Сортировка данных с точки зрения МВС

Параллельные алгоритмы

Якобовский Михаил Владимирович
проф., д.ф.-м.н.
Институт прикладной математики
им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Расположить в порядке неубывания *N* элементов массива чисел, используя *p* процессоров

К вопросу о

- Наилучшем последовательном алгоритме
- Медленном последовательном алгоритме
- Высокой степени внутреннего параллелизма

Две задачи сортировки массива чисел

A. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***достаточен*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

B. Объём оперативной памяти одного процессорного узла ***мал*** для одновременного размещения в ней всех элементов массива

Задача А

- Расположить N элементов массива a таким образом, чтобы для любого

$$i = 0, \ldots, N-2$$

выполнялось неравенство

$$a_i \leq a_{i+1}$$

Задача В

- Части массива хранятся на нескольких процессорах
  - Каждая часть массива должна быть упорядочена
  - На процессорах с б**о**льшими номерами должны быть размещены элементы массива с б**о**льшими значениями

• Правильно	$\langle 1,2,3,5 \rangle$	$\langle 5,6,7,7 \rangle$	$\langle 8,8,9 \rangle$
• Ошибка	$\langle 1,2,3,5 \rangle$	$\langle 5,7,6,7 \rangle$	$\langle 8,8,9 \rangle$
• Ошибка	$\langle 1,2,3,5 \rangle$	$\langle 5,6,7,8 \rangle$	$\langle 7,8,9 \rangle$

$$N = 11$$
$$p = 3$$

Задача В

- Будем рассматривать только процесс упорядочивания элементов:
  - Перед началом сортировки на каждом из процессоров уже есть часть элементов массива
  - После окончания сортировки на каждом из процессоров должно остаться столько элементов, сколько их было в начале (но, это уже могут быть другие элементы, расположенные ранее на других процессорах)

Предлагаемая стратегия: Этапы сортировки

– Упорядочивание фрагментов массива на каждом из процессоров

– Перераспределение элементов массива между процессорами

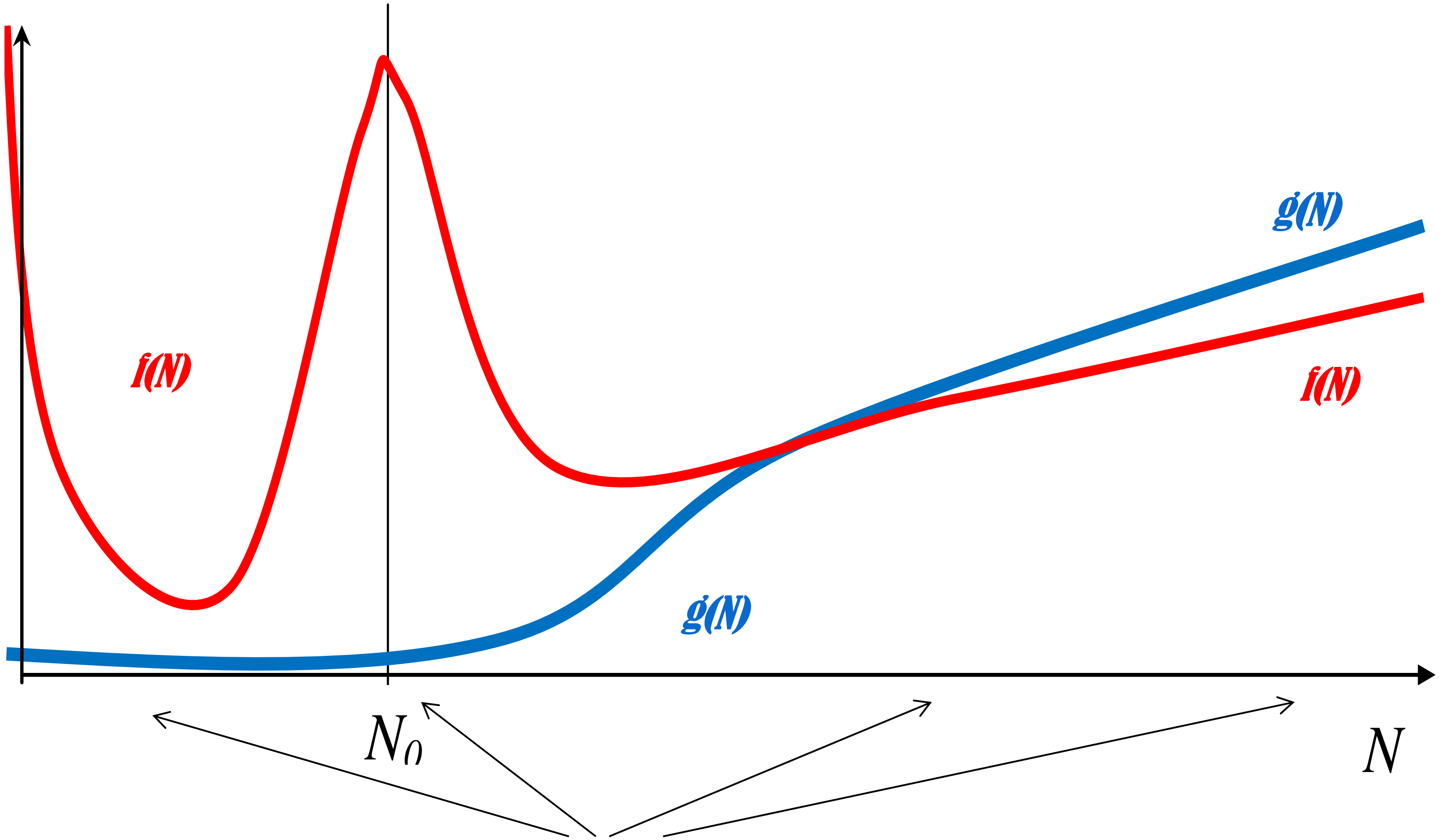
Конструирование наилучшего последовательного алгоритма

Сравнение последовательных алгоритмов сортировки

$$M(n) < Cn^2$$

Алгоритм сортировки	Среднее число операций	Максимальное число операций
Быстрая (***qsort***)	$11.7\, n \log_2 n$	$O(n^2)$
Пирамидальная (***hsort***)	$16\, n \log_2 n$	$18\, n \log_2 n + 38n$
Слияние списков (***lsort***)	$10\, n \log_2 n$	$O(n \log_2 n)$

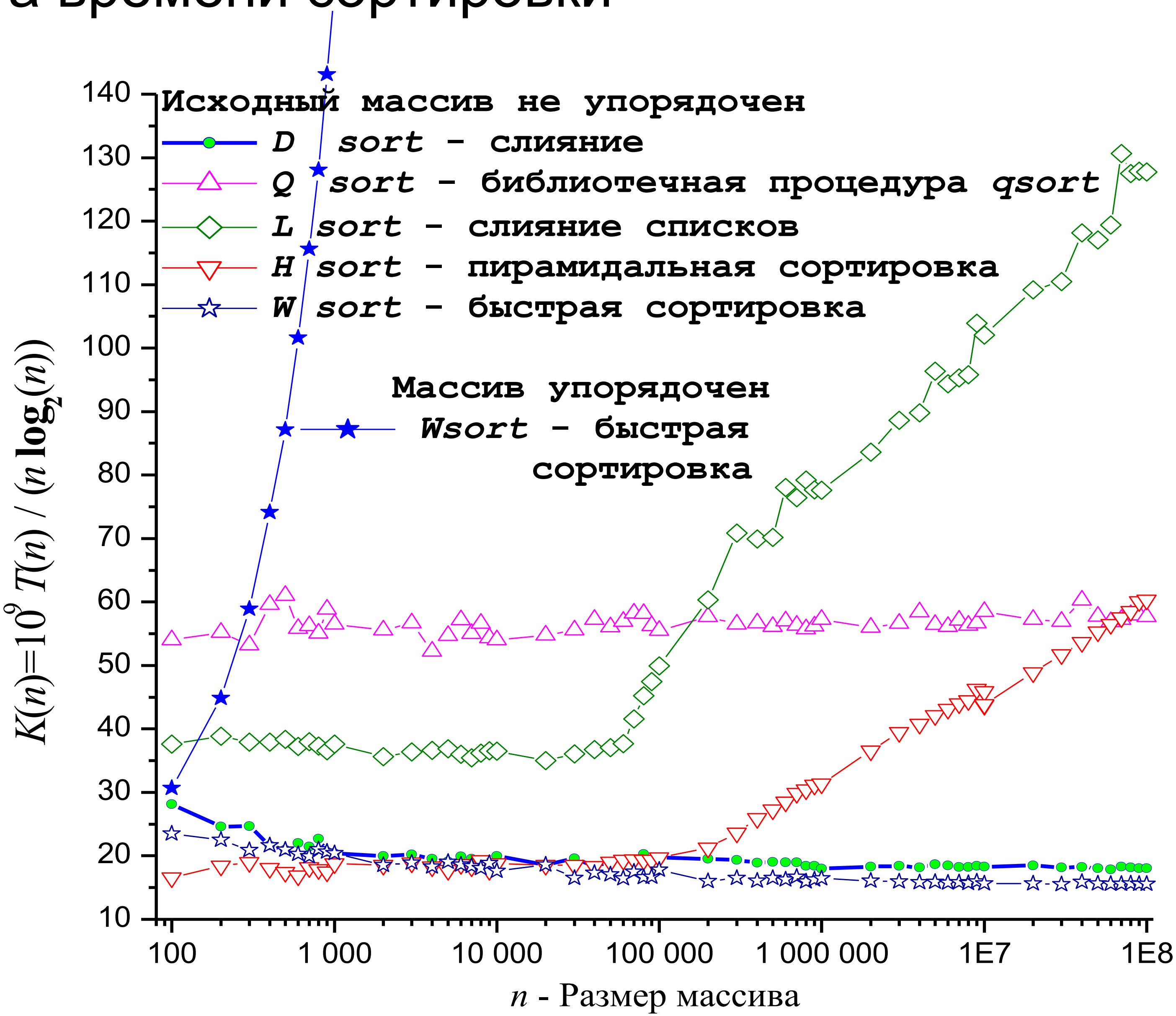
Пусть $f(N)<C\cdot g(N)$, ну и что?



- Где тут наши 2 Гигобайта оперативной памяти???

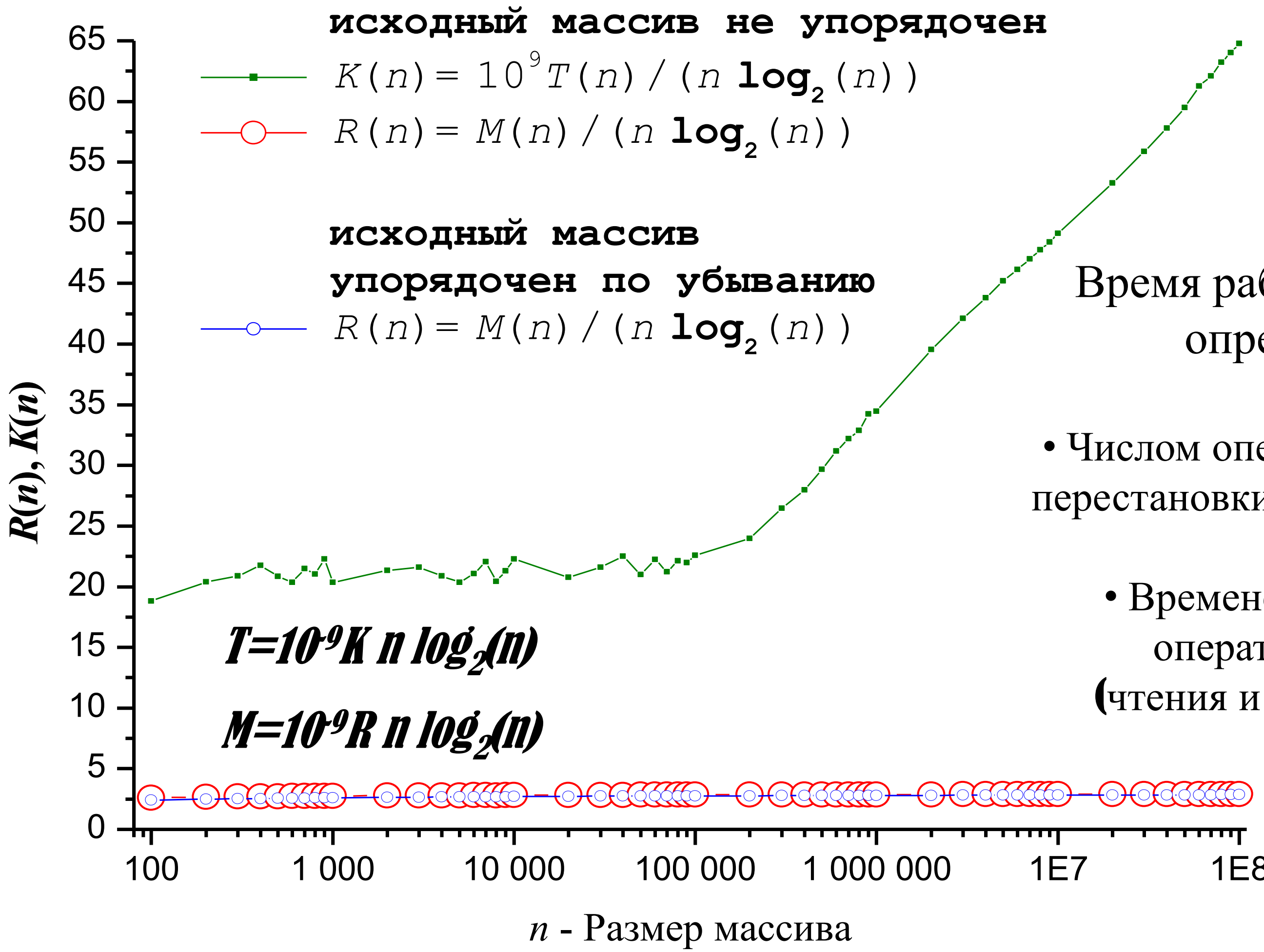
Константа времени сортировки

$T=10^{-9}\,K\,N\log_2(N)$



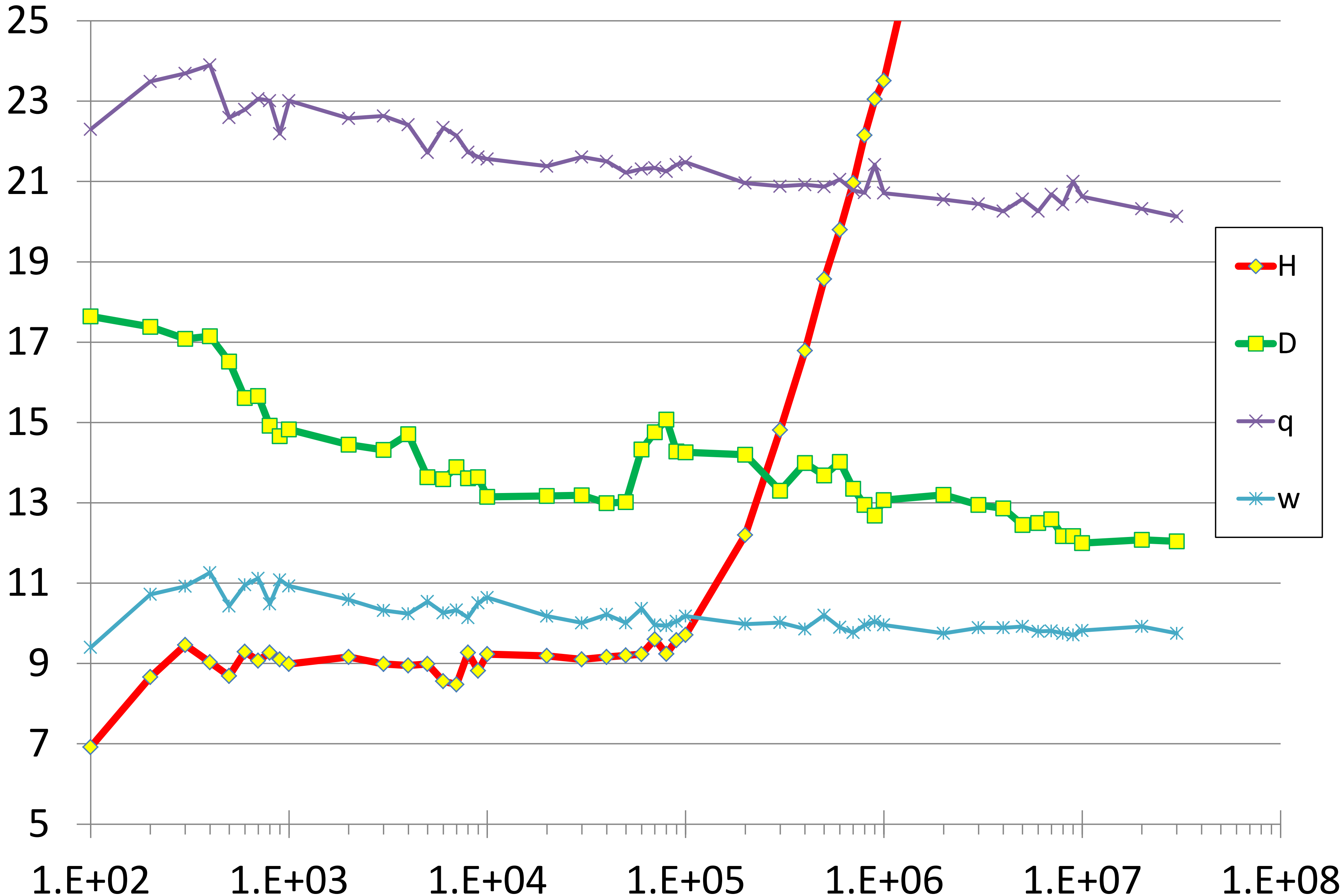
Сортировка данных с точки зрения МВС © Якобовский М.В.

Пирамидальная сортировка: константы времени и числа операций

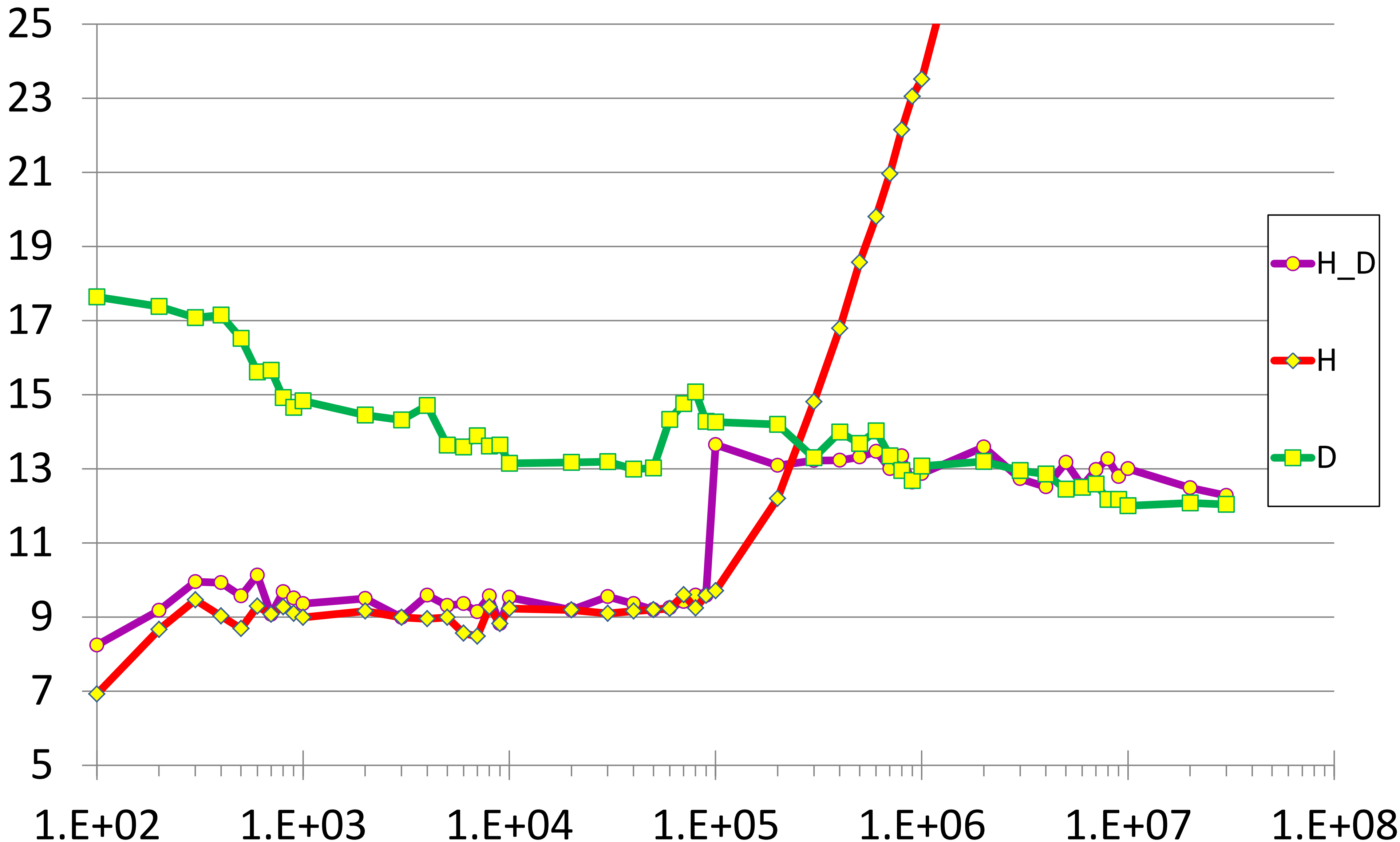


Время работы алгоритма определяется:

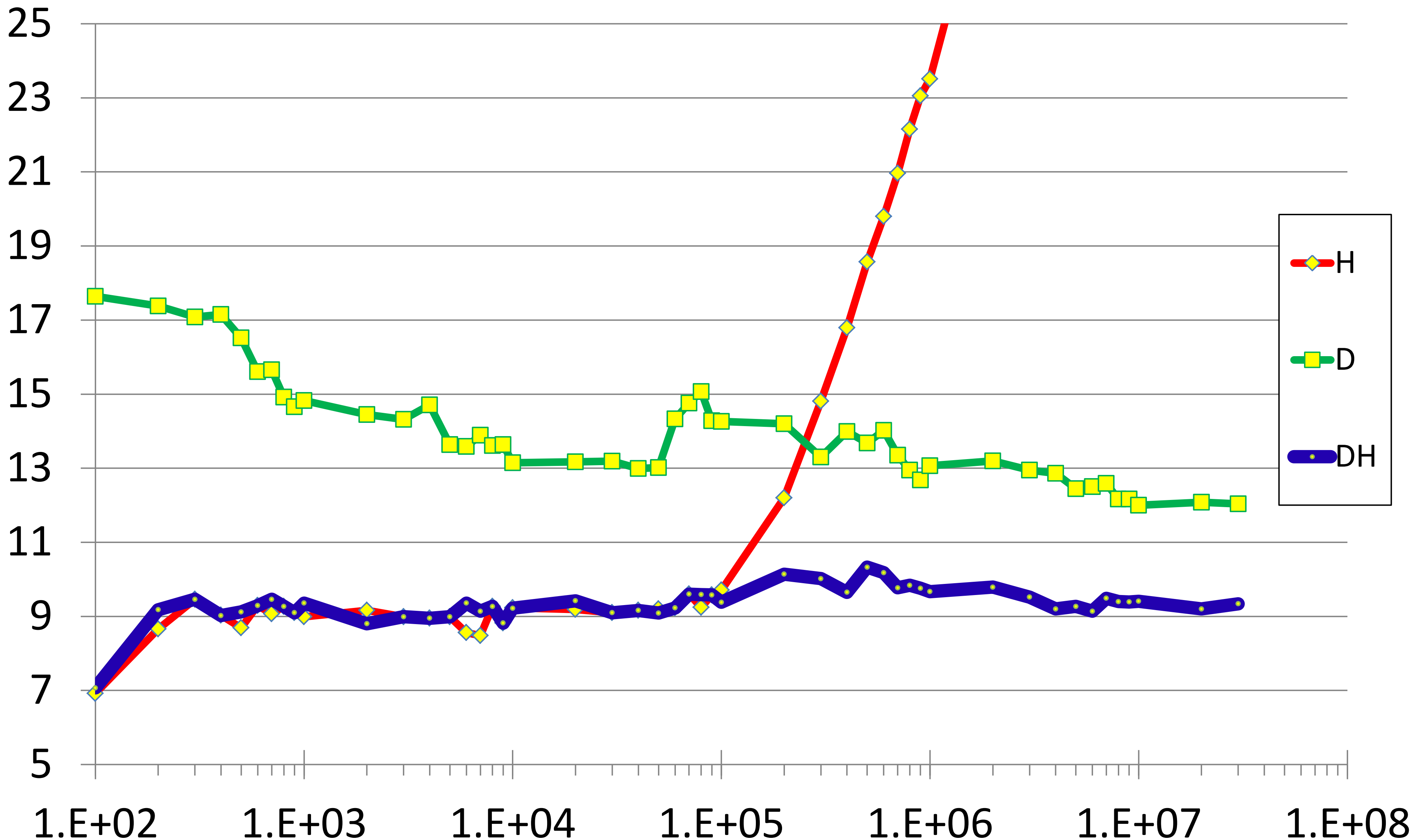
- Числом операций сравнения и перестановки элементов массива
- Временем обращения к оперативной памяти (чтения и записи элементов массива)

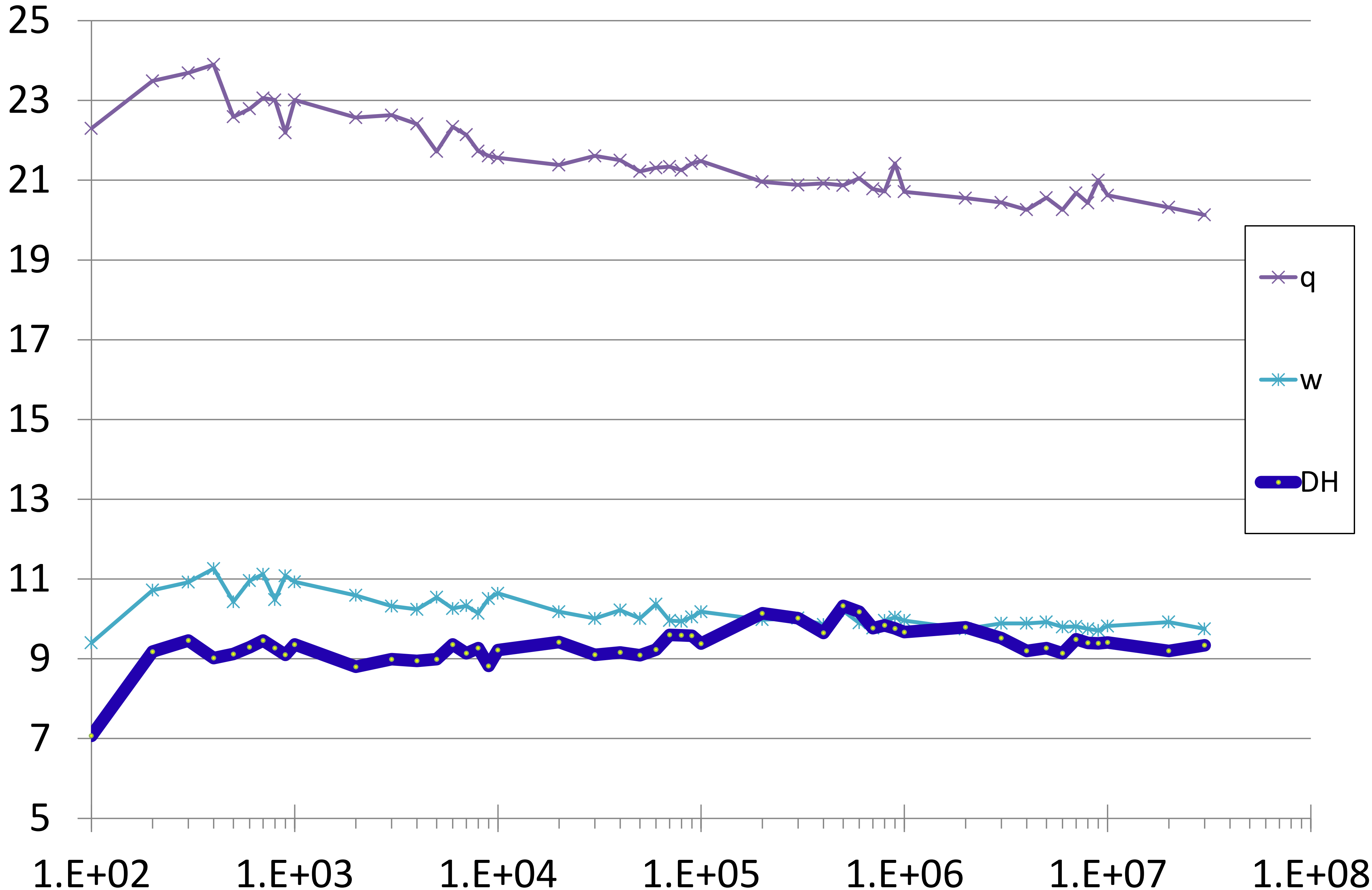

25
23
21
19
17
15
13
11
9
7
5
1.E+02
1.E+03
1.E+04
1.E+05
1.E+06
1.E+07
1.E+08
H
D
q
w

Меньше 10^5 - пирамидальная, больше - слияние



Меньше 100 000 элементов – пирамидальная,
иначе – (пирамидальная над фрагментами + слияние упорядоченных фрагментов)




25
23
21
19
17
15
13
11
9
7
5
1.E+02
1.E+03
1.E+04
1.E+05
1.E+06
1.E+07
1.E+08
q
w
DH

Сортировка слиянием методом сдваивания
Требуется 2 + 4 + 8 + 16 = 30 тактов (8 процессоров)

5 2 2 1 9 5 7 3 3 4 4 0 3 6 8 2 — исходный массив

5 2 | 2 1 | 9 5 | 7 3 | 3 4 | 4 0 | 3 6 | 8 2 — 8 процессоров

2 5 | 1 2 | 5 9 | 3 7 | 3 4 | 0 4 | 3 6 | 2 8 — 2 такта

1 2 2 5 | 3 7 5 9 | 0 3 4 4 | 2 3 6 8 — 4 такта

1 2 2 3 5 7 9 | 0 2 3 3 4 4 6 8 — 8 тактов

0 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 6 7 8 9 — 16 тактов

ИТОГО 30 тактов

Слияние одним процессором. Требуется 16 тактов
*Обращение к **последовательным** адресам памяти*

(1 2 2 3 5 5 7 9) (0 2 3 3 4 4 6 8)

1 2 2 3 5 5 7 9   0 2 3 3 4 4 6 8   0

1 2 2 3 5 5 7 9   0 2 3 3 4 4 6 8   0 1

1 2 2 3 5 5 7 9   0 2 3 3 4 4 6 8   0 1 2

1 2 2 3 5 5 7 9   0 2 3 3 4 4 6 8   0 1 2 2

1 2 2 3 5 5 7 9   0 2 3 3 4 4 6 8   0 1 2 2 3

1 2 2 3 5 5 7 9   0 2 3 3 4 4 6 8   0 1 2 2 3 3

1 2 2 3 5 5 7 9   0 2 3 3 4 4 6 8   0 1 2 2 3 3 3

…

Слияние двумя процессорами. Требуется 8 тактов

1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 5 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 3 5 5 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 3 3 4 5 5 6 7 8 9
1 2 2 3 5 5 7 9	0 2 3 3 4 4 6 8	0 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 5 6 7 8 9

Ускорение при методе сдваивания

k_1 – сортировка, k_2 – передача данных

$$S(n,p)=\frac{T(n,1)}{T(n,p)}=\frac{k_1 n\log_2 n}{\frac{n}{p}\left[k_1\left(\log_2\frac{n}{p}+2p-1\right)+k_2(p-1)\right]}$$

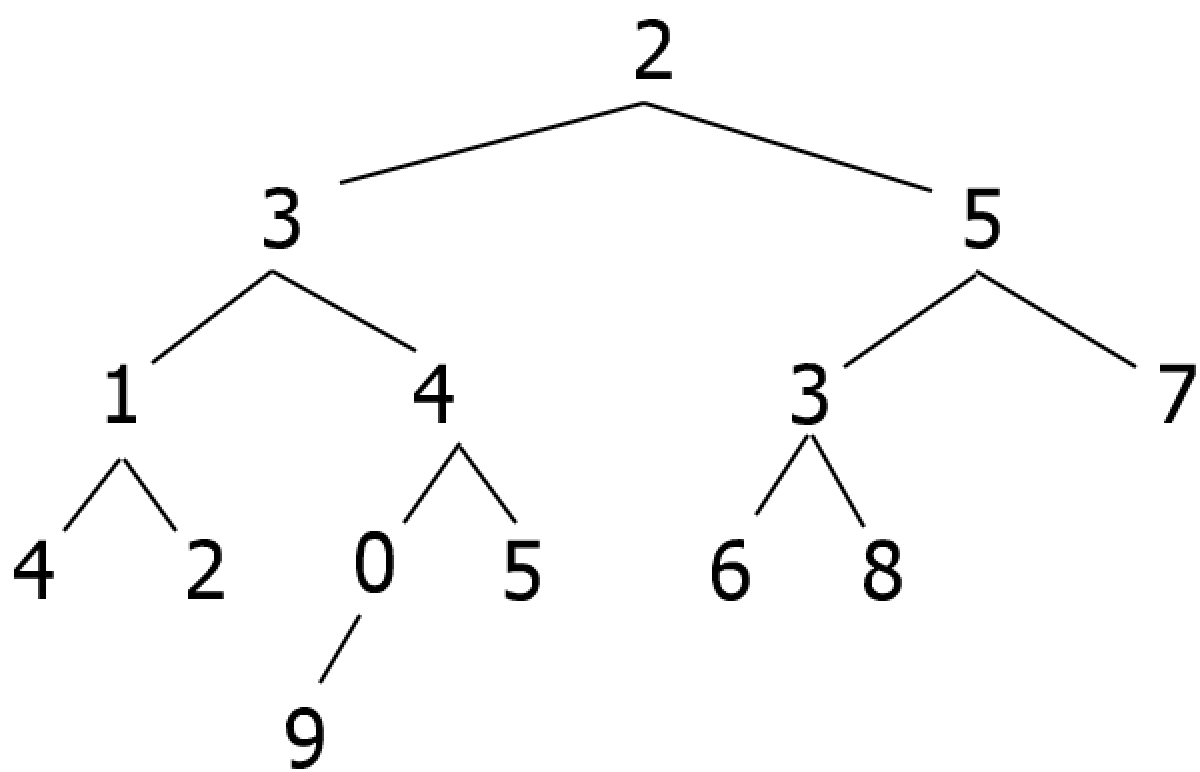
$$S\left(10^9,4\right)\approx\frac{4}{1.13+\frac{1}{30}\frac{k_2}{k_1}}<3.5$$

$$S\left(10^9,32\right)=\frac{32}{1+\frac{1}{30}\left(56+31\frac{k_2}{k_1}\right)}\approx\frac{32}{3+\frac{k_2}{k_1}}<11$$

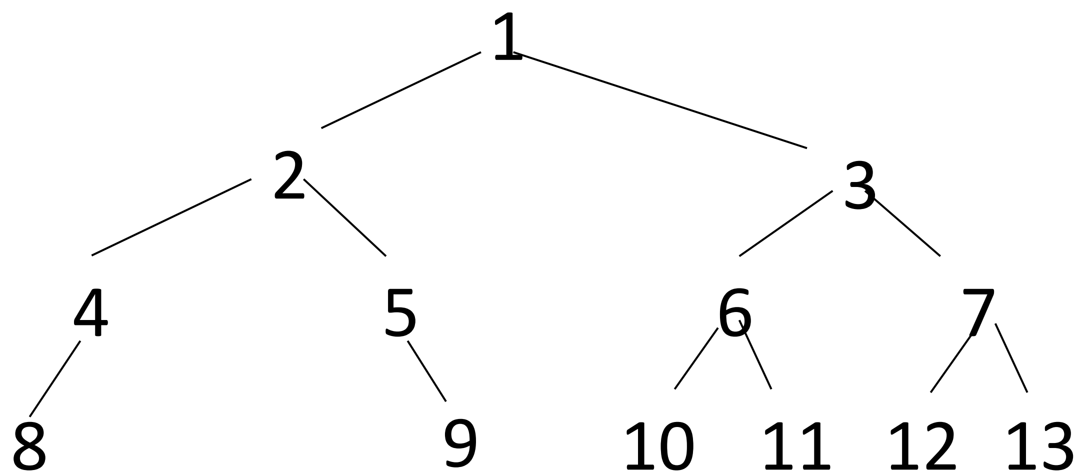
Пирамиды

- Дерево называют сбалансированным, если потомки любого его корня отличаются по высоте не более чем на 1
- Пирамида – сбалансированное бинарное дерево в котором левый потомок любого узла не ниже правого потомка

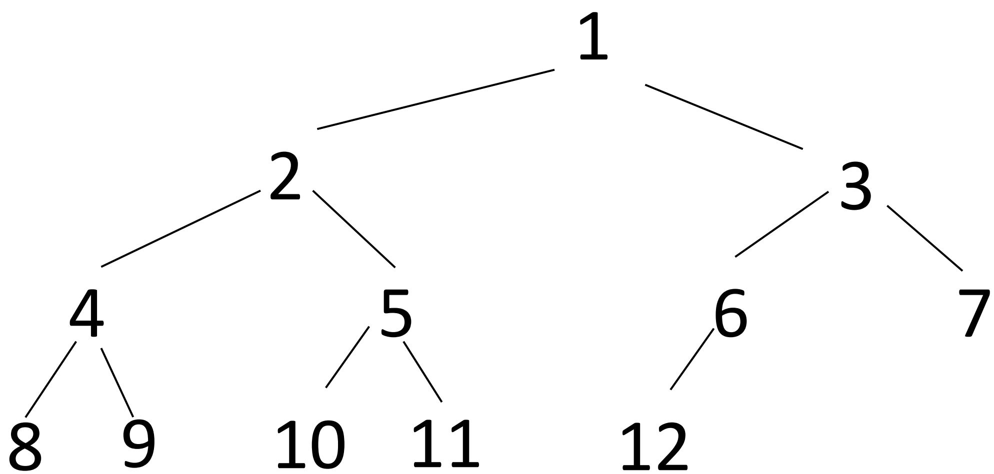
Не сбалансированное дерево

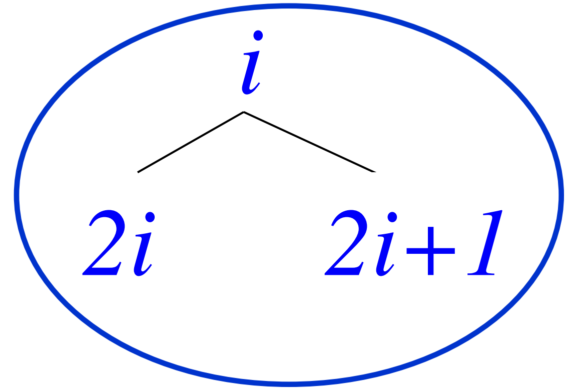


Сбалансированное дерево, но не пирамида



Пирамида





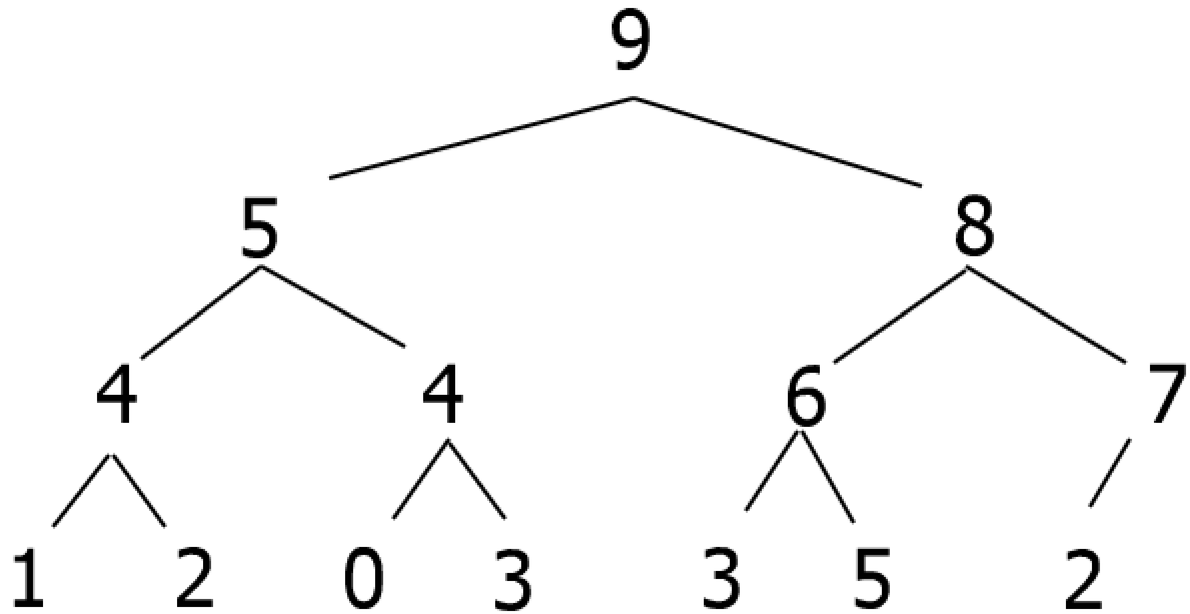
Потомки вершины i хранятся в элементах 2i, 2i+1

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7 \dots$$

$$a_1\ a_i\ a_3\ a_{2i}\ a_{2i+1}\ a_6\ a_7 \dots$$

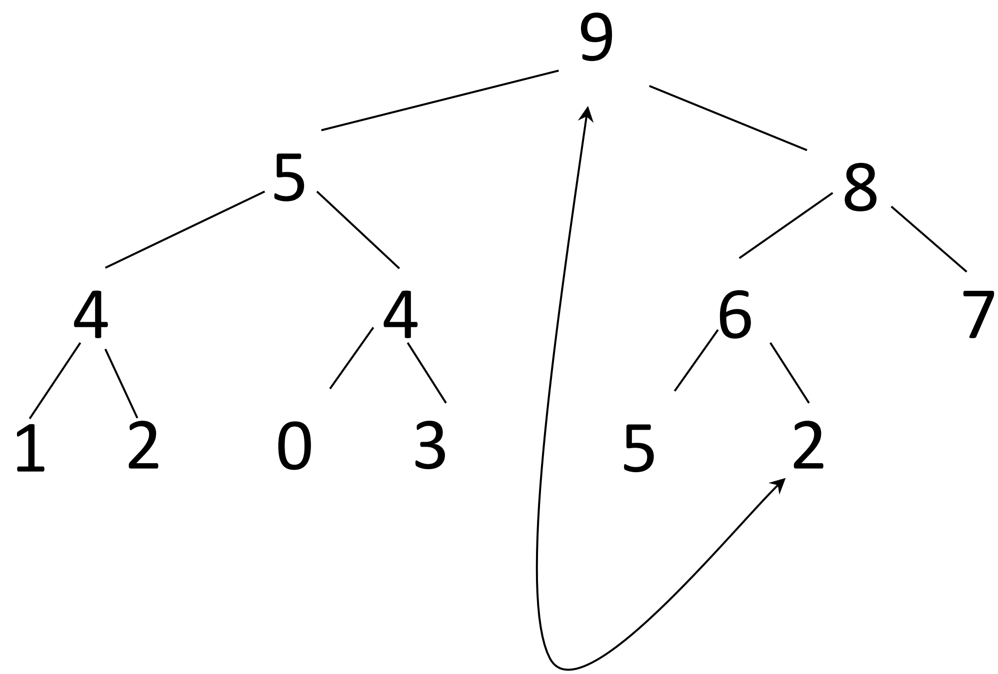
Упорядоченная пирамида

- 9   5 8   4 4 6 7   1 2 0 3 3 5 2



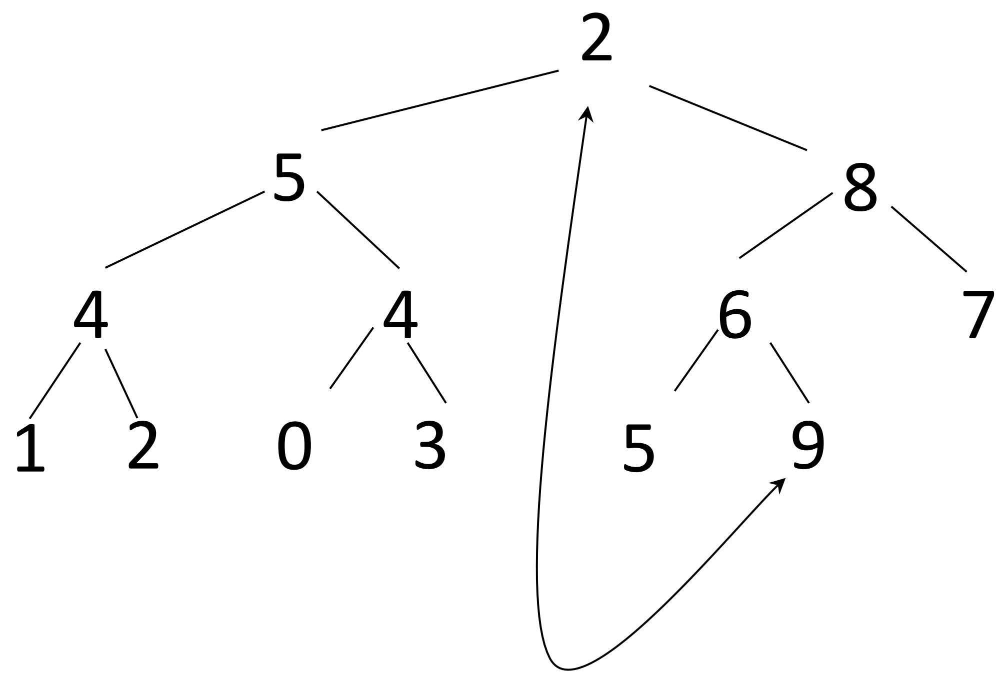
Поменять корень местами с последним потомком

- 9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2



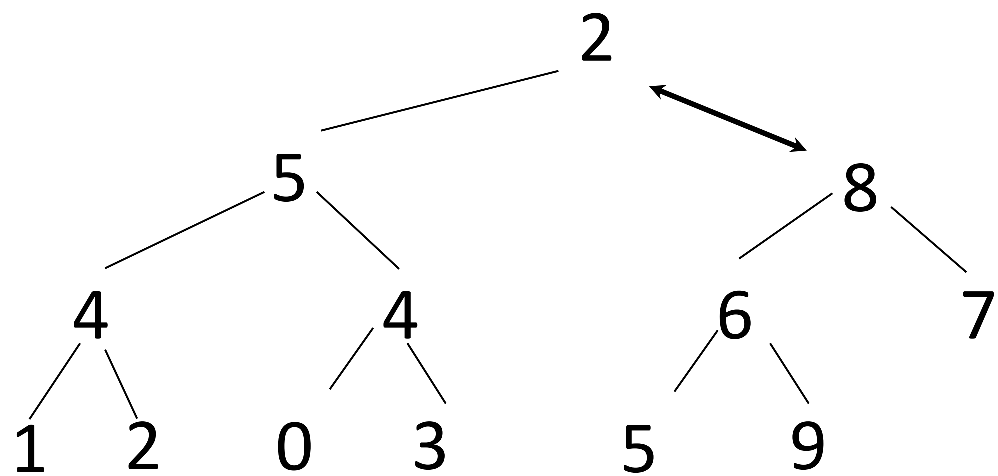
Поменять корень местами с последним потомком

- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



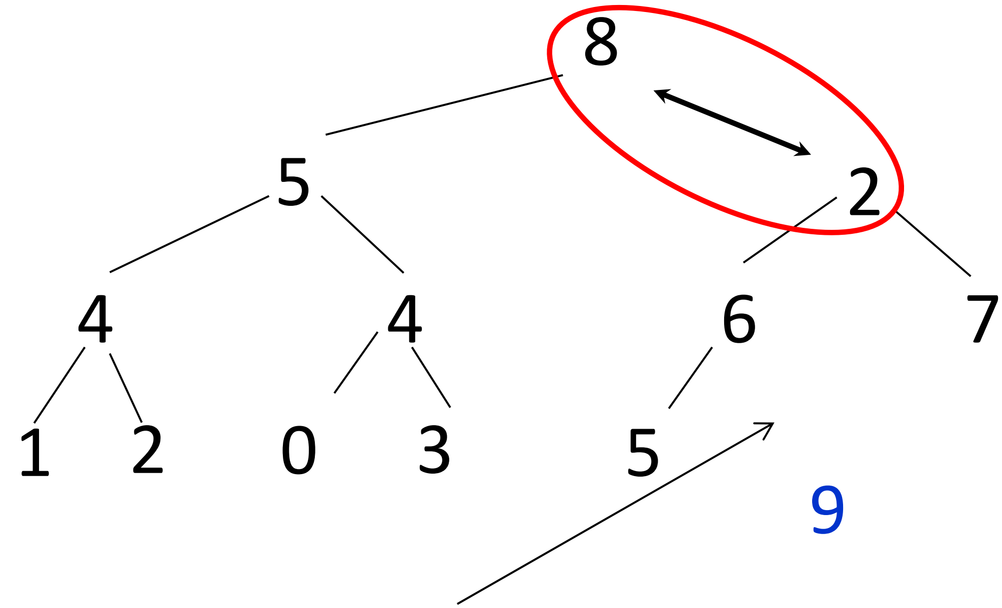
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

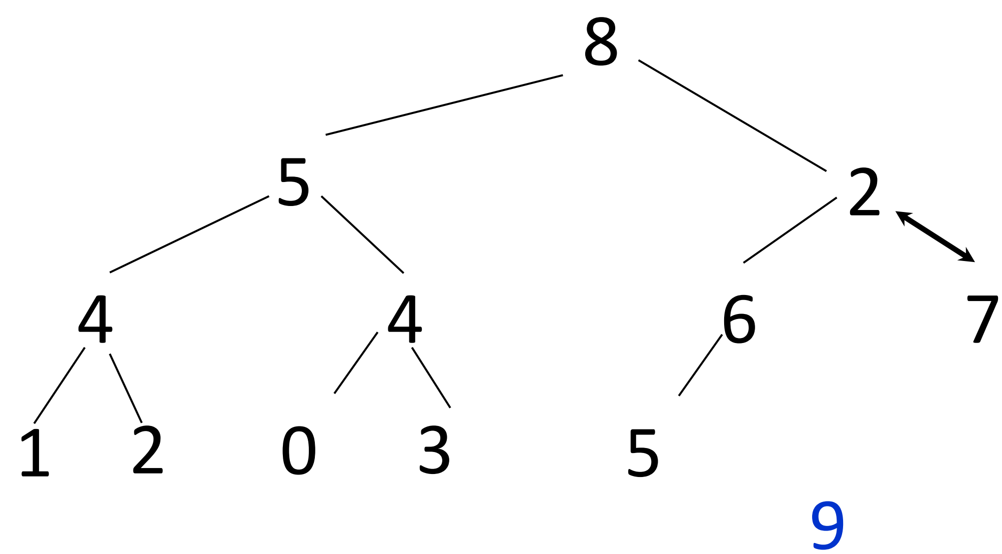
- 8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



Пирамида стала меньше и перестала быть упорядоченной

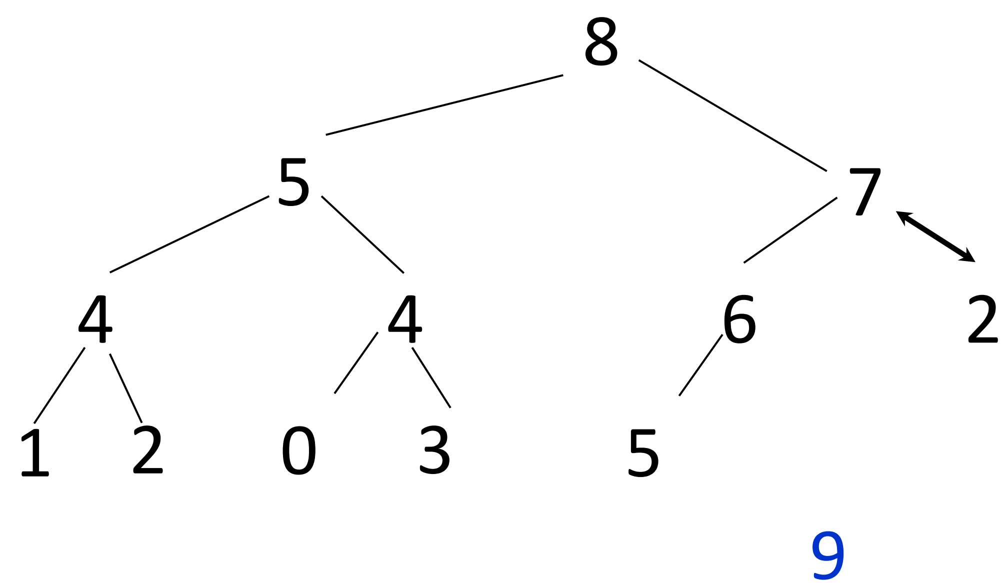
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9



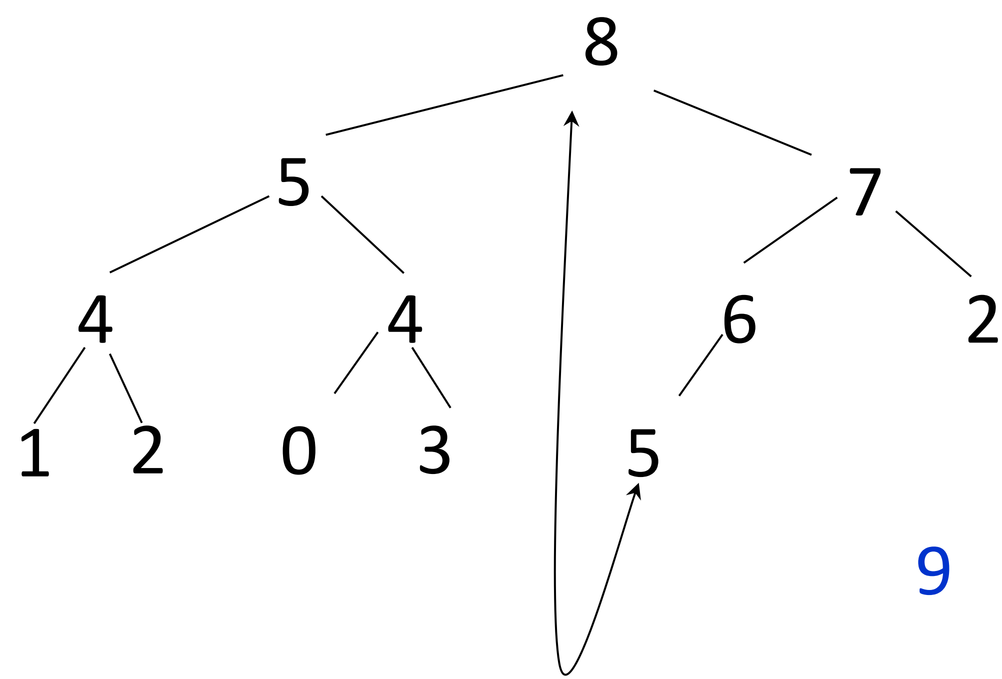
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9



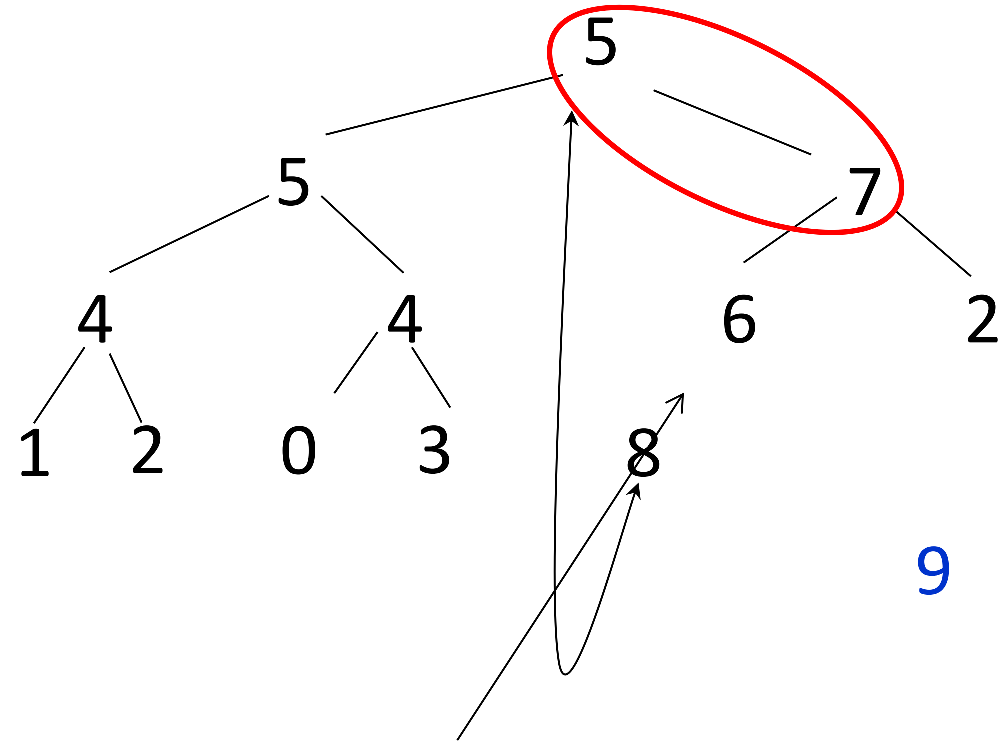
Поменять корень местами с последним потомком

- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9



Поменять корень местами с последним потомком

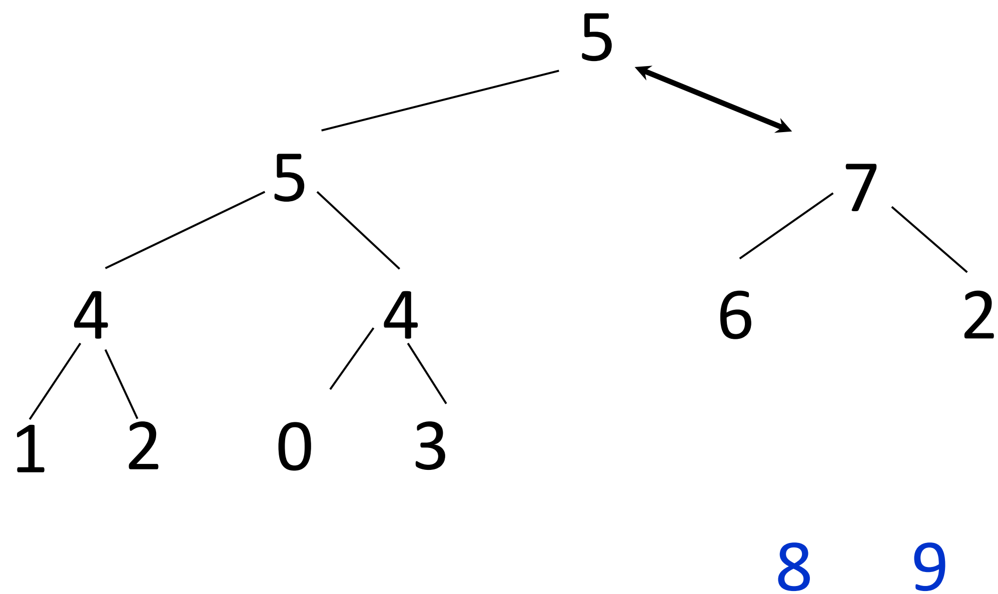
- 8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9



Пирамида стала меньше и перестала быть упорядоченной

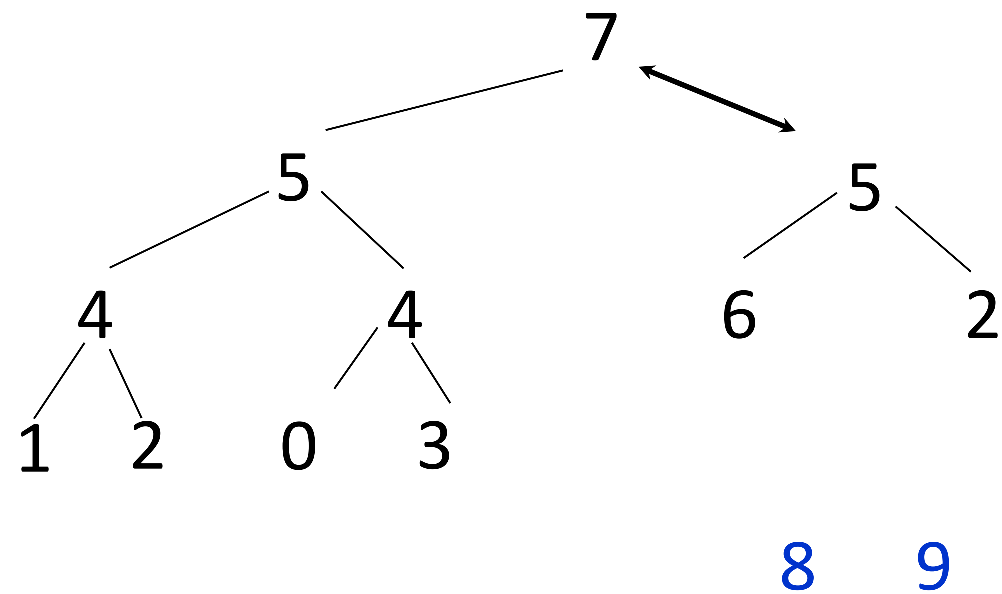
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 5   5 7   4 4 6 2   1 2 0 3 3   [8 9



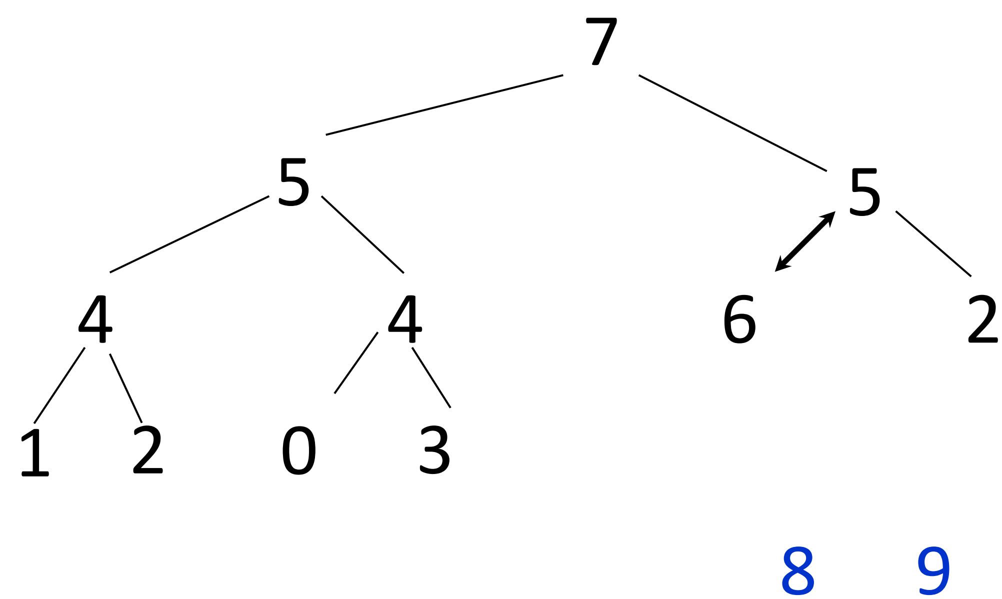
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 5   5 7   4 4 6 2   1 2 0 3 3   [8 9



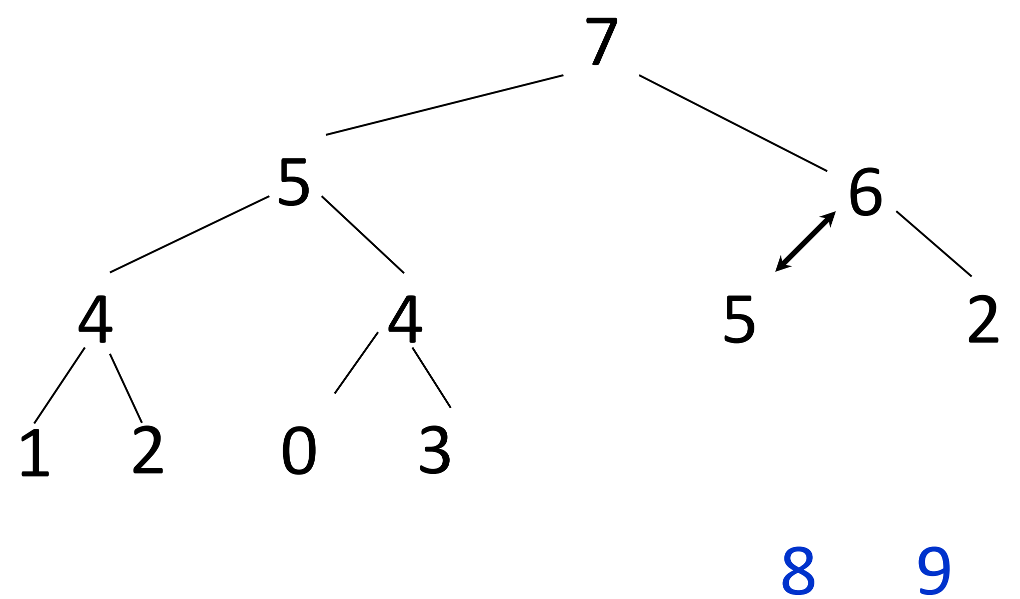
Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9



Вернуть остатку пирамиды упорядоченность

- 7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9



Пирамидальная сортировка – хаотичные обращения к памяти

меняем местами вершину пирамиды и последний элемент пирамиды

9 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 2 [

восстанавливаем упорядоченность пирамиды

2 5 8 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9

8 5 2 4 4 6 7 1 2 0 3 3 5 [9

меняем местами вершину пирамиды и последний элемент пирамиды

8 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 5 [9

восстанавливаем упорядоченность пирамиды

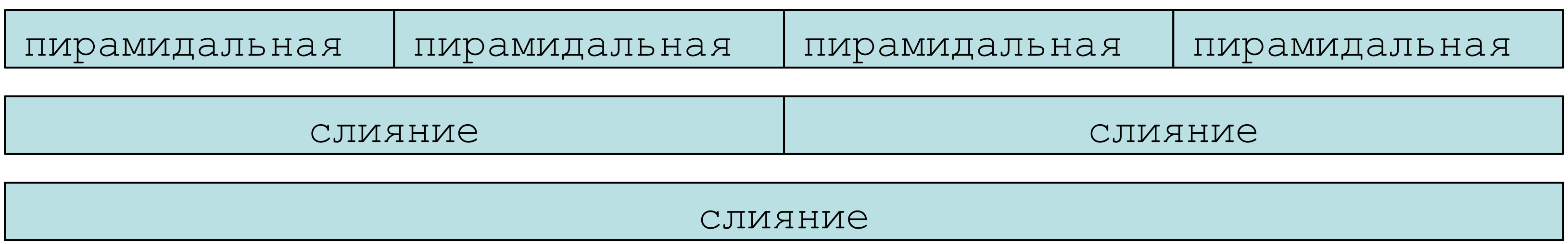
5 5 7 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9

7 5 5 4 4 6 2 1 2 0 3 3 [8 9

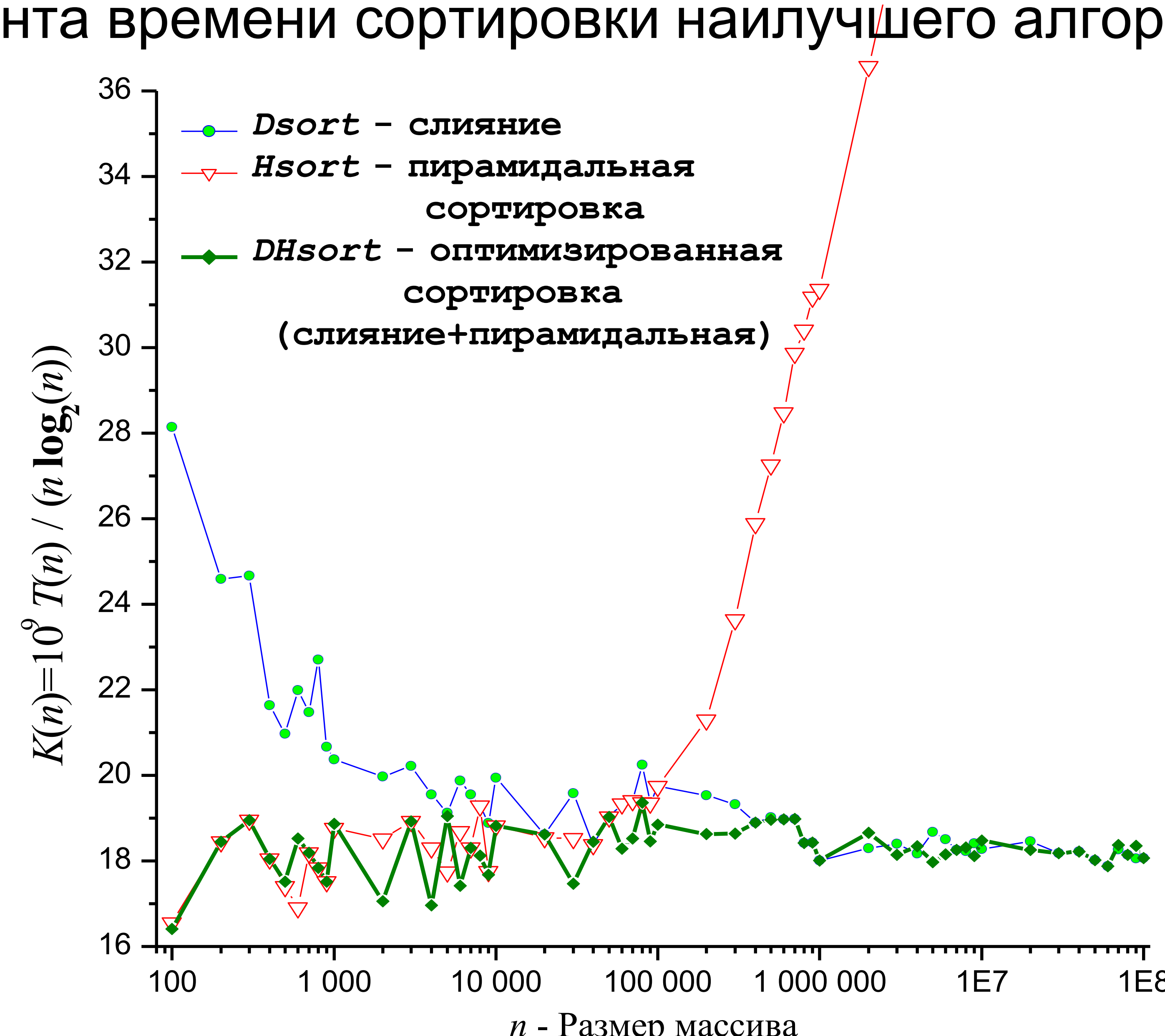
7 5 6 4 4 5 2 1 2 0 3 3 [8 9

Оптимальный алгоритм

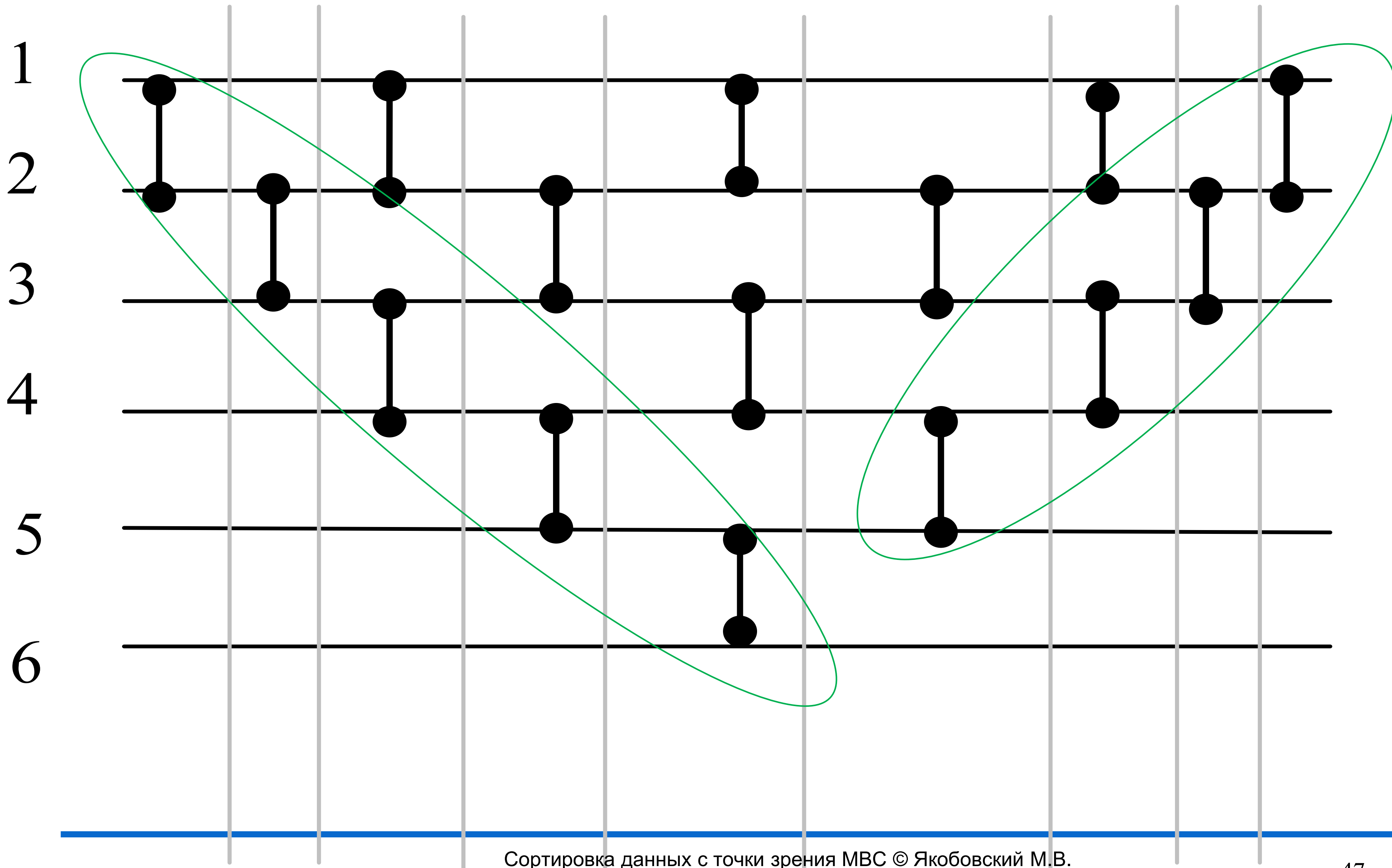
- Оптимальна комбинация:
- H алгоритм (пирамидальная сортировка) при n от 10 до 50 000
- DH алгоритм (пирамидальная сортировка блоков размером до 50 000 и их последующее слияние) при n больше 50 000



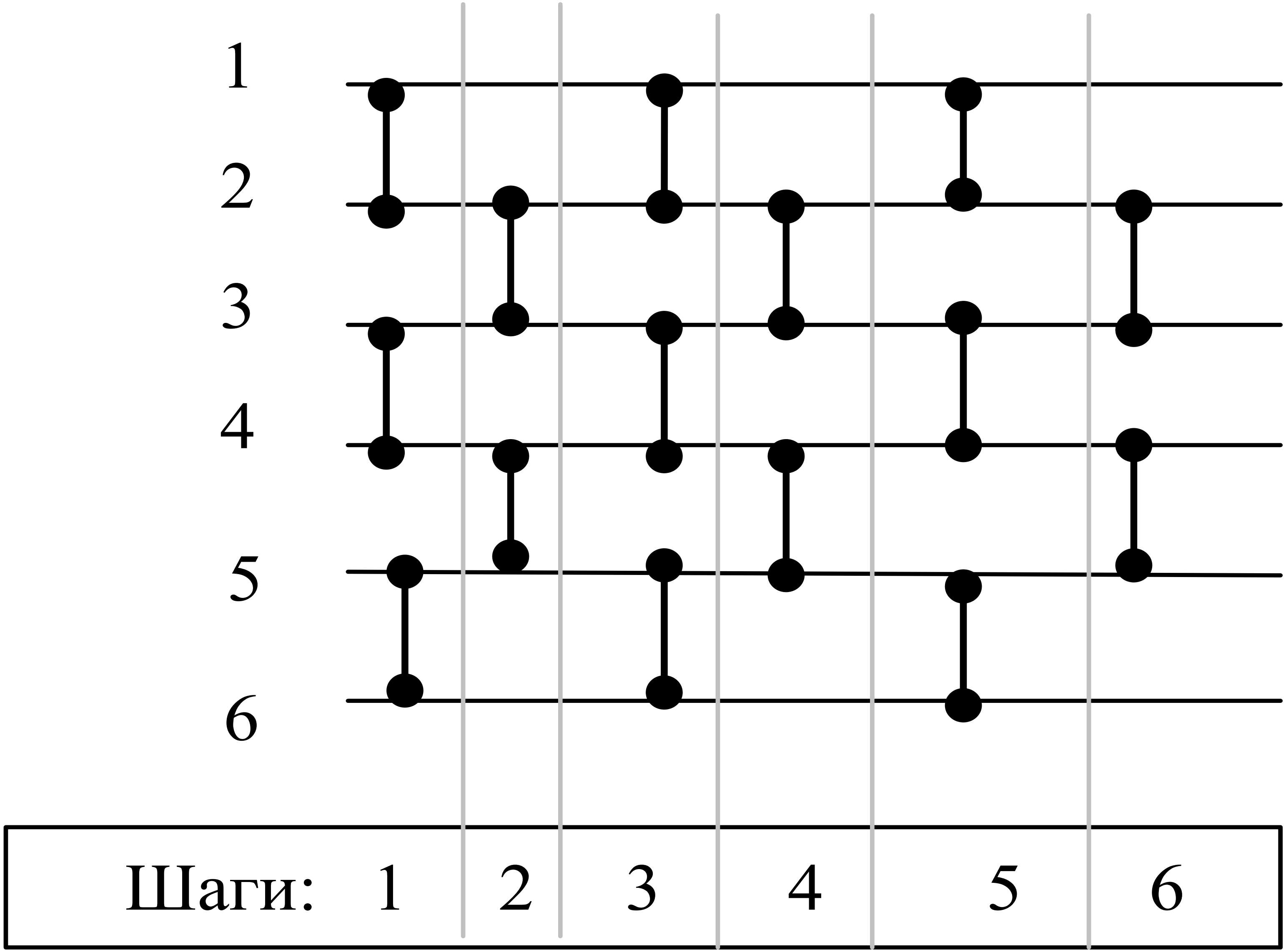
Константа времени сортировки наилучшего алгоритма



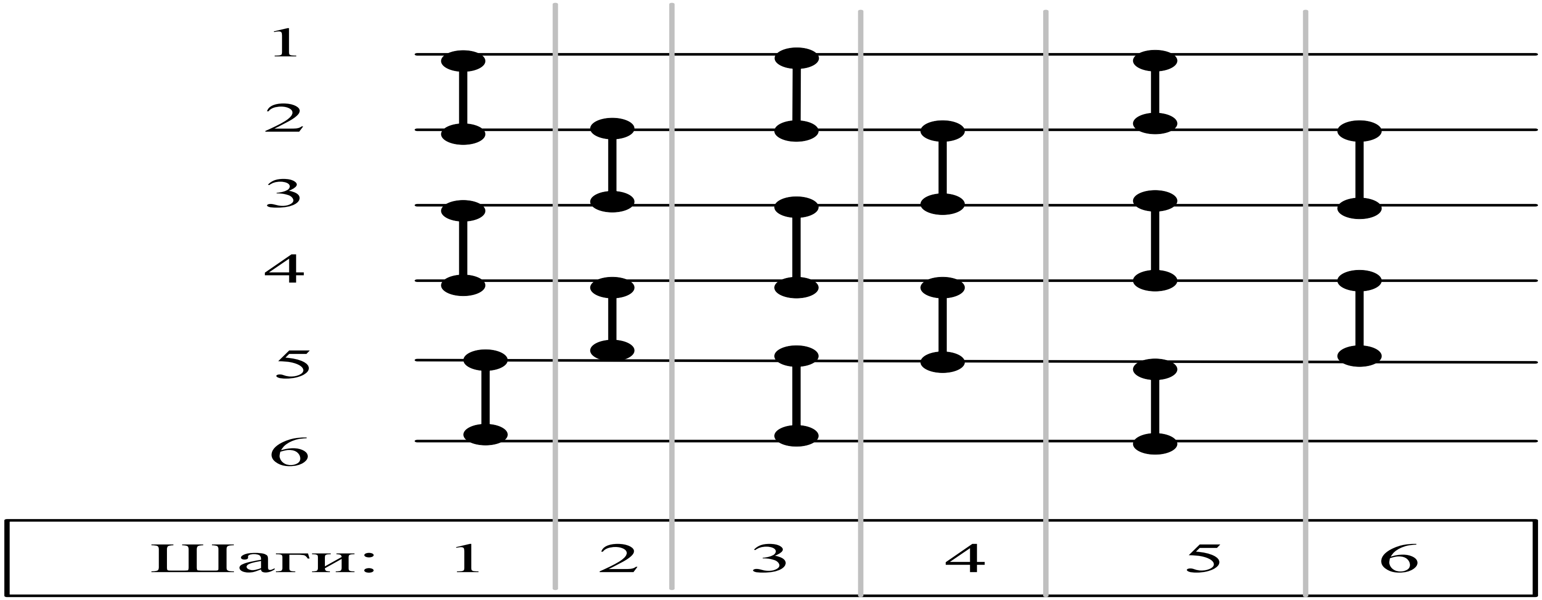
Сеть сортировки (пузырёк) *n=6 s=2n-3=9*



Сеть сортировки четно-нечетные перестановки *n=6 s=n=6*



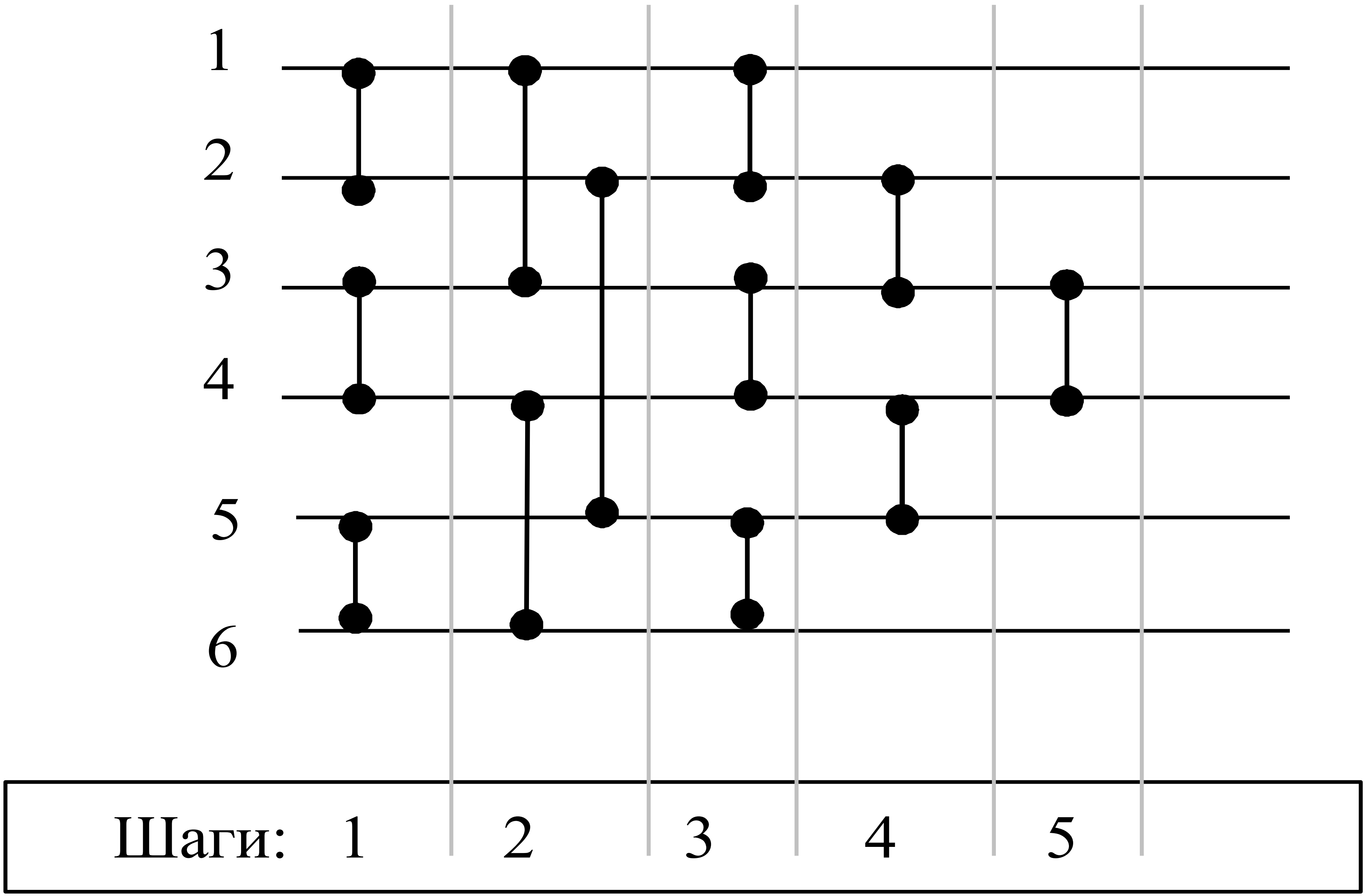
Сеть сортировки четно-нечетные перестановки *n=6 s=n=6*



$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2\frac{n}{p}+p\right]\right)=O\left(\frac{n}{p}\log_2\frac{n}{p}+n\right)\approx O(n)$$

$$T_p=O(n)$$

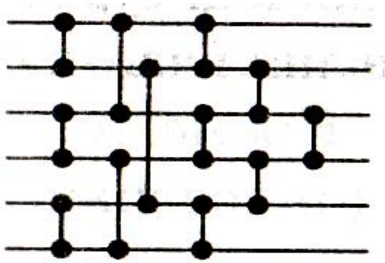
Минимальная сеть сортировки n=6 s=5



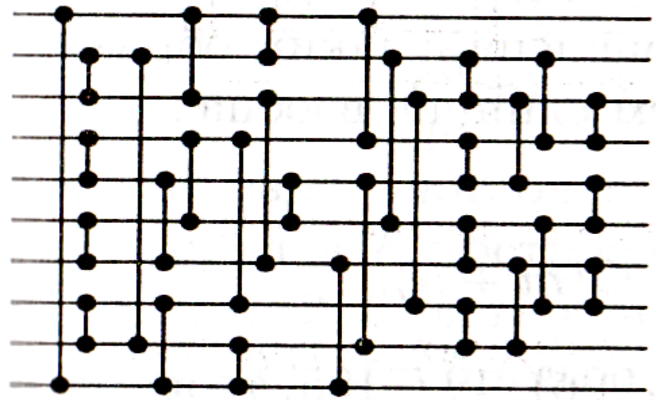
Минимальные сети сортировки

[Дн.Кнут]

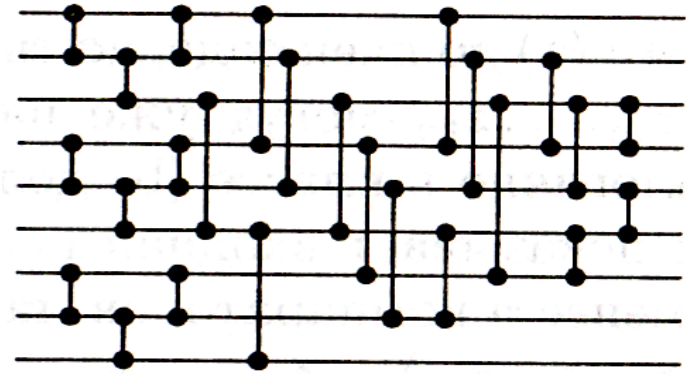
n=6 s=5



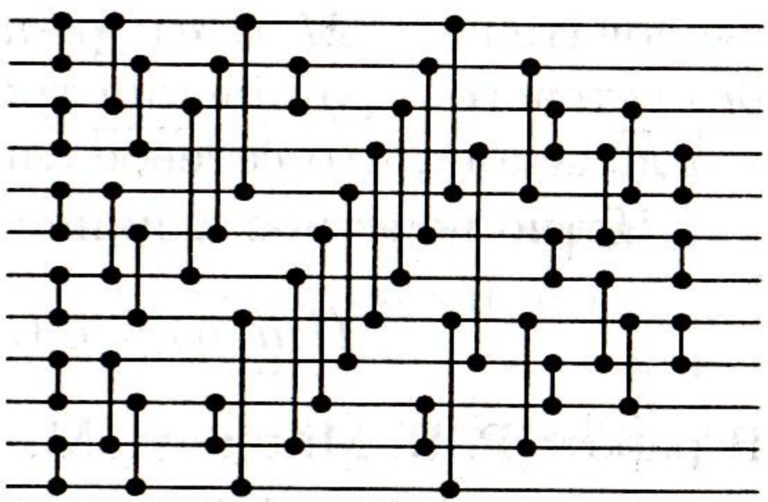
n=10 s=7



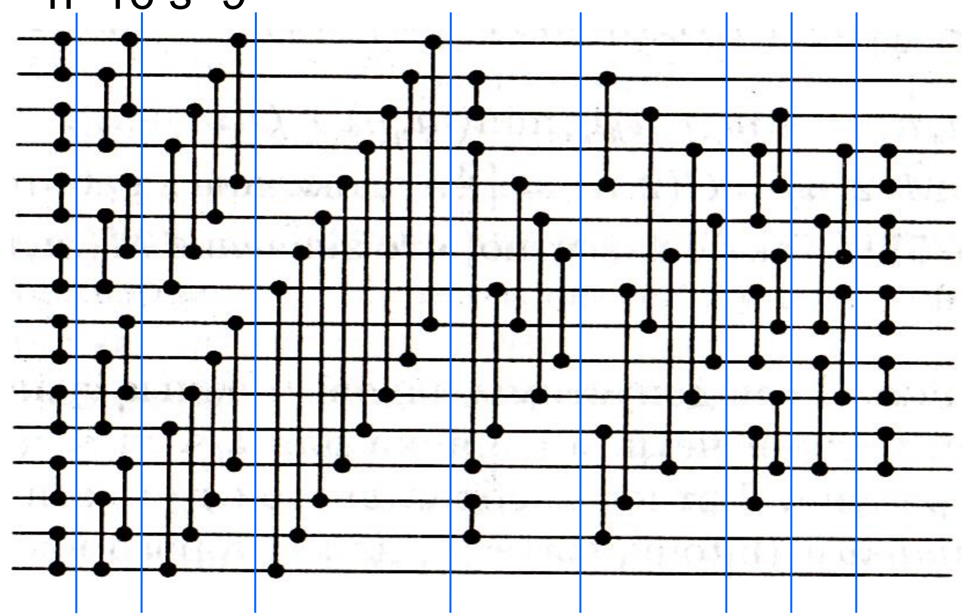
n=9 s=8



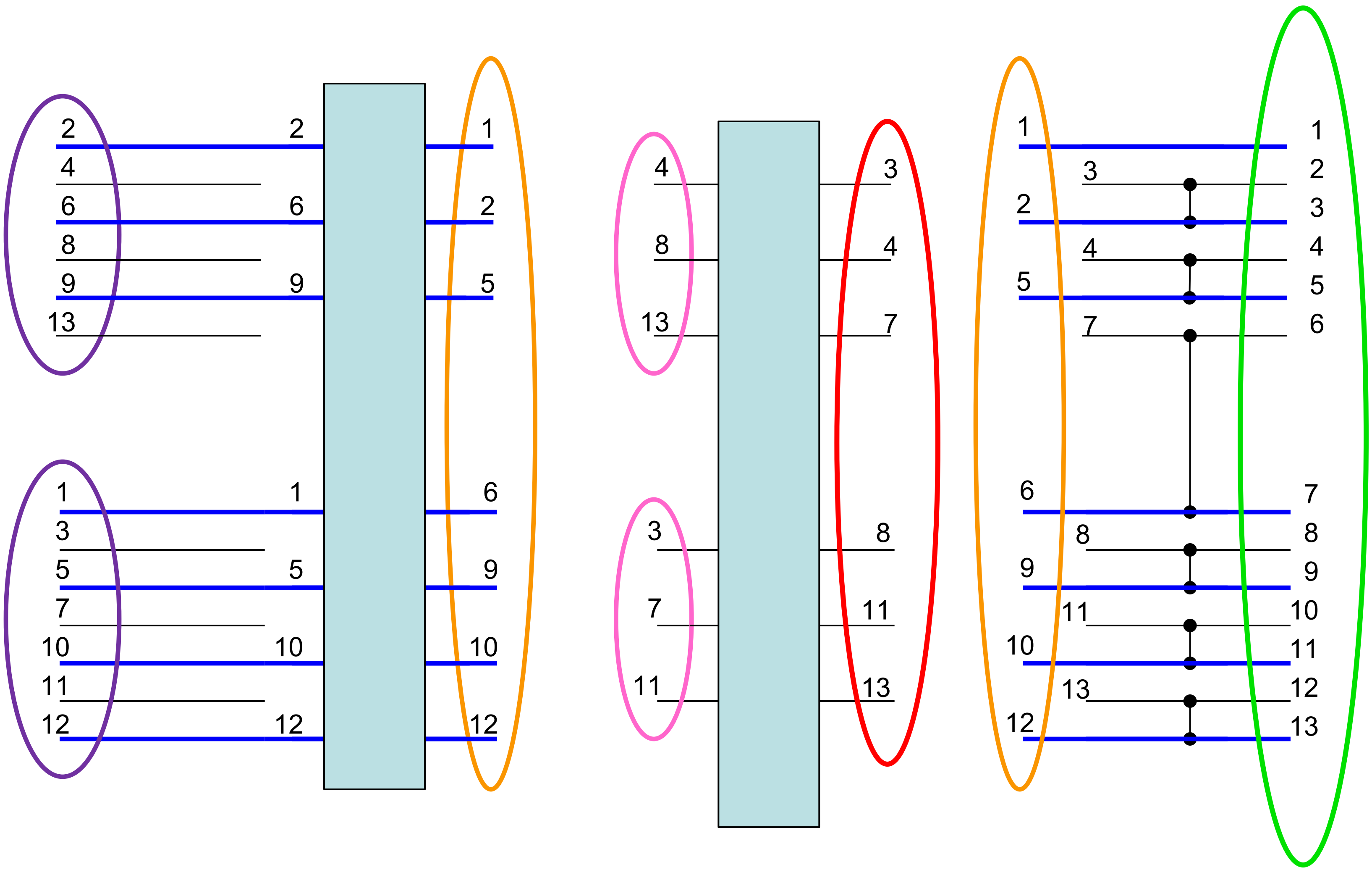
n=12 s=8



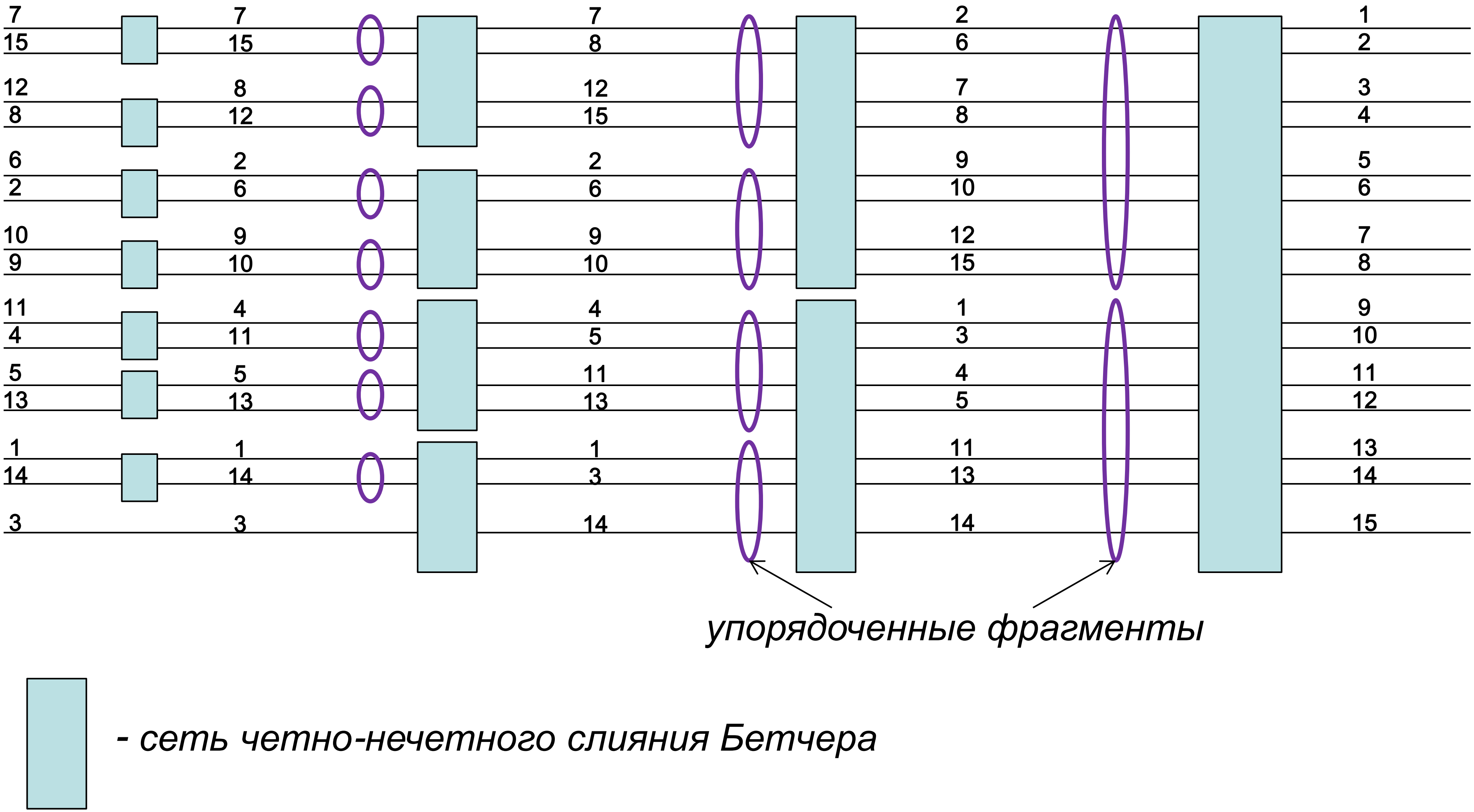
n=16 s=9



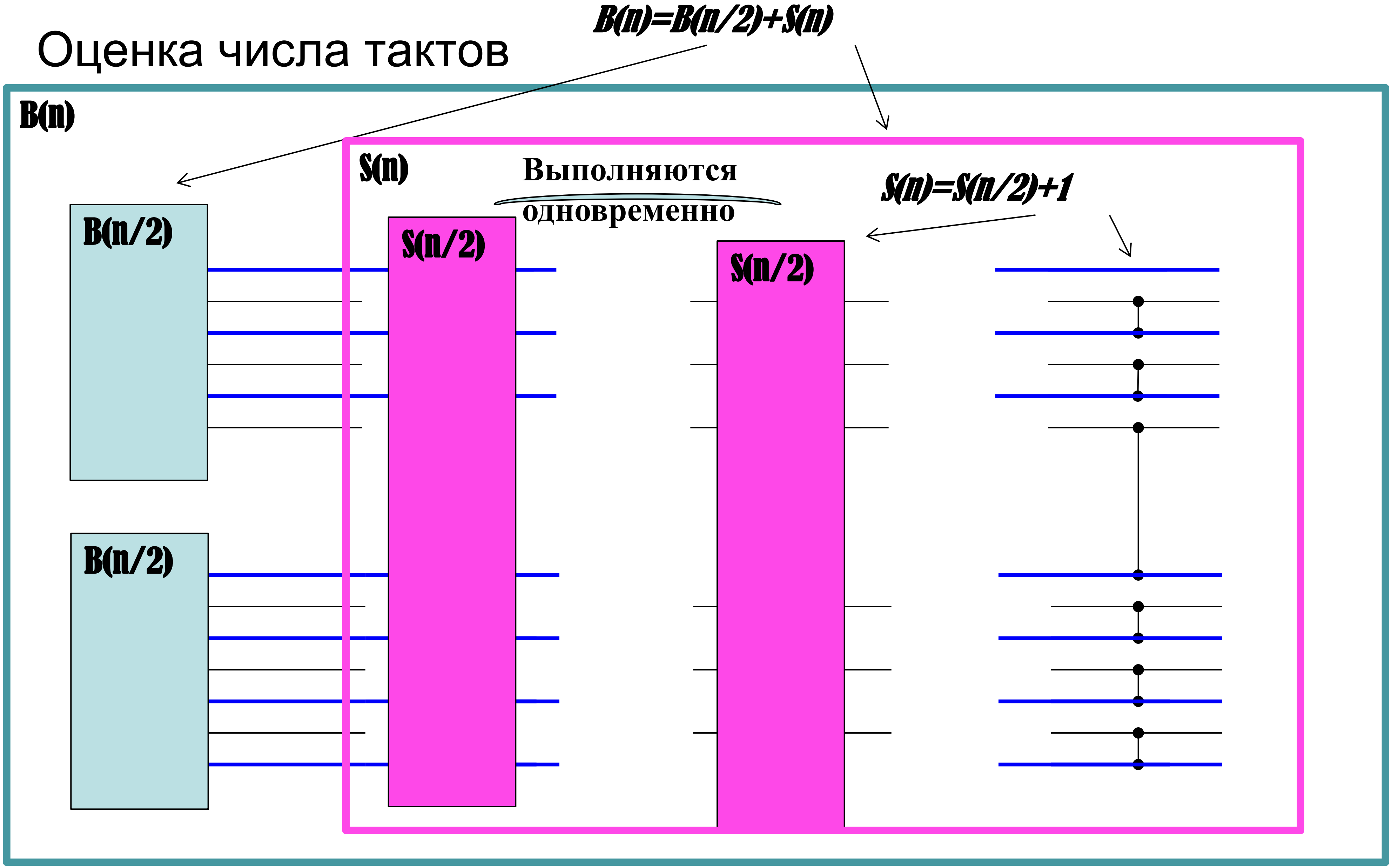
Четно-нечетное слияние Бэтчера – масштабируемая сеть



Сортировка массива из 15 элементов на основе четно-нечетного слияния Бэтчера



Оценка числа тактов



Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$B(n)=B(n/2)+S(n)$

$S(n)=S(n/2)+1$

Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$B(n)=B(n/2)+S(n)$

$S(n)=S(n/2)+1$ $\qquad$ $S(n)=\log_2(n)$

Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$B(n)=B(n/2)+S(n)$

$S(n)=S(n/2)+1$ $S(n)=log_2(n)$

$B(n)=B(n/2)+log_2(n)$

Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$B(n)=B(n/2)+S(n)$

$S(n)=S(n/2)+1$ $S(n)=\log_2(n)$

$B(n)=B(n/2)+\log_2(n)$

$B(n)= \log_2(n)\ (\log_2(n)+1)\ /\ 2$

Оценка числа последовательно расположенных групп компараторов

$B(n)=B(n/2)+S(n)$

$S(n)=S(n/2)+1$ $S(n)=\log_2(n)$

$B(n)=B(n/2)+\log_2(n)$

$B(n)= \log_2(n)\ (\log_2(n)+1)\ /\ 2$

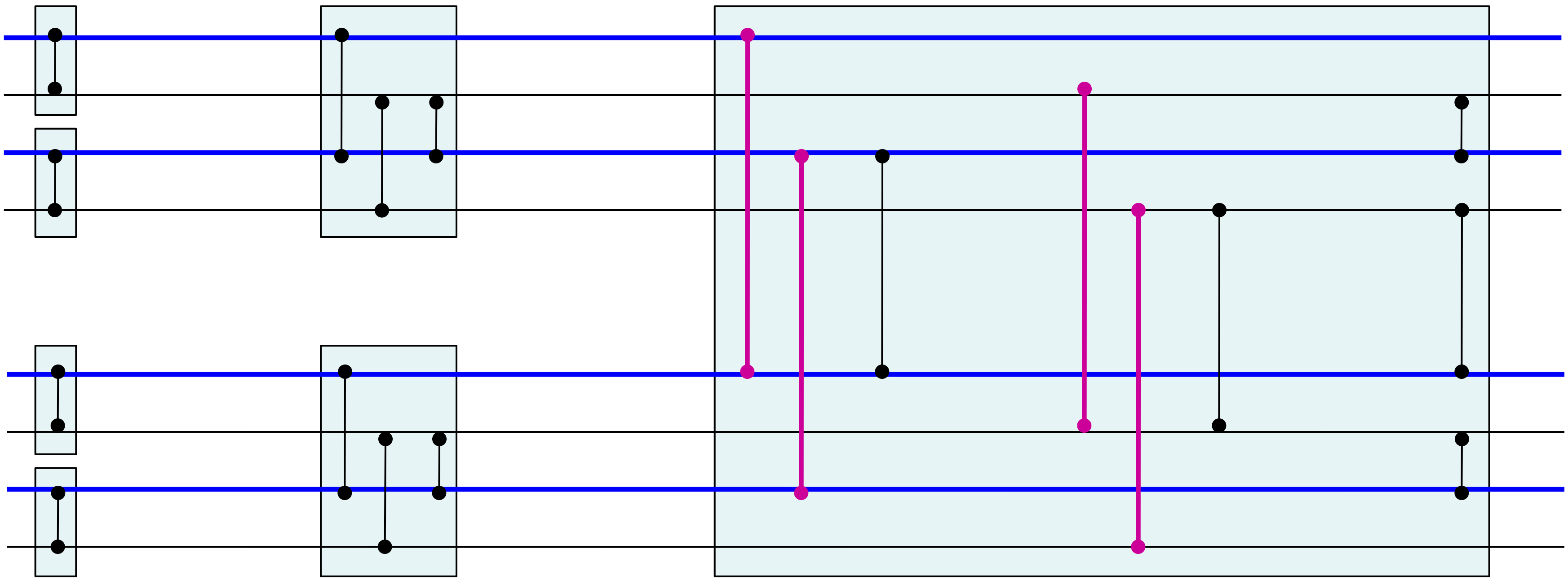
$$s_p \approx \frac{\lceil \log_2 p \rceil \left(\lceil \log_2 p \rceil + 1 \right)}{2}$$

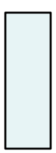
Сортировка восьми элементов

$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2\frac{n}{p}+\frac{\lceil\log_2 p\rceil^2}{2}\right]\right)$$

или

n элементов восемью процессорами



 *- сеть четно-нечетного слияния Бетчера*

Пример работы алгоритма
Начало, массив распределен по процессорам

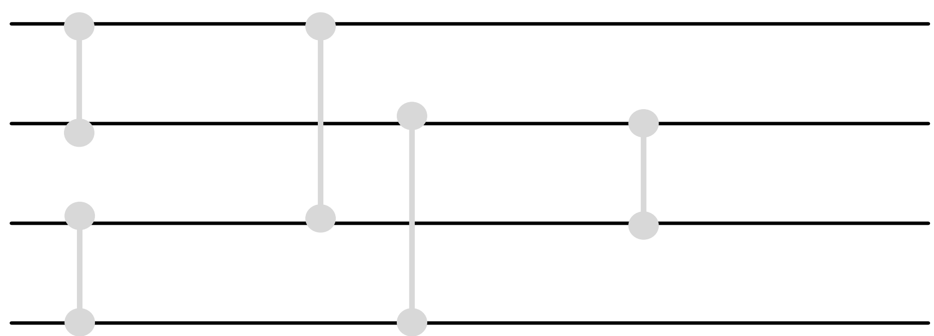
8 7 4   3 9 2   5 1 2   4 0 6

8 7 4

3 9 2

5 1 2

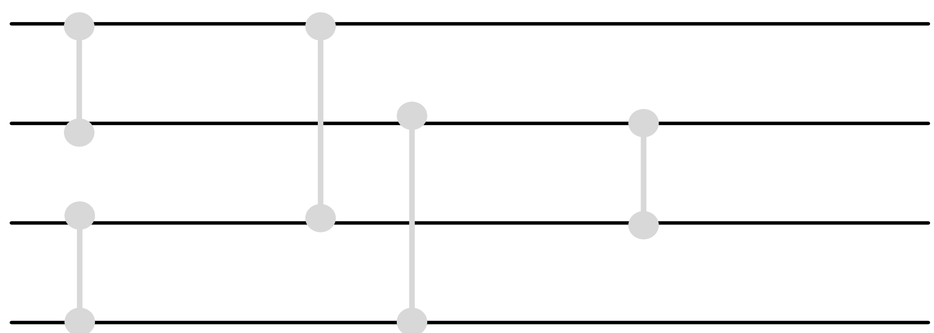
4 0 6



Сортируем фрагменты

8 7 4   3 9 2   5 1 2   4 0 6

4 7 8
2 3 9
1 2 5
0 4 6

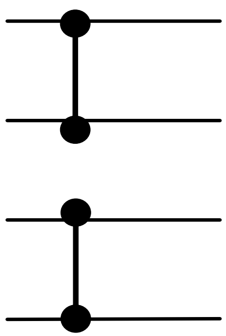


4 7 8   2 3 9   1 2 5   0 4 6

Первые два компаратора слияния перестановки

4 7 8   2 3 9   1 2 5   0 4 6

4 7 8
2 3 9
1 2 5
0 4 6



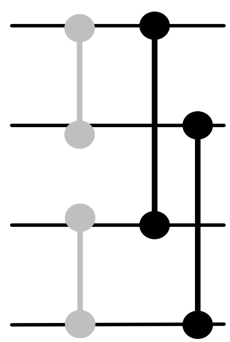
2 3 4
7 8 9
0 1 2
4 5 6

2 3 4   7 8 9   0 1 2   4 5 6

Вторая пара компараторов слияния перестановки

2 3 4 7 8 9 0 1 2 4 5 6

2 3 4
7 8 9
0 1 2
4 5 6



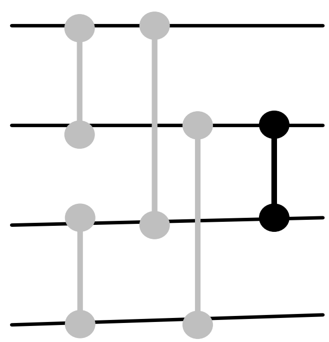
0 1 2
4 5 6
2 3 4
7 8 9

0 1 2 4 5 6 2 3 4 7 8 9

Последний компаратор слияния перестановки

0 1 2 4 5 6 2 3 4 7 8 9

0 1 2
4 5 6
2 3 4
7 8 9

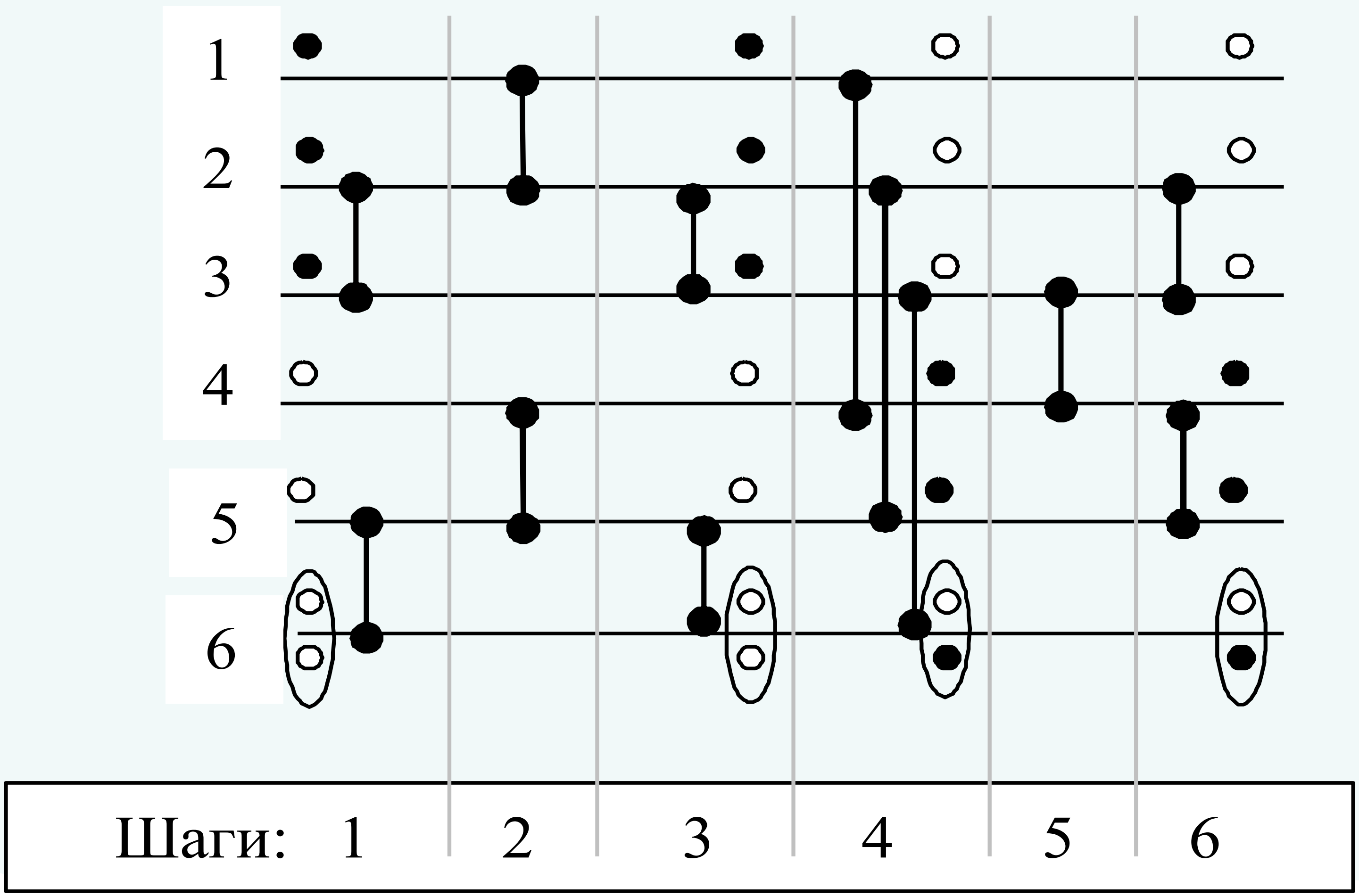


0 1 2
2 3 4
4 5 6
7 8 9

0 1 2 2 3 4 4 5 6 7 8 9

Массив упорядочен

Ограничение метода:
Сортировка блоков – ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА

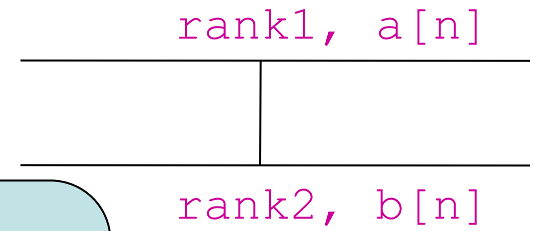


Слияние упорядоченных фрагментов

```
// объединить два упорядоченных массива a,b

for(ia=0,ib=0,k=0;k<n1+n2;k++)
    {
    if(ia>=n1) c[k]=b[ib++];
    else
    if(ib>=n2) c[k]=a[ia++];
    else
    if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
    else            c[k]=b[ib++];
    }
```

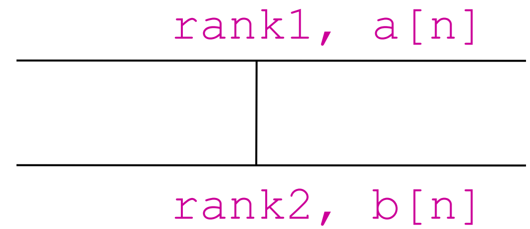
Слияние упорядоченных фрагментов

```
for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;k++)
    {
    if(ia>=n1) c[k]=b[ib++];
    else
    if(ib>=n2) c[k]=a[ia++];
    else
    if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
    else            c[k]=b[ib++];
    }
```



// n – число элементов в каждом из массивов a,b

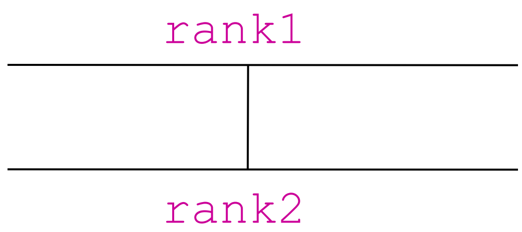
Слияние упорядоченных фрагментов




```
for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;k++)
    {




        if(a[ia]<b[ib]) c[k]=a[ia++];
        else            c[k]=b[ib++];
    }

// n – число элементов в каждом из массивов a,b
```

Слияние упорядоченных фрагментов

```
Join(int *a, int *b, int *c, int n,rank1,rank2)
{
if(rank==rank1)
        for(ia=0,ib=0,k=0;k<n;)
                {
                if(a[ia]<b[ib]) c[k++]=a[ia++];
                else             c[k++]=b[ib++];
                }
else
        for(ia=n-1,ib=n-1,k=n-1;k>=0;)
                {
                if(a[ia]>b[ib]) c[k--]=a[ia--];
                else             c[k--]=b[ib--];
                }
}
```



Реализация компаратора слияния

```
// взаимодействие процессоров rank и rankC
int *a,*b,*c,*tmp;
ASend(a,n,rankC);
ARecv(b,n,rankC);
ASync();

Join(a,b,c,n, rank, rankC);

tmp=a;
a=c;
c=tmp;
```

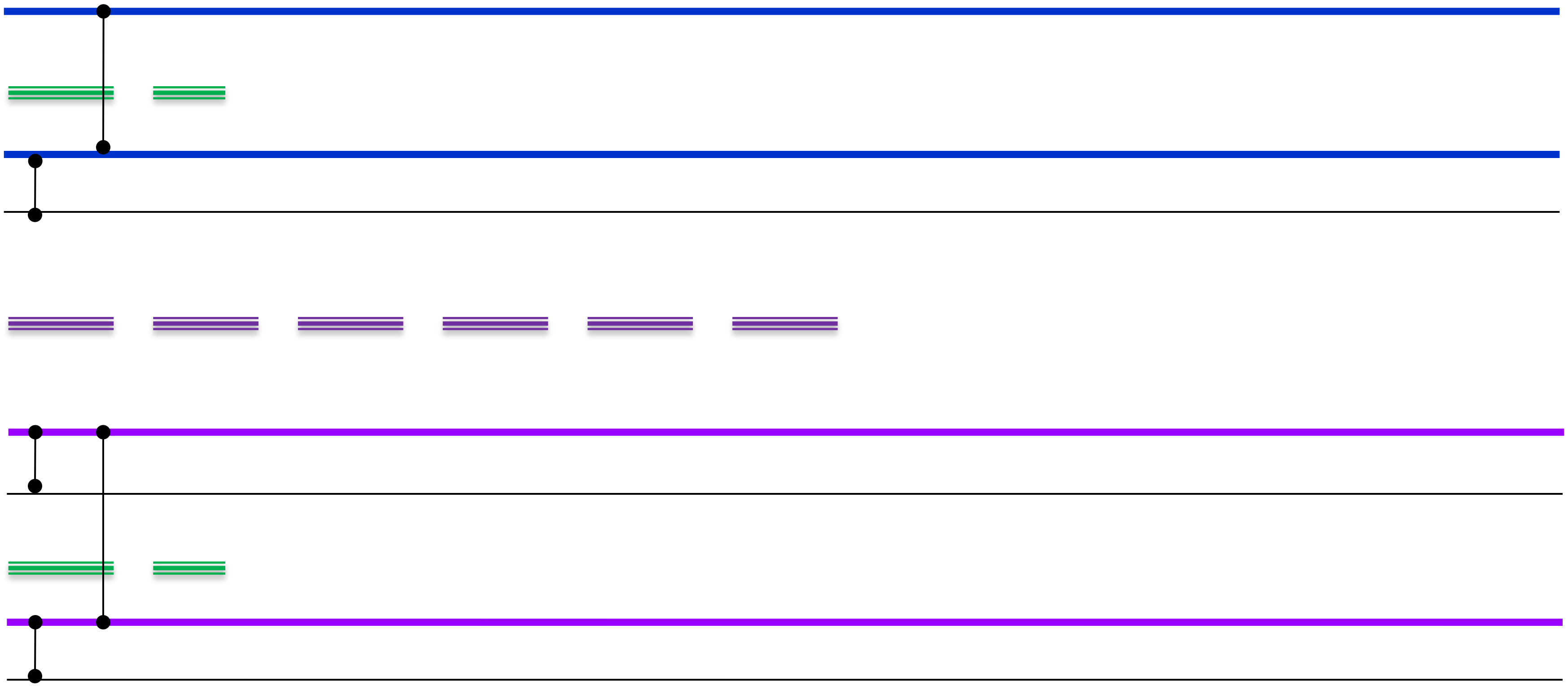
Сортировка семи элементов

Разделить на две группы

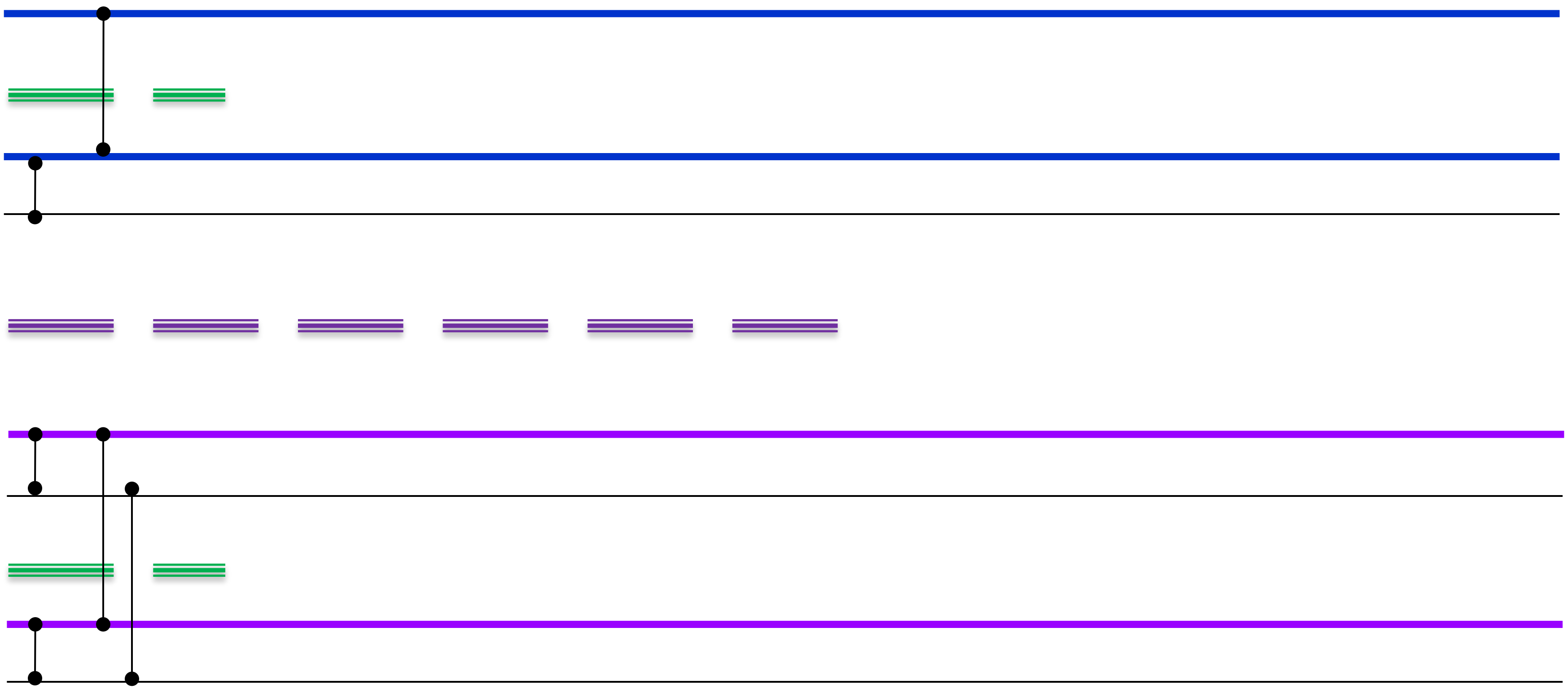
Снова разделить каждую группу

Сортировать каждый короткий фрагмент

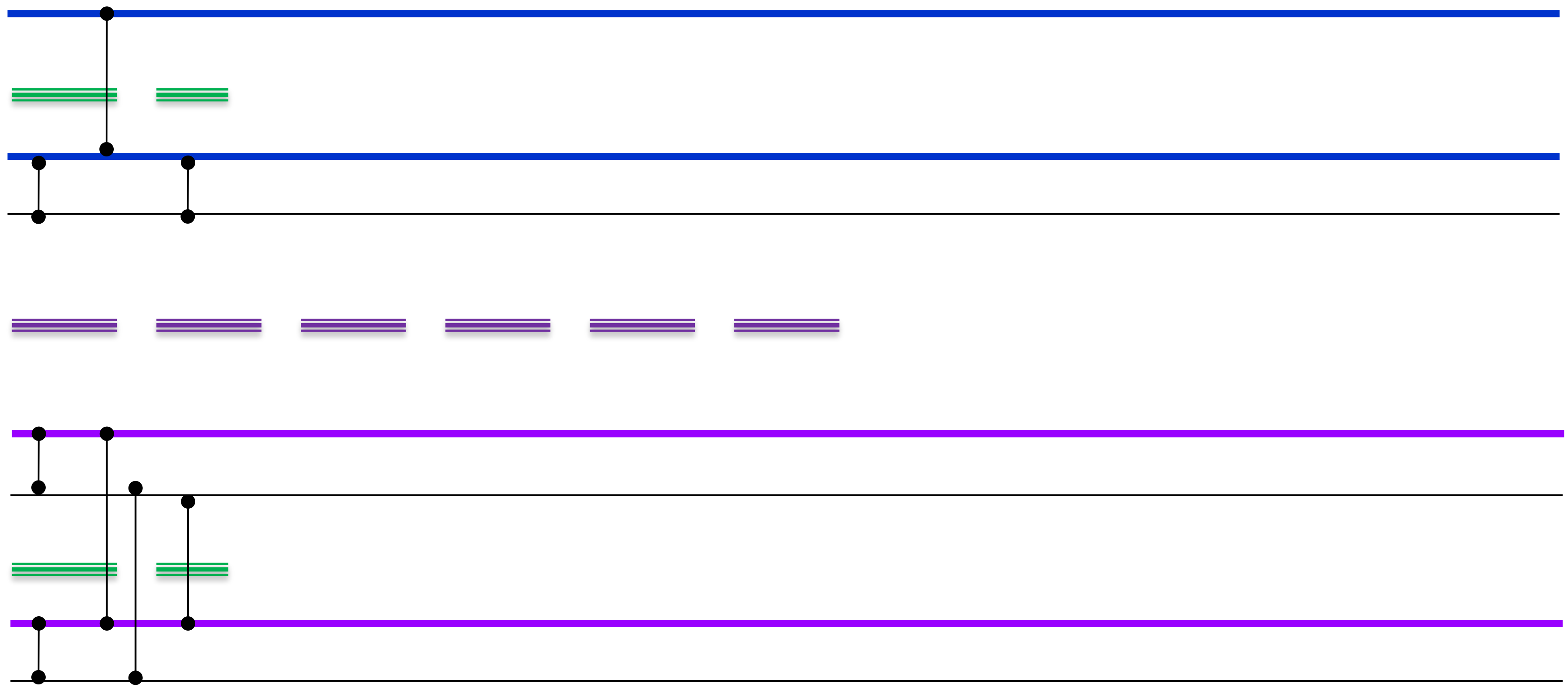
Сортировать нечетные строки в каждом из фрагментов



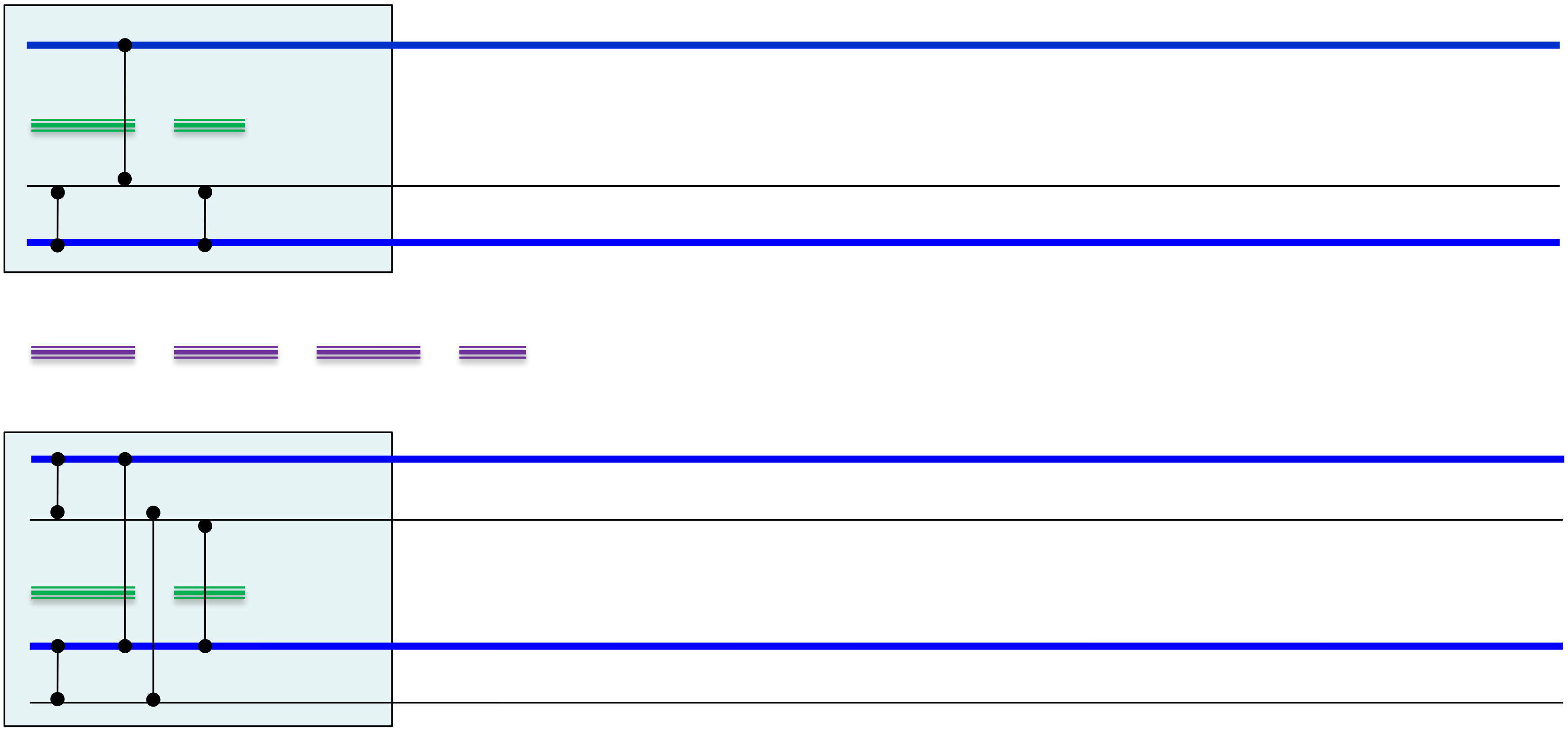
Сортировать четные строки в каждом из фрагментов



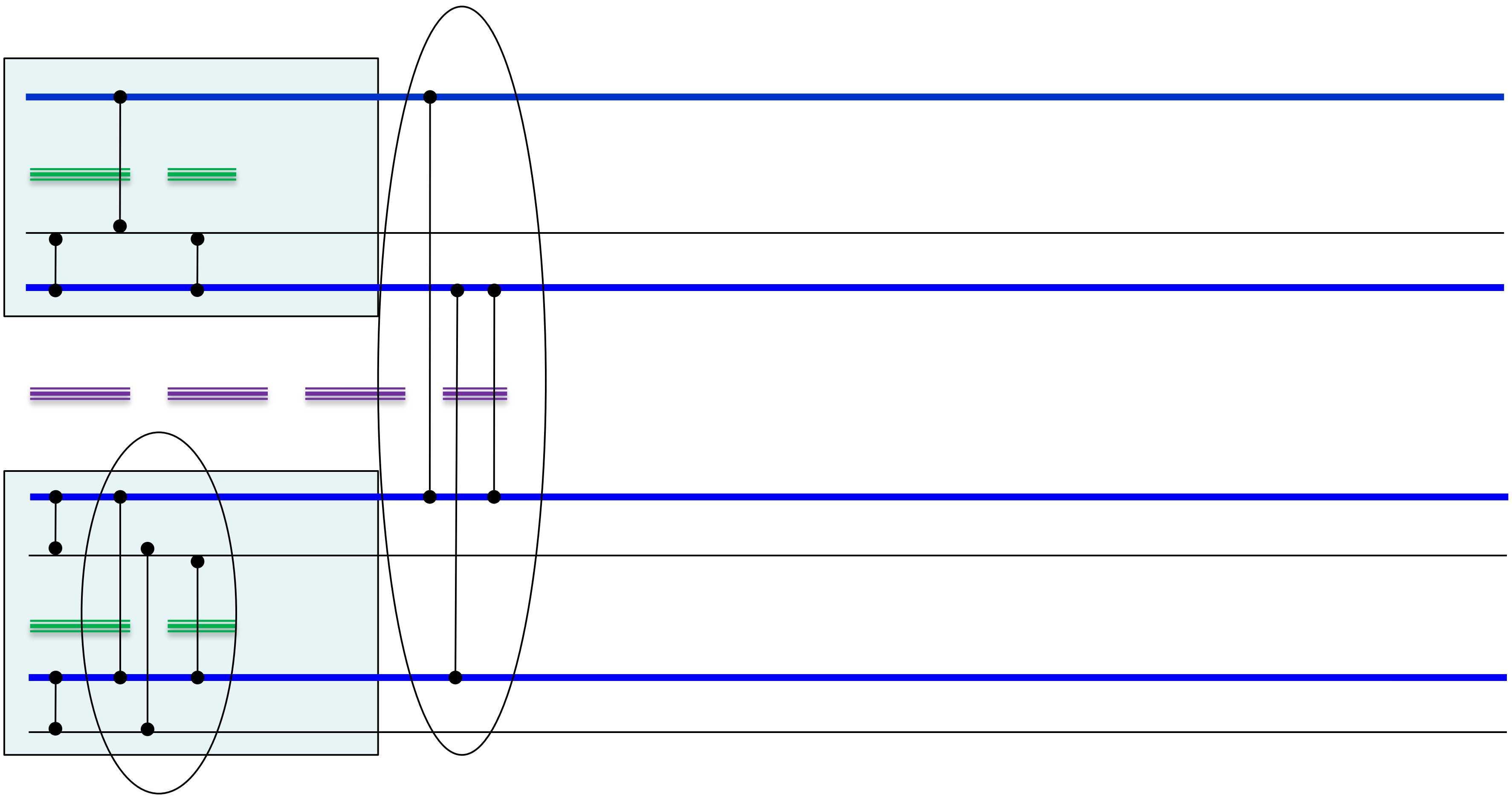
Объединить отсортированные четные и нечетные строки в каждом фрагменте



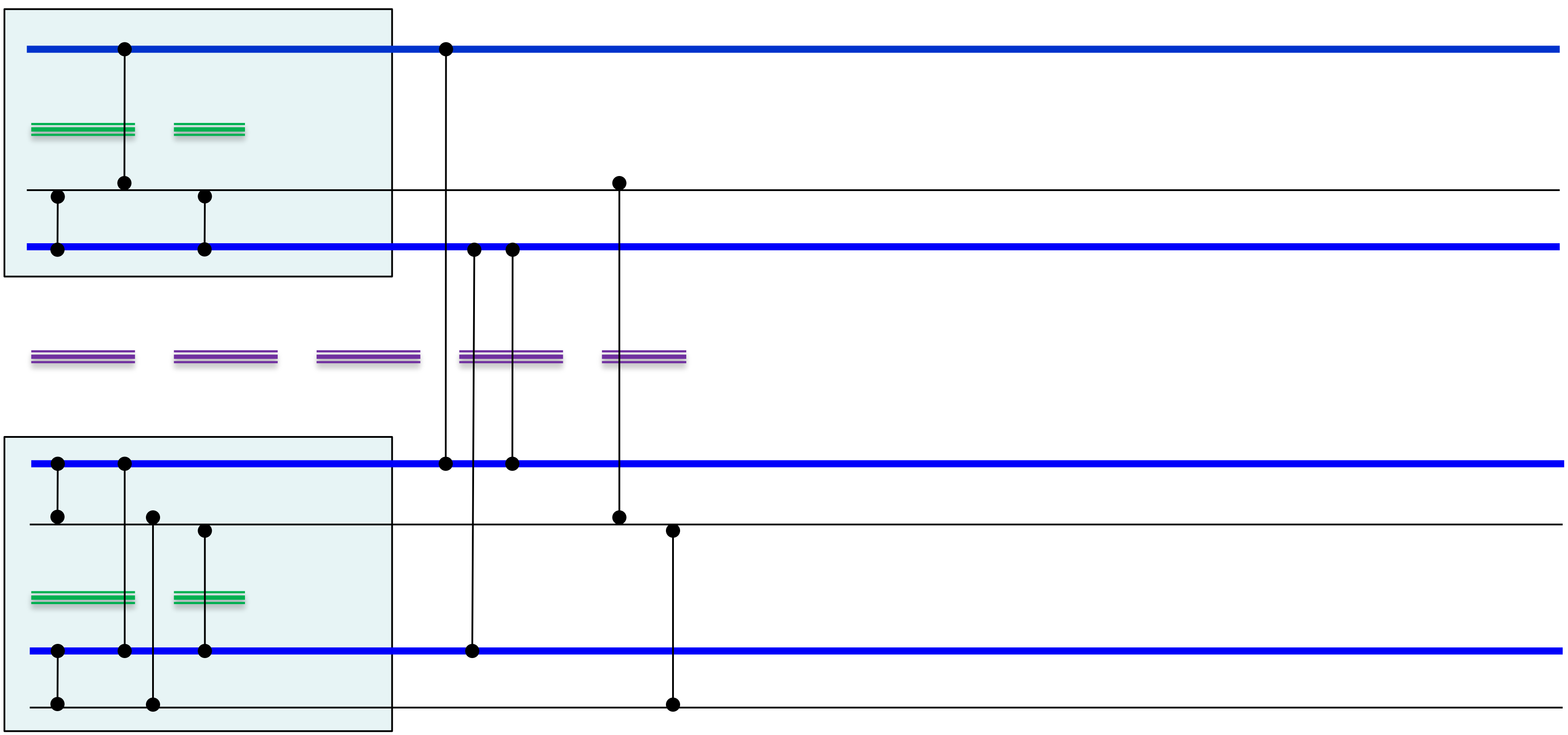
Объединить два отсортированных фрагмента



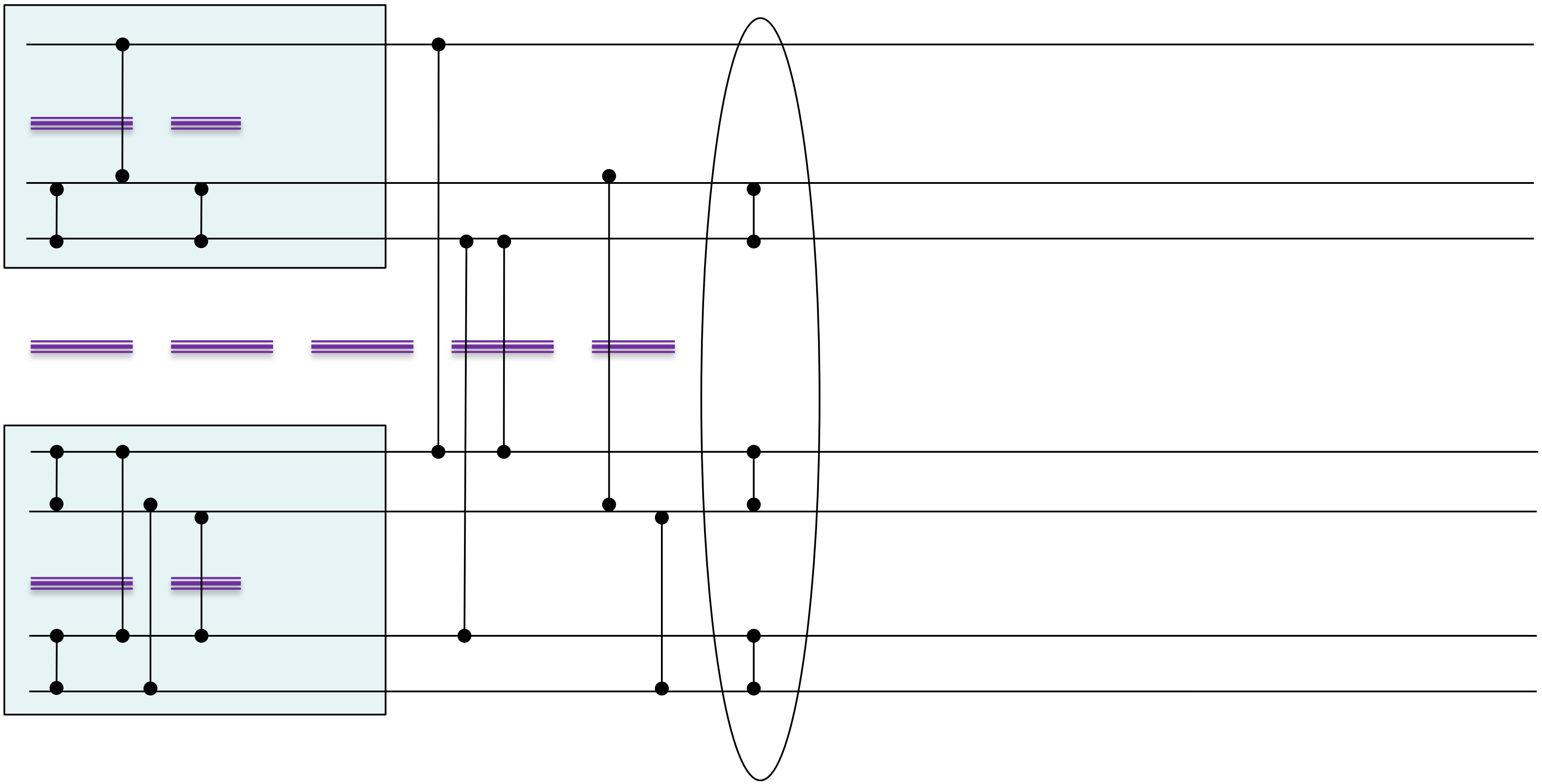
Объединить четные строки отсортированных фрагментов



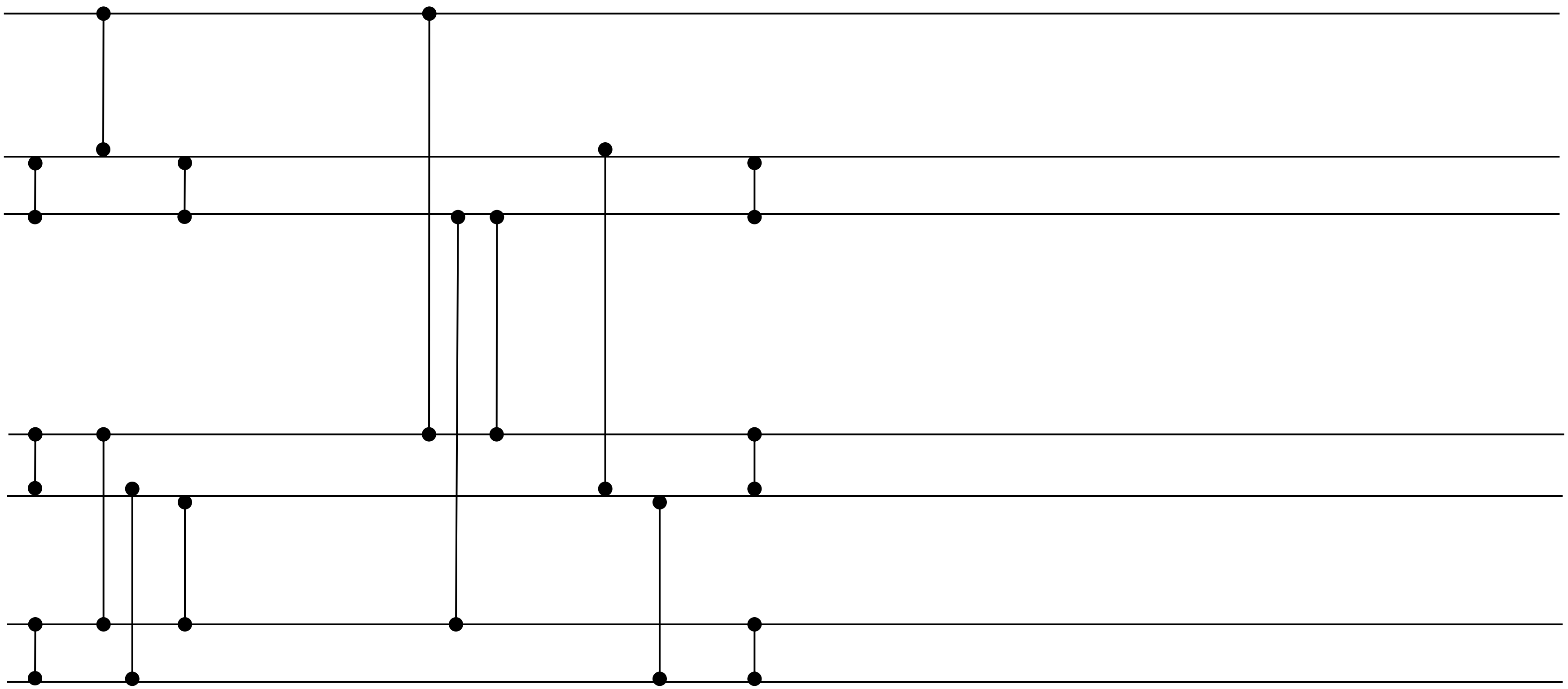
Объединить нечетные строки отсортированных фрагментов



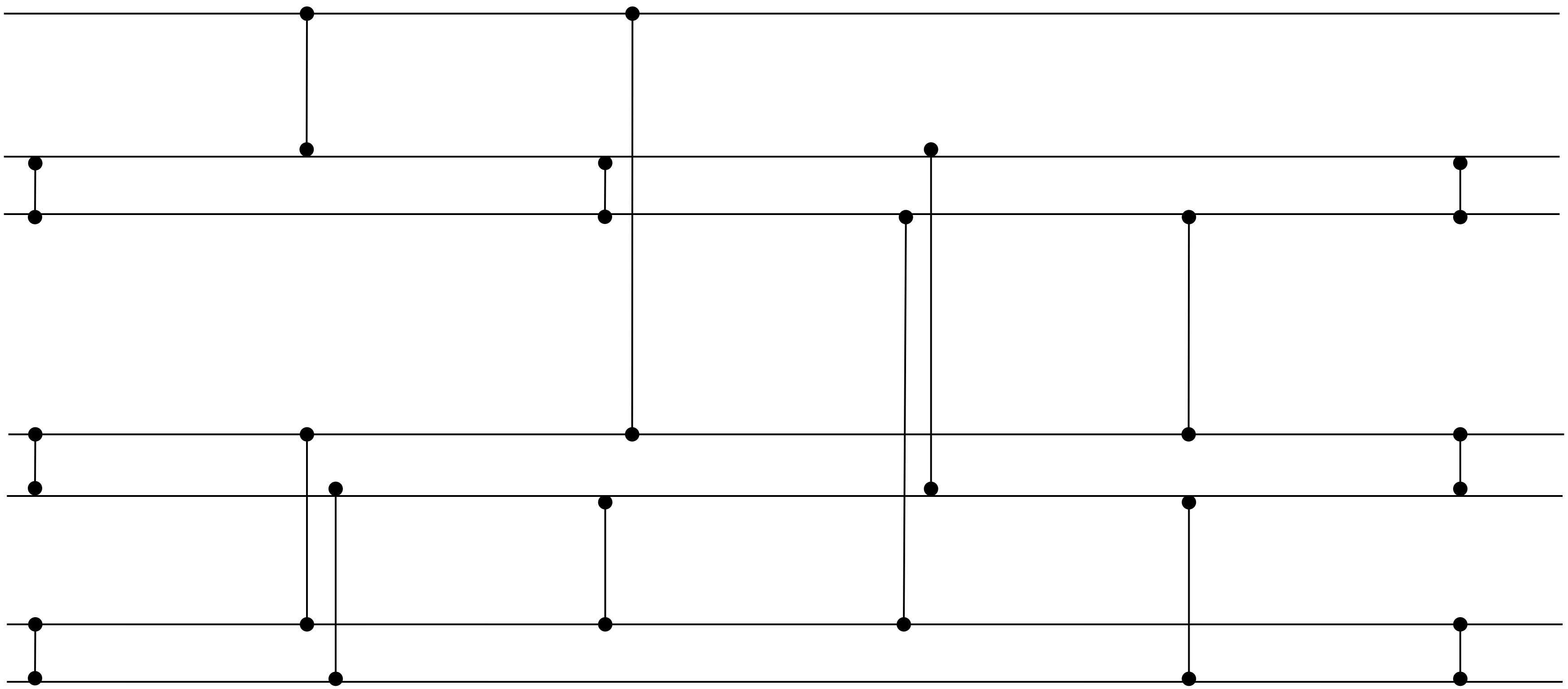
Замыкающая цепочка компараторов



Полная сеть сортировки



Полная сеть сортировки, такты выполнения

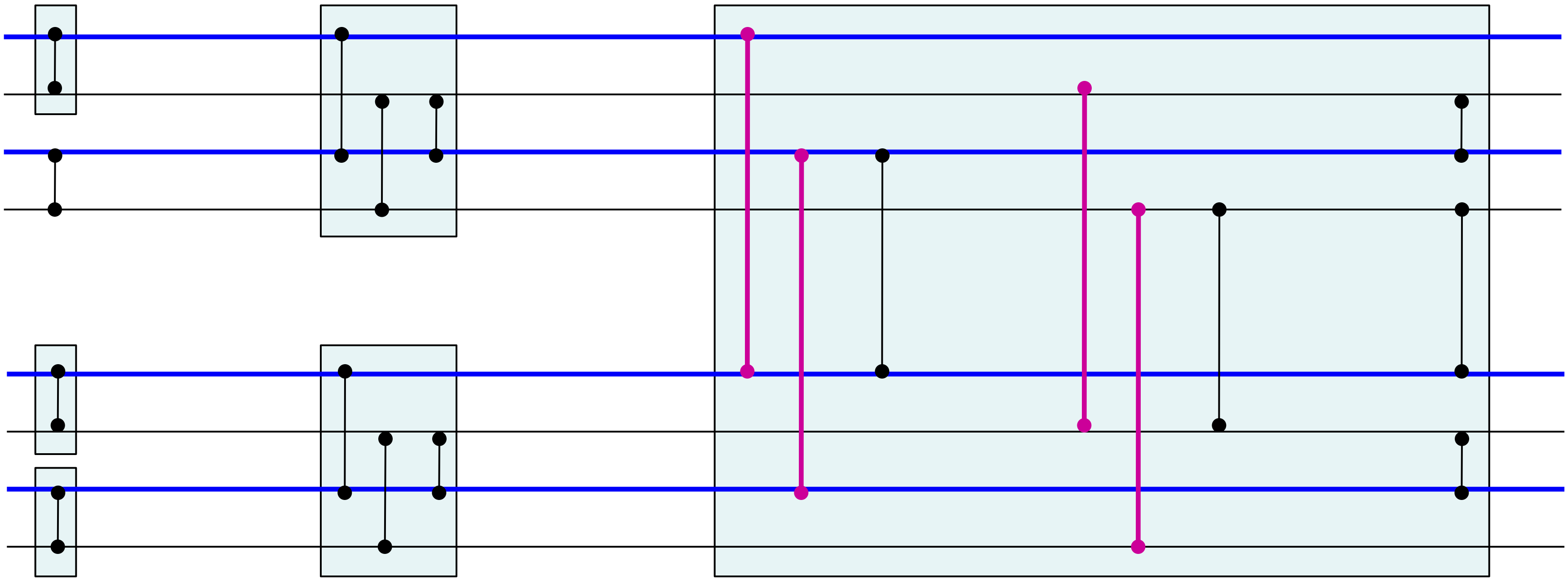


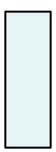
Сортировка восьми элементов

или

n элементов восемью процессорами

$$O\left(\frac{n}{p}\left[\log_2 \frac{n}{p} + \frac{\lceil \log_2 p \rceil^2}{2}\right]\right)$$





- сеть четно-нечетного слияния Бетчера

n=10^8

$$E^{\max}(n,p)=\frac{\log_2 n}{\log_2 n + s_p - \log_2 p} \approx \frac{1}{1+\log_n p(\log_2 p - 1)/2}$$

P	T,сек	E	S	E^{max}	S^{max}	s_p
1	83.51	100.00%	1.00	100%	1.0	0
2	46.40	90.00%	1.80	100%	2.0	1
3	35.93	77.48%	2.32	95%	2.8	3
4	29.68	70.35%	2.81	96%	3.9	3
5	24.45	68.33%	3.42	91%	4.5	5
6	22.16	62.80%	3.77	92%	5.5	5
7	21.82	54.67%	3.83	89%	6.2	6
8	19.95	52.32%	4.19	90%	7.2	6
16	12.36	42.22%	6.75	82%	13.1	10
27	9.32	33.20%	8.97	74%	20.0	14
32	7.85	33.24%	10.64	73%	23.3	15
48	6.45	26.97%	12.95	66%	31.9	19
64	4.92	26.53%	16.98	64%	40.9	21
128	3.19	20.47%	26.20	56%	71.5	28
192	2.52	17.29%	33.19	51%	98.2	33
256	1.99	16.41%	42.02	49%	124.6	36
384	1.63	13.33%	51.20	49%	187.0	41
512	1.29	12.64%	64.74	42%	217.4	45
640	1.21	10.78%	69.02	41%	264.7	47

$$s_p \approx \frac{\lceil \log_2 p \rceil \left(\lceil \log_2 p \rceil + 1 \right)}{2}$$

Заключение

- Рассмотрен ряд методов сортировки массивов
- Проиллюстрирована разница между зависимостью от объема данных времени сортировки и числа выполняемых операций
- Построен «наилучший» последовательный алгоритм сортировки
- Рассмотрены сети сортировки
- Построен параллельный масштабируемый алгоритм сортировки

Контакты

Якобовский М.В.

проф., д.ф.-м.н.,

зав. сектором

«Программного обеспечения многопроцессорных систем и вычислительных сетей»

Института прикладной математики им. М.В.Келдыша Российской академии наук

mail: lira@imamod.ru

web: http://lira.imamod.ru