Задание 2

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	5	Σ

Задача 1 В соответствии с книгой Кормена $(I, 3.2)$, для монотонно возрастающей функции f верно

$$\int\limits_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int\limits_{m}^{n+1} f(x)dx$$

Гармонический ряд монотонно возрастает. Получим нижнюю оценку для гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int\limits_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

Получим верхнюю оценку (для ряда без первого члена)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int\limits_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$$

А значит

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$$

Откуда

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leq \frac{\ln n + 1}{\ln n}$$

Переходя к пределу

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \leq 1$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\ln n)$$

Задача 3

(i) Обозначим $g_x(n)$ количество слов $\in G$ таких, что последняя буква слова есть x. Тогда верно

$$g(n) = g_0(n) + g_1(n) + g_2(n)$$

Поскольку после буквы 0 может идти только буквы 0 или 1, а после 2 - 1 или 2, то выполняется

$$g_0(n) = g_0(n-1) + g_1(n-1)$$

$$g_2(n) = g_1(n-1) + g_2(n-1)$$

После 1 может идти любая буква, а значит

$$g_1(n) = g_0(n-1) + g_1(n-1) + g_2(n-1) = g(n-1)$$

Получаем, что

$$g(n) = g_0(n-1) + g_1(n-1) + g(n-1) + g_1(n-1) + g_2(n-1)$$

$$g(n) = 2 \cdot g(n-1) + g_1(n-1) = 2 \cdot g(n-1) + g(n-2)$$

Ручным подсчетом получаем, что

$$g(1) = 3, \quad g(2) = 7$$

Несколько следующих значений:

$$g(3) = 14, \quad g(4) = 35$$

(v) Получим явное выражение для $g(n)$.

$$g(n) = 2 \cdot g(n-1) + g(n-2)$$
$$g(n) = c \cdot a^n$$
$$c \cdot a^n = 2c \cdot a^{n-1} + c \cdot a^{n-2}$$

Получим уравнение на a:

$$a^2 - 2a - 1 = 0$$

Решением будет

$$a = 1 \pm \sqrt{2}$$

Значит $g(n)$ имеет вид

$$g(n) = c_1(1+\sqrt{2})^n + c_2(1-\sqrt{2})^n$$

Подберем c_1 и c_2 так, что бы

$$g(1) = 3, \quad g(2) = 7$$

Получим

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad c_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Значит $g(n)$ имеет вид

$$g(n) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

Теперь можно вычислять $g(n)$ с помощью этой формулы, только я бы делал это не с конечной точностью, а с помощью быстрого возведения в степерь чисел $1 \pm \sqrt{2}$.

Задача 4

(i) Будем делать аналогично книге Кормена $(I, 10.3)$ для разбиения на "семерки" элементов. Для количества чисел, которые будут заведомо больше "медианы медиан" получим

$$4\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geq \frac{2n}{7} - 8$$

Значит алгоритм, рекурсивно вызываемый на пятом шаге, будет обрабатывать массив длиной не более $\frac{5n}{7} + 8$.

Пусть $T(n)$ - время работы алгоритма на массиве из n элементов в худшем случае. Тогда

$$T(n) \leq T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} + 6 \right\rfloor\right) + O(n)$$

Задача 5

(i) В наихудшем случае нам всегда будет "доставаться" самый "далекий" от k элемент, соответственно будет совершено $\Theta(n)$ шагов, на каждом из которых будет происходить престановка элементов за $\Theta(n)$. Итого в наихудшем случае будет $\Theta(n^2)$.