Проект 1.1

Андрей Коновалов, 073

1 Markov chains

1.1 Exercise 1.1

Воспользуемся следующим определением марковской цепи с непрерывным временем.

Определение 1 *Однородная марковская цепь с непрерывным временем с интенсивностями переходов* $\lambda(x, y)$ *- это случайный процесс* $X(t)$*, который принимает значения из конечного или счетного пространства состояний* S*, и удовлетворяет*

$$P\{X(t+h) = x \mid X(t) = x\} = 1 - \lambda(x)h + o(h),$$
$$P\{X(t+h) = y \mid X(t) = x\} = \lambda(x, y)h + o(h),$$

где $y \neq x$ *и* $\lambda(x) = \sum\limits_{y \neq x} \lambda(x, y)$.

Процесс Пуассона N с интенсивностью $\lambda > 0$ удовлетворяет

$$P\{N(t+h) = j \mid N(t) = j\} = 1 - \lambda h + o(h),$$
$$P\{N(t+h) = j+1 \mid N(t) = j\} = \lambda h + o(h).$$

А значит, по определению, процесс Пуассона является марковской цепью с непрерывным временем и пространством состояний $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

2 Walks on graphs

2.1 Exercise 2.1

По сути, нам нужно показать эквивалентность следующих утверждений:

$$\begin{gathered} \exists\, \pi'(x) : \sum_x \pi'(x) = 1, \\ \forall y : \sum_x \pi'(x) p(x, y) = \pi'(y) \end{gathered} \tag{1}$$

и

$$\begin{gathered}\exists\, \pi(x) : \forall y : \sum_x \pi(x)p(x,y) = \pi(y), \\ \sum_{x,y} c(x,y) < 1, \;\; c(x,y) = \pi(x)p(x,y),\end{gathered} \tag{2}$$

причем

$$\pi(x) \sim \pi'(x), \tag{3}$$

предполагая, что соответствующий графу марковский процесс обратим.

2.1.1 (1) ⇒ (2)

Сначала покажем (1) ⇒ (2).

$$\begin{gathered}(1) \;\Rightarrow \\ \forall y : \sum_x \pi'(x)p(x,y) = \pi'(y) \;\Rightarrow \\ \sum_y \sum_x \pi'(x)p(x,y) = \sum_y \pi'(y) = 1 \;\Rightarrow \\ \sum_{x,y} \frac{\pi'(x)}{2} p(x,y) = \frac{1}{2}.\end{gathered}$$

Определим $\pi(x) = \frac{\pi'(x)}{2}$, тогда

$$\sum_{x,y} \frac{\pi'(x)}{2} p(x,y) = \sum_{x,y} \pi(x)p(x,y) = \sum_{x,y} c(x,y) = \frac{1}{2} < 1.$$

А также

$$\forall y : \sum_x \pi'(x)p(x,y) = \pi'(y) \;\Rightarrow\; \forall y : \sum_x \pi(x)p(x,y) = \pi(y).$$

И, значит,

$$\begin{gathered}\exists\, \pi(x) = \frac{\pi'(x)}{2} : \forall y : \sum_x \pi(x)p(x,y) = \pi(y), \\ \sum_{x,y} c(x,y) < 1, \;\; c(x,y) = \pi(x)p(x,y),\end{gathered}$$

2.1.2 (2) ⇒ (1)

Теперь покажем (2) ⇒ (1).

$$\begin{gathered}(2) \;\Rightarrow \\ \sum_{x,y} c(x,y) = K < 1 < \infty.\end{gathered}$$

Определим

$$\pi'(x) = \frac{\sum\limits_y c(x,y)}{\sum\limits_{x,y} c(x,y)} = \frac{\sum\limits_y c(x,y)}{K}.$$

Тогда

$$\sum_x \pi'(x) = \sum_x \frac{\sum\limits_y c(x,y)}{\sum\limits_{x,y} c(x,y)} = \frac{\sum\limits_{x,y} c(x,y)}{\sum\limits_{x,y} c(x,y)} = \frac{K}{K} = 1.$$

Заметим, что

$$\pi'(x) = \frac{\sum\limits_y c(x,y)}{K} = \frac{\sum\limits_y \pi(y)p(y,x)}{K} = \frac{\pi(x)}{K}.$$

Осталось показать, что

$$\forall y: \ \sum_x \pi'(x)p(x,y) = \pi'(y).$$

Заметим, что $\forall y$

$$\sum_x \pi'(x)p(x,y) = \pi'(y) \ \Leftarrow$$

$$\sum_x \frac{\sum\limits_z c(x,z)}{K} p(x,y) = \frac{\sum\limits_x c(y,x)}{K} \ \Leftarrow$$

$$\sum_x \sum_z c(x,z)p(x,y) = \sum_x c(y,x) \ \Leftarrow$$

$$\forall x: \ \sum_z c(x,z)p(x,y) = c(y,x) \ \Leftarrow$$

$$\forall x: \ p(x,y)\sum_z c(x,z) = c(y,x) \ \Leftarrow$$

$$\forall x: \ p(x,y)\sum_z c(x,z) = \pi(x)p(x,y) \ \Leftarrow$$

$$\forall x: \ \sum_z c(x,z) = \pi(x) \ \Leftarrow$$

$$\forall x: \ \sum_z \pi(z)p(z,x) = \pi(x) \ \Leftarrow$$

$$(2).$$

И, значит,

$$\exists\, \pi'(x) = \frac{\pi(x)}{K}: \ \ \sum_x \pi'(x) = 1,$$

$$\forall y: \ \sum_x \pi'(x)p(x,y) = \pi'(y).$$

3 Queues

3.1 Exercise 3.1

Опишем марковскую очередь с $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, где λ - скорость появления новых клиентов, а μ - скорость обслуживания.

Каждое состояние марковского процесса будет описываться текущим количеством клиентов в очереди k. Интенсивности переходов

$$q(k, k+1) = \lambda, \quad k = 0, 1, \dots,$$
$$q(k, k-1) = \mu, \quad k = 1, 2, \dots.$$

3.1.1 Случай $\rho < 1$

В соответствии с упражнением 3.2, стационарное распределение вероятностей в этом случае

$$\pi(k) = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Убедимся, что такая цепь является возвратной:

$$\pi(k)q(k, k+1) = (1-\rho)\rho^k\lambda,$$
$$\pi(k+1)q(k+1, k) = (1-\rho)\rho^{k+1}\mu = (1-\rho)\rho^k\lambda.$$

3.1.2 Случай $\rho > 1$

В соответствии с упражнением 3.2, стационарная мера в этом случае

$$\pi(k) = \rho^k, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Убедимся, что такая цепь является возвратной:

$$\pi(k)q(k, k+1) = \rho^k\lambda,$$
$$\pi(k+1)q(k+1, k) = \rho^{k+1}\mu = \rho^k\lambda.$$

3.1.3 Случай $\rho = 1$

В соответствии с упражнением 3.2, стационарная мера в этом случае

$$\pi(k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Убедимся, что такая цепь является возвратной:

$$\pi(k)q(k, k+1) = \lambda,$$
$$\pi(k+1)q(k+1, k) = \mu = \lambda.$$

В каждом из случаев цепь получилась возвратной, а каждая возвратная марковская цепь соответствует некоторому случайному блужданию на графе.

3.2 Exercise 3.2

Интенсивности переходов между состояниями определяются, как

$$q(k, k+1) = \lambda, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$q(k, k-1) = \mu, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Соответственно, матрица интенсивностей переходов определяется, как

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Будем искать стационарное распределение в соответствии с основным кинетическим уравнением

$$\frac{d\pi}{dt} = \pi Q.$$

Расписав его построчно для нашей матрицы Q, получим

$$-\lambda\pi(0) + \mu\pi(1) = 0,$$
$$\lambda\pi(k-1) - (\lambda+\mu)\pi(k) + \mu\pi(k+1) = 0, \quad k \geq 1.$$

Можно легко убедиться, что эта система уравнений эквивалентна

$$\lambda\pi(k) = \mu\pi(k+1), \quad k \geq 0.$$

Таким образом, получаем

$$\pi(k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi(0) = \rho^k\pi(0), \quad k \geq 0.$$

Для случая $\rho < 1$ можно отнормировать

$$\sum_k \pi(k) = \sum_k \rho^k \pi(0) = \frac{1}{1-\rho}\pi(0) = 1 \;\Rightarrow\; \pi(0) = 1 - \rho$$

и получить стационарное рапределение вероятностей

$$\pi(k) = (1-\rho)\rho^k, \quad k \geq 0.$$

Для случая $\rho > 1$ можно взять $\pi(0) = 1$ и получить стационарную меру

$$\pi(k) = \rho^k, \quad k \geq 0.$$

Так же и для случая $\rho = 1$ можно взять $\pi(0) = 1$ и получить стационарную меру

$$\pi(k) = 1, \quad k \geq 0.$$