# Задание 9

Коновалов Андрей, 074

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Задача 1**

Докажем, что прозводящая функция, удовлетворяющая $S[t] = 1+t^2S^2[t]$ единственна следующим образом: покажем, что коэффициенты при степенях этой функции вычисляются однозначно.

Пусть

$$S[t] = s_0 + s_1 t + ... + s_n t^n + ...$$

Тогда

$$s_0 + s_1 t + ... = 1 + t^2(s_0 + (s_0 s_1 + s_1 s_0)t + ...) \tag{1}$$

Заметим, что из (1) коэффициенты $s_0$ и $s_1$ вычисляются однозначно.

$$s_0 = 1,\ s_1 = 0$$

Заметим, что коэффициенты правой части (1) при $t^n$ зависят лишь от $s_0, ..., s_{n-2}$. Получаем, что зная значения $s_0, ..., s_{n-2}$ можно однозначно вычислить $s_n$. Поскольку значение $s_0$ нам известно, то можно вычислить $s_2$. Зная $s_0$ и $s_1$ вычисляем $s_3$ и так далее по индукции.

**Задача 3**

**(i)** Докажем, что $g_n = F_{n+2}$ по индукции по длине $n$ слова $w \in L_{\neg bb}$.

*База.* При $n = 0$ единственное слово $\varepsilon \in L_{\neg bb}$, а значит $g_0 = F_2 = 1$.

При $n = 1$ слова $a, b \in L_{\neg bb}$, а значит $g_1 = F_3 = 2$.

*Переход.* $\forall n \geq 2$. Пусть $\forall k < n$ количество слов длины $k$ есть $F_{k+2}$, докажем, что количество слов длины $n$ есть $F_{n+2}$.

$\forall w \in L_{\neg bb}, |w| = n$ возможны 2 варианта: 1) $w[-1] = a$, 2) $w[-1] = b$. [1]

В первом случае слово $w$ устроено так:

$$w = xa, x \in L_{\neg bb}, |x| = n - 1$$

Количество таких слов $w$ равно количество таких слов $x$, которое в свою очередь равно $F_{n+1}$ по предположению индукции.

[1] Отрицательным индеком обозначена нумерация с конца строки, так, например $w[-1]$ означает последний символ слова $w$, а $w[-2]$ - предпоследний.

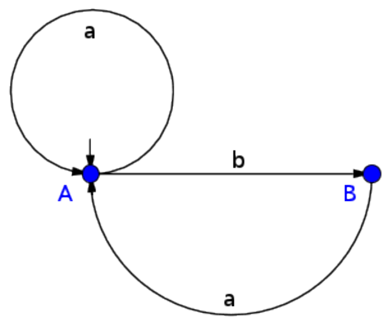
Во втором случае $w[-2] \neq b$, покольку $w \in L_{\neg bb}$. А значит

$$w = xab, x \in L_{\neg bb}, |x| = n - 2$$

Количество таких слов $w$ равно количество таких слов $x$, которое в свою очередь равно $F_n$ по предположению индукции.

Итоговое количество таких слов $w$ есть $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, ч. т. д.

**(ii)** Построим ДКА $A$ для $L_{\neg bb}$ в соответствии с алгоритмом КМП. $A$ изображен на следующей диаграмме:




По $A$ построим однозначную грамматику в соответствии с алгоритмом из теории предыдущих заданий:

$$\begin{aligned}
&S \to A \\
&A \to \varepsilon | aA | bB \\
&B \to \varepsilon | aA
\end{aligned}$$

Преобразуем ее праволинейную:

$$\begin{aligned}
&S \to A | \varepsilon \\
&A \to aA | a | bB | b \\
&B \to aA | a
\end{aligned}$$

Составим СОУ:

$$\begin{cases}
S = A + \varepsilon \\
A = aA + a + bB + b \\
B = aA + a
\end{cases}$$

Составим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}
S[t] = A[t] + 1 \\
A[t] = tA[t] + t + tB[t] + t \\
B[t] = tA[t] + t
\end{cases}$$

Выразим $S[t]$:

$$S[t] = \frac{t+1}{1-t-t^2} = -\frac{1+t}{(t - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})(t - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})}$$

Разложим на простые дроби:

$$S[t] = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{t - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{t - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Преобразуем:

$$S[t] = -\frac{\frac{\sqrt{5}(1-\sqrt{5})^2}{20}}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}t} + \frac{\frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2}{20}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}t}$$

При разложении в ряд коэффициент $s_n$ при $t^n$ будет:

$$s_n = -\frac{\sqrt{5}(1-\sqrt{5})^2}{20}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2}{20}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Преобразуем:

$$s_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

**Задача 4**

Составим таблицу соответствия символов слова $w = 010$ номерам ячеек ленты для записи конфигураций.

| символ слова | 0 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|
| номер ячейки | 1 | 2 | 3 |

**(iii)** Слово $w = 010$ принимается, принимающее вычисление:

$$(q_0, 1) \vdash (q_1, 2) \vdash (q_2, 3) \vdash (q_2, 4)$$

**(i)** Как видно из пункта $(iii)$ состояние $q_{t=010}$, в которое автомат в первый раз выходит из префикса $t = 010$ есть $q_2$.

**(ii)** Построим $\tau_{t=010}$.

$$(q_0, 3) \vdash (q_1, 4)$$
$$(q_1, 3) \vdash (q_0, 2) \vdash (q_1, 3) \vdash ...$$
$$(q_2, 3) \vdash (q_2, 4)$$

Получаем $\tau_{t=010} = (q_0, q_1), (q_1, \star), (q_2, q_2)$.