Задание 1

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	5	5	6	7	σ

Задача 1.

1. Докажем что $L \subseteq T$ индукцией по количеству конкатенаций n. Пустое слово $\varepsilon \in L$ и $\varepsilon \in T$, поэтому докажем включение, учитывая слова ненулевой длины.

База. Все слова, полученные с помощью одной конкатенации, т.е. слова вида $bax, baax, bbax, bbaax$, где $x = \varepsilon$, принадлежат языку T, поскольку начинаются с a, заканчиваются на b, и не имеют подслов aaa и bbb. База доказана.

Переход. Пусть слова, полученные с помощью n конкатенаций принадлежат языку T. Докажем, что слова полученные с помощью $n+1$ конкатенации принадлежат языку T.

Каждое слово $w \in L$, полученное после $n+1$ конкатенации состоит из префикса $p \in \{ba, baa, bba, bbaa\}$ и суффикса $s \in T$. Заметим, что p начинается с b, а s, по предположению индукции, заканчивается на a. Получаем, что w начинается с b и заканчивается на a. Поскольку p заканчивается на a, а s начинается с b, а также p и s не содержат подслов aaa и bbb, то слово $w = ps$ не содержит подслов aaa и bbb. Получаем, что слово $w \in T$. Переход доказан.

2. Докажем, что $T \subseteq L$ индукцией по длине слова n.

База. Посмотрим на слова, принадлежащие языку T длины $0 \le n \le 4$. Они представляют собой множество $W = \{\varepsilon, ba, baa, bba, baba, bbaa\}$. Заметим, что $W \subseteq L$. База доказана.

Переход. Пусть слова длины меньше n принадлежат языку L. Докажем, что слова длины n принадлежат языку L. Поскольку база была доказана для $0 \le n \le 4$, то при доказательсте перехода будем считать, что $n \ge 5$.

Каждое слово $w \in T$ должно начинаться с b и не может иметь подслово bbb. Следовательно префикс длины 3 слова w может быть лишь: baa, bab или bba. Разберем эти три случая.

Если baa является префиксом, то следующей буквой после этого префикса может быть лишь b, поскольку иначе существовало бы подслово aaa. Получаем, что $baab$ является префиксом. В этом случае $w = baa \cdot x$, где $x \in L$ по предположению индукции. Следовательно $w \in L$.

Если bab является префиксом, то $w = ba \cdot x$, где $x \in L$ по предположению индукции. Следовательно $w \in L$.

Если bba является префиксом, то возможны 2 случая: префиксом является $bbab$ или $bbaa$. В первом случае $w = bba \cdot x$, где $x \in L$ по предположения индукции. Следовательно $w \in L$. Во втором случае префиксом является $bbaab$, поскольку $bbaaa$ содержит подслово aaa и не может быть префиксом. Получаем, что $w = bbaa{\cdot}x$, где $x \in L$ по предположения индукции. Следовательно $w \in L$. Переход доказан.

3 Используя пункты 1 и 2 и соответственно факты $L \subseteq T$ и $T \subseteq L$ получаем, что $L = T$.

Задача 2.

1. Заметим, что $a \in \{a^{5n+1} | n \geq 0\}$. Следовательно $\{a^{5n+1} | n \geq 0\}^* = \{a^n | n \geq 1\} = \{a\}^*$. Следовательно $\{a^{3n} | \, n > 0\} \cap \{a^{5n+1} | n \geq 0\}^* = \{a^{3n} | \, n > 0\} \cap \{a\}^* = \{a^{3n} | \, n > 0\}$.

2. Пересечение множества и пустого множества есть пустое множество, следовательно $\emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$.

3. Заметим, что в $h^{-1}(L)$ входят лишь слова x в алфавите $\{a, b\}$, такие что $3|x|_a + 2|x|_b = 7n$ для некоторого $n \geq 0$, поскольку $h(a) = aaa$ и $h(b) = aa$, и никакие другие. Значит, $h^{-1}(L) = \{x \in \{a, b\}^* | 3|x|_a + 2|x|_b = 7n | n \geq 0\}$.