

数学的帰納法に関するメモ

2023 年 9 月 9 日

1 記号

\mathbb{N} は非負整数全体のなす集合, $\mathbb{Z}_{>0}$ は正の実数全体のなす集合.

$n!$ は階乗, つまり, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $n! = \prod_{i=1}^n i$; $0! = 1$.

$n!!$ は二重階乗, つまり, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $(2k-1)!! = \prod_{i=1}^k (2i-1)$, $(2k)!! = \prod_{i=1}^k (2i)$; $0!! = 1$.

$\binom{x}{n}$ は二項係数, つまり, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\binom{x}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (x-i)}{n!}$.

2 通常の数学的帰納法によるもの

2.1 等式に関するもの

2.1.1 整数や整式の和に関するもの

p:20230630

Proposition 1. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

証明 1.1. $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ である. また, $n + \sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=0}^n i$, $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 1.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^0 i &= 0, \\ \frac{0(0+1)}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$ であるので,

$$\sum_{i=0}^n i = n + \sum_{i=0}^{n-1} i$$



$$\begin{aligned}
 &= n + \frac{(n-1)n}{2} \\
 &= \frac{2n + (n-1)n}{2} \\
 &= \frac{2n + n^2 - n}{2} \\
 &= \frac{n^2 + n}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

注 1.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n i &= \frac{\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n i}{2} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n (n-i)}{2} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^n (i + n - i)}{2} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^n n}{2} \\
 &= \frac{n \sum_{i=0}^n 1}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

注 1.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる:

$$\begin{aligned}
 X &= \{ (t_1, t_2) \mid 0 \leq t_1 < t_2 \leq n \} \\
 X_i &= \{ (t_1, i) \mid 0 \leq t_1 < i \}
 \end{aligned}$$

とおく. このとき,

$$\prod_{i=0}^n X_i = X$$

であり,

$$\begin{aligned}
 |X| &= \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\
 |X_i| &= i
 \end{aligned}$$

であるので,

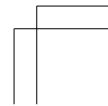
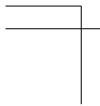
$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

注 1.5. Propositions 12 and 13 は, この一般化である.

p:20230703

Proposition 2. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n 2i = n(n+1).$

証明 2.1. $2 \cdot 0 = 0 = 0(0+1)$ である. また, $2n + \sum_{i=0}^{n-1} 2i = \sum_{i=0}^n 2i$, $2n + (n-1)n = n(n+1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.



証明 2.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n 2i = n(n+1).$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^0 2i &= 2 \cdot 0 = 0, \\ 0(0+1) &= 0. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} 2i = (n-1)n$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n 2i &= 2n + \sum_{i=0}^{n-1} 2i \\ &= 2n + (n-1)n \\ &= 2n + n^2 - n \\ &= n^2 + n \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

注 2.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\sum_{i=0}^n 2i = 2 \sum_{i=0}^n i = 2 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

p:20230704

Proposition 3. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$.

証明 3.1. $2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ である. また, $(2n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1)$, $(2n-1) + (n-1)^2 = n^2$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 3.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 (2i-1) &= 2 \cdot 1 - 1 = 1, \\ 1^2 &= 1. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} (2i-1) = (n-1)^2$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (2i-1) &= 2n-1 + \sum_{i=0}^{n-1} (2i-1) \\ &= 2n-1 + (n-1)^2 \\ &= 2n-1 + n^2 - 2n + 1 \\ &= n^2.\end{aligned}$$

注 3.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2.$$

p:20230705

Proposition 4. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

証明 4.1. $0^2 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$ である. また, $n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=0}^n i^2$, $n^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^3-3n^2+n+6n^2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 4.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^1 i^2 &= 0^2 = 0, \\ \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} &= 0.\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i^2 &= n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{6n^2 + 2n^3 - 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

注 4.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=0}^n i^2 \\ T &= \sum_{i=1}^n (i^3 - (i-1)^3)\end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^n i^3 - \sum_{i=1}^n (i-1)^3 \\
 &= \sum_{i=1}^n i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\
 &= (n^3 + \sum_{i=1}^{n-1} i^3) - (\sum_{i=1}^{n-1} i^3 + 0^3) \\
 &= n^3.
 \end{aligned}$$

一方次のようにも計算できる:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^n (i^3 - (i^3 - 3i^2 + 3i - 1)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1) \\
 &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= 3S - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n.
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
 n^3 &= 3S - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \\
 3S &= n^3 + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \\
 &= \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 2n}{2} \\
 &= \frac{n(2n^2 + 3(n+1) - 2)}{2} \\
 &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \\
 S &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

p:20230706

Proposition 5. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$

証明 5.1. $1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3}$ である. また,

$$\begin{aligned}
 (2n-1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \\
 (2n-1)^2 + \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} &= \frac{3(2n-1)^2 + (n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\
 &= \frac{(2n-1)(3(2n-1) + (n-1)(2n-3))}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2n-1)(6n-3+n^2-5n+3)}{3} \\
&= \frac{(2n-1)(2n^2+n)}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 5.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^1 (2i-1)^2 &= 1^2 = 1, \\
\frac{1(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3} &= 1.
\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} (2i-1)^2 = \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 &= (2n-1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1)^2 \\
&= (2n-1)^2 + \frac{(n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\
&= \frac{3(2n-1)^2 + (n-1)(2n-3)(2n-1)}{3} \\
&= \frac{(2n-1)(3(2n-1) + (n-1)(2n-3))}{3} \\
&= \frac{(2n-1)((6n-3) + (2n^2-5n+3))}{3} \\
&= \frac{(2n-1)(2n^2+n)}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

注 5.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 &= 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \\
&= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{4n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 6n}{6} \\
&= \frac{n(4(n+1)(2n+1) - 12(n+1) + 6)}{6} \\
&= \frac{n((n+1)(4(2n+1) - 12) + 6)}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n((n+1)(8n-8)+6)}{6} \\
&= \frac{n(8(n+1)(n-1)+6)}{6} \\
&= \frac{n(8(n^2-1)+6)}{6} \\
&= \frac{n(8n^2-2)}{6} \\
&= \frac{n(4n^2-1)}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

p:20230707

Proposition 6. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$

証明 6.1. $0^2 = 0 = \frac{2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1}{3}$ である. また, $(2n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (2i)^2 = \sum_{i=1}^n (2i)^2$, $(2n)^2 + \frac{2(n-1)n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 6.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^0 (2i)^2 = 0^2 = 0, \\
&\frac{2 \cdot 0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{3} = 0.
\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} (2i)^2 = \frac{2(n-1)n(2n-1)}{3}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (2i)^2 &= (2n)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (2i)^2 \\
&= (2n)^2 + \frac{2(n-1)n(2n-1)}{3} \\
&= \frac{3(2n)^2 + 2(n-1)n(2n-1)}{3} \\
&= \frac{2n(6n + (n-1)(2n-1))}{3} \\
&= \frac{2n(6n + 2n^2 - 3n + 1)}{3} \\
&= \frac{2n(2n^2 + 3n + 1)}{3} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

注 6.3. Proposition 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\sum_{i=1}^n (2i)^2 = \sum_{i=1}^n 4i^2 = 4 \sum_{i=1}^n i^2 = 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

p:20230709

Proposition 7. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^2 = n(2n+1).$

証明 7.1. $-1 + 2^2 = 3 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$ である. また, $(2n)^2 - (2n-1)^2 + \sum_{i=1}^{2(n-1)} (-1)^i i^2 = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^2$, $(2n)^2 - (2n-1)^2 + (n-1)(2n-1) = n(2n+1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 7.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^2 = n(2n+1)$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (-1)^i i^2 &= -1 + 4 = 3, \\ 1(2 \cdot 1 + 1) &= 3. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{2(n-1)} (-1)^i i^2 = (n-1)(2n-1)$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^2 &= (2n)^2 - (2n-1)^2 + \sum_{i=1}^{2n-2} (-1)^i i^2 \\ &= (2n)^2 - (2n-1)^2 + (n-1)(2n-1) \\ &= (2n+2n-1)(2n-2n+1) + (n-1)(2n-1) \\ &= 4n-1+2n^2-3n+1 \\ &= 2n^2+n \\ &= n(2n+1). \end{aligned}$$

注 7.3. Proposition 1 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^2 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{2i-1} (2i-1)^2 + \sum_{i=1}^n (-1)^{2i} (2i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n -(2i-1)^2 + \sum_{i=1}^n (2i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (-(2i-1)^2 + (2i)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (2i-2i+1)(2i+2i-1) \\ &= \sum_{i=1}^n (4i-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \\
&= 4 \frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= 2n(n+1) - n \\
&= n(2(n+1) - 1) \\
&= n(2n+1).
\end{aligned}$$

p:20230710

Proposition 8. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

証明 8.1. $0^3 = 0 = \frac{0^2 \cdot 1^2}{4}$ である. また, $n^3 + \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \sum_{i=0}^n i^3$, $n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{4n^3 + (n-1)^2 n^2}{4} = \frac{n^2(4n + (n-1)^2)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 8.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^0 i^3 &= 0, \\
\frac{0^2(0+1)^2}{4} &= 0.
\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n i^3 &= n^3 + \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\
&= n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \\
&= \frac{4n^3 + (n-1)^2 n^2}{4} \\
&= \frac{n^2(4n + (n-1)^2)}{4} \\
&= \frac{n^2(4n + n^2 - 2n + 1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

注 8.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^n i^3 \\
T &= \sum_{i=1}^n (i^4 - (i-1)^4)
\end{aligned}$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^n i^4 - \sum_{i=1}^n (i-1)^4 \\
 &= \sum_{i=1}^n i^4 - \sum_{i=0}^{n-1} i^4 \\
 &= (n^4 + \sum_{i=1}^{n-1} i^4) - (\sum_{i=1}^{n-1} i^4 + 0^4) \\
 &= n^4.
 \end{aligned}$$

一方次のようにも計算できる:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^n (i^4 - (i^4 - 4i^3 + 6i^2 - 4i + 1)) \\
 &= \sum_{i=1}^n (4i^3 - 6i^2 + 4i - 1) \\
 &= 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= 4S - 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} - n \\
 &= 4S - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n \\
 &= 4S + n(-(n+1)(2n+1) + 2(n+1) - 1) \\
 &= 4S + n((n+1)(-(2n+1) + 2) - 1) \\
 &= 4S + n((n+1)(-2n+1) - 1) \\
 &= 4S + n(-2n^2 - n + 1 - 1) \\
 &= 4S + n(-2n^2 - n) \\
 &= 4S + n^2(-2n - 1)
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
 n^4 &= 4S + n^2(-2n - 1) \\
 4S &= n^4 + n^2(2n + 1) \\
 4S &= n^2(n^2 + (2n + 1)) \\
 4S &= n^2(n^2 + 2n + 1) \\
 4S &= n^2(n+1)^2 \\
 S &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
 \end{aligned}$$

p:20230715

Proposition 9. $\forall n \in \mathbb{N}, (\sum_{i=0}^n i)^2 = \sum_{i=0}^n i^3.$

証明 9.1. $0^2 = 0 = 0^3$ である. また,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^{n-1} i \right) \\ &= n \left(-n + 2 \sum_{i=0}^n i \right) \\ &= n(-n + n(n+1)) \\ &= n^3, \\ \sum_{i=0}^n i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 &= n^3 \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 9.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\left(\sum_{i=0}^n i \right)^2 = \sum_{i=0}^n i^3.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^0 i \right)^2 &= 0^2 = 0 \\ \sum_{i=0}^0 i^3 &= 0^3 = 0. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^{n-1} i \right) \\ &= n \left(-n + 2 \sum_{i=0}^n i \right) \\ &= n \left(-n + 2 \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= n(-n + n(n+1)) \\ &= nn^2 \\ &= n^3 \end{aligned}$$

である. 仮定から $\left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3$ であるので,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2 &= n^3 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right)^2 \\ &= n^3 + \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\ &= \sum_{i=0}^n i^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n^3 + \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\
 &= \sum_{i=0}^n i^3.
 \end{aligned}$$

注 9.3. Propositions 1 and 8 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\
 \sum_{i=0}^n i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\
 &= \sum_{i=0}^n i^3.
 \end{aligned}$$

p:20230716

Proposition 10. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

証明 10.1. $0(0+1) = 0 = \frac{0(0+1)(0+2)}{3}$ である. また, $\sum_{i=0}^n i(i+1) - \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = n(n+1)$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)((n+2)-(n-1))}{3} = n(n+1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 10.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
 0 \cdot 1 &= 0, \\
 \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3} &= 0.
 \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ であるので,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n i(i+1) &= n(n+1) + \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) \\
 &= n(n+1) + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\
 &= \frac{3n(n+1) + (n-1)n(n+1)}{3} \\
 &= \frac{n(n+1)(3 + (n-1))}{3} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
 \end{aligned}$$

注 10.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n i(i+1) &= \sum_{i=0}^n (i^2 + i) \\
 &= \sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)((2n+1) + 3)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
 \end{aligned}$$

注 10.4. Proposition 13 は, この一般化である.

p:20230719

Proposition 11. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n (2i-1)2i = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}.$

証明 11.1. $1 \cdot 2 = 2 = \frac{1(1+1)(4-1)}{3}$ である. また, $\sum_{i=1}^n (2i-1)2i - \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1)2i = (2n-1)2n, \frac{n(n+1)(4n-1)}{3} - \frac{(n-1)n(4n-5)}{3} = \frac{n(n+1)(4n-1) - (n-1)n(4n-5)}{3} = \frac{n((n+1)(4n-1) - (n-1)(4n-5))}{3} = \frac{n(4n^2+3n-1-4n^2+9n-5)}{3} = \frac{n(12n-6)}{3} = \frac{6n(2n-1)}{3} = 2n(2n-1)$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 11.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)2i = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2 &= 2, \\
 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} &= 2.
 \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} (2i-1)2i = \frac{(n-1)n(4n-5)}{3}$ であるので,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (2i-1)2i &= (2n-1)2n + \sum_{i=1}^{n-1} (2i-1)2i \\
 &= (2n-1)2n + \frac{(n-1)n(4n-5)}{3} \\
 &= \frac{(2n-1)6n + (n-1)n(4n-5)}{3} \\
 &= \frac{n((2n-1)6 + (n-1)(4n-5))}{3} \\
 &= \frac{n(12n-6+4n^2-9n+5)}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(4n^2 + 3n - 1)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

注 11.3. Propositions 1 and 4 をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (2i-1)2i &= \sum_{i=1}^n (4i^2 - 2i) \\
&= 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i \\
&= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1) \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(2(2n+1) - 3)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

p:20230717

Proposition 12. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n \binom{i+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$

証明 12.1. $k \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$ である. また, $\sum_{i=0}^n \binom{i+k}{k} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+k}{k} = \binom{n+k}{k}$, $\binom{n+k+1}{k+1} - \binom{n-1+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k+1} - \binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1} - \binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k}{k}$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 12.2. $k \in \mathbb{N}$ とする.

$P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n \binom{i+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^0 \binom{i+k}{k} &= \binom{k}{k} = 1 \\
\binom{0+k+1}{k+1} &= \binom{k+1}{k+1} = 1.
\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+k}{k} = \binom{n+k}{k+1}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \binom{i+k}{k} &= \binom{n+k}{k+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+k}{k} \\
&= \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k+1}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1} \\
 &= \binom{n+k+1}{k+1}.
 \end{aligned}$$

注 12.3. 数学的帰納法を用いず、以下のように示すこともできる:

$$\begin{aligned}
 X &= \{ (t_1 \dots, t_k, t_{k+1}) \mid 1 \leq t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} \leq n+k+1 \} \\
 X_i &= \{ (t_1 \dots, t_k, k+1+i) \mid 1 \leq t_1 < \dots < t_k < k+1+i \}
 \end{aligned}$$

とおく. このとき,

$$\prod_{i=0}^n X_i = X$$

であり,

$$\begin{aligned}
 |X| &= \binom{n+k+1}{k+1} \\
 |X_i| &= \binom{i+k}{k}
 \end{aligned}$$

であるので,

$$\sum_{i=0}^n \binom{i+k}{k} = \sum_{i=0}^n |X_i| = \left| \prod_{i=0}^n X_i \right| = |X| = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

p:20230718

Proposition 13. $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n \prod_{k=1}^m (i+k) = \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n+k)}{m+1}.$

証明 13.1. $m \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $\prod_{k=1}^m (k) = \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (k)}{m+1}$ である. また,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n \prod_{k=1}^m (i+k) - \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{k=1}^m (i+k) &= \prod_{k=1}^m (n+k) \\
 \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n+k)}{m+1} - \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n-1+k)}{m+1} &= \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n+k) - \prod_{k=1}^{m+1} (n-1+k)}{m+1} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n+k) - \prod_{k=0}^m (n+k)}{m+1} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^m (n+k) \cdot ((n+m+1) - n)}{m+1} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^m (n+k) \cdot (m+1)}{m+1} \\
 &= \prod_{k=1}^m (n+k)
 \end{aligned}$$

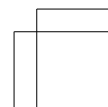
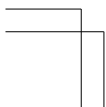
であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 13.2. $m \in \mathbb{N}$ とする.

$P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n \prod_{k=1}^m (i+k) = \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n+k)}{m+1}$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.



Base Case: $P(0)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^0 \prod_{k=1}^m (i+k) &= \prod_{k=1}^m k = m!. \\ \frac{\prod_{k=1}^{m+1} k}{m+1} &= \frac{(m+1)!}{m+1} = m!.\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{k=1}^m (i+k) = \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n-1+k)}{m+1}$ であるので,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \prod_{k=1}^m (i+k) &= \prod_{k=1}^m (n+k) + \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{k=1}^m (i+k) \\ &= \prod_{k=1}^m (n+k) + \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n-1+k)}{m+1} \\ &= \frac{(m+1) \prod_{k=1}^m (n+k) + \prod_{k=1}^{m+1} (n-1+k)}{m+1} \\ &= \frac{(m+1) \prod_{k=1}^m (n+k) + \prod_{k=0}^m (n+k)}{m+1} \\ &= \frac{(m+1) + (n)) \prod_{k=1}^m (n+k)}{m+1} \\ &= \frac{(n+m+1) \prod_{k=1}^m (n+k)}{m+1} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{m+1} (n+k)}{m+1}.\end{aligned}$$

注 13.3. Proposition 12 を認めれば、数学的帰納法を用いず、以下のように示すこともできる:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \binom{i+m}{m} &= \binom{n+m+1}{m+1} \\ \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k=1}^m (i+k)}{m!} &= \frac{\prod_{i=1}^{m+1} (n+k)}{(m+1)!} \\ m! \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k=1}^m (i+k)}{m!} &= m! \frac{\prod_{i=1}^{m+1} (n+k)}{(m+1)!} \\ \prod_{k=1}^m (i+k) &= \frac{\prod_{i=1}^{m+1} (n+k)}{m+1}.\end{aligned}$$

p:20230720

Proposition 14. $\forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

証明 14.1. $x \neq 0$ とする. このとき, $x^0 = 1 = \frac{x-1}{x-1}$ である. また,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n x^i - \sum_{i=0}^{n-1} x^i &= x^n \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} &= \frac{-x^{n+1} + x^n}{1-x} = \frac{x^n(-x+1)}{1-x} = x^n\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 14.2. $x \neq 0$ とする.

$P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^0 x^i &= 1, \\ \frac{1-x^1}{1-x} &= 1. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n x^i &= x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x^i \\ &= x^n + \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{x^n(1-x) + 1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{x^n - x^{n+1} + 1 - x^n}{1-x} \\ &= \frac{-x^{n+1} + 1}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

注 14.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $x \neq 1$ とし, $S = \sum_{i=0}^n x^i$ とおく.

$$\begin{aligned} (1-x)S &= \sum_{i=0}^n x^i - x \sum_{i=0}^n x^i \\ &= \sum_{i=0}^n x^i - \sum_{i=0}^n x^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n x^i - \sum_{i=1}^{n+1} x^i \\ &= x^0 - x^{n+1} + \sum_{i=1}^n x^i - \sum_{i=1}^n x^i \\ &= 1 - x^{n+1}. \\ S &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

p:20230721

Proposition 15. $\forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n ix^i = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$

証明 15.1. $x \neq 0$ とする. このとき, $x^0 = 1$. $\frac{0x^2 - x^1 + x}{(x-1)^2} = 0$ である. また,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n ix^i - \sum_{i=0}^{n-1} ix^i &= nx^n \\ \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} - \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - ((n-1)x^{n+1} - nx^n + x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x - (n-1)x^{n+1} + nx^n - x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - 2nx^{n+1} + nx^n}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^n(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} \\ &= nx^n \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 15.2. $x \neq 0$ とする.

$P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=0}^n ix^i = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^0 ix^i &= 0, \\ \frac{0x^{0+2} - (0+1)x^{0+1} + x}{(x-1)^2} &= \frac{0 - x + x}{(x-1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=0}^{n-1} ix^i = \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n ix^i &= nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} ix^i \\ &= nx^n + \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^n(x-1)^2 + (n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^n(x^2 - 2x + 1) + (n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - 2nx^{n+1} + nx^n + (n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

注 15.3. Proposition 14 を認めて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $x \neq 1$ とし, $S = \sum_{i=0}^n ix^i$ とおく.

$$\begin{aligned}
 (1-x)S &= \sum_{i=0}^n ix^i - x \sum_{i=0}^n ix^i \\
 &= \sum_{i=0}^n ix^i - \sum_{i=0}^n ix^{i+1} \\
 &= \sum_{i=0}^n ix^i - \sum_{i=1}^{n+1} (i-1)x^i \\
 &= 0x^0 - nx^{n+1} + \sum_{i=1}^n ix^i - \sum_{i=1}^n (i-1)x^i \\
 &= -nx^{n+1} + \sum_{i=1}^n (ix^i - (i-1)x^i) \\
 &= -nx^{n+1} + \sum_{i=1}^n x^i \\
 &= -nx^{n+1} - 1 + \sum_{i=0}^n x^i \\
 &= -nx^{n+1} - 1 + \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \\
 &= \frac{-(nx^{n+1} + 1)(x - 1) + x^{n+1} - 1}{x - 1} \\
 &= \frac{-nx^{n+2} - x + nx^{n+1} + 1 + x^{n+1} - 1}{x - 1} \\
 &= \frac{-nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - x}{x - 1}. \\
 S &= \frac{-nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - x}{(1-x)(x-1)} \\
 &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.
 \end{aligned}$$

注 15.4. Proposition 14 を認めて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $x \neq 1$ とし, $S(x) = \sum_{i=0}^n x^i$ とおく.

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{i=0}^n x^i. & S(x) &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \\
 \frac{d}{dx} S(x) &= \sum_{i=0}^n ix^{i-1}. & \frac{d}{dx} S(x) &= \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} \\
 & & &= \frac{(n+1)(x^{n+1} - x^n) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} \\
 & & &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \\
 x \frac{d}{dx} S(x) &= \sum_{i=0}^n ix^i. & x \frac{d}{dx} S(x) &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.
 \end{aligned}$$

p:20230722

Proposition 16. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1} = (3n-5)2^n + 5.$

証明 16.1. $(3-2)2^{1-1} = 1 = (3-5)2^1 + 5$ である. また,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} (3i-2)2^{i-1} &= (3n-2)2^{n-1} \\ (3n-5)2^n + 5 - ((3(n-1)-5)2^{n-1} + 5) &= (2(3n-5) - (3(n-1)-5))2^{n-1} \\ &= (6n-10-3n+8)2^{n-1} \\ &= (3n-2)2^{n-1} \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 16.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1} = (3n-5)2^n + 5.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 (3i-2)2^{i-1} &= (3i-1)2^{1-1} = 1, \\ (3n-5)2^n + 5 &= (3-5)2^1 + 5 = -4 + 5 = 1. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} (3i-2)2^{i-1} = (3n-8)2^{n-1} + 5$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1} &= (3n-2)2^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (3i-2)2^{i-1} \\ &= (3n-2)2^{n-1} + (3n-8)2^{n-1} + 5 \\ &= 2^{n-1}3n - 2^{n-1}2 + 2^{n-1}3n - 2^{n-1}8 + 5 \\ &= 2^{n-1}3n + 2^{n-1}3n - 2^{n-1}2 - 2^{n-1}8 + 5 \\ &= 2 \cdot 2^{n-1}3n - 2^{n-1}(2+8) + 5 \\ &= 2 \cdot 2^{n-1}3n - 2^{n-1}10 + 5 \\ &= 2^n 3n - 2^n 5 + 5 \\ &= (3n-5)2^n + 5. \end{aligned}$$

注 16.3. Proposition 14 を認めて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $S = \sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1}$ とおく.

$$\begin{aligned} (1-2)S &= \sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1} - 2 \sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n (3i-2)2^{i-1} - \sum_{i=1}^n (3i-2)2^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} (3i+1)2^i - \sum_{i=1}^n (3i-2)2^i \\
&= (3 \cdot 0 + 1)2^0 - (3n-2)2^n + \sum_{i=1}^{n-1} (3i+1)2^i - \sum_{i=1}^{n-1} (3i-2)2^i \\
&= 1 - (3n-2)2^n + \sum_{i=1}^{n-1} ((3i+1)2^i - (3i-2)2^i) \\
&= 1 - (3n-2)2^n + \sum_{i=1}^{n-1} 3 \cdot 2^i \\
&= 1 - (3n-2)2^n + 3 \cdot 2 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} \\
&= 1 - (3n-2)2^n + 3 \cdot 2 \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \\
&= 1 - (3n-2)2^n + 3 \cdot 2 \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \\
&= 1 - (3n-2)2^n - 6 + 3 \cdot 2^n \\
&= -5 + (-3n+5)2^n. \\
S &= 5 + (3n-5)2^n.
\end{aligned}$$

2.1.2 整数や整式の積に関するもの

p:20230723

Proposition 17. $\forall n \in \mathbb{N}, (2n)!! = 2^n n!$.

証明 17.1. $0!! = 1 = 2^0 0!$ である. また,

$$\begin{aligned}
\frac{(2n)!!}{(2n-2)!!} &= 2n \\
\frac{2^n n!}{2^{n-1}(n-1)!} &= \frac{2^n}{2^{n-1}} \frac{n!}{(n-1)!} = 2n
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 17.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$(2n)!! = 2^n n!.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
0!! &= 1. \\
2^0 0! &= 1.
\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $(2n-2)!! = 2^{n-1}(n-1)!$ であるので,

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2n(2n-2)!! \\ &= 2n2^{n-1}(n-1)! \\ &= 2^n n(n-1)! \\ &= 2^n n!.\end{aligned}$$

注 17.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $n = 0$ のときは, 定義から $0!! = 1 = 2^0 0!$. $n > 0$ のときは,

$$\begin{aligned}(2n)!! &= \prod_{i=1}^n (2i) \\ &= \prod_{i=1}^n 2 \prod_{i=1}^n i \\ &= 2^n n!.\end{aligned}$$

p:20230724

Proposition 18. $\forall n \in \mathbb{N}, (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

証明 18.1. $1!! = 1 = \frac{1}{2^0 \cdot 1!}$ である. また,

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!} &= 2n+1 \\ \frac{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}}{\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}} &= \frac{(2n+1)! \cdot 2^{n-1}(n-1)!}{2^n n! \cdot (2n-1)!} = \frac{(2n+1)! (n-1)! 2^{n-1}}{(2n-1)! n! 2^n} = \frac{2n(2n+1) \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot n} = 2n+1\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 18.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}1!! &= 1. \\ \frac{(0+1)!}{2^0 0!} &= 1.\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $(2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$ であるので,

$$\begin{aligned}(2n+1)!! &= (2n+1) \cdot (2n-1)!! \\ &= (2n+1) \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)2n}{2n} \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.\end{aligned}$$

注 18.3. Proposition 17 をみとめて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

p:20230725

Proposition 19. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \frac{(2n)!}{n!} = 2^n (2n-1)!!$.

証明 19.1. $\frac{2!}{1!} = 2 = 2^1 1!$ である. また,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(2n)!}{n!}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}} &= \frac{(2n)!(n-1)!}{(2n-2)!n!} = \frac{2n \cdot 2n-1}{n} = 2(2n-1) \\ \frac{2^n (2n-1)!!}{2^{n-1} (2n-3)!!} &= 2(2n-1) \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 19.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n (2n-1)!!.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \frac{2!}{1!} &= 2, \\ 2^1 1! &= 2. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} = 2^{n-1} (2n-3)!!$ であるので,

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{n!} &= \frac{2n \cdot (2n-1) (2n-2)!}{n (n-1)!} \\ &= 2(2n-1) \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} \\ &= 2(2n-1) 2^{n-1} (2n-3)!! = 2^n (2n-1)!! \end{aligned}$$

注 19.3. Proposition 17 をみとめて, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned} n! \cdot 2^n (2n-1)!! &= 2^n n! \cdot (2n-1)!! = (2n)!! (2n-1)!! = (2n)!. \\ 2^n (2n-1)!! &= \frac{(2n)!}{n!}. \end{aligned}$$

2.1.3 有理式などの和に関するもの

p:20230726

Proposition 20. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$

証明 20.1. $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ である. また,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} - \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
 &= \frac{2n - (2n-1)}{2n(2n-1)} \\
 &= \frac{1}{2n(2n-1)} \\
 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1+i} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n+i} \\
 &= \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{n+i} \right) - \left(\frac{1}{n} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n+i} \right) \\
 &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} \\
 &= \frac{2n-1 + 2n - 2(2n-1)}{2n(2n-1)} \\
 &= \frac{1}{2n(2n-1)}
 \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 20.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}. \\
 \frac{1}{1+1} &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{2n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i-1}$ であるので,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \\
 &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i-1} \\
 &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n+i} \\
 &= -\frac{1}{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} \\
 &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.
 \end{aligned}$$

p:20230727

Proposition 21. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$

証明 21.1. $\frac{1}{1(2)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ である. また,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{n(n+1)} \\
 \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} &= \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 21.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1(1+1)} &= \frac{1}{2}. \\
 \frac{1}{1+1} &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n-1}{n}$ であるので,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \\
 &= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n} \\
 &= \frac{1 + (n+1)(n-1)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{1 + n^2 - 1}{n(n+1)} \\
 &= \frac{n^2}{n(n+1)} \\
 &= \frac{n}{n+1}.
 \end{aligned}$$

注 21.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \\
 &= \left(1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{n}{n+1}.
 \end{aligned}$$

p:20230728

Proposition 22. $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n+k} \right).$

証明 22.1.

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^m \frac{1}{1+k} &= \frac{1}{(m+1)!} \\
 \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{1+k} \right) &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(1+m)!} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{m+1}{(m+1)!} - \frac{1}{(1+m)!} \right) = \frac{1}{m} \frac{m}{(1+m)!} = \frac{1}{(m+1)!}
 \end{aligned}$$

である. また,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} &= \prod_{k=0}^m \frac{1}{n+k} \\
 \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n+k} \right) - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n-1+k} \right) &= \frac{1}{m} \left(-\prod_{k=1}^m \frac{1}{n+k} + \prod_{k=1}^m \frac{1}{n-1+k} \right) \\
 &= \frac{1}{m} \left(\frac{-n+n+m}{\prod_{k=0}^m n+k} \right) \\
 &= \frac{1}{m} \frac{m}{(n+m)!} \\
 &= \frac{1}{(n+m)!}
 \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 22.2. $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n+k} \right).$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$\prod_{k=0}^m \frac{1}{1+k} = \frac{1}{(m+1)!}.$$

$$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{1+k} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(1+m)!} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{m+1}{(m+1)!} - \frac{1}{(1+m)!} \right) = \frac{1}{m} \frac{m}{(1+m)!} = \frac{1}{(m+1)!}.$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n-1+k} \right)$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} &= \prod_{k=0}^m \frac{1}{n+k} + \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} \\ &= \prod_{k=0}^m \frac{1}{n+k} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n-1+k} \right) \\ &= \frac{1}{\prod_{k=0}^m (n+k)} + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^m (n-1+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} + \frac{m}{\prod_{k=0}^m (n+k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^m (n-1+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} + \frac{m}{\prod_{k=0}^m (n+k)} - \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (n+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} + \frac{m}{\prod_{k=0}^m (n+k)} - \frac{n+m}{\prod_{k=0}^m (n+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} + \frac{m-(n+m)}{\prod_{k=0}^m (n+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{n}{\prod_{k=0}^m (n+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^m (n+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n+k} \right). \end{aligned}$$

証明 22.3. Proposition 21 から,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{1} \left(\frac{1}{1!} - \prod_{k=1}^1 \frac{1}{n+k} \right) = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{n+1}$$

である. また,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{m}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{m+i-i}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m+i}{\prod_{k=0}^m (i+k)} - \frac{i}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^m (i+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=1}^m (i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=1}^m (i-1+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} + \frac{1}{m} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (1+k)} \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} + \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (1+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} + \frac{1}{m!} \right)
\end{aligned}$$

であるが,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+k} \right) - \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+1+k} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+k)} \right) - \frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+1+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+1+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=2}^m (n+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{n+m}{\prod_{k=1}^m (n+k)} + \frac{n+1}{\prod_{k=1}^m (n+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \frac{1-m}{\prod_{k=1}^m (n+k)} + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^m (n+k)} + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^m (n+k)} \right)
\end{aligned}$$

であるので, m に関する数学的帰納法により示せる.

証明 22.4. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $P(m)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \prod_{k=1}^m \frac{1}{n+k} \right).$$

このとき, 全ての $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(m)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \\ &= \left(1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

であるので, $P(1)$ が成り立つ.

Induction Step: $P(m-1) \implies P(m)$ を示す. 仮定から

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i+k} &= \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+k} \right) \\ \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{i+k} &= \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+1+k} \right) \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \prod_{k=0}^m \frac{1}{i+k} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{m}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{m+i-i}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m+i}{\prod_{k=0}^m (i+k)} - \frac{i}{\prod_{k=0}^m (i+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{\prod_{k=1}^m (i+k)} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=1}^m (i+k)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=1}^m (i-1+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} + \frac{1}{m} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (1+k)} \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} + \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (1+k)} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} (i+k)} + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+k} \right) - \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} - \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{n+1+k} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+k)} \right) - \frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+1+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+1+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^{m-1} (n+k)} + \frac{1}{\prod_{k=2}^m (n+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \left(-\frac{n+m}{\prod_{k=1}^m (n+k)} + \frac{n+1}{\prod_{k=1}^m (n+k)} \right) + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m-1} \frac{1-m}{\prod_{k=1}^m (n+k)} + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{\prod_{k=1}^m (n+k)} + \frac{1}{m!} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{\prod_{k=1}^m (n+k)} \right).
\end{aligned}$$

p:20230729

Proposition 23. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

証明 23.1. $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$ である. また,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
\frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} &= \frac{n(2n-1) - (n-1)(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{(2n^2 - n) - (2n^2 - n - 1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 23.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} &= \frac{1}{3}. \\ \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n-1}{2n-1}$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\ &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{n-1}{2n-1} \\ &= \frac{1 + (2n+1)(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1 + (2n^2 - n - 1)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n^2 - n}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{n(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

注 23.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{2}{(2i-1)(2i+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(2i+1) - (2i-1)}{(2i-1)(2i+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} - \frac{(2i-1)}{(2i-1)(2i+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 0 + 1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2i+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{2n+1-1}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{2n}{2n+1} \\
&= \frac{n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

p:20230730

Proposition 24. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$

証明 24.1. $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$ である. また,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = \frac{n}{2^n} \\
&2 - \frac{n+2}{2^n} - \left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \right) = -\frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n-1}} = -\frac{n+2}{2^n} + \frac{2n+2}{2^n} = \frac{n}{2^n}
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 24.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}. \\
&2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$ であるので,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} &= \frac{n}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} \\
&= \frac{n}{2^n} + 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \\
&= 2 + \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n-1}} \\
&= 2 + \frac{n}{2^n} - \frac{2(n+1)}{2^n} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}$$

注 24.3. Proposition 15 つまり

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n ix^i &= x \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^n x^i \\ &= x \frac{d}{dx} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ &= x \frac{-(n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

をみとめ, 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} &= \frac{1}{2} \frac{n \frac{1}{2^{n+1}} - (n+1) \frac{1}{2^n} + 1}{(\frac{1}{2} - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{(n+1)}{2^n} + 1}{\frac{1}{2^2}} \\ &= \frac{2^2}{2} \left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{(n+1)}{2^n} + 1 \right) \\ &= \frac{n}{2^n} - \frac{2(n+1)}{2^n} + 2 \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n}.\end{aligned}$$

p:20230731

Proposition 25. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \sqrt{n+1} - 1.$

証明 25.1. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{(-1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})} = (-1+\sqrt{2})$ である. また,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(-\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{-n + n + 1} \\ &= -\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ (\sqrt{n+1} - 1) - (\sqrt{n} - 1) &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 25.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \sqrt{n+1} - 1.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1+1}} &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(-1 + \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2})} = -1 + \sqrt{2}. \\ \sqrt{1+1} - 1 &= \sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \sqrt{n} - 1$ であるので,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \sqrt{n} - 1 \\ &= \frac{-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} + \sqrt{n} - 1 \\ &= \frac{-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{-n+n+1} + \sqrt{n} - 1 \\ &= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1 \\ &= \sqrt{n+1} - 1. \end{aligned}$$

注 25.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} &= \sum_{i=1}^n \frac{-\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}{(\sqrt{i}+\sqrt{i+1})(-\sqrt{i}+\sqrt{i+1})} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{-\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}{-i+i+1} \\ &= \sum_{i=1}^n (-\sqrt{i}+\sqrt{i+1}) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sqrt{i} + \sum_{i=1}^n \sqrt{i+1} \\ &= -\sum_{i=1}^n \sqrt{i} + \sum_{i=2}^{n+1} \sqrt{i} \\ &= -\sqrt{1} - \sum_{i=2}^n \sqrt{i} + \sqrt{n+1} + \sum_{i=2}^n \sqrt{i} \\ &= -\sqrt{1} + \sqrt{n+1} \\ &= \sqrt{n+1} - 1. \end{aligned}$$

2.1.4 合同式に関するもの

p:20230801

Proposition 26. $\forall n \in \mathbb{N}, 7^n - 2n - 1 \equiv 0 \pmod{4}.$

証明 26.1. $7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ である. また,

$$(7^n - 2n - 1) = 7(7^{n-1} - 2(n-1) - 1) + 12n - 8$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 26.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$7^n - 2n - 1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $7^{n-1} - 2(n-1) - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ であるので,

$$\begin{aligned} 7^n - 2n - 1 &= 7(7^{n-1} - 2(n-1) - 1) + 12n - 8 \\ &\equiv 7 \cdot 0 + 0n - 0 \pmod{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

証明 26.3. $7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$, $7^1 - 2 \cdot 1 - 1 = 7 - 2 - 1 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$ である. また,

$$(7^n - 2n - 1) - (7^{n-2} - 2(n-2) - 1) = 7^{n-2}(7^2 - 1) - 4 = 7^{n-2}48 - 4 = 4(7^{n-2}12 - 1) \equiv 0 \pmod{4}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 26.4. $P(n)$ を次の命題とする:

$$7^n - 2n - 1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

また, $P(2n)$ を $P'(n)$ とし, $P(2n+1)$ を $P''(n)$ とおく. このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを示すには, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P'(n)$ が成り立つことと全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P''(n)$ が成り立つことを示せば良い.

まず, $P(n-2) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $7^{n-2} - 2(n-2) - 1 = 7^{n-2} - 2n + 3 \equiv 0 \pmod{4}$ であるので,

$$\begin{aligned} 7^n - 2n - 1 &= 7^2(7^{n-2} - 2n + 3) + 96n - 148 \\ &= 7^2(7^{n-2} - 2n + 3) + 4(24n - 37) \\ &\equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned}$$

次に, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P'(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$7^0 - 2 \cdot 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Induction Step: $P(n-2) \implies P(n)$ はすでに示した. したがって, $P(2n-2) \implies P(2n)$ が成り立つ. つまり, $P'(n-1) \implies P'(n)$ が成り立つ.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$7^1 - 2 \cdot 1 - 1 = 7 - 2 - 1 = 4 \equiv 0 \pmod{4}.$$

Induction Step: $P(n-2) \implies P(n)$ はすでに示した. したがって, $P(2n-1) \implies P(2n+1)$ が成り立つ. つまり, $P''(n-1) \implies P''(n)$ が成り立つ.

注 26.5. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$7^n - 2n - 1 \equiv (-1)^n - 2n - 1 \pmod{4}$$

である. $n = 2k$ のとき,

$$(-1)^n - 2n - 1 = (-1)^{2k} - 2(2k) - 1 = 1 - 4k - 1 = -4k \equiv 0 \pmod{4}.$$

$n = 2k - 1$ のとき,

$$(-1)^n - 2n - 1 = (-1)^{2k-1} - 2(2k-1) - 1 = -1 - 4k + 2 - 1 = -4k \equiv 0 \pmod{4}.$$

注 26.6. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $n = 2k$ のとき,

$$\begin{aligned} 7^n - 2n - 1 &= 7^{2k} - 2(2k) - 1 \\ &= -2(2k) - 1 + 7^{2k} \\ &= -4k - 1 + 7^{2k} \\ &= -4k - 1 + (8 - 1)^{2k} \\ &= -4k - 1 + \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\ &= -4k - 1 + (-1)^{2k} 8^0 + \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\ &= -4k - 1 + 1 + \sum_{i=1}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\ &= -4k + \sum_{i=1}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\ &= -4k + \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^{i+1} \\ &= -4k + 8 \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \\ &= 4 \left(-k + 2 \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} 8^i \right). \end{aligned}$$

$n = 2k + 1$ のとき,

$$\begin{aligned} 7^n - 2n - 1 &= 7^{2k+1} - 2(2k+1) - 1 \\ &= -2(2k+1) - 1 + 7^{2k+1} \\ &= -4k - 3 + (8 - 1)^{2k+1} \\ &= -4k - 3 + \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\ &= -4k - 3 + (-1)^{2k+1} 8^0 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\ &= -4k - 3 - 1 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\ &= -4k - 4 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4k - 4 + \sum_{i=1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\
&= -4k - 4 + \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^{i+1} \\
&= -4k - 4 + 8 \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \\
&= 4 \left(-k - 1 + 2 \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k+1}{i} (-1)^{2k+1-i} 8^i \right).
\end{aligned}$$

p:20230802

Proposition 27. $\forall n \in \mathbb{N}, 1000^n + (-1)^{n-1} \equiv 0 \pmod{7}$.

証明 27.1. $1000^0 + (-1)^{-1} = 1 - 1 = 0$ である。また,

$$\begin{aligned}
1000^n + (-1)^{n-1} &= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1000(-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1001(-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 7 \cdot 143(-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる。

証明 27.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$1000^n + (-1)^{n-1} \equiv 0 \pmod{7}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す。

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$1000^0 + (-1)^{-1} = 1 - 1 = 0.$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す。仮定から $1000^{n-1} + (-1)^{n-2} \equiv 0 \pmod{7}$ であるので,

$$\begin{aligned}
1000^n + (-1)^{n-1} &= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1000(-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 1001(-1)^{n-1} \\
&= 1000(1000^{n-1} + (-1)^{n-2}) + 7 \cdot 143(-1)^{n-1} \\
&\equiv 1000 \cdot 0 + 0 \cdot 143(-1)^{n-1} \pmod{7} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

注 27.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
1000^n + (-1)^{n-1} &\equiv (-1)^n + (-1)^{n-1} \pmod{7} \\
&= (-1)^n - (-1)^n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

p:20230803

Proposition 28. $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{3n} - 2^n \equiv 0 \pmod{25}$.

証明 28.1. $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ である. また,

$$\begin{aligned}(3^{3n} - 2^n) - 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) &= (3^{3n} - 2^n) - (3^{3n} - 3^3 2^{n-1}) \\ &= -2^n + 3^3 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}(-2 + 3^3) \\ &= 2^{n-1}(-2 + 27) \\ &= 2^{n-1}25\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 28.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^{3n} - 2^n \equiv 0 \pmod{25}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0.$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $3^{3n-3} - 2^{n-1} \equiv 0 \pmod{25}$ であるので,

$$\begin{aligned}3^{3n} - 2^n &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 3^3 2^{n-1} - 2^n \\ &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 2^{n-1}(3^3 - 2) \\ &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 2^{n-1}(27 - 2) \\ &= 3^3(3^{3n-3} - 2^{n-1}) + 2^{n-1}(25) \\ &\equiv 3^3 0 + 2^{n-1} 0 \pmod{25} \\ &= 0.\end{aligned}$$

注 28.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}3^{3n} - 2^n &= (3^3)^n - 2^n = 27^n - 2^n = (25 + 2)^n - 2^n \equiv 2^n - 2^n \pmod{25} \\ &= 0.\end{aligned}$$

p:20230804

Proposition 29. $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n - 2n + 3 \equiv 0 \pmod{4}$.

証明 29.1. $3^0 - 2 \cdot 0 + 3 = 1 - 0 + 3 = 4$ である. また,

$$\begin{aligned}3^n - 2n + 3 &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) - 3(-2(n-1) + 3) - 2n + 3 \\ &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 6n - 15 - 2n + 3 \\ &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 4n - 12\end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 29.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^n - 2n + 3 \equiv 0 \pmod{4}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$3^0 - 2 \cdot 0 + 3 = 1 - 0 + 3 = 4.$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $3^{n-1} - 2(n-1) + 3 \equiv 0 \pmod{4}$ であるので,

$$\begin{aligned} 3^n - 2n + 3 &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) - 3(-2(n-1) + 3) - 2n + 3 \\ &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 6n - 15 - 2n + 3 \\ &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 4n - 12 \\ &= 3(3^{n-1} - 2(n-1) + 3) + 4(n-3) \\ &\equiv 3 \cdot 0 + 0 \cdot (n-3) \pmod{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

注 29.3. 数学的帰納法を用いず、以下のように示す方が一般的だと思う:

$$3^n - 2n + 3 \equiv (-1)^n - 2n - 1 \pmod{4}.$$

$n = 2k$ のとき,

$$(-1)^{2k} - 2(2k) - 1 = 1 - 4k - 1 = -4k \equiv 0 \pmod{4}.$$

$n = 2k+1$ のとき,

$$(-1)^{2k+1} - 2(2k+1) - 1 = -1 - 4k - 2 - 1 = -4k - 4 = -4(k+1) \equiv 0 \pmod{4}.$$

p:20230805

Proposition 30. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, 3^{3n+1} + 7^{2n-1} \equiv 0 \pmod{11}$

証明 30.1. $3^{3+1} + 7^{2-1} = 81 + 7 = 88 = 8 \cdot 11 \equiv 0 \pmod{11}$ である. また,

$$\begin{aligned} 3^{3n+1} + 7^{2n-1} &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) - 7^{2n-3}3^3 + 7^{2n-1} \\ &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-3^3 + 7^2) \\ &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-27 + 49) \\ &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}22 \\ &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}2 \cdot 11 \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 30.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^{3n+1} + 7^{2n-1} \equiv 0 \pmod{11}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$3^{3+1} + 7^{2-1} = 81 + 7 = 88 = 8 \cdot 11 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $3^{3n-2} + 7^{2n-3} \equiv 0 \pmod{11}$ であるので,

$$\begin{aligned}
 3^{3n+1} + 7^{2n-1} &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) - 7^{2n-3}3^3 + 7^{2n-1} \\
 &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-3^3 + 7^2) \\
 &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}(-27 + 49) \\
 &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}22 \\
 &= 3^3(3^{3n-2} + 7^{2n-3}) + 7^{2n-3}2 \cdot 11 \\
 &\equiv 3^3 \cdot 0 + 7^{2n-3}2 \cdot 0 \pmod{11} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

注 30.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned}
 3^{3n+1} + 7^{2n-1} &= 3^{3n}3 + 7^{2n-2}7 \\
 &= 27^n 3 + 49^{n-1}7 \\
 &\equiv 5^n 3 + 5^{n-1}7 \pmod{11} \\
 &= 5^{n-1}(5 \cdot 3 + 7) \\
 &= 5^{n-1}22 \\
 &= 5^{n-1}2 \cdot 11 \\
 &\equiv 0 \pmod{11}.
 \end{aligned}$$

注 30.4. $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ は体であり, 7^{-1} が存在する. この意味で, この命題は $n=0$ のときも成り立つ.

p:20230807

Proposition 31. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, 4 \cdot 3^{2n-1} + 2^{4n} \equiv 0 \pmod{28}$

証明 31.1. $4 \cdot 3^1 + 2^4 = 12 + 16 = 28 \equiv 0 \pmod{28}$ である. また,

$$\begin{aligned}
 4 \cdot 3^{2n-1} + 2^{4n} &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4}) - 3^2 2^{4n-4} + 2^{4n} \\
 &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4})2^{4n-4}(-3^2 + 2^4) \\
 &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4})2^{4n-4}(-9 + 16) \\
 &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4}) - 2^{4n-4}7
 \end{aligned}$$

であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 31.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$4 \cdot 3^{2n-1} + 2^{4n} \equiv 0 \pmod{28}.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$4 \cdot 3^{2-1} + 2^4 = 12 + 16 \equiv 0 \pmod{28}$$

Induction Step: $n > 1$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4} \equiv 0 \pmod{28}$ であるので,

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^{2n-1} + 2^{4n} &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4}) - 3^2 2^{4n-4} + 2^{4n} \\ &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4}) + 2^{4n-4}(-3^2 + 2^4) \\ &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4}) + 2^{4n-4}(-9 + 16) \\ &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4}) - 2^{4n-4}7. \end{aligned}$$

$n > 1$ であるので, $4n-4 \geq 4$ である. したがって,

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^{2n-1} + 2^{4n} &= 3^2(4 \cdot 3^{2n-3} + 2^{4n-4}) - 2^{4n-4}7 \\ &\equiv 3^2 \cdot 0 - 0 \pmod{28} \\ &= 0. \end{aligned}$$

注 31.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$\begin{aligned} 9^{n-1}3 + 16^{n-1}4 &\equiv 2^{n-1}3 + 2^{n-1}4 \pmod{7} \\ &= 2^{n-1}(3+4) \\ &= 2^{n-1}7 \\ &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3^{2n-1} + 2^{4n} &= 4(3^{2n-1} + 2^{4n-2}) \\ &= 4(9^{n-1}3 + 16^{n-1}4) \\ &\equiv 0 \pmod{28}. \end{aligned}$$

2.2 不等式に関するもの

2.2.1 冪に関するもの

p:20230808

Proposition 32. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

証明 32.1. $2^0 = 1 > 0$ である. また, $n = (n-1) + 1$ であるが, $n \geq 1$ に対し, $2^{n-1} + 1 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 32.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > n.$$

このとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^0 = 1 > 0.$$

Induction Step: $n \geq 1$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} > n-1$ である. また, $n \geq 1$ であるので $2^{n-1} \geq 1$ であるので,

$$n = (n-1) + 1 < 2^{n-1} + 1 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1}(1+1) = 2^n.$$

注 32.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 1$$

であるので, $x \geq 0$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加. また $f(0) = 1 > 0$ であるので, $x \geq 0$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 0$ において $2^x > x$.

注 32.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $2^0 = 1 > 0$ である. また, $n \geq 1$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n > n.$$

p:20230809

Proposition 33. $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \implies 2^n \geq n+2$.

証明 33.1. $2^2 = 4 = 2+2$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 2$ に対し, $2^{n-1} > 1$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 33.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n+2.$$

このとき, 2 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(2)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^2 = 4 = 2+2.$$

Induction Step: $n \geq 3$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq n+1$ である. また, $n \geq 3$ であるので $2^{n-1} \geq 1$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq n+1 + 2^{n-1} \geq n+1+1 = n+2.$$

注 33.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x - 2$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 1$$

であるので, $x \geq 0$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加. また $f(2) = 0$ であるので, $x \geq 2$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 2$ において $2^x > x+2$.

注 33.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 2$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n} = 1 + n + 1 = n + 2.$$

p:20230810

Proposition 34. $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \implies 2^n \geq n + 5.$

証明 34.1. $2^3 = 8 = 3 + 5$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 2$ に対し, $2^{n-1} > 1$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 34.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n + 5.$$

このとき, 3 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(3)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^3 = 8 = 3 + 5.$$

Induction Step: $n \geq 4$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq n + 4$ である. また, $n \geq 1$ であるので $2^{n-1} \geq 1$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq n + 4 + 2^{n-1} \geq n + 4 + 1 = n + 5.$$

注 34.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x - 5$$

とおく.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 1$$

であるので, $x \geq 0$ において, $\frac{d}{dx} f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加. また $f(3) = 0$ であるので, $x \geq 3$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 3$ において $2^x > x + 5$.

注 34.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 3$ に対し, $n + 2 \geq 5$ であるから,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 1 + n + n + 1 = n + (n + 2) \geq n + 5.$$

p:20230813

Proposition 35. $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \implies 2^n > 2n + 1.$

証明 35.1. $2^3 = 8 > 7 = 6 + 1$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 2$ に対し, $2^{n-1} \geq 2$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 35.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > 2n + 1.$$

このとき, 3 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(3)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$2^3 = 8 > 7 = 6 + 1.$$

Induction Step: $n \geq 4$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq 2n-1$ である. また, $n \geq 2$ であるので $2^{n-1} \geq 2$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq 2n-1 + 2^{n-1} \geq 2n-1 + 2 = 2n+1.$$

注 35.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - 2x - 1$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 2$$

であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加. また $f(3) = 8 - 6 - 1 = 1$ であるので, $x \geq 3$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 3$ において $2^x > 2x + 1$.

注 35.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 3$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 1 + n + n + 1 = 2n + 2 > 2n + 1.$$

p:20230814

Proposition 36. $n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \implies 2^n > 3n$.

証明 36.1. $2^4 = 16 > 12 = 3 \cdot 4$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 3$ に対し, $2^{n-1} \geq 3$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 36.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > 3n.$$

このとき, 4 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(4)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^4 = 16 > 12 = 3 \cdot 4.$$

Induction Step: $n \geq 5$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq 3n-3$ である. また, $n \geq 3$ であるので $2^{n-1} \geq 4$ であるので,

$$2^n = 2^{n-1}(1+1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} \geq 3n-3 + 2^{n-1} \geq 3n-3 + 4 = 3n+1 > 3n.$$

注 36.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - 3x$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 2 \cdot 2^x - 3$$

であるので, $x \geq 2$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 2$ において単調増加. また $f(4) = 16 - 12 = 4$ であるので, $x \geq 4$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 4$ において $2^x > 3x$.

注 36.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 4$ に対し, $\frac{n+2}{2} \geq 3$

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} > \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-1} \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= \left(\frac{n+3}{2}\right)n \\ &= \left(\frac{n+2}{2} + \frac{1}{2}\right)n > 3n. \end{aligned}$$

p:20230815

Proposition 37. $n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \implies 2^n \geq n^2$.

証明 37.1. $2^4 = 16 \geq 16$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 4$ に対し, $2(n-1)^2 - n^2 = n^2 - 4n + 1 = (n-2)^2 - 3 \geq 1 > 0$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 37.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n^2.$$

このとき, 4 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(4)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$2^4 = 16 = 4^2.$$

Induction Step: $n \geq 5$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} \geq (n-1)^2$ である. また,

$$2(n-1)^2 - n^2 = n^2 - 4n + 1 = (n-2)^2 - 3$$

であり, $n \geq 3$ であるので, $2(n-1)^2 - n^2 > 0$, つまり

$$2(n-1)^2 > n^2.$$

よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \geq 2(n-1)^2 > n^2.$$

注 37.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x^2$$

とおく.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \log 2 \cdot 2^x - 2x \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= (\log 2)^2 \cdot 2^x - 2\end{aligned}$$

であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. また, $\frac{d}{dx}f(1) > 0$ であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加. また $f(4) = 16 - 16 = 0$ であるので, $x \geq 4$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 4$ において $2^x \geq x^2$.

注 37.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n = 4$ に対し, $2^4 = 16 = 4^2$. $n \geq 5$ に対し,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} > \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

p:20230816

Proposition 38. $n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \implies 2^n > n^2 - 2n + 15$.

証明 38.1. $n^2 - 2n + 15 = (n-1)^2 + 14$ である. $2^5 = 32 > 30 = 4^2 + 14$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 6$ に対し, $2((n-2)^2 + 14) - ((n-1)^2 + 14) = 2(n^2 - 4n + 4) - (n^2 - 2n + 1) + 14 = n^2 - 6n + 21 = (n-3)^2 + 12 > 0$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 38.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > n^2 - 2n + 15.$$

このとき, 5 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(5)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}2^5 &= 32 \\ 5^2 - 2 \cdot 5 + 15 &= 30.\end{aligned}$$

Induction Step: $n \geq 6$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} > (n-1)^2 - 2(n-1) + 15$ である. また,

$$2((n-1)^2 - 2(n-1) + 15) - (n^2 - 2n + 15) = 2(n^2 - 4n + 4) - (n^2 - 2n + 1) + 14 = n^2 - 6n + 21 = (n-3)^2 + 12 > 0$$

であるので,

$$2((n-1)^2 - 2(n-1) + 15) > n^2 - 2n + 15.$$

よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2((n-1)^2 - 2(n-1) + 15) > n^2 - 2n + 15.$$

注 38.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - (x^2 - 2x + 15)$$

とおく.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \log 2 \cdot 2^x - 2x + 2 \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= (\log 2)^2 \cdot 2^x - 2\end{aligned}$$

であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. また, $\frac{d}{dx}f(1) = 2\log 2 > 0$ であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加. また $f(5) = 32 - 25 + 10 - 15 = 2 > 0$ であるので, $x \geq 5$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 5$ において $2^x > x^2$.

注 38.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n \geq 5$ に対し, $n - (-2n + 15) = 3n - 15 \geq 0$ であるので, $n > -2n + 15$. よって,

$$\begin{aligned}2^n &= (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} > \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} \\ &= n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n \\ &= n^2 + n \\ &> n^2 - 2n + 5.\end{aligned}$$

p:20230817

Proposition 39. $n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \implies 2^n > 10n^2$.

証明 39.1. $2^{10} = 1024 > 1000 = 10n^2$ である. また, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であるが, $n \geq 6$ に対し, $2 \cdot 10(n-1)^2 - 10n^2 = 10(n^2 - 4n + 2) = 10((n-2)^2 - 4) \geq 0$ であるので, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 39.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n > 10n^2.$$

このとき, 10 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(10)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}2^{10} &= 1024 \\ 10 \cdot 10^2 &= 1000\end{aligned}$$

Induction Step: $n \geq 11$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} > 10(n-1)^2$ である. また,

$$2 \cdot 10(n-1)^2 - 10n^2 = 10(n^2 - 4n + 2) = 10((n-2)^2 - 4) \geq 0$$

であるので,

$$2 \cdot 10(n-1)^2 > 10n^2.$$

よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(10(n-1)^2) > 10n^2.$$

注 39.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - 10x^2$$

とおく.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \log 2 \cdot 2^x - 10x \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= (\log 2)^2 \cdot 2^x - 10\end{aligned}$$

であるので, $x \geq 4$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. また, $\frac{d}{dx}f(6) > 0$ であるので, $x \geq 6$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 6$ において単調増加. また $f(10) = 1024 - 1000 = 24 > 0$ であるので, $x \geq 10$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 10$ において $2^x > 10x^2$.

p:20230818

Proposition 40. $n \in \mathbb{N}, n \geq 10 \implies 2^n \geq n^3$.

証明 40.1. $2^{10} = 1024 > 1000 = n^3$ である. また, $2 \cdot (11-1)^3 = 2000$, $11^3 = 1331$ であることから, $n \geq 11$ に対し, $2 \cdot (n-1)^3 > n^3$ である. したがって, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ であることから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 40.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$2^n \geq n^3.$$

このとき, 10 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(10)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}2^{10} &= 1024, \\ 10^3 &= 1000.\end{aligned}$$

Induction Step: $n \geq 11$ とする. $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $2^{n-1} > 10(n-1)^2$ である. また, $2 \cdot (11-1)^3 = 2000$, $11^3 = 1331$ であることから, $n \geq 11$ に対し,

$$2 \cdot (n-1)^3 > n^3$$

であることがわかる. よって,

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(n-1)^3 > n^3.$$

注 40.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 2^x - x^3$$

とおく.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \log 2 \cdot 2^x - 3x^2 \\ \frac{d^2}{dx^2}f(x) &= (\log 2)^2 \cdot 2^x - 6x \\ \frac{d^3}{dx^3}f(x) &= (\log 2)^3 \cdot 2^x - 6\end{aligned}$$

であるので, $x \geq 3$ において, $\frac{d^3}{dx^3}f(x) > 0$. よって, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ は, $x \geq 3$ において単調増加. また, $\frac{d^2}{dx^2}f(5) > 0$ であるから, $x \geq 5$ において, $\frac{d^2}{dx^2}f(x) > 0$. よって, $\frac{d}{dx}f(x)$ は, $x \geq 5$ において単調増加. また, $\frac{d}{dx}f(8) > 0$ であるので, $x \geq 8$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 8$ において単調増加. また $f(10) = 1024 - 1000 = 24 > 0$ であるので, $x \geq 10$ において $f(x) > 0$. よって, $x \geq 10$ において $2^x > x^3$.

p:20230819

Proposition 41. $n \in \mathbb{N} \implies 3^n \geq 2n + 1$.

証明 41.1. $3^0 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$ である. また, $n \geq 1$ に対し $3^{n-1} \geq 1$ であり, $3^n = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}$ であることから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 41.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^n \geq 2n + 1.$$

このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned}3^0 &= 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 &= 1.\end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $3^{n-1} \geq 2n-1$ である. また, $n \geq 1$ に対し, $3^n \geq 1$ であるので,

$$3^n = 3 \cdot 3^{n-1} = (1+2)3^{n-1} = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} \geq 2n-1 + 2 \cdot 3^{n-1} \geq 2n-1 + 2 = 2n+1.$$

注 41.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 3^x - (2x + 1)$$

とおく.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \log 3 \cdot 3^x - 2$$

であるので, $x \geq 1$ において, $\frac{d}{dx}f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 1$ において単調増加. また $f(1) = 3 - 3 = 0$ であるので, $x \geq 1$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 1$ において $3^x \geq 2x + 1$. また, $f(0) = 3^0 - (2 \cdot 0 + 1) = 0$ であるので, $x = 0$ のときも, $3^x \geq 2x + 1$.

注 41.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n = 0$ に対し, $3^0 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$. $n \geq 1$ に対し,

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} 2 = 1 + 2n.$$

p:20230820

Proposition 42. $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \implies 3^n > 4n + 10$.

証明 42.1. $3^3 = 27 > 22 = 4 \cdot 3 + 10$ である. また, $n \geq 2$ に対し $3^{n-1} \geq 2$ であり, $3^n = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}$ であることから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 42.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$3^n > 4n + 10.$$

このとき, 3 以上の整数 n で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(3)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} 3^3 &= 27 \\ 4 \cdot 3 + 10 &= 22. \end{aligned}$$

Induction Step: $n \geq 4$ とし, $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $3^{n-1} > 4n + 6$ である. また, $n \geq 2$ に対し, $3^{n-1} \geq 2$ であるので,

$$3^n = 3 \cdot 3^{n-1} = (1+2)3^{n-1} = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} > 4n + 6 + 2 \cdot 3^{n-1} \geq 4n + 6 + 2 \cdot 2 = 4n + 10.$$

注 42.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う:

$$f(x) = 3^x - (4x + 10)$$

とおく.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \log 3 \cdot 3^x - 4$$

であるので, $x \geq 2$ において, $\frac{d}{dx} f(x) > 0$. したがって, $f(x)$ は $x \geq 2$ において単調増加. また $f(3) = 27 - 24 = 3 > 0$ であるので, $x \geq 1$ において $f(x) \geq 0$. よって, $x \geq 3$ において $3^x > 4x + 10$.

注 42.4. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示すこともできる: $n = 0$ に対し, $3^0 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$. $n \geq 3$ に対し, $2n \geq 6$, $2^{n-1} \geq 4$, $2^n \geq 8$ であるので

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} 2 + \binom{n}{2} 2^{n-1} + 2^n = 1 + 2n + 2^{n-1}n + 2^n \geq 1 + 6 + 4n + 8 = 4n + 15 > 4n + 10.$$

p:20230821

Proposition 43. $t > 0$ とする. $\forall n \in \mathbb{N}, (1+t)^n \geq 1 + nt$.

証明 43.1. $(1+t)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot t$ である. また, $(1+t)^n = (1+t)(1+t)^{n-1} = (1+t)^{n-1} + t(1+t)^{n-1}$ であることから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 43.2. $t > 0$ とする. $P(n)$ を次の命題とする:

$$(1+t)^n \geq 1 + nt.$$

このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$\begin{aligned}(1+t)^0 &= 1 \\ 1+0 \cdot t &= 1.\end{aligned}$$

Induction Step: $n \geq 1$ とし, $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $(1+t)^{n-1} > 1+t(n-1)$ である. また, $t > 0$ であるので, $n \geq 1$ に対し $t^2(n-1) \geq 0$ である. よって,

$$\begin{aligned}(1+t)^n &= (1+t)(1+t)^{n-1} \\ &= (1+t)^{n-1} + t(1+t)^{n-1} \\ &\geq (1+t(n-1)) + t(1+t(n-1)) \\ &= 1+tn+t^2(n-1) \\ &\geq 1+tn.\end{aligned}$$

注 43.3. 数学的帰納法を用いず, 以下のように示す方が一般的だと思う: $n=0$ に対し, $(1+t)^0 = 1 = 1+t \cdot 0$. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し,

$$(1+t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} t = 1+nt.$$

p:20230823

Proposition 44. $t > 0$ とする. $\forall n \in \mathbb{N}, (1-t)^n \geq 1-nt$.

証明 44.1. $(1+t)^0 = 1 = 1+0 \cdot t$ である. また, $(1-t)^n = (1-t)(1-t)^{n-1} = (1-t)^{n-1} - t(1-t)^{n-1}$ であることから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 44.2. $t > 0$ とする. $P(n)$ を次の命題とする:

$$(1-t)^n \geq 1-nt.$$

このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは、以下から明らか:

$$\begin{aligned}(1-t)^0 &= 1 \\ 1-0 \cdot t &= 1.\end{aligned}$$

Induction Step: $n \geq 1$ とし, $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $(1-t)^{n-1} > 1-t(n-1)$ である. また, $t > 0$ であるので, $n \geq 1$ に対し $t^2(n-1) \geq 0$ である. よって,

$$\begin{aligned}(1-t)^n &= (1-t)(1-t)^{n-1} \\ &= (1-t)^{n-1} - t(1-t)^{n-1} \\ &\geq (1-t(n-1)) - t(1-t(n-1)) \\ &= 1-tn+t^2(n-1) \\ &\geq 1-tn.\end{aligned}$$

p:20230824

Proposition 45. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, n^2 \leq (\sum_{i=1}^n i) (\sum_{i=1}^n \frac{1}{i})$.

証明 45.1. $1^2 = 1 \cot 1$ である. また,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) &= n + \left(\sum_{i=2}^n \frac{n}{i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &\geq 2n - 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &\geq 2n - 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) \end{aligned}$$

であることから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 45.2. $P(n)$ を次の命題とする:

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right).$$

このとき, すべての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(1)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$1^2 = 1 \cdot 1.$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. 仮定から $(n-1)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right)$ である. また, $t > 0$ であるので, $n \geq 1$ に対し $t^2(n-1) \geq 0$ である. よって,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) &= \left(n + \sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &= n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &= n \cdot 1 + n \left(\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &= n \cdot 1 + \left(\sum_{i=2}^n \frac{n}{i} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &\geq n \cdot 1 + \left(\sum_{i=2}^n 1 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &= n + n - 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &= 2n - 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \\ &\geq 2n - 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) \\ &\geq 2n - 1 + (n-1)^2 \\ &= 2n - 1 + n^2 - 2n + 1 \end{aligned}$$

$$= n^2.$$

p:20230909

Proposition 46. $a > 0, b > 0$ とする. $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$.

証明 46.1. $\frac{a^0+b^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^0$ である. また,

$$\begin{aligned} \frac{a^n+b^n}{2} &= \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})(a+b) - ab(a^{n-2}+b^{n-2})}{2} \\ &= \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} + \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} - \frac{ab(a^{n-2}+b^{n-2})}{2} \\ &= \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} + \frac{(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1}) - 2ab(a^{n-2}+b^{n-2})}{4} \\ &= \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} + \frac{a^n+b^n - a^{n-1}b - ab^{n-1}}{4} \\ &= \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} + \frac{a^{n-1}(a-b) + b^{n-1}(b-a)}{4} \\ &= \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} + \frac{(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})}{4} \\ &= \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} + \frac{(a-b)((a-b)\sum_{i=0}^{n-2} a^i b^{n-2-i})}{4} \\ &= \frac{(a+b)}{2} \frac{(a^{n-1}+b^{n-1})}{2} + \frac{(a-b)^2 \sum_{i=0}^{n-2} a^i b^{n-2-i}}{4} \end{aligned}$$

であることから, n に関する数学的帰納法により示せる.

証明 46.2. $a > 0, b > 0$ とする. $P(n)$ を次の命題とする:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}.$$

このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことを, 数学的帰納法で示す.

Base Case: $P(0)$ が成り立つことは, 以下から明らか:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^0 &= 1. \\ \frac{a^0+b^0}{2} &= \frac{1+1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Induction Step: $P(n-1) \implies P(n)$ を示す. $a > 0, b > 0$ であるので, $n=1$ に対しては

$$\frac{(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})}{4} = 0 \geq 0$$

であり, $n > 1$ に対しは $(a-b)^2 \geq 0, a^i b^{n-2-i} > 0$ であることから

$$\frac{(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})}{4} = \frac{(a-b)^2 \sum_{i=0}^{n-2} a^i b^{n-2-i}}{4} \geq 0$$

である. また, 仮定から $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}$ であるので,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^n &= \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1} \\ &\leq \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}\right) \\ &= \frac{(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})}{4} \\ &\leq \frac{(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})}{4} + \frac{(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})}{4} \\ &= \frac{(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1}) + (a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})}{4} \\ &= \frac{2a^n + 2b^n}{4} \\ &= \frac{a^n + b^n}{2}. \end{aligned}$$

3 制限された数学的帰納法 (Limited mathematical induction)

4 Todo

Proposition 47. $a_1 = 7, a_n = a_n^3 \ a_n \equiv 1 \pmod{3^n}$

Proposition 48. $\forall p, q, n \in \mathbb{N}, \binom{p+q}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{p}{i} \binom{q}{n-i}.$

Proposition 49. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq \frac{2n}{n+1}.$

Proposition 50. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} < 2\sqrt{n}.$

Proposition 51. $n \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq 2$ ならば, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}.$

Proposition 52. $a_i > 0$ なら, $\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^m \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^m}{n}.$

Proposition 53. $x \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|.$

Proposition 54. $n \geq 2$ ならば, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}.$

Proposition 55. f を凸関数とする. $a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1$ ならば, $\sum_i a_i f(x_i) \geq \sum_i f(a_i x_i).$

Proposition 56. $n \in \mathbb{N}$ とする. $n \geq 12$ ならば, $n = 4x + 5y$ を満たす $x, y \in \mathbb{N}$ が存在する.

Proposition 57. a_n を fibonacci 数列とする. $a_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$, ただし $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする.

Proposition 58. $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}, a_0 = 1$ とする. $a_n < a_{n+1}.$

Proposition 59. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_n = (n^3 - 3n^2 + 2n)a_{n-3}.$ このとき, $a_n = n!.$

Proposition 60. $a, b \in \mathbb{Z}.$ α, β は $x^2 - ax + b = 0$ の 2 つの解. このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{Z}.$

Proposition 61. $a, b \in \mathbb{Z}, (2 + \sqrt{3})^n = a + \sqrt{3}b$ ならば, $(2 - \sqrt{3})^n = a - \sqrt{3}b.$

Proposition 62. $a, b \in \mathbb{Z}$, $(3 + 2\sqrt{2})^n = a + \sqrt{2}b$ ならば, $(3 - 2\sqrt{2})^n = a - \sqrt{2}b$.

Proposition 63. $(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 64. $\frac{(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n}{2} \in \mathbb{Z}$.

Proposition 65. $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ ならば, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Proposition 66. $x^4 + y^4 = z^4$ となる整数は存在しない.

Proposition 67. p が素数なら \sqrt{p} は無理数.

Proposition 68. *Fibonacci* 数列は互いに素.

Proposition 69. $n \geq 4$ なら $n! > 2^n$

Proposition 70. $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$.

Proposition 71. $\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^i}{dx^i} f \cdot \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} g$

Proposition 72. $0 \leq 3a_n \leq \sum_{i=0}^n a_i$ をみたす a_n は $a_n = 0$.

Proposition 73. $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \frac{1}{n}$ をみたす $a_i \in \{\frac{1}{i}, -\frac{1}{i}\}$ が存在する.

Proposition 74. 一筆書き.

Proposition 75. ほうじょ原理

Proposition 76. $n \geq 4$ とする. 凸 n 角形の対角線の総数は $\frac{n(n-3)}{2}$.

Proposition 77. 一般の位置にある平面上の n 本の直線は, 平面を $\frac{n^2+n+2}{2}$ 個の領域に分ける.

Proposition 78. 素因数分解の一意性.

Proposition 79. あまりの存在.

Proposition 80. ユークリッドごじょほう. 整数, 多項式, ふち.

Proposition 81. 1 変数多項式かんの単項式順序はただ一つ

Proposition 82. *Dickson* の補題

Proposition 83. た変数多項式の *Hilbert* の基底定理.

Proposition 84. まっこーれいの定理.

Proposition 85. GB によるた変数割り算アルゴリズムの標準形の存在.

Proposition 86. $\bigcap_{Y: \triangleleft, X \subset Y} Y = \{ \sum t_i x_i \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \}$

Proposition 87. ヒルベルトの基底定理

Proposition 88. 標準次数のときのネーターのせいきかていり

Proposition 89. 分解たいの存在.

Proposition 90. 延長の存在.

Proposition 91. 有限次ぶんりかくだいたいは単純

Proposition 92. $\text{char} F = p$, $f \in F[x]$ がきやくなら, ぶんり多項式 h をつかって $f(x) = h(x^{p^e})$ とかける.

Proposition 93. E/F 有限次拡大. G を E の F 上の自己同型群とする. E は $F[X]$ のある分離多項式 f の最小分解体であるなら, $E^G = F$.

Proposition 94. $G = (V, E)$ が *simple graph* で $V > 2$. $\forall v, v$ のじすうは 2 以上. このとき, G に閉路がある.

Proposition 95. C, C_1, \dots, C_k , 閉路, どの 2 つも辺を共有しない. C は各 C_i と頂点を共有する.
 C, C_1, \dots, C_k の全ての辺を使った閉路がある.

Proposition 96. $G = (V, E)$ 連結. $\forall v, v$ のじすうは 2 の倍数. このとき, G にオイラー閉路がある.

Proposition 97. きほんたいしょうしきは代数独立

Proposition 98. (*Matsumoto's theorem*) 最短表示同士は *braid relation* で移り合う.