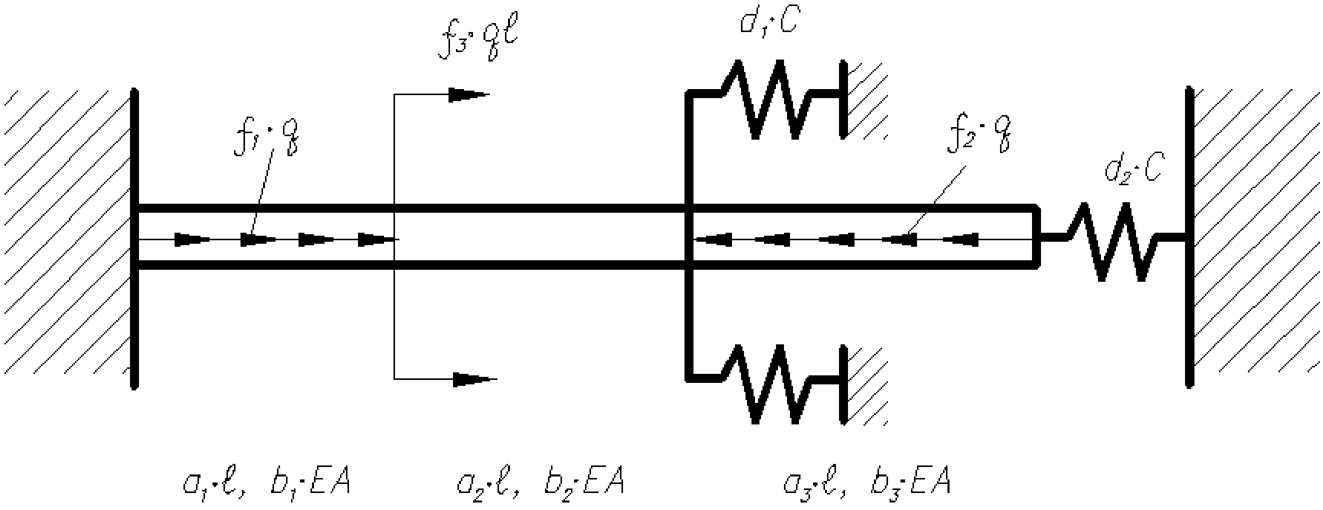
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н. Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №3 по дисциплине «Прикладная механика»

Вариант 6

Выполнил: студент группы РК6-32Б Журавлев Н. В.
Проверил: декан факультета РК, Шашурин Г. В.

Москва
2020

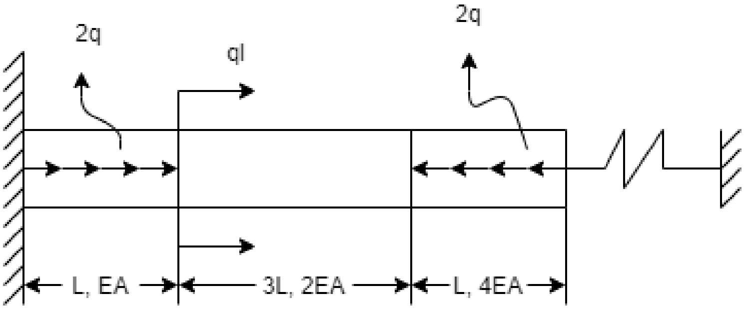


Для заданной системы требуется:

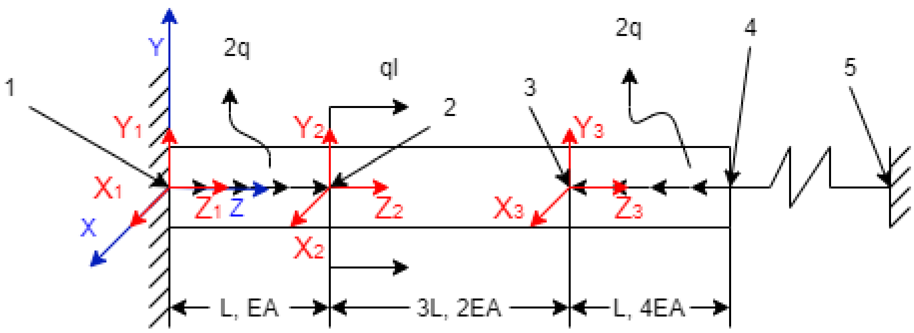
1. Разбить систему на конечные элементы. Ввести локальные и глобальную систему координат, записать матрицы жесткости каждого конечного элемента.
2. Сформировать СЛАУ для нахождения узловых перемещений системы. Найти узловые перемещения системы.
3. При C→0 и при C→∞ вычислить наибольшее значения осевой силы в системе.

Таблица вариантов

№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	d_1	d_2	f_1	f_2	f_3
6	1	3	1	1	2	4	0	1	2	2	1



Разобьём стержень на 4 конечных элемента, пронумеруем их по порядку слева направо, введем глобальную систему координат, введём локальные системы координат и обозначим 5 узлов.



Матрицы жесткости для каждого конечного элемента:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3l} & -\frac{2EA}{3l} \\ -\frac{2EA}{3l} & \frac{2EA}{3l} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{4EA}{l} & -\frac{4EA}{l} \\ -\frac{4EA}{l} & \frac{4EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}$$

Таблица индексов:

	1’	2’
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Получим матрицы жесткости с помощью ансамблирования:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} + \frac{2EA}{3l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{3l} & \frac{2EA}{3l} + \frac{4EA}{l} & -\frac{4EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EA}{l} & \frac{4EA}{l} + C & -C \\ 0 & 0 & 0 & -C & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{5EA}{3l} & \frac{-2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2EA}{3l} & \frac{14EA}{3l} & -\frac{4EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4EA}{l} & \frac{4EA}{l} + C & -C \\ 0 & 0 & 0 & -C & C \end{bmatrix}$$

СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне: $[K] * \{u\}$ = $\{f\}$ ($[K]$ – матрица жесткости системы)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix}$$

Составим вектор сил $\{f\}$, для этого приведем распределенные нагрузки к узловым.

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql \\ 2ql \\ -ql \\ -ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Отсюда запишем СЛАУ в упрощенном виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{5EA}{3l} & -\frac{2EA}{3l} & 0 \\ -\frac{2EA}{3l} & \frac{14EA}{3l} & -\frac{4EA}{l} \\ 0 & -\frac{4EA}{l} & \frac{4EA}{l}+C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2ql \\ -ql \\ -ql \end{Bmatrix}$$

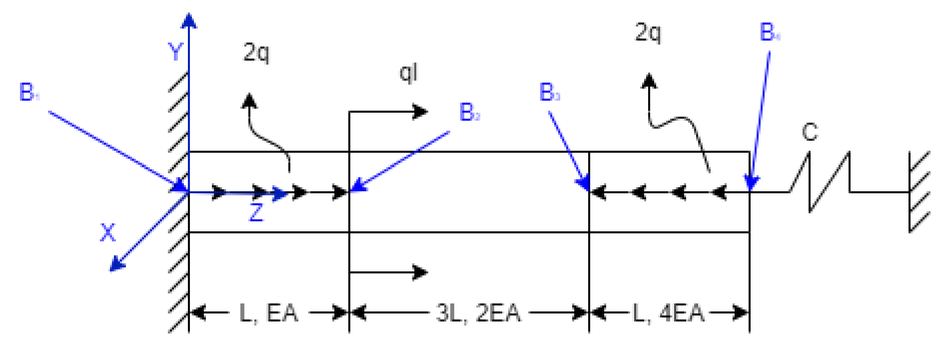
$$w_2 = \frac{13Cl^3q}{4E^2 + 11AECl}$$

$$w_3 = \frac{-Cl^3q - 24AEl^2q}{8A^2E^2 + 22AECl}$$

$$w_4 = \frac{-13Cl^2q}{4AE + 11Cl}$$

$$w = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{13Cl^3q}{AE(4AE+11Cl)} \\ \frac{ql^2(-Cl-24AE)}{AE(8AE+22Cl)} \\ \frac{-13l^2q}{4AE+11Cl} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Обозначим узлы стержня B_i следующим образом:



Построим выражение для поиска осевых напряжений в узлах стержня (Учитывать будем только конечные элементы стержня, исключая пружину из системы).

$\{N(z)\} = [D]\{\varepsilon(z)\}$

$\{N(z)\} = \begin{Bmatrix} N_1(z) \\ N_2(z) \\ N_3(z) \end{Bmatrix}$ – вектор осевых сил в К.

$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1(z) \\ \varepsilon_2(z) \\ \varepsilon_3(z) \end{Bmatrix}$ – вектор деформаций

$[D] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 2EA & 0 \\ 0 & 0 & 4EA \end{bmatrix}$

$\{\varepsilon(z)\} = \frac{\partial\{\mathrm{W(z)}\}}{\partial \mathrm{z}}$

$\{W(z)\}$ – вектор функций перемещений в конечных элементах Данный вектор найдём, аппроксимируя каждую функцию перемещений, опираясь на узловые перемещения и внешние распределённые нагрузки.

$$\{W(z)\} = \begin{Bmatrix} W_1(z) \\ W_2(z) \\ W_3(z) \end{Bmatrix}$$

Т.к. на участках стержня присутствуют распределённые нагрузки, функция перемещения будет иметь квадратичную форму.

$$W_i(z) = a_i z^2 + b_i z + c_i$$

$$a_i = \frac{-q_i}{2E_iA_i}$$

$$b_i = \frac{W_i(l_i) - a_i l_i^2 - c_i}{l_i}$$

$$c_i = W_i(0)$$

Выразим перемещение на границе i-ого элемента через перемещение сечения в j-ом узле:

$$W_i(0) = W_j$$

$$W_i(l_i) = W_{j+1}$$

где ввиду последовательного нумерования узлов и конечных элементов I = j

$$\frac{\partial\{W_i(\mathrm{z})\}}{\partial \mathrm{z}} = 2a_i z + b_i = \frac{-q_i z}{E_iA_i} + \frac{W_{i+1} - W_i}{l_i} + \frac{q_i l_i}{2E_iA_i}$$

Таким образом,

$\{\sigma(z)\} = [D]\{\varepsilon(z)\} = [D]\,\frac{\partial\{\mathrm{W(z)}\}}{\partial \mathrm{z}}$

Вычислим перемещения сечений стержня при C→0

$$w = \lim_{c\to 0} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{13Cl^3q}{AE(4AE + 11Cl)} \\ \dfrac{ql^2(-Cl - 24AE)}{AE(8AE + 22Cl)} \\ \dfrac{-13l^2q}{4AE + 11Cl} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-24ql^2}{8AE} \\ \dfrac{-13l^2q}{4AE} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial\{W_i(\text{z})\}}{\partial \text{z}} = \begin{Bmatrix} \frac{-2qz}{EA} + \frac{0-0}{l} + \frac{2ql}{2EA} \\ \frac{\frac{-24ql^2}{8AE} - 0}{3l} \\ \frac{2qz}{4EA} + \frac{\frac{-13l^2q}{4AE} - \frac{-24ql^2}{8AE}}{l} + \frac{-2ql}{8EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-2qz}{EA} + \frac{ql}{EA} \\ \frac{-ql}{EA} \\ \frac{qz}{2EA} + \frac{-lq}{4EA} + \frac{-ql}{4EA} \end{Bmatrix}$$

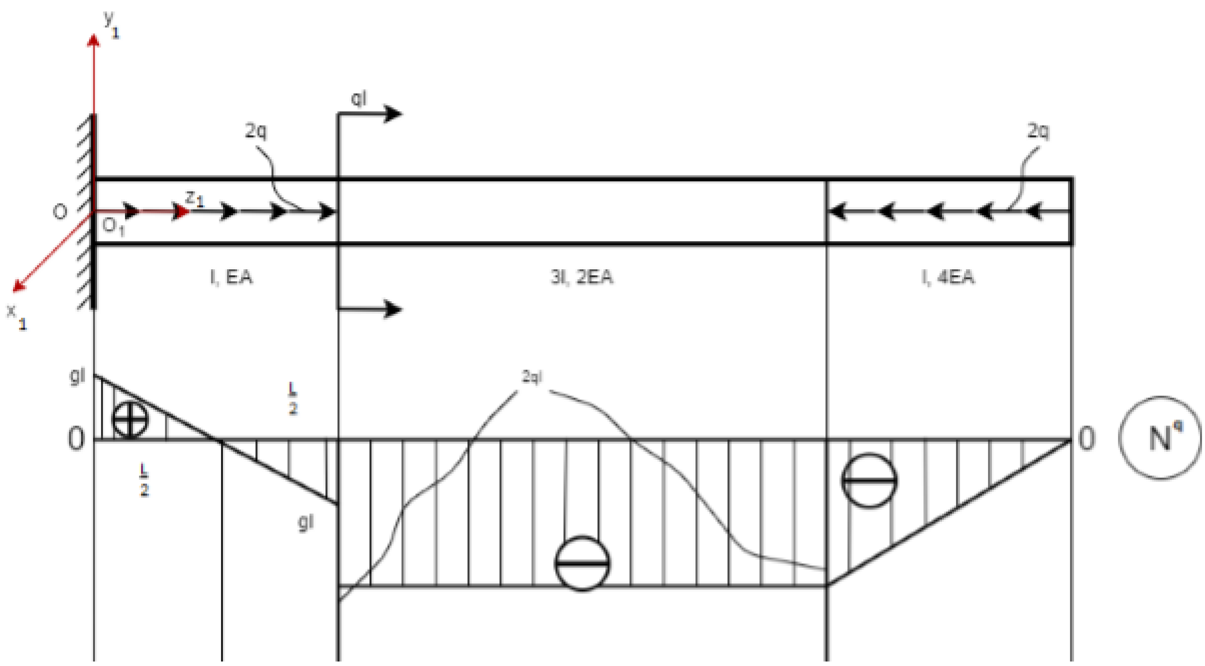
$$\{N(z)\} = [D]\,\frac{\partial\{W_i(\text{z})\}}{\partial \text{z}} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 2EA & 0 \\ 0 & 0 & 4EA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-2qz}{EA} + \frac{ql}{EA} \\ \frac{-ql}{EA} \\ \frac{qz}{2EA} + \frac{-ql}{4EA} + \frac{-ql}{4EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql - 2qz \\ -2ql \\ 2qz + -2ql \end{Bmatrix}$$

Так как получившиеся осевые силы представлены линейной зависимостью, максимальная осевая сила будет находиться в узле стержня. Найдём силы в узлах стержня:

$$\{N(0)\} = \begin{Bmatrix} ql \\ -2ql \\ -2ql \end{Bmatrix}$$

$$\{N(li)\} = \begin{Bmatrix} -ql \\ -2ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Таким образом, максимальная осевая сила (по модулю) $F_{\max} = ql$. Сравним полученные значения со значениями из 1-го ДЗ. В 1-ом ДЗ были построены следующие эпюры для случая, когда С→0:



Как видно из рисунка, полученные методом конечных элементов значения перемещений и напряжений совпадают со значениями, полученными с помощью построения эпюр в первом ДЗ.

Вычислим перемещения сечений стержня при С→ ∞

$$w = \lim_{c\to\infty}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{13Cl^3q}{AE(4AE+11Cl)} \\ \dfrac{ql^2(-Cl-24AE)}{AE(8AE+22Cl)} \\ \dfrac{-13l^2q}{4AE+11Cl} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{13ql^2}{11AE} \\ \dfrac{-ql^2}{22AE} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial\{W_i(\mathrm{z})\}}{\partial \mathrm{z}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{-2qz}{EA} + \dfrac{\frac{13ql^2}{11AE}-0}{l} + \dfrac{2ql}{2EA} \\ \dfrac{\frac{-ql^2}{22AE}-\frac{13ql^2}{11AE}}{3l} \\ \dfrac{2qz}{4EA} + \dfrac{0-\frac{-ql^2}{22AE}}{l} + \dfrac{-2ql}{8EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{-2qz}{EA} + \dfrac{24ql}{11EA} \\ \dfrac{-9ql}{22EA} \\ \dfrac{qz}{2EA} + \dfrac{ql}{22EA} + \dfrac{-ql}{4EA} \end{Bmatrix}$$

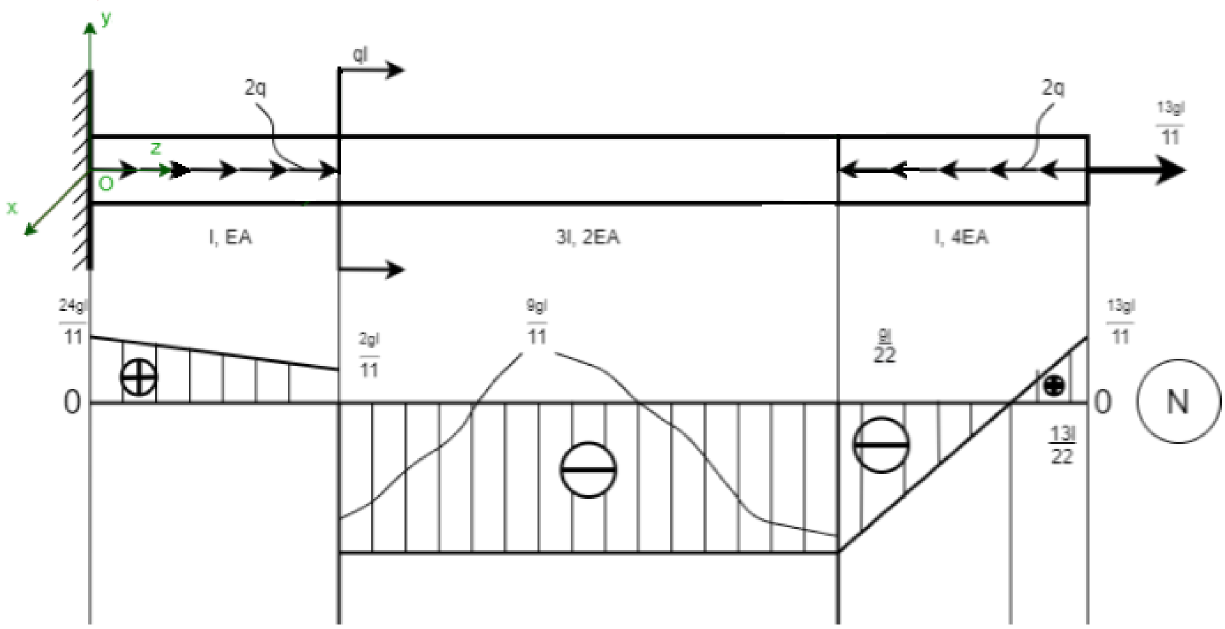
$$\{N(z)\} = [D]\,\frac{\partial\{W_i(\mathrm{z})\}}{\partial \mathrm{z}} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 2EA & 0 \\ 0 & 0 & 4EA \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{-2qz}{EA} + \dfrac{24ql}{11EA} \\ \dfrac{-9ql}{22EA} \\ \dfrac{qz}{2EA} + \dfrac{ql}{22EA} + \dfrac{-ql}{4EA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{24ql}{11} - 2qz \\ \dfrac{-9ql}{11} \\ 2qz + \dfrac{-9ql}{11} \end{Bmatrix}$$

Так как получившиеся осевые силы представлены линейной зависимостью, максимальная осевая сила будет находиться в узле стержня. Найдём силы в узлах стержня:

$$\{N(0)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{24ql}{11} \\ \dfrac{-9ql}{11} \\ \dfrac{-9ql}{11} \end{Bmatrix}$$

$$\{N(li)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{2ql}{11} \\ \dfrac{-9ql}{11} \\ \dfrac{13ql}{11} \end{Bmatrix}$$

Таким образом, максимальная осевая сила (по модулю) $F_{\max}= \frac{24ql}{11}$ Сравним полученные значения со значениями из 1-го ДЗ. В 1-ом ДЗ были построены следующие эпюры для случая, когда C→ ∞:



Как видно из рисунка, полученные методом конечных элементов значения перемещений и напряжений совпадают со значениями, полученными с помощью построения эпюр в первом ДЗ.