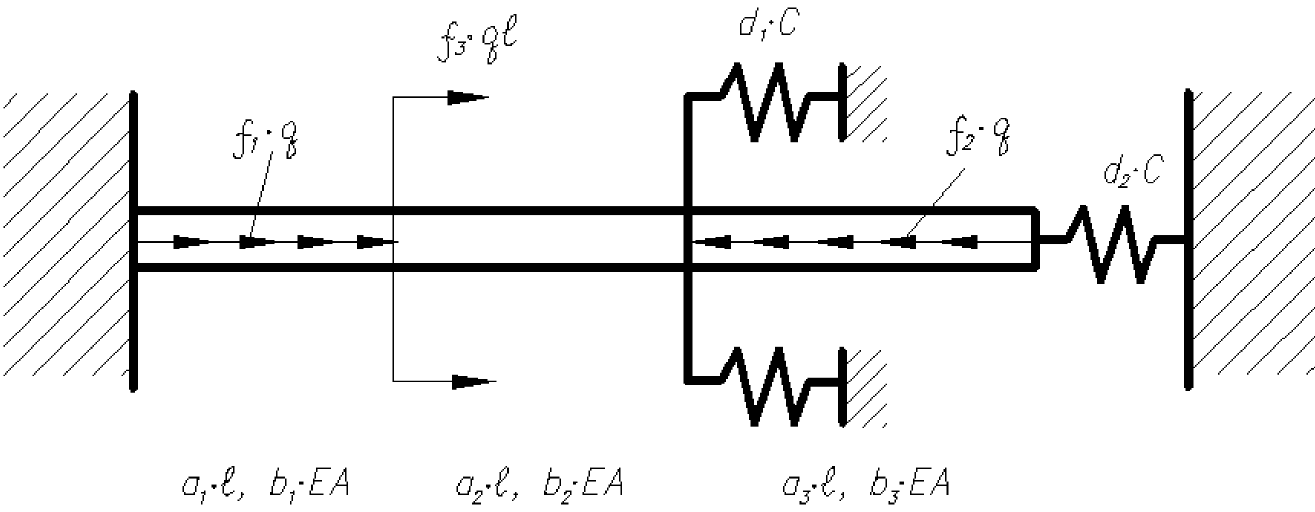
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н. Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №2 по дисциплине «Прикладная механика»

Вариант 6

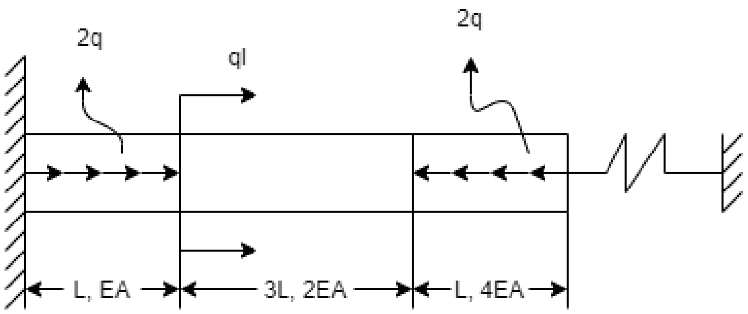
Выполнил: студент группы РК6-32Б Журавлев Н. В.
Проверил: декан факультета РК, Шашурин Г. В.

Москва
2020



Для заданной системы требуется:
1. Записать в матричном виде уравнения состояния стержня при растяжении сжатии.
2. Разбить систему на отдельные стержни, ввести глобальную и локальные системы координат. Записать в матричном виде уравнения изменения вектора состояния при переходе от левого края системы к ее правому краю. Записать в матричном виде граничные условия. Сформировать СЛАУ для поиска вектора начальных параметров. Найти вектор начальных параметров.
3. Используя метод начальных параметров, вычислить перемещения сечений стержня при С→0 и при С→∞.

6	1	3	1	1	2	4	0	1	2	2	1



С помощью системы ДУ определим нагрузки и перемещения на участке стержня с распределенной нагрузкой q:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dz} = -q \\ \dfrac{dW}{dz} = \dfrac{N}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(z) = N_0 - \displaystyle\int_0^z q\,dz = N_0 - qz + 0 \times W_0 \\ W(z) = \displaystyle\int_0^z \dfrac{N_0 - qz}{EA}\,dz = \dfrac{N_0 z}{EA} - \dfrac{qz^2}{2EA} + W_0 \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} N(z) \\ W(z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{z}{EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} N_0 \\ W_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -qz \\ -\dfrac{qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

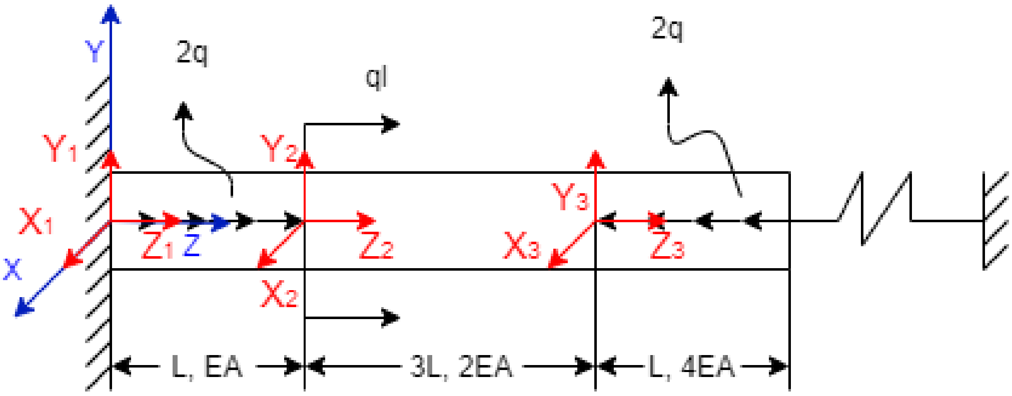
Или в компактной форме:

$$Y(z) = A(z) \times Y_0 + Q(z), \text{ где}$$

$$Y(z) = \begin{pmatrix} N(z) \\ W(z) \end{pmatrix}, A(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{EA} & 1 \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} N_0 \\ W_O \end{pmatrix}, Q(z) = \begin{pmatrix} -qz \\ -\frac{qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

Введем глобальную и локальные системы координат, обозначим участки:

Найдем $A(z)$ и $Q(z)$ для каждого участков:



$$A_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{EA} & 1 \end{bmatrix} \quad Q_1(z) = \begin{pmatrix} -2qz \\ -\frac{qz^2}{EA} \end{pmatrix}$$

$$A_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{2EA} & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \quad Q_3(z) = \begin{pmatrix} 2qz \\ \frac{qz^2}{4EA} \end{pmatrix}$$

Найдем начальное состояние первого участка Y_1^0.

Составим уравнение состояния для 1-го участка:

$$Y_1(l) = A_1(l) \times Y_1^0 + Q_1(l), Y_1^0 - ?$$

Составим уравнение состояния для 2-го участка:

$$Y_2(3l) = A_2(3l) \times Y_2^0$$

Начальные параметры для 2-го участка:

$$Y_2^0 = Y_1(l) + N_2, \text{ где } N_2 = \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составим уравнение состояния для 3-го участка:

$$Y_3(l) = A_3(l) \times Y_3^0 + Q_3(l)$$

Начальные параметры для 3-го участка:

$$Y_3^0 = Y_2(3l)$$

Запишем уравнение равновесия:

$$N_3(l) + C \times W_3(l) = 0$$

В матричном виде:

$$L \times Y_3(l) = 0, \text{где } L = \begin{pmatrix} 1 & C \end{pmatrix}$$

$$L \times Y_3(l) = L\left(A_3(l) \times Y_3^0 + Q_3(l)\right) = L\big(A_3(l) \times Y_2(3l) + Q_3(l)\big) =$$

$$= L\big(A_3(l) \times A_2(3l) \times (Y_1(l) + N_2) + Q_3(l)\big) =$$

$$= L\left(A_3(l) \times A_2(3l) \times (A_1(l) \times Y_1^0 + Q_1(l) + N_2) + Q_3(l)\right) = 0$$

$$L \times A_3(l) \times A_2(3l) \times A_1(l) \times Y_1^0 + L \times A_3(l) \times A_2(3l) \times (Q_1(l) + N_2) + L \times Q_3(l) = 0$$

$$L \times A_3(l) \times A_2(3l) \times A_1(l) \times Y_1^0 = -L(A_3(l) \times A_2(3l) \times (Q_1(l) + N_2) + Q_3(l))$$

Или в более краткой форме:

$$A \times Y_1^0 = B, \text{где } A = L \times A_3(l) \times A_2(3l) \times A_1(l),$$

$$B = -L(A_3(l) \times A_2(3l) \times (Q_1(l) + N_2) + Q_3(l))$$

Найдем матрицу A:

1. $L \times A_3(l) = \begin{pmatrix} 1 & C \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EA+Cl}{4EA} & C \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \frac{4EA+Cl}{4EA} & C \end{pmatrix} \times A_2(3l) = \begin{pmatrix} \frac{4EA+Cl}{4EA} & C \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4EA + 7Cl}{4EA} & C \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} \frac{4EA+7Cl}{4EA} & C \end{pmatrix} \times A_1(l) = \begin{pmatrix} \frac{4EA+7Cl}{4EA} & C \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4EA + 11Cl}{4EA} & C \end{pmatrix} = A$$

Найдем матрицу B:

1. $A_3(l) \times A_2(3l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7l}{4EA} & 1 \end{bmatrix}$

2. $Q_1(l) + N_2 = \begin{pmatrix} -2ql \\ -\frac{ql^2}{EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3ql \\ -\frac{ql^2}{EA} \end{pmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -3ql \\ -\frac{ql^2}{EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3ql \\ \frac{-25ql^2}{4EA} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3ql \\ \frac{-25ql^2}{4EA} \end{pmatrix} + Q_3(l) = \begin{pmatrix} -3ql \\ \frac{-25ql^2}{4EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{ql^2}{4EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{-6ql^2}{EA} \end{pmatrix}$

5. $-L \times \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{-6ql^2}{EA} \end{pmatrix} = (1 \quad C) \times \begin{pmatrix} ql \\ \frac{6ql^2}{EA} \end{pmatrix} = ql + \frac{6Cql^2}{EA} = B$

Решим СЛАУ:

$$A \times Y_1^0 = B$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4EA + 11Cl}{4EA} & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N_1^0 \\ W_1^0 \end{pmatrix} = ql + \frac{6Cql^2}{EA}$$

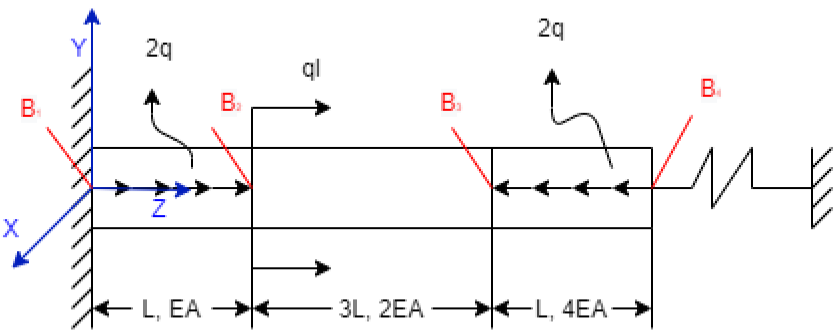
$$\frac{4EA+11Cl}{4EA} N_1^0 = ql + \frac{6Cql^2}{EA}, \text{ т. к. } W_1^0 = 0$$

$$N_1^0 = \frac{4EAql + 24Cql^2}{4EA + 11Cl}$$

Тогда:

$$Y_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{4EAql + 24Cql^2}{4EA + 11Cl} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим узлы B_1–B_4:



При $C \to 0$:

$$\lim_{c\to0} Y_1^0 = \begin{pmatrix} \lim\limits_{c\to0} \frac{4EAql + 24Cql^2}{4EA + 11Cl} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $Y_1(l) = A_1(l) \times Y_1^0 + Q_1(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} ql \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2ql \\ -\frac{ql^2}{EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $Y_2^0 = Y_1(l) + N_2 = \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ql \\ 0 \end{pmatrix}$

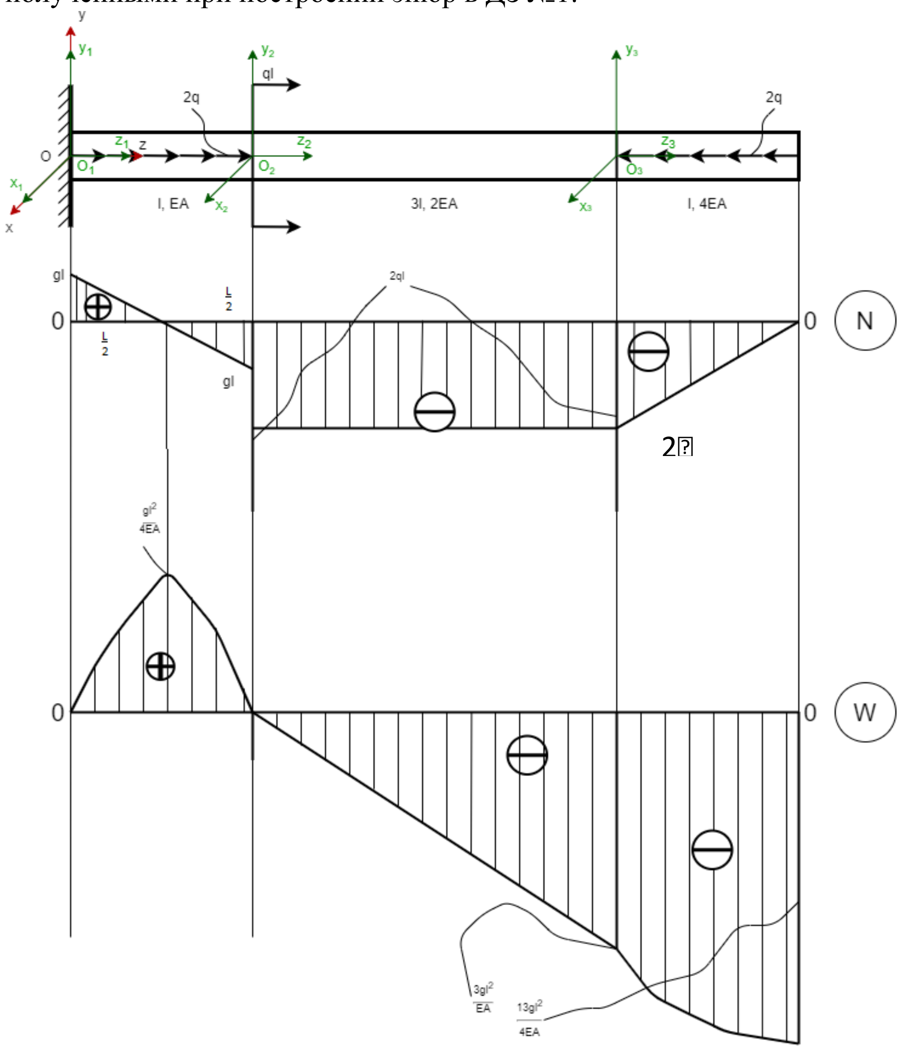
3. $Y_2(3l) = A_2(3l) \times Y_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -2ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ql \\ \frac{-3ql^2}{EA} \end{pmatrix}$

4. $Y_3^0 = Y_2(3l) = \begin{pmatrix} -2ql \\ \frac{-3ql^2}{EA} \end{pmatrix}$

5. $Y_3(l) = A_3(l) \times Y_3^0 + Q_3(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -2ql \\ \frac{-3ql^2}{EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{ql^2}{4EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-13ql^2}{4EA} \end{pmatrix}$

$$W_{B_1} = 0;\ W_{B_2} = 0;\ W_{B_3} = -\frac{3ql^2}{EA};\ W_{B_4} = -\frac{13ql^2}{4EA};$$

Сравним значения перемещений, полученные методом начальных параметров, со значениями, полученными при построении эпюр в ДЗ №1:



Значения перемещений, полученные разными методами, совпадают.

При $C \to \infty$:

$$\lim_{c\to\infty} Y_1^0 = \begin{pmatrix} \lim\limits_{c\to\infty} \dfrac{4EAql + 24Cql^2}{4EA + 11Cl} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{24ql}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1.\ Y_1(l) = A_1(l) \times Y_1^0 + Q_1(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{24ql}{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2ql \\ -\frac{ql^2}{EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2ql}{11} \\ \frac{13ql^2}{11EA} \end{pmatrix}$$

$$2.\ Y_2^0 = Y_1(l) + N_2 = \begin{pmatrix} \frac{2ql}{11} \\ \frac{13ql^2}{11EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9ql}{11} \\ \frac{13ql^2}{11EA} \end{pmatrix}$$

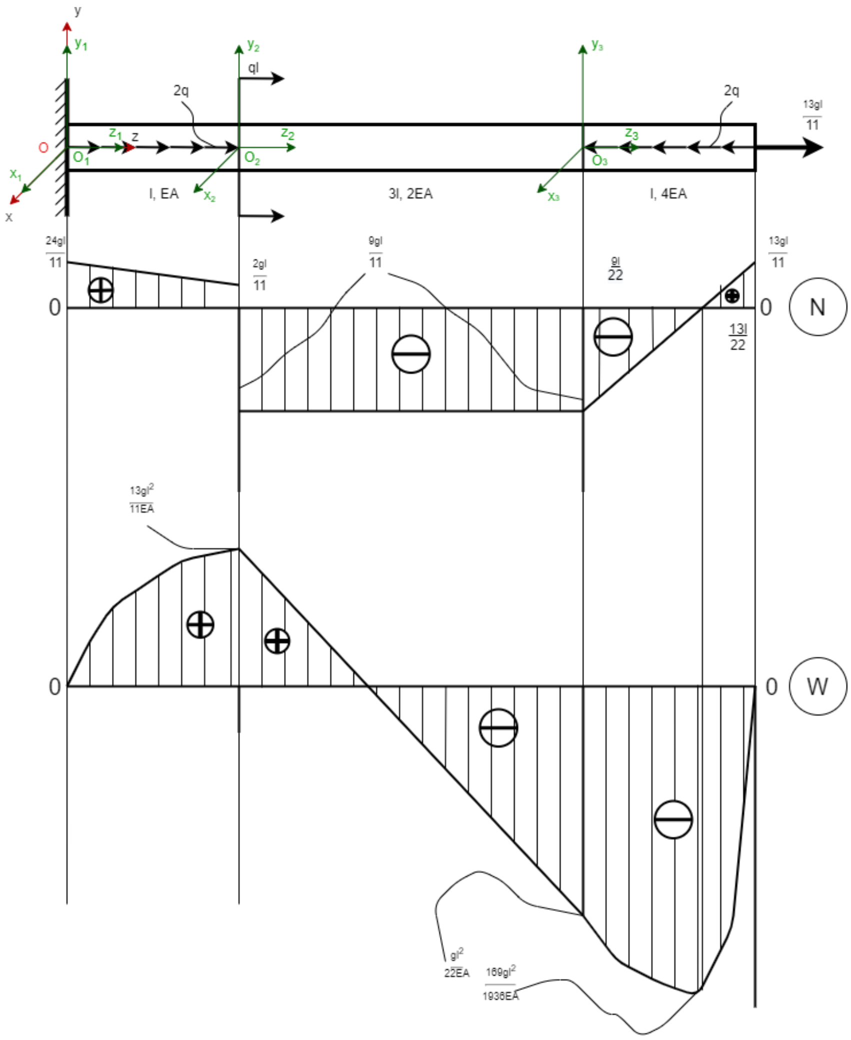
$$3.\ Y_2(3l) = A_2(3l) \times Y_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3l}{2EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{9ql}{11} \\ \frac{13ql^2}{11EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9ql}{11} \\ -\frac{ql^2}{22EA} \end{pmatrix}$$

$$4.\ Y_3^0 = Y_2(3l) = \begin{pmatrix} -\frac{9ql}{11} \\ -\frac{ql^2}{22EA} \end{pmatrix}$$

$$5.\ Y_3(l) = A_3(l) \times Y_3^0 + Q_3(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{4EA} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{9ql}{11} \\ -\frac{ql^2}{22EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{ql^2}{4EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13ql}{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сравним значения перемещений, полученные методом начальных параметров, со значениями, полученными при построении эпюр в ДЗ №1:

$$W_{B_1} = 0;\ W_{B_2} = \frac{11ql^2}{13EA};\ W_{B_3} = -\frac{ql^2}{22EA};\ W_{B_4} = 0;$$



Значения перемещений, полученные разными методами, совпадают.