,

$$2 \cdot 10(n-1)^2 - 10n^2 = 10(n^2 - 4n + 2) = 10((n-2)^2 - 4) \geq 0$$

であるので,

$$2 \cdot 10(n-1)^2 > 10n^2.$$

よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(10(n-1)^2) > 10n^2.$$

注 39.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - 10x^2$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 10x$$
$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = (\log 2)^2 \cdot 2^x - 10$$

であるので, $x \geq 4$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. また, $\frac{d}{dx}f(6) > 0$ であるので, $x \geq 6$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 6$ において単調増加. また $f(10) = 1024 - 1000 = 24 > 0$ であるので, $x \geq 10$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 10$ において $2^x > 10x^2$.

p:20230818

Proposition 40. $n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \implies 2^n \geq n^3$.

証明 40.1. $2^{10} = 1024 > 1000 = n^3$ である. また, $2 \cdot (11-1)^3 = 2000$, $11^3 = 1331$ であることから, $n \geq 11$ に対し, $2 \cdot (n-1)^3 > n^3$ である. したがって, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であことから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 40.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n^3.$$

このとき, 10 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

■Base Case: $P(10)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^{10} = 1024,$$
$$10^3 = 1000.$$

■Induction Step: $n \geq 11$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} > 10(n-1)^2$ である. また, $2 \cdot (11-1)^3 = 2000$, $11^3 = 1331$ であることから, $n \geq 11$ に対し,

$$2 \cdot (n-1)^3 > n^3$$

であることがわかる. よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(n-1)^3 > n^3.$$

注 40.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x^3$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 3x^2$$
$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = (\log 2)^2 \cdot 2^x - 6x$$
$$\frac{d^3}{dx^3}f(x) = (\log 2)^3 \cdot 2^x - 6$$

であるので, $x \geq 3$ において, $\frac{d^3}{dx^3}f(x) > 0$. よって, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ は, $x \geq 3$ において単調増加. また, $\frac{d^2}{dx^2}f(5) > 0$ であるから, $x \geq 5$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. よって, $\frac{d}{dx}f(x)$ は, $x \geq 5$ において単調増加. また, $\frac{d}{dx}f(8) > 0$ であるので, $x \geq 8$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 8$ において単調増加. また $f(10) = 1024 - 1000 = 24 > 0$ であるので, $x \geq 10$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 10$ において $2^x > x^3$.

3 制限された数学的帰納法 (Limited mathematical induction)

4 Todo

Proposition 41. $n \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq 2$ ならば, $3^n \geq 2n + 1$.

Proposition 42. $n \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq 3$ ならば, $3^n \geq 4n + 10$.

Proposition 43. $a_1 = 7$, $a_n = a_n^3$ $a_n \equiv 1 \pmod{3^n}$

Proposition 44. $\forall p, q, n \in \mathbb{N}$, $\binom{p+q}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{p}{i}\binom{q}{n-i}$.

Proposition 45. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{2n}{n+1}$.

Proposition 46. $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \geq n^2$.

Proposition 47. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} < 2\sqrt{n}$.

Proposition 48. $n \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq 2$ ならば, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

Proposition 49. $n \geq 2$ ならば, $h > 0$ に対し, $(1+t)^n < 1 + nt$.

Proposition 50. $n \geq 2$ ならば, $h > 0$ に対し, $(1-t)^n < 1 - nt$.

Proposition 51. $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

Proposition 52. $a_i > 0$ なら, $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^m \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^m}{n}$.

Proposition 53. $x \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

Proposition 54. $n \geq 2$ ならば, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

Proposition 55. f を凸関数とする. $a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ ならば, $\sum_{i}^{n} a_i f(x_i) \geq \sum_{i}^{n} f(a_i x_i)$.

Proposition 56. $n \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq 12$ ならば, $n = 4x + 5y$ を満たす $x, y \in \mathbb{N}$ が存在する.

Proposition 57. a_n を *fibonacci* 数列とする．$a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$, ただし $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする．

Proposition 58. $a_n = \sqrt{a_{n-1}+2}$, $a_0 = 1$ とする．$a_n < a_{n+1}$.

Proposition 59. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, $a_n = (n^3 - 3n^2 + 2n)a_{n-3}$. このとき, $a_n = n!$.

Proposition 60. $a, b \in \mathbb{Z}$. α, β は $x^2 - ax + b = 0$ の *2* つの解．このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 61. $a, b \in \mathbb{Z}$, $(2+\sqrt{3})^n = a + \sqrt{3}b$ ならば, $(2-\sqrt{3})^n = a - \sqrt{3}b$.

Proposition 62. $a, b \in \mathbb{Z}$, $(3+2\sqrt{2})^n = a + \sqrt{2}b$ ならば, $(3-2\sqrt{2})^n = a - \sqrt{2}b$.

Proposition 63. $(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 64. $\frac{(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n}{2} \in \mathbb{Z}$.

Proposition 65. $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ ならば, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Proposition 66. $x^4 + y^4 = z^4$ となる整数は存在しない．

Proposition 67. p が素数なら $\sqrt{p}$ は無理数．

Proposition 68. *Fibonacci* 数列は互いに素．

Proposition 69. $n \geq 4$ なら $n! > 2^n$

Proposition 70. $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod \sum_{i=1}^n a_i}$.

Proposition 71. $\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^i}{dx^i} f \cdot \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} g$

Proposition 72. $0 \leq 3a_n \leq \sum_{i=0}^n a_i$ をみたす a_n は $a_n = 0$.

Proposition 73. $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \frac{1}{n}$ をみたす $a_i \in \left\{ \frac{1}{i}, -\frac{1}{i} \right\}$ が存在する．

Proposition 74. 一筆書き．

Proposition 75. ほうじょ原理

Proposition 76. $n \geq 4$ とする．凸 n 角形の対角線の総数は $\frac{n(n-3)}{2}$.

Proposition 77. 一般の位置にある平面上の n 本の直線は, 平面を $\frac{n^2+n+2}{2}$ 個の領域に分ける．

Proposition 78. 素因数分解の一意性．

Proposition 79. あまりの存在．

Proposition 80. ユークリドごじょほう．整数, 多項式, ふち．

Proposition 81. *1* 変数多項式かんの単項式順序はただ一つ

Proposition 82. *Dickson* の補題

Proposition 83. た変数多項式の *Hilbert* の基底定理．

Proposition 84. まっこーれいの定理.

Proposition 85. GB によるた変数割り算アルゴリズムの標準形の存在.

Proposition 86. $\bigcap_{Y\,:\,凸,\ X\,\subset\,Y} Y = \{\, \sum t_i x_i \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \,\}$

Proposition 87. ヒルベルトの基底定理

Proposition 88. 標準次数のときのネーターのせいきかていり

Proposition 89. 分解たいの存在.

Proposition 90. 延長の存在.

Proposition 91. 有限次ぶんりかくだいたいは単純

Proposition 92. $charF = p$, $f \in F[x]$ がきやくなら, ぶんり多項式 h をつかって $f(x) = h(x^{p^e})$ とかける.

Proposition 93. E/F 有限次拡大. G を E の F 上の自己同型群とする. E は $F[X]$ のある分離多項式 f の最小分解体であるなら, $E^G = F$.

Proposition 94. $G = (V, E)$ が *simple graph* で $V > 2$. $\forall v$, v のじすうは *2* 以上. このとき, G に閉路がある.

Proposition 95. C, $C_1, \ldots, C_k$, 閉路, どの *2* つも辺を共有しない. C は各 C_i と頂点を共有する.
C, $C_1, \ldots, C_k$ の全ての辺を使った閉路がある.

Proposition 96. $G = (V, E)$ 連結. $\forall v$, v のじすうは *2* の倍数. このとき, G にオイラー閉路がある.

Proposition 97. きほんたいしょうしきは代数独立