Задание 1

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Задача 1

(i) Для того, что бы доказать

$$\log n! = \Theta(n \log n)$$

достаточно показать, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{\log n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

существует, конечен и больше 0, поскольку в этом случае

$$\exists C_1 > 0, C_2 > 0 : \; C_1 \le \frac{\log n!}{\log n^n} \le C_2$$

начиная с некоторого n.

Поскольку последовательность b_n положительна, неограничена и строго возрастает, то, по теореме Штольца, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

то существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

причем эти пределы равны.

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)\log(n+1) - n \log n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+1) + n \log \frac{n+1}{n}}$$

Заметим, что последовательность

$$n \log \frac{n+1}{n} = n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

а значит она ограничена.

Получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = 1$$

Значит искомый предел существует, конечен и больше 0.

Задача 2

(i) Запишем рекуррентное соотношение

$$T(n) = 5 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n^2 \log n)$$

По определению $\Theta(n^2 \log n)$

$$\exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad c_1 \leq \frac{\Theta(n^2 \log n)}{n^2 \log n} \leq c_2$$

Теперь решим следующее рекуррентное соотношение, используя Основную теорему из книги Кормена.

$$S(n) = 5 \cdot S\left(\frac{n}{3}\right) + c_1 n^2 \log n = a \cdot S\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Попробуем удовлетворить требованиям третьего случая теоремы.

Заметим, что

$$c_1 n^2 \log n = f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^{\log_3 5 + \varepsilon})$$

при $\varepsilon = 2 - \log_3 5 > 0$.

Проверим выполнение условия

$$\exists c < 1, n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

Видно, что это условие выполняется при $c = \frac{5}{9}$:

$$5\left(\frac{n}{3}\right)^2 \log \frac{n}{3} \leq \frac{5}{9} n^2 \log n \quad \Leftrightarrow \quad \log n - \log 3 \leq \log n$$

Получаем, что соотношение удовлетворяем условиям теоремы, а значит

$$S(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2 \log n)$$

Поскольку в $S(n)$ была взята константа c_1, то

$$S(n) \leq T(n)$$

а значит

$$T(n) = \Omega(S(n)) = \Omega(n^2 \log n)$$

Аналогично, взяв соотношение с константой c_2, получим, что

$$T(n) = O(n^2 \log n)$$

Итого, получаем, что

$$T(n) = \Theta(n^2 \log n)$$

(ii) Запишем рекуррентное соотношение и решим его, используя Основную теорему из книги Кормена

$$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

Попробуем удовлетворить требованиям второго случая теоремы.
Заметим, что

$$\Theta(n^2) = f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$$

Получаем, что соотношение удовлетворяем условиям теоремы, а значит

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n^2 \log n)$$

(iii) Запишем рекуррентное соотношение

$$T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n^2 \sqrt{n} \log^2 n)$$

Решим его, аналогично пункту *(i)* это задачи. Оно удовлетворяет третьему случаю Основной теоремы при

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Соответственно получим решение

$$T(n) = \Theta(n^2 \sqrt{n} \log^2 n)$$

(*) Сравнивая асимптотики видим, что лучше выбрать первую или вторую процедуру, чем третью.

Задача 3
(i) Найдем Θ-асимптотику следующего рекуррентного соотношения:

$$T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \Theta(\log^2 n)$$

Не учитывая округления, сделаем замену переменных $m = \log n$, получим

$$T(2^m) = T(2^{\frac{m}{2}}) + \Theta(m^2)$$

Обозначим $S(m) = T(2^m)$, получим

$$S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + \Theta(m^2)$$

Используя те же рассуждения, что и в пункте *(i)* задачи 2, решим рекуррентное соотношение

$$S(m) = S\left(\frac{m}{2}\right) + cm^2$$

Соотношение удовлетворяет требованиям третьего случая Основной теоремы при

$$\varepsilon = 2, \quad c = \frac{1}{4}$$

Получаем, что

$$S(m) = \Theta(m^2)$$

Возвращаясь к $T(n)$ получаем

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(m^2) = \Theta(\log^2 n)$$

Задача 4

(i) Назовем следующие операции *элементарными битовыми* : сложение двух битов, умножение двух битов, сдвиг любого двоичного числа на 1 бит влево.

Обозначим $Mult(m)$ как количество элементарных битовых операций, необходимое для перемножения двух m-битовых чисел методом Карацубы-Офмана, $Add(m)$ - для сложения, $Shift(m)$ - для сдвига двоичного числа на m бит.

При сложении m-битовых двоичных чисел в столбик на каждый бит числа будет приходится не более 2 (учитывая перенос) битовых сложений. В соответствии с этим $Add(m) = \Theta(m)$.

По определению элементарной битовой операции $Shift(m) = m = \Theta(m)$.

Оценим полное количество элементарных битовых операций при выполнении умножения методом Карацубы-Офмана двух чисел A и B длины m. Будем считать, что $m = 2^k$. Битовую длину числа x будет обозначать как $|x|$.

Представим A и B в виде

$$A = aX + b, \quad B = cX + d$$

где $X = 2^{\frac{m}{2}}$, $|a| = |b| = |c| = |d| = \frac{m}{2}$.

Шаг умножения методом Карацубы-Офмана запишем следующим образом:

$$(aX + b)(cX + d) = acX^2 + (ad + bc)X + bd$$

$$ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$$

Количество элементарных битовых операций, необходимо для вычисления выражения $\{expr\}$ будет обозначать как $T(\{expr\})$.

Получаем, что

$$T(\{bd\}) = T(\{ac\}) = Mult\left(\frac{m}{2}\right)$$
$$T(\{acX^2\}) = T(\{ac\}) + Shift(m)$$
$$T(\{a+b\}) = T(\{c+d\}) = Add\left(\frac{m}{2}\right)$$
$$T(\{(a+b)(c+d)\}) = T(\{a+b\}) + T(\{c+d\}) + Mult\left(\frac{m}{2}+1\right)$$
$$T(\{(a+b)(c+d) - ac - bd\}) = T(\{(a+b)(c+d)\}) + T(\{bd\}) + T(\{ac\}) + 2 \cdot Add\,(m+2)$$
$$T(\{(ad+bc)X\} = T(\{(a+b)(c+d) - ac - bd\}) + Shift\left(\frac{m}{2}\right)$$

Учитывая затраты $Add(2m) + Add(2m+1)$ на сложение трех слагаемых для получения результата, а также оценки для $Add(m)$ и $Shift(m)$ получим

$$T(\{(aX+b)(cX+d)\} = Mult(m) = 2 \cdot Mult\left(\frac{m}{2}\right) + Mult\left(\frac{m}{2}+1\right) + \Theta(m)$$

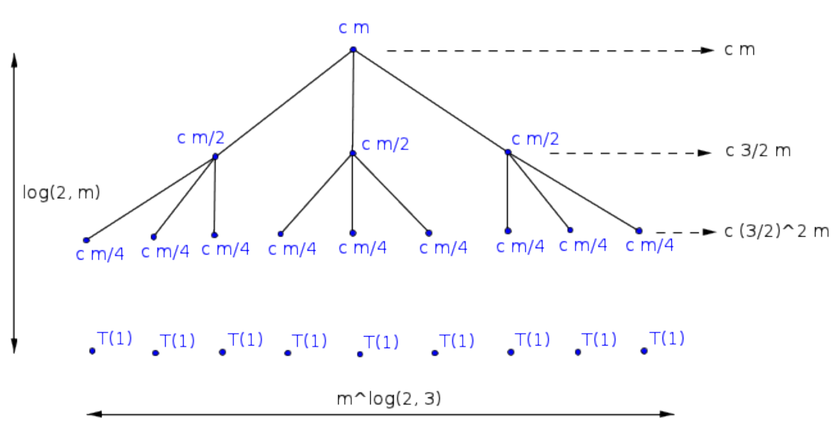
В соответствии с рассуждениями на семинаре будем считать, что

$$Mult(m) = 3 \cdot Mult\left(\frac{m}{2}\right) + \Theta(m)$$

(ii) Проанализируем полученное рекуррентное соотношение с помощью дерева рекурсии. Обозначим $Mult(m) = T(m)$.

В соответствии с 4.2 книги Кормена, построим дерево рекурсии для рекуррентного соотношения

$$T(m) = 3 \cdot T\left(\frac{m}{2}\right) + cm$$



Высота дерева - $\log_2 m$. Количество листьев - $3^{log_2 m} = m^{log_2 3}$.

Просуммируем времена работы всех уровней дерева:

$$T(n) = cm + \left(\frac{3}{2}\right) cm + \left(\frac{3}{2}\right)^2 cm + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{log_2 m - 1} cm + \Theta(m^{log_2 3}) =$$

$$\sum_{i=0}^{log_2 m - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i cm + \Theta(m^{log_2 3}) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{log_2 m} - 1}{\frac{3}{2} - 1} cm + \Theta(m^{log_2 3}) =$$

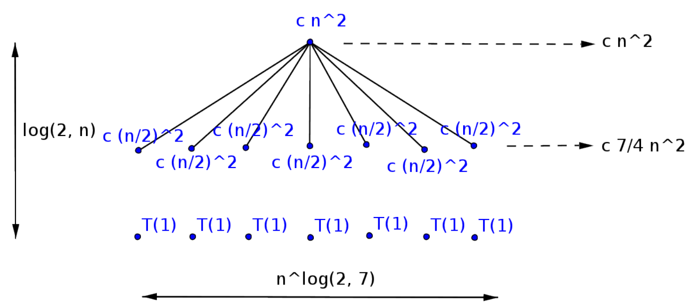
$$\frac{m^{log_2 \frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{2}} cm + \Theta(m^{log_2 3}) = 2cm^{log_2 3} - 2cm + \Theta(m^{log_2 3}) = O(m^{log_2 3})$$

Итого, мы получили оценку сверху $O(m^{log_2 3})$.

Задача 5

В соответствии с 4.2 книги Кормена, построим дерево рекурсии для рекуррентного соотношения

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + cn^2$$



Просуммируем времена работы всех уровней дерева:

$$T(n) = cn^2 + \left(\frac{7}{4}\right) cn^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 cn^2 + ... + \left(\frac{7}{4}\right)^{log_2 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{log_2 7}) =$$

$$\sum_{i=0}^{log_2 n - 1} \left(\frac{7}{4}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{log_2 7}) = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{log_2 n} - 1}{\frac{7}{4} - 1} cn^2 + \Theta(n^{log_2 7}) =$$

$$\frac{n^{log_2 \frac{7}{4}} - 1}{\frac{3}{4}} cn^2 + \Theta(n^{log_2 7}) = \frac{4}{3} cn^{log_2 7} - \frac{4}{3} cn^2 + \Theta(n^{log_2 7}) = O(n^{log_2 7})$$

Итого, мы получили оценку сверху $O(n^{log_2 7})$.

Задача 6

Покажем, что a^{15} можно вычислить использую лишь 5 умножений. Справа от выражения записано количество использованных умножений.

$$\begin{aligned} a \cdot a \cdot a = a^3 &\quad | \, 2 \\ a^3 \cdot a^3 = a^6 &\quad | \, 1 \\ a^6 \cdot a^6 = a^{12} &\quad | \, 1 \\ a^{12} \cdot a^3 = a^{15} &\quad | \, 1 \end{aligned}$$

Задача 7

(i) Разобьем множество натуральных чисел на интервалы вида

$$\{[2^k, ..., 2^{k+1} - 1] \mid k = 0, 1, ...\} = \{[1], [2, 3], [4, ..., 7], ...\}$$

Докажем, что $l(n) \geq \lambda(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$ индукцией по номеру интервала k. Заметим, что $\forall n$ из интервала k выполняется $\lambda(n) = k$.

База.

$$k = 0 : l(1) = 1 \geq 0 = \lfloor \log_2 1 \rfloor$$

$$k = 1 : l(2) = 2 \geq 1 = \lfloor \log_2 2 \rfloor$$

$$k = 1 : l(3) = 3 \geq 1 = \lfloor \log_2 3 \rfloor$$

Переход. Пусть $\forall n$ из интервала k выполняется $l(n) \geq \lambda(n) = k$. Докажем, что $\forall m$ из интервала $k+1$ выполняется $l(m) \geq \lambda(m)$.

Пусть $m = 2^{k+1}$. Рассмотрим произвольную аддитивную цепочку, которая оканчивается числом m. Заметим, что до числа m в цепочке должно было встретиться число из интервала k, так как иначе все числа в ней были бы либо больше, чем m, и их невозможно было бы использовать при сложении для получения m, либо из интервала $t \leq k - 1$, а при их сложении мы не можем получить число из интервала $k + 1$, каковым и является m.

По предположению индукции для получения числа из интервала k длина цепочки должна быть $\geq k$. Что бы получить число m нужно будет совершить еще по крайней мере одно сложение, а значит длина цепочки будет $\geq k+1 = \lambda(m)$.

Для остальных чисел $m > 2^{k+1}$ из интервала $k + 1$ последовательно применяем аналогичное рассуждение, только надо учитывать, что для их получения могли использоваться числа из интервала $k+1$, которые $< m$, но для них ограничение уже доказано, а при их использовании оно не может ухудшиться.

(ii) Пусть

$$1, a_1, ..., a_r = m, \quad 1, b_1, ..., b_s = n$$

аддитивные цепочки длины $l(m)$ и $l(n)$ соответственно.

Докажем, что

$$l(mn) \leq l(m) + l(n)$$

Построим цепочку длины $l(m) + l(n)$, заканчивающуюся числом mn:

$$1, a_1, ..., a_r, a_r b_1, ..., a_r b_s = mn$$

Строилась она следующим образом. Сначала она повторяла цепочку a_i, а затем построение продолжалось аналогично цепочке b_i, только вместо числа 1 при суммировании использовалось число a_r.

Поскольку $l(mn)$ - это цепочка минимальной длины, которая заканчивается числом mn, то

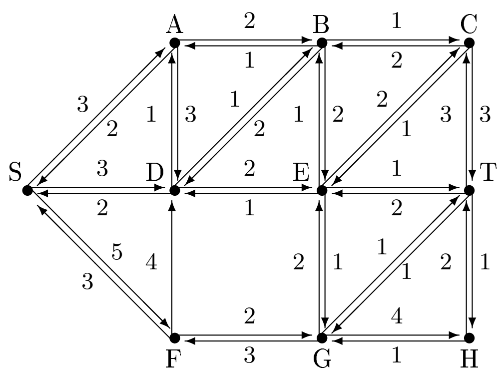
$$l(mn) \leq l(m) + l(n)$$

Задача 8

(i) В соответствии с определением из книги Кормена:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) = 2 + 2 + 3 = 7$$

(ii) Изобразим остаточный граф:



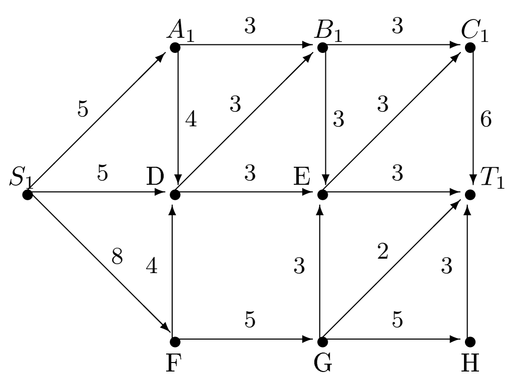
(iii) Нет, так как существует дополняющий путь $SDET$.

(iv) С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдем максимальный поток в заданной сети. На каждом шаге будет построен остаточный граф и, поиском в глубину, найден дополняющий путь.

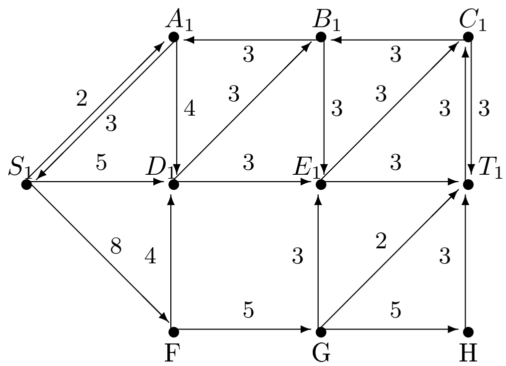
В качестве сертификата выполнения поиска в глубину, будут приведены пометки, оставленные после его выполнения. Пометки будут записаны как индексы букв, обозначающих вершины и имеют следующее соответствие с пометками, описанными в книге Кормена: нет пометки - белая вершина, 1 - серая вершина, 2 - черная вершина.

Так же необходимо сказать, что исходящие из вершины ребра перебираются при поиске в глубину, будучи отсортироваными по часовой стрелке, начиная с полуночи.

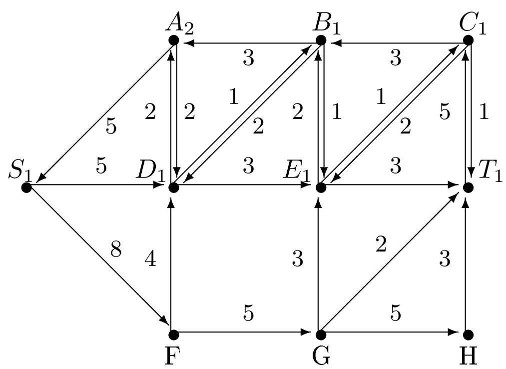
Остаточные графы пошагово:



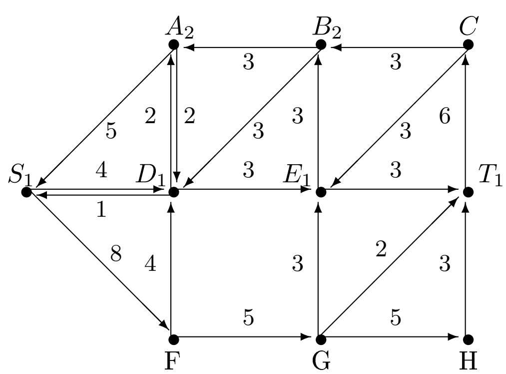
Дополняющий путь $SABCT$.



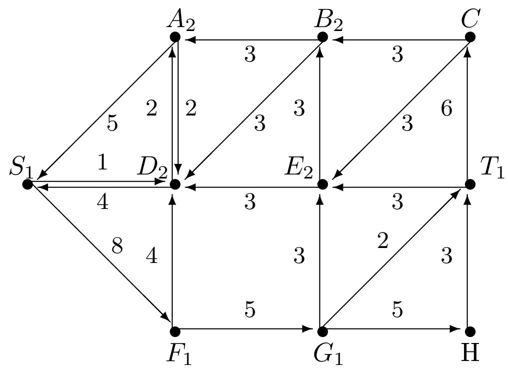
Дополняющий путь $SADBECT$.



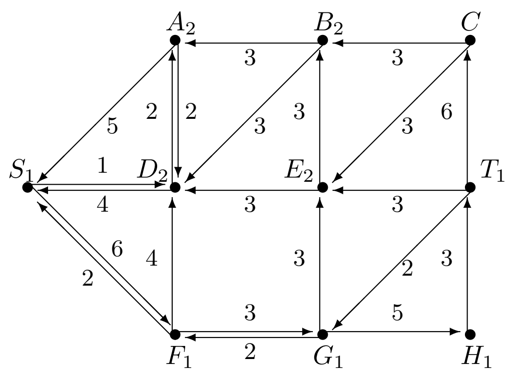
Дополняющий путь $SDBECT$.



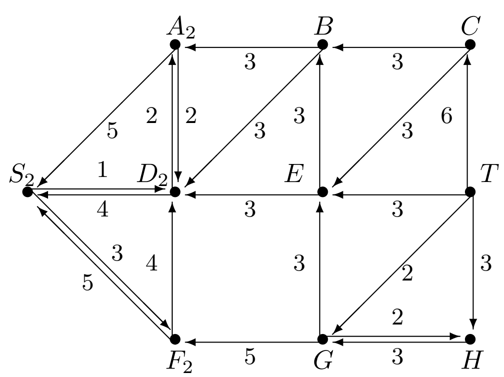
Дополняющий путь $SDET$.



Дополняющий путь $SFGT$.



Дополняющий путь $SFGHT$.



Получаем, что максимальный поток $6 + 3 + 2 + 3 = 14$.