Задание 5

Коновалов Андрей, 074

0	1	2	3	4	5	σ

Задача 1

(i). Допустим, что грамматика G_1 не однозначная. Это означает, что существует выводимое в G слово, имеющее хотя бы 2 правых вывода.

Обозначим последовательности применения правил вывода для этих выводов A и B соответственно. Элементами этих последовательностей являются правила вывода.

Заметим, что A и B не могут содержать одна другую как префиксную подпоследовательность, значит существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $A_n \neq B_n$.

Посмотрим на первое отличие в их выводах. Поскольку правил вывода всего 2, это означает, что в одном случае было применено правило $P_1 = S \to a$, а в другом правило $P_2 = S \to SSSb$. Поскольку выводы правые, то перед использованием P_1 и P_2 после которых слова становятся различными, слова имели вид: xSy, где $x \in \{a, b, S\}^*$, $y \in \{a, b\}^*$. После использования правила P_1 слово будет иметь суффикс ay, который не изменится после применения дальнейших правил вывода. После использования правила P_2 слово будет иметь суффикс by, который не изменится после применения дальнейших правил вывода. Заметим, что слова, получаемые выводами A и B не могут совпадать, поскольку имеют различные суффиксы.

Получаем противоречие, а значит выводов не может быть 2, а значит G однозначная.

(ii). Поскольку язык порождается некоторой праволинейной грамматикой тогда и только тогда, когда он регулярный, то доказав, что $L(G_1)$ - не регулярный, мы докажем, что $\nexists$ праволинейной грамматики эквивалентной G_1.

Для начала докажем, что на при любом выводе во любом получаемом промежуточном или конечном слове x выполняется: $|x|_S + |x|_a = 2|x|_b + 1$.

Заметим, что если в выводе сначала применить все правила вывода вида P_2, а потом - вида P_1, то выведенное слово не изменится. При применении правила P_1 количество букв S уменьшается на 1, а количество букв a увеличивается на 1, при этом соотношение остается верным. Это означает, что утверждение достаточно доказать для применения только правила P_2.

Заметим, что слова, получаемые при выводе имеют длину n, представимую ввиде $n = 3k + 1$, где k - количество применений правила P_2. Докажем выполнимость соотношения индукцией по k.

База. При $k = 0$ существует единственное слово S для которого соотношение выполняется. База доказана.

Переход. Пусть соотношение выполняется для количества применений P_2, которое $< k$. Слово w, получаемое применением k применениями правила P_2, получено из слова x применением правила P_2. Для x верно $|x|_S + |x|_a = 2|x|_b + 1$. Заметим, что $|w|_S = |x|_S - 1 + 3 = |x|_S + 2$, $|w|_b = |x|_b + 1$, а значит $|x|_S + |x|_a = 2|x|_b + 1 \Leftrightarrow |x|_S - 2 + |x|_a = 2(|x|_b - 1) + 1 \Leftrightarrow |w|_S + |w|_a = 2|w|_b + 1$. Переход доказан.

Заметим, что в любом слове w выводимом в G не содержится нетерминал S, а значит $|w|_a = 2|w|_b + 1$.

Докажем, что язык $L(G_1)$ не регулярный пользуясь леммой о разрастании. Для любого C, возьмем слово $w = a^{2C+1}b^C$, $|w| \geq C$. Для любого его разбиения xyz, такого, что $|xy| \leq C$ и $|y| > 0$, для $i = 2$ в слове xy^iz нарушится соотношение между буквами a и b, а значит $xy^iz \notin L(G_1)$.

Получаем, что лемма не выполняется, а значит $L(G_1)$ - не регулярный, а значит невозможно построить эквивалентную праволинейную грамматику.

Задача 2

(i). Приведем два правых вывода одного слова:

$$S \to ict\ S \to ict\ ict\ S\ e\ S \to ict\ ict\ S\ e\ o \to ict\ ict\ o\ e\ o$$
$$S \to ict\ S\ e\ S \to ict\ S\ e\ o \to ict\ ict\ S\ e\ o \to ict\ ict\ o\ e\ o$$

(iii). G_3 не однозначная, так существует два различных правых вывода слова o.

$$S \to S_1 \to o$$
$$S \to S_{full} \to o$$

Задача 3

Докажем, что следующие правила вывода порождают язык ППСВ L_3 с глубиной вложения скобок ≤ 3. Аксиома S_3.

$$\begin{aligned}
&S_0 \to \varepsilon \\
&S_1 \to S_1 S_1 \\
&S_1 \to (S_0) \\
&S_1 \to S_0 \\
&S_2 \to S_2 S_2 \\
&S_2 \to (S_1) \\
&S_2 \to S_1 \\
&S_3 \to S_3 S_3 \\
&S_3 \to (S_2) \\
&S_3 \to S_2
\end{aligned}$$

Будем называть правильные скобочные выражения с глубиной вложения скобок i - ПСВ$_i$.

По индукции покажем, что нетерминал S_i порождает ПСВ$_{\leq i}$. База индукции для $i = 0$ очевидна. Использование любого из правил ниже сохраняет правильность выражения. При использовании первого глубина вложений остается равной i. При использовании второго она увеличивается на 1 по сравнению с $i-1$, т.е равна i. При использовании третьего она не изменяется, т.е. остается равной $i-1$, что нас устраивает.

$$
\begin{aligned}
&S_i \to S_i S_i\\
&S_i \to (S_{i-1})\\
&S_i \to S_{i-1}
\end{aligned}
$$

Получаем, что $L(G) \subseteq L_3$. Докажем, что $L_3 \subseteq L(G)$. Докажем это по индукции по глубине вложения k. При $k = 0$ пустое выражение порождается $S_3 \to S_2 \to ... \to \varepsilon$. Возьмем ПСВ$_k$. Заметим, что оно представимо ввиде конкатенации некоторого количества выражений вида (ПСВ$_{k-1}$). Конкатенацию n таких выражений пожно породить с помощью $n{-}1$ использования правила $S_k \to S_{k-1}S_{k-1}$. Выражение (ПСВ$_{k-1}$) можно получить использованием правила $S_k \to (S_{k-1})$.

Построенная грамматика неоднозначная.

$$S_3 \to S_2 \to S_1 \to S_0 \to \varepsilon$$

$$S_3 \to S_2 \to S_1 \to S_1S_1 \to S_1S_0 \to S_1\varepsilon \to S_0\varepsilon \to \varepsilon$$

Задача 5

(i). Пусть дана грамматика $G = (N, T, P, S)$. Пусть дан вывод некоторого слова в G. Деревом вывода называется следующее дерево.

1. Вершины помечены парами вида: (v, k), где $v \in N \cup T$, а k - слово в счетном алфавите $\mathbb{N}$ (натуральных чисел).

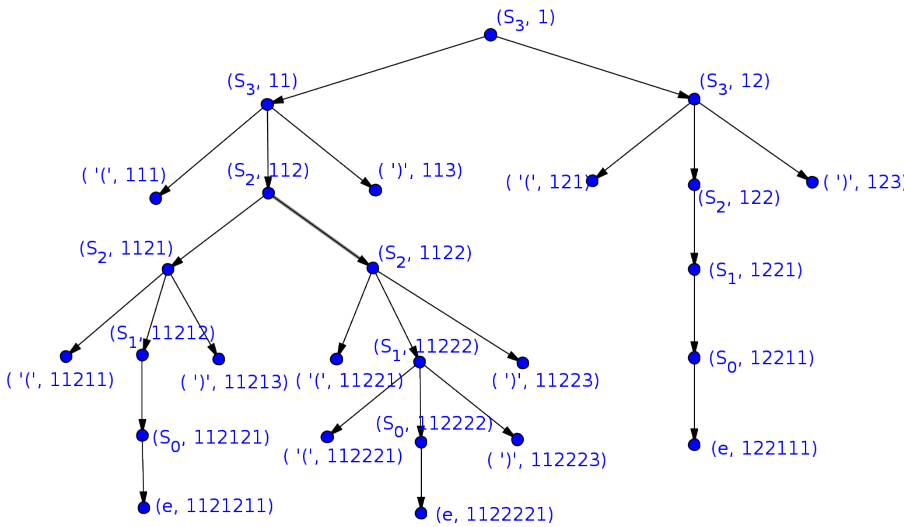
2. Корень дерева помечен $(S, 1)$ (аксиома и слово 1).

3. Если на каком-то шаге разворачивается нетерминал $A \to X_1X_2...X_n$, то дерево модифицируется путем добавления к листу (A, k), прямых потомков $(X_1, k \circ 1)$, ..., $(X_n, k \circ n)$, где $\circ$ обозначает конкатенацию.

4. Текущее выведенное слово получается следующем образом. Метки на всех листьях сортируются по k лексикографически, после чего конкатенируются все v в полученном порядке.

(ii). Два дерева эквивалентны, если множества меток их вершин совпадают как множества.

(iii). Дерево разбора для $(()(()))()$ в G изображено на диаграмме ниже.



(iv-a). Слово ε имеет два различных вывода, показанных в задаче 3. При построенние деревья получатся разными.