Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Журавлев Николай
Группа	РК6-52Б
Тип задания	Лабораторная работа №2
Тема лабораторной работы	Использование аппроксимаций для численной оптимизации

Студент ________________ **_Журавлев Н.В.**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ________________ **_Першин А. Ю__**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Москва, 2021 г.

Оглавление

Разные шрифты

Введение

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки $(x, y) = (0, 0)$ достигнет точки $(x, y) = (a, ya)$ под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось *направлена* вниз). Решением этой задачи является такая кривая $y(x)$, которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx,$$

где g обозначает ускорение свободного падение, и $y' = \frac{dy}{dx}$. Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрический заданная циклоида:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2}\sin(2t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) \end{bmatrix},$$

где $t \in [0; T]$ и C, T являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается $a = 2$ и $y_a = 1$. Константы циклоиды для этого граничного условия равны $C = 1.03439984$, $T = 1.75418438$.

Цель выполнения лабораторной работы

Изучение общих принципов численного интегрирования с использованием составных формул Симпсона и трапеций трапеции. Рассмотрение одной из задач вариационного исчисления: задачи о брахистохроне, т.е. задачи о кривой наискорейшего спуска. Разработка метода нахождения аппроксимации, в целях решения задачи минимизации.

Задачи на лабораторную работу

Базовые задачи:

1. Написать функцию composite_simpson(a, b, n, f) численного интегрирования функции f на интервале [a; b] по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию composite_trapezoid(a, b, n, f) численного интегрирования функции f на интервале [a; b] по n узлам с помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитать интеграл $\mathcal{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}}dx$ для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеции для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок формулы.
5. Для обеих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

Выполненные задачи

1. Выполнение численного интегрирования с помощью Симпсона.

Разработана функция composite_simpson(a, b, n, f) для численного интегрирования функции f на интервале [a; b] по n узлам с помощью составной формулы Симпсона. Ссылки на формулу нет. Формула не верна, не хватает остаточного члена

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right]$$

Не введено обозначение x_i

Нет названия листинга и его номера

```
def composite_simpson(a, b, n, f):
    if n % 2 == 0:
        n += 1
    segments = n - 1
    h = (b - a) / segments
    simpson = (h / 3) * (f(a) + f(b))
    for i in range(1, int((segments / 2))):
        simpson += (h / 3) * 2 * (f(a + (2 * i) * h))
    for i in range(1, int(segments / 2 + 1)):
        simpson += (h / 3) * 4 * (f(a + (2 * i - 1) * h))
    return simpson
```

2. Выполнение численного интегрирования с помощью составной формулы трапеции.

Разработана функция composite_trapezoid(a, b, n, f) для численного интегрирования функции f на интервале [a; b] по n узлам с помощью составной формулы трапеций. Аналогично предыдущему пункту

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_i) + f(x_{n+1})\right]$$

Нет данного обозначения выше

Листинг вставлен неверно

```
def composite_trapezoid(a, b, n, f):
    segments = n - 1
    h = (b - a) / segments
    trapezoid = (h / 2) * (f(a) + f(b))
    for i in range(2, segments + 1):
        trapezoid += (h / 2) * 2 * (f(a + (i - 1) * h))
    return trapezoid
```

3. Расчёт интеграла для функции, соответствующей кривой наискорейшего спуска.

Разные шрифты

16?

Был проведён расчёт интеграла (16) для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеции для множества значений $n \in [3; 9999]$. Был построен log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.

трапеций

Не описано как это было сделано.
Листинг не прокомментирован и вставлен неверно

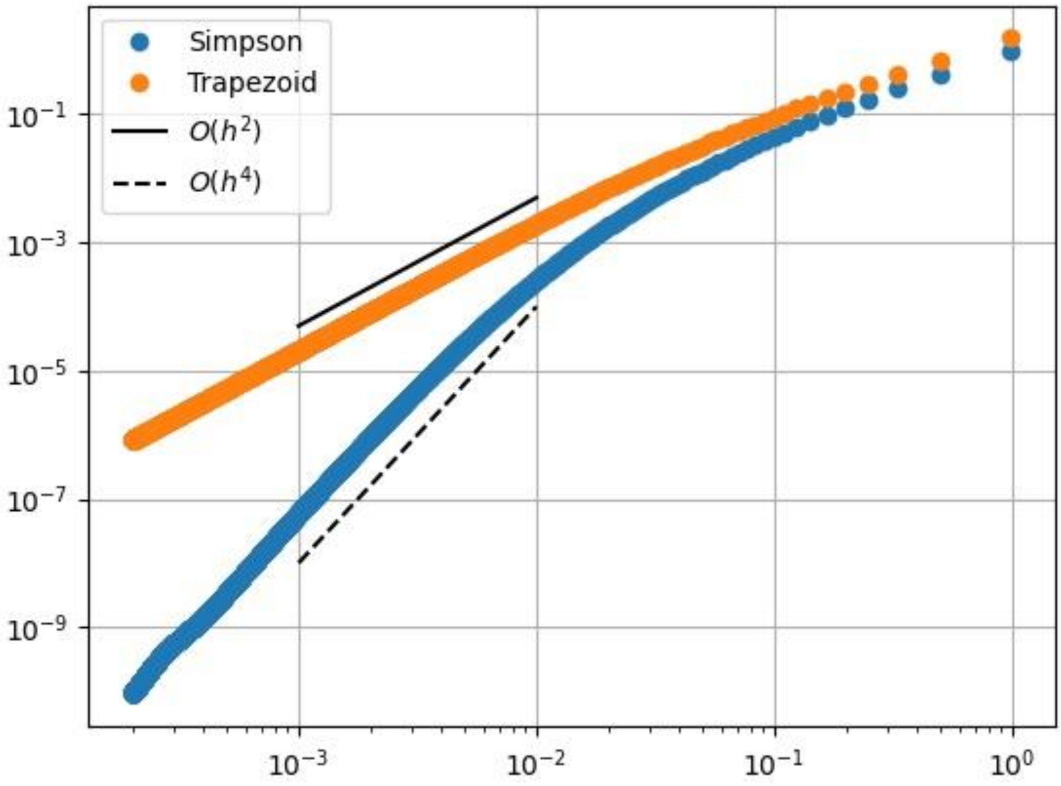
```
n_s = 10000
c_t = np.linspace(0, T, n_s)
x_t = [C * (t - (1 / 2) * np.sin(2 * t)) for t in c_t]
y_t = [C * ((1 / 2) - (1 / 2) * np.cos(2 * t)) for t in c_t]
qs_coeff = qubic_spline_coef(x_t, y_t, n_s)


def f(x_i):
    g = 9.8
    y = qubic_spline(x_i, x_t, qs_coeff, n_s)
    d_y = d_qubic_spline(x_i, x_t, qs_coeff, n_s)
    return np.sqrt((1 + (d_y ** 2)) / (2 * g * y))


a = 0.01
b = 2
int_simp = [0] * 5000
int_trap = [0] * 5000
h_integral = [0] * 5000
i = 0
true_integral = composite_simpson(a, b, 20000, f)
for n in range(3, 10000, 2):
    h_integral[i] = (b - a) / (n - 1)
    int_simp[i] = abs(true_integral - composite_simpson(a, b, n, f))
    int_trap[i] = abs(true_integral - composite_trapezoid(a, b, n, f))
    i += 1

fig, ax = plt.subplots()
plt.loglog(h_integral, int_simp, 'o', label='Simpson')
plt.loglog(h_integral, int_trap, 'o', label='Trapezoid')
h_for_line = np.logspace(-3, -2, 100)
ax.loglog(h_for_line, 50 * h_for_line ** 2, 'k-', label=r'$O(h^2)$')
ax.loglog(h_for_line, 10000 * h_for_line ** 4, 'k--',
label=r'$O(h^4)$')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Результат:



Что за график? Формуле чего?

Рисунок 1. Оранжевый график – график по составной формуле, синий – по составной формуле Симпсона, сплошная чёрная линия – $O(h^2)$, пунктирная чёрная линия $O(h^4)$.

4. Определение порядка точности формулы по полученному графику.

Порядок точности численного метода – это наибольшая степень полинома, для которой метод даёт точное решение задачи. Для определения порядка точности численных методов интегрирования по графику. Для каждого из графиков определить тангенс угла наклона (он показывает зависимость абсолютных погрешностей, использованных в численных методах интегрирования). Это справедливо, так как график построен по шкале с логарифмической зависимостью.

Где определение порядка точности по графикам? Сказано, как это сделать, но не сделано

5. Сравнение порядка для обеих формул, полученного с помощью графика, с аналитическим порядком точности.

Аналитический порядок точности для составной формулы Симпсона пропорционален $O(h^4)$:

$$\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

Аналитический порядок точности для составной формулы трапеций пропорционален $O(h^2)$:

$$\frac{(b-a)h^2}{12} f^{('')}(\xi)$$

Проанализировав график, определим, что порядок точности для обоих методов численного интегрирования , пропорционален $O(h)$.

Судя по рисунку 1 это неправда

Расхождение можно объяснить тем, что подынтегральное выражение интеграла $\mathcal{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}}dx$ Недостаточно что...? недостаточно, так как при $y(x) = 0$, знаменатель обращается в ноль (подынтегральное выражение имеет разрыв).

6. Существование оптимального шага интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность

Пусть значение $f(x)$ в точке x_i вычисляется с погрешностью округления e_i:

$$f(x_i) = f(x_i) + e_i,\ i = 1, \ldots, n+1$$

Следовательно, полная погрешность округления, накапливаемая составной формулой Симпсона, оценивается следующим образом:

$$e(h) = \frac{h}{3}\left[e_1 + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} e_{2i+1} + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e_{2i+1} + e_{n+1}\right]$$

$$\leq \frac{h}{3}\left[|e_1| + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}|e_{2i+1}| + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}|e_{2i}| + |e_{n+1}|\right]$$

Предположим, что погрешность округления ограничена машинным эпсилон:

$$|e_i| \leq \epsilon, i = 1, \dots, n+1$$

Тогда полная погрешность оценивается, как:

$$e(h) \leq \frac{h\epsilon}{3}\left(1 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 4\frac{n}{2} + 1\right) = nh\epsilon = (b-a)\epsilon$$

Верхняя грань для накопленной погрешности округления не зависит от n и h. Это означает, что увеличение числа под-отрезков не приводит к дестабилизации полной погрешности. Следовательно, можно сделать вывод о том, что не существует оптимального интегрирования для составных формул Симпсона и трапеций, так как численное интегрирование вычислительно устойчиво. Необходимо указать зависимость шага интегрирования от машинного эпсилон

Заключение

В процессе выполнения лабораторной работы было изучено и применено:

1) Численное интегрирование на примере составных формул Симпсона и трапеции.
2) Была оценена зависимость погрешности вычисления интеграла численным интегрированием от шага интегрирования.
3) Был сделан вывод от том, что недостаточность гладкости функции приводит к изменению порядка точности на графике.
4) Было показано, что численное интегрирование вычислительно устойчиво. Из-за чего было показано, что не существует оптимального интегрирования для составных формул Симпсона и трапеции. Здесь тоже. Оптимальный шаг имеет зависимость от машинного эпсилон

Список литературы

1) Першин А.Ю., Соколов А.П. Вычислительная математика. Лабораторные работы / Учебная литература, г. Москва, 2018. — 11 с.

2) Першин А.Ю. Лекции по вычислительной математике (черновик) / тУчебная литература. Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования)