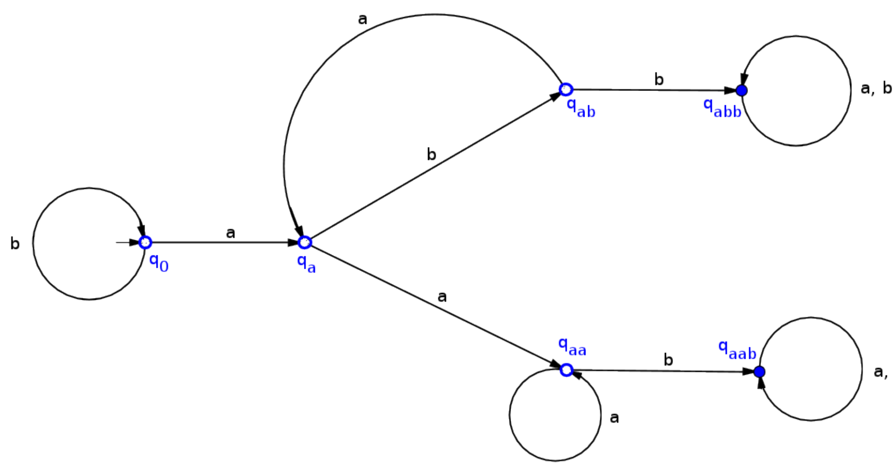
Задание 2

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	5	σ

Задача 1

(i) В задаче это явно не указано, но будем предпологать, что N - язык в алфавите $\{a, b\}$. Изходя из этого N состоит из слов, которые содержат либо подслово aab, либо подслово abb. Построенный автомат $\mathcal{A}$ изображен на диаграмме ниже.



Опишем процесс построения. Сначала "склеим" строки aab и abb в корневое дерево префиксов. Получим ту часть $\mathcal{A}$, которая состоит из всех его состояний и ребер, которые на диаграмме изображены прямыми отрезками. В состояния q_{abb} и q_{aab} автомат должен переходить после того, как было найдено вхождение подстрок abb и aab соответственно. "Замкнем" эти состояния и сделаем их финальными. После перехода в одно из этих состояний $\mathcal{A}$ из него уже не выйдет.

Остается только построить ребра, которые соответствуют переходам в состояние, соответствующее концу максимального собственного префикса, совпадающего с суффиксом текущей строки (то есть переход в соответствии со значением префикс-функции). Текущей строкой для любого состояния называется строка, полученная конкатенацией меток ребер вдоль пути от корня до текущей вершины, и буквы, по которой мы в данный момент строим ребро. Так и сделаем.

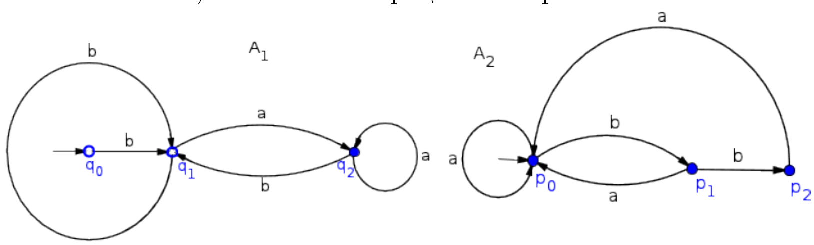
Вершине q_{ab} соответствует строка aba, максимальным собственным префиксом совпадающим с суффиксом которой является a. Соответственно проведем ребро с меткой a в вершину q_a. Вершине q_{aa} соответствует строка aaa, максимальным собственным префиксом совпадающим с суффиксом которой является aa. Соответственно проведем ребро с меткой a в вершину q_{aa}. Из корня дерева недостающее ребро проведем в корень.

$\mathcal{A}$ корректен и принимает язык N по построению, корректность которого, в свою очередь, следует из корректности КМП (а точнее Ахо-Корасик) алгоритма.

(ii)

Задача 2

(i) Для начала построим следующие автоматы: $\mathcal{A}_1$ - автомат, принимающий язык L_1, все слова которого начинается с b, а заканчиваются на a; $\mathcal{A}_2$ - автомат, принимающий язык L_2, все слова которого не содержат подслова bbb. Эти автоматы изображены диаграмме ниже. Заметим, что построенные автоматы не полные, это облегчит процесс их перемножения.



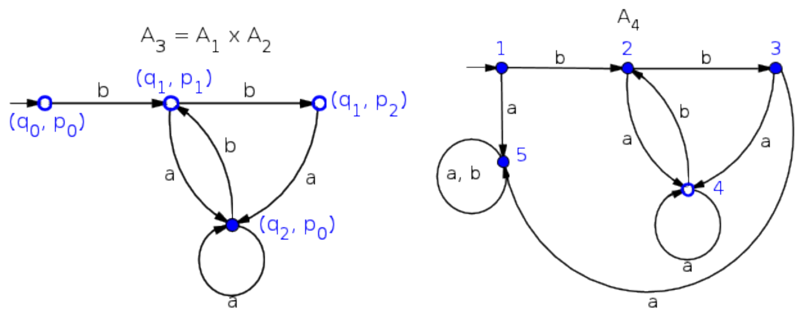
Докажем, что $\mathcal{A}_1$ принимает L_1. Сразу заметим, что $\mathcal{A}_1$ пустое слово ε не принимает и далее будем рассматривать слова ненулевой длины. Из начального состояния q_0 нет перехода по букве a, это означает, что $\mathcal{A}_1$ может принимать только те слова, которые начинаются с b. Остается доказать, что $\mathcal{A}_1$ может принимать только те слова, которые заканчиваются на a. Докажем это индукцией по длине слова n. Поскольку после обработки первой буквы слова $\mathcal{A}_1$ либо останавливается (если слово начинается с a), либо переходит в состояние q_1 (если слово начинается с b), а в состояние q_0 больше не возвращается, то при доказательстве будем рассматривать лишь подмножество состояний $\{q_1, q_2\}$, считая q_1 начальным состоянием. Также, вместо полных слов, начинающихся с b, будем рассматривать их суффиксы, длины на 1 меньше, чем длина слова.

База. Слово $\{a\}$ длины $n = 1$ принимается $\mathcal{A}_1$. База доказана.

Переход. Пусть слова длины меньше n, заканчивающиеся на a, принимаются $\mathcal{A}_1$. Докажем, что слова длины n, заканчивающиеся на a, принимаются $\mathcal{A}_1$. Возьмем некоторое слово длины n. Пропустим через автомат первые $n-1$ букву. Сейчас $\mathcal{A}_1$ находится либо в q_1, либо в q_2. Если b - последняя буква слова, то $\mathcal{A}_1$ прейдет в q_1 и не примет данное слово. Если a - последняя буква слова, то $\mathcal{A}_1$ прейдет в q_2 и примет данное слово. Переход доказан.

Теперь докажем, что $\mathcal{A}_2$ принимает L_2. По построению $\mathcal{A}_2$ является КДА КМП. Единственное отличие от аналогичного ему ПДКА КМП в том, что отсутствует еще одно состояние, переход в которое осуществлялся бы по букве b из состояния p_2. Доказательство его корректности аналогично доказательству корректности автомата из задачи 1.

Теперь построим автомат $\mathcal{A}_3$, принимающий язык $L_1 \cap L_2 = T$. Для этого воспользуемся конструкцией произведения автоматов $L_3 = L_1 \times L_2$. Поскольку $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не полные, то $\mathcal{A}_3$ будет иметь всего 4 состояния. Теперь, для того, что бы воспользоваться теоремой 2 необходимо дополнить $\mathcal{A}_3$ до ПДКА. После этого инвертируем начальность / финальность вершин и получим автомат $\mathcal{A}_4$, принимающий язык $\bar{T}$. Корректность $\mathcal{A}_4$ следует из построения. $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$ изображены на диаграмме ниже.



(ii) Пронумеруем состояния автомата $\mathcal{A}_4$ (на диаграмме выше состояния уже пронумерованы). Теперь, пройдем по приведенному в условии алгоритму в обратном порядке, "раскрывая" соотношения вида $D_{a,b,\{\dots\}}$.

$$
\begin{aligned}
D_{1,3,\{1,2,3\}} &= D_{1,3,\{1,2\}} + D_{1,3,\{1,2\}} \cdot {D_{3,3,\{1,2\}}}^* \cdot D_{3,3,\{1,2\}} \\
{D_{3,3,\{1,2\}}}^* &= \varepsilon^* = \{\varepsilon\} \\
D_{1,3,\{1,2\}} &= D_{1,3,\{1\}} + D_{1,2,\{1\}} \cdot {D_{2,2,\{1\}}}^* \cdot D_{2,3,\{1\}} \\
D_{1,3,\{1\}} &= \varnothing \\
D_{1,2,\{1\}} &= \{b\} \\
{D_{2,2,\{1\}}}^* &= \varepsilon^* = \{\varepsilon\} \\
D_{2,3,\{1\}} &= \{b\} \\
D_{1,3,\{1,2\}} &= \varnothing + \{b\} \cdot \{\varepsilon\} \cdot \{b\} = \{bb\} \\
D_{1,3,\{1,2,3\}} &= \{bb\} + \{bb\} \cdot \{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\} = \{bb\}
\end{aligned}
$$

Простой проверкой можно убедиться, что полученное выражение действительно верно.

Задача 5

Пронумеруем символы в заданной строке:

a	b	b	a	b	b	b	a	b	b	a	b	b	b
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

a	b	b	b	a	b	a	b	b	a	b	b	a	
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	

Будем записывать конфигурации BMA_{aab} в следующем виде: $(n, (p, q))$, где (p, q) - соответствует состоянию BMA_{aab} согласно определению из условия, а n - номер символа исходной строки, соответствующего позиции 1-го элемента, видимого в "окошке" q.

Последовательность конфигураций BMA_{aab}:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(0,(3,\#\#\#)) & \vdash & (0,(2,\#\#b)) & \vdash & (3,(3,\#\#\#)) & \vdash & (3,(2,\#\#b)) & \vdash \\
(6,(3,\#\#\#)) & \vdash & (6,(2,\#\#b)) & \vdash & (6,(1,\#ab)) & \vdash & (9,(3,\#\#\#)) & \vdash \\
(9,(2,\#\#b)) & \vdash & (9,(1,\#ab)) & \vdash & (12,(3,\#\#\#)) & \vdash & (13,(3,\#a\#)) & \vdash \\
(13,(1,\#ab)) & \vdash & (16,(3,\#\#\#)) & \vdash & (17,(3,\#a\#)) & \vdash & (17,(1,\#ab)) & \vdash \\
(20,(3,\#\#\#)) & \vdash & (20,(2,\#\#b)) & \vdash & (23,(3,\#\#\#)) & \vdash & (23,(2,\#\#b)) &
\end{array}
$$

Во время выполнения BMA_{aab} для данной строки, образец ни разу не был найден.