

A Daily Problem

ly

Mathematic

2018 年 8 月 12 日

目录

1	函数极限与连续	2
2	一元函数微积分	2
2.1	一元函数微分学	2
2.2	一元函数积分学	4
3	多元向量代数与空间解析几何	9
4	多元微积分	9
4.1	多元函数微分学	9
4.2	重积分	9
4.3	曲线积分与曲面积分	9
5	无穷级数	9
6	微分方程	13
7	Linear Algebra	13
8	真题	13
9	Others	13

1 函数极限与连续

Problem 1. Let $f(x) = \prod_{k=2}^n \sqrt[k]{\cos x}$, if $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = 10$, Find n .

Solution 1

We use the L'Hospital rule, we get:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x + \tan 2x + \cdots + \tan nx)f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k = \frac{(n-1)(n+2)}{4} = 10$$

thus $n = 6$.

Note: We can use that : if $f(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x)$, so $f'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{f_k(x)} f(x)$.

Problem 2. Evaluate the limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{6^k k!}{(2k+1)^k}}{\sum_{k=1}^n \frac{3^k k!}{k^k}}.$$

Solution 2

First use the ratio test to show that $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$ diverges. Now you can apply the Stolz–Cesàro lemma. The limit should be $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

2 一元函数微积分

2.1 一元函数微分学

Problem 1. 设 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续可微, 且存在 $L > 0$ 使得对 $\forall x, y \in (0, +\infty)$ 都有

$$|f'(x) - f'(y)| < L |x - y|$$

证明: $(f'(x))^2 < 2Lf(x)$.

Solution Waiting...

Problem 2. 已知 $\sinh x = x \cosh y$, $x, y \in (0, 1)$, 证明 $y < x < 2y$.

Solution 2

由拉格朗日中值定理:

$$\sinh x - \sinh 0 = x \cosh \xi, \xi \in (0, x)$$

又 $\sinh x = x \cosh y$, 有:

$$x \cosh y = x \cosh \xi, x \in (0, 1)$$

$$\cosh y = \cosh \xi, x \in (0, 1)$$

又 $\cosh x$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 所以有 $y = \xi < x$.

由 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}}}{2} = 1$, 所以有:

$$\int_0^x \cosh x dx > \int_0^x 1 dx = x$$

用 $\frac{x}{2}$ 代替 x 可得到 $\sinh \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$, 两边同时乘上一个 $\cosh x$, 得:

$$\cosh x \sinh x > \frac{x}{2} \cosh x$$

又 $\sinh x = 2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$, 有:

$$\sinh x > x \cosh \frac{x}{2}$$

又 $\sinh x = x \cosh y$, 有

$$x \cosh y > x \cosh \frac{x}{2}, x \in (0, 1)$$

即

$$\cosh y > \cosh \frac{x}{2}$$

又 $\cosh x$ 在 $(0, 1)$ 上严格单增, 所以有 $y > 2x$.

综上, $y < x < 2y$.

2.2 一元函数积分学

Problem 1. Suppose $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous in $[0, 1]$ and differentiable in $(0, 1)$. Suppose $f(0) = 0$ and $0 < f'(x) \leq 1$ for all $x \in (0, 1)$.

(a) Prove that the function $\Phi(x) = (\int_0^x f(t)dt)^2 - \int_0^x f^3(t)dt$ is monotone.

(b) Find all functions f such that

$$(\int_0^1 f(t)dt)^2 = \int_0^1 f^3(t)dt.$$

Solution 1

(a)

(b) For $x > 0$, $f(x) = \int_0^x f'(t)dt > 0$.

We can get $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$, so $\Phi(x) = 0 \implies \Phi'(x) = 0 \implies 2 \int_0^x f(t)dt = f^2(x) \implies f'(x) = 1 \implies f(x) = x + C, \text{ for } C \in \mathbb{R}$.

Problem 2. 若函数 f 在 $[a, b]$ 上单调增加, 证明:

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

Solution 2

- **解法一:** 令 $F(x) = \int_a^x tf(t)dt - \frac{a+b}{2} \int_a^x f(t)dt$.

则 $F(a) = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} \left[(x-a)f(x) - \int_a^x f(x)dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[f(x) \int_a^x dt - \int_a^x f(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x [f(x) - f(t)]dt \end{aligned}$$

因为 f 在 $[a, b]$ 上单调增加, $f(x) - f(t) - x \geq t$, 所以 $f(x) - f(t) \geq 0$, 所以 $F'(x) \geq 0$, 即 $F(x)$ 单调增加, 所以

$$F(x) \geq F(0) = 0 (x \in [a, b])$$

从而有 $F(b) \geq 0$, 即原不等式成立.

- **解法二:** 由于 f 在 $[a, b]$ 上单调增加, 从而对 $\forall x, y \in [a, b]$ 恒有

$$(f(x) - f(\frac{a+b}{2}))(x - \frac{a+b}{2}) \geq 0$$

即:

$$xf(x) - \frac{a+b}{2}f(x) - xf(\frac{a+b}{2}) + \frac{a+b}{2}f(\frac{a+b}{2}) \geq 0$$

对两边积分可得:

$$\int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2}) \int_a^b xdx + \frac{a+b}{2}f(\frac{a+b}{2}) \int_a^b dx \geq 0$$

$$\int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

即原不等式成立.

- **解法三(积分第二中值定理):** 将不等式的右边移到左边, 然后用积分第二中值定理变形即可.

Problem 3. 设函数 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的正值连续函数, 且单调递减, 证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

Solution 3

- **解法一:** 由于函数 $f(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的正值连续函数, 则

$$\int_0^1 f(x)dx > 0, \int_0^1 xf(x)dx > 0$$

这样只需证明

$$\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 xf^2(x)dx \geq 0,$$

即证

$$\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 yf(y)dy - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 yf^2(y)dy \geq 0,$$

亦即证

$$\int_0^1 \int_0^1 yf(x)f(y)[f(x) - f(y)]dxdy \geq 0.$$

考虑二重积分

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)(y-x)[f(x) - f(y)]dxdy.$$

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调减少, 则对于 $\forall x, y \in [0, 1]$ 有

$$(y-x)[f(x) - f(y)] \geq 0.$$

又函数 $f(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的正值函数, 则由二重积分的保号性知 $I \geq 0$, 又

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)y[f(x) - f(y)]dxdy - \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)x[f(x) - f(y)]dxdy,$$

将上式右边第二项中的 x, y 对调, 可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)y[f(x) - f(y)]dxdy - \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)y[f(y) - f(x)]dxdy \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)y[f(x) - f(y)]dxdy. \end{aligned}$$

则由 $I \geq 0$ 知原不等式成立.

• 解法二: 令

$$F(t) = \int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 xf^2(x)dx, 0 \leq t \leq 1.$$

则

$$\begin{aligned} F'(t) &= f^2(t) \int_0^1 x f(x) dx + t f(t) \int_0^1 f^2(x) dx - f(t) \int_0^1 x f^2(x) dx - t f^2(t) \int_0^1 f(x) dx \\ &= f(t) \int_0^1 (x-t)[f(t)-f(x)] f(x) dx \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的正值单调减函数, 有 $(x-t)[f(t)-f(x)] \geq 0$, 由积分的保号性知 $F'(t) \geq 0$, 即 $F(t)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调增加, 即 $F(1) \geq F(0) = 0$, 即原不等式成立.

Problem 4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且递减, 证明:

$$\text{当 } 0 < \lambda < 1 \text{ 时, } \int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx.$$

Solution 4

- **解法一:** 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt - x \int_0^1 f(t) dt, x \in (0, 1)$, 则 $F(0) = 0, F(1) = 0$.
有

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) - \int_0^1 f(t) dt \\ &= f(x) - f(\phi), \phi \in (0, 1) \end{aligned}$$

于是当 $0 < x < \phi$ 时, $F'(x) = f(x) - f(\phi) > 0$, 当 $\phi < x < 1$ 时, $F'(x) = f(x) - f(\phi) < 0$.
即 $F(x)$ 在 $(0, \phi)$ 内单调增加, 在 $(\phi, 1)$ 内单调减少, 所以 $F(x) \geq \min F(0), F(1) = 0$. 即

$$\int_0^x f(t) dt - x \int_0^1 f(t) dt \geq 0, x \in (0, 1).$$

得证.

- **解法二:** 对 $\int_0^\lambda f(x) dx$, 令 $x = \lambda t$, 则原不等式可化为

$$\int_0^\lambda f(x) dx = \int_0^1 f(\lambda t) d\lambda t \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx.$$

即证

$$\lambda \int_0^1 f(\lambda t) dt \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$$

即证 $f(\lambda t) \geq f(t)$, 因为 $0 < \lambda < 1$, 所以 $\lambda t < t$, 又 $f(x)$ 单调减少, 故结论成立.

Problem 5. 计算 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$.

Solution 5

由欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 则 $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$. 由以上两个公式, 相减可得

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (1)$$

因此, $\sin(2n+1)x = \frac{e^{(2n+1)ix} - e^{-(2n+1)ix}}{2i}$. 考虑到被积函数为 $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} &= \frac{\frac{e^{(2n+1)ix} - e^{-(2n+1)ix}}{2i}}{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}} \\ &= \frac{e^{(2n+1)ix} - e^{-(2n+1)ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \end{aligned}$$

利用恒等式

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

所以 $e^{(2n+1)ix} - e^{-(2n+1)ix}$ 可以展开为:

$$(e^{ix} - e^{-ix})(e^{2nix} + e^{(2n-1)ix} \cdot e^{-ix} + \cdots + e^{-2nix}).$$

因此, 原积分可以化为:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{2\pi} (e^{2nix} + e^{(2n-1)ix} \cdot e^{-ix} + \cdots + e^{-2nix}) dx \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Problem 6. 证明: $\int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{dx}{x} = \int_1^a f(x + \frac{a^2}{x}) \frac{dx}{x}$.

Solution 6

$$\begin{aligned}\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} &= \int_1^{\sqrt{a}} f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} + \int_{\sqrt{a}}^1 f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} \\&\stackrel{u=\frac{a}{x}}{\Longrightarrow} \int_1^{\sqrt{a}} f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} + \int_1^{\sqrt{a}} f\left(u^2 + \frac{a^2}{u^2}\right) \frac{du}{u} \\&= 2 \int_1^{\sqrt{a}} f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} \\&\stackrel{t=x^2}{\Longrightarrow} \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} \\&= \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

3 多元向量代数与空间解析几何

4 多元微积分

4.1 多元函数微分学

4.2 重积分

4.3 曲线积分与曲面积分

5 无穷级数

Problem 1. 设 $(\lambda_n)_{n=1,2,\dots}$ 是严格单调递增趋于无穷大的正数列。证明：若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n$

收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

Solution 1.

- 解法一(构造法): 我们令 $A_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $A_0 = 0$, 其中 $n \geq 1$, 则有:

$$a_k = \frac{A_k - A_{k-1}}{\lambda_k} (k \geq 1)$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{A_k - A_{k-1}}{\lambda_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right) A_k + \frac{A_n}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

用为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n$ 收敛, 所以 A_n 有界, 又:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) = \frac{1}{\lambda_1}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) A_n$ 收敛. 由已知条件可知 $\lambda_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 我们可以得到:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{\lambda_n} = 0$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right) A_k + \frac{A_n}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) A_n$$

故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 得证.

- **解法二(Abel判别法):** 我们令 $A_n = \frac{1}{\lambda_n} (n \geq 1)$, 由题意可知数列 A_n 单调递减且有界,

又级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}$ 收敛, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n \cdot A_n$$

收敛.

Problem 2. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ 的收敛域.

Solution 2.

令 $t = \frac{x}{2x+1}$, 考察 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}} t^n$ 的收敛域. 于是我们由根值判别法可得:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}} \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \ln n\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, 从而该级数发散;

类似可以得到当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}} \cdot (1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$ 收敛.

所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[n]{n}} t^n$ 的收敛域为 $-1 < x \leq 1$. 从而有 $-1 < \frac{x}{2x+1} \leq 1$, 解该不等式可得 $x \leq -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$. 所以原级数的收敛域为: $(-\infty, -1] \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$.

Problem 3. 设 $f(x)$ 为周期为 2π 的连续函数, 令

$$F(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

设 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)$, 试求 $F(x)$ 的 Fourier 系数 $A_0, A_n, B_n (n = 1, 2, \dots)$.

Solution 3

Problem 4. 求 $\sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}}$ 的整数部分.

Solution 4

记 $I = \sum_{n=1}^{10^9} n^{-\frac{2}{3}}$, 则由积分与级数之间的关系有:

$$I > \int_1^{10^9+1} x^{-\frac{2}{3}} dx = 3(\sqrt[3]{1+10^9} - 1) > 3(10^3 - 1).$$

$$\begin{aligned} I - 1 &= \sum_2^{10^9} n^{-\frac{2}{3}} dx < \int_1^{10^9} x^{-\frac{2}{3}} dx \\ &= 3x^{\frac{1}{3}} \Big|_1^{10^9} = 3(10^3 - 1). \end{aligned}$$

即 $I < 3(10^3 - 1) + 1$, 所以 $[I] = 3(10^3 - 1) = 2997$.

6 微分方程

7 Linear Algebra

8 真题

9 Others

Problem 1. 证明Cauchy-Schwarz不等式:

$$| \langle a, b \rangle | \leq \| a \| \| b \|$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积运算.

Solution Cauchy-Schwarz不等式的另一种形式:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

我们令:

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, B = \sum_{k=1}^n b_k^2, C = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

我们只需证明:

$$C^2 \leq AB$$

考虑到: $(a + b)^2 \geq 0$, 有:

$$0 \leq \sum_{k=0}^n (a_k + t b_k)^2 = A + 2tC + t^2 B$$

当 $B = 0$ 时, 显然 $C = AB$. 当 $B \neq 0$ 时, 由 $\Delta < 0$, 可得:

$$4C^2 - 4AB < 0$$

$$C^2 < AB$$

综上所述:

$$C^2 \leq AB$$

得证.

Problem 2. a) Suppose an entire function f is bounded by M along $|z| = R$. Show that the coefficients C_k in its power series expansion about 0 satisfy

$$|C_k| \leq \frac{M}{R^k}.$$

b) Suppose a polynomial is bounded by 1 in the unit disc. Show that all its coefficients are bounded by 1.

Solution Part a): Since f is an entire function it can be expressed as an infinite power series, i.e.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k.$$

If we recall Cauchy's Integral we have

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

carefully notice that $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}}$ can be written as a geometric series. We have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left\{ \frac{f(w)}{w} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{w}} \right) \right\} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left\{ \frac{f(w)}{w} \cdot \left(1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + \frac{z^3}{w^3} + \dots \right) \right\} dw \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w} dw \right) z^0 + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^2} dw \right) z^1 + \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^3} dw \right) z^2 \dots \end{aligned}$$

Now take the modulus of C_k to get

$$|C_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(w)|}{|w^{k+1}|} |dw| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|w^{k+1}|}$$

Then integrate along $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$ for $\theta \in [0, 2\pi]$ to get

$$|C_k| \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|iRe^{i\theta} d\theta|}{|R^{k+1}e^{ik\theta}|} = \frac{M}{2\pi \cdot R^k} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{R^k}.$$

Hence, $|C_k| \leq \frac{M}{R^k}$.