Задание 10

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	5	6	7	σ

Задача 2

$\varphi^{-1}(1)$ это те слова Σ^*, которые при морфизме φ переходят в 1. Слово ε является единицей моноида Σ^*, а значит оно переходит в 1. Все слова вида a^+ переходят в 1. Слова, содержащие хотя бы одну букву b переходят в 0. Итого, $\varphi^{-1}(1) = a^*$.

Задача 3

Построим по исходному алфавиту Σ, моноиду M и множеству $X \subseteq M$ конечный автомат A, принимающий язык $L = \varphi^{-1}(X)$.

Состояниями A будут элементы M. Начальное состояние соответствует единице M, финальные - элементам X. Для каждого состояния q, соответствующего элементу m, переход по букве a будет осуществляться в состояние, соответствующее элементу $m \cdot \varphi(a)$.

Докажем $L \subseteq L(A)$. $\forall w \in L \to \varphi(w) \in X$. После обработки w, A окажется в состоянии, соответствующем $\varphi(w[0]) \cdot ... \cdot \varphi(w[-1]) = \varphi(w) \in X$. Состояние, соотвествующее $\varphi(w)$ - финальное, а значит w будет принято.

Докажем $L(A) \subseteq L$. После обработки любого $w \in L(A)$, A окажется в финальном состоянии, соответствующем $\varphi(w)$. Следовательно $\varphi(w) \in X$, а значит $w \in L$.

Задача 4

Пользуемся представлением элементов M ввиде двудольных графов. Включим в множество X каждый элемент M, такой, что в графе, ему соответствующем, есть ребро из вершины левой доли, соовететсвующей начальному состоянию A, в вершину правой доли, соотвествующей какому-то финальному состоянию A.

Докажем $\varphi^{-1}(X) \subseteq L(A)$. Возьмем любое $w \in \varphi^{-1}(X)$. Заметим, что $\varphi(w) \in X$. Значит, что в графе, соответствующем $\varphi(w)$, есть ребро из вершины левой доли, соответствующей начальному состоянию A, в вершину правой доли, соответствующей какому-то финальному состоянию A. Получаем, что после обработки слова w, A окажется в финальном состоянии и слово будет принято.

Докажем $L(A) \subseteq \varphi^{-1}(X)$. Возьмем любое $w \in L(A)$. Заметим, что $\varphi(w)$ будет соответствовать граф, в котором есть ребро из вершины левой доли, соовететсвующей начальному состоянию A, в вершину правой доли, соотвествующей какому-то финальному состоянию A. Значит мы включили $\varphi(w)$ в X. Получаем, что $w \in \varphi^{-1}(X)$.

Задача 5

(i) M_2 является замыканием множества $\{123, 223, 133\}$ (123 $\rightarrow$ для краткости опускается), относительно операции "умножения".

Получаем, что $M_2 = \{123, 223, 133, 233, 333\}$, дальнейшее умножение элементов между собой не приводит в появлению новых.

Построим таблицу умножения:

	123	223	133	233	333
123	123	223	133	233	333
223	223	223	333	333	333
133	133	233	133	233	333
233	233	233	333	333	333
333	333	333	333	333	333

(ii) Воспользуемся задачей 4. Единственным элементом, у графа которого есть переход из 1 левой доли в 3 правой доли является 333.

Получаем, что $X = \{333\}$.

Задача 6

(i) Класс эквивалентности отношения конгруенции, содержащий элемент x обозначим $[x]$. Определим операцию умножения: $[x] \cdot [y] \rightarrow [xy]$.

Докажем корректность введенной операции умножения, то есть независимость результата от выбора представителей умножаемых классов.

Другими словами, докажем, что

$$x_1 \sim y_1 \wedge x_2 \sim y_2 \rightarrow x_1 x_2 \sim y_1 y_2$$

Допустим, что

$$\neg(x_1 x_2 \sim y_1 y_2) \Leftrightarrow \exists w_0, z_0 (w_0 x_1 x_2 z_0 \in L \wedge w_0 y_1 y_2 z_0 \notin L)$$

Распишем $x_1 \sim y_1$, как

$$\forall w, z ((w x_1 z \in L \wedge w y_1 z \in L) \vee (w x_1 z \notin L \wedge w y_1 z \notin L))$$

Взяв $w = w_0$, $z = x_2 z_0$, и используя, что $w x_1 z \in L$, получаем, что

$$w y_1 z = w_0 y_1 x_2 z_0 \in L$$

Аналогично из $x_2 \sim y_2$ и $w_0 y_1 y_2 z_0 \notin L$, получаем:

$$w_0 y_1 x_2 z_0 \notin L$$

Приходим к противоречию, значит

$$x_1 x_2 \sim y_1 y_2$$

Корректность операции умножения доказана.

Ассоциативность умножения следует из ассоциативности операции конкатенации, а единицей будет элемент $[\varepsilon]$. Получаем, что множество классов эквивалентности отношения конгруенции является моноидом.

(ii) Что бы такая функция была морфизмом, необходимо, что бы операция сохранялась. Покажем это:

$$\varphi(xy) = [xy] = [x][y] = \varphi(x)\varphi(y)$$