Задание 7

Коновалов Андрей, 074

0	1	2	3	4	5	6	σ

Задача 1

Построим множества t_{ij} для $i = 1\,..\,6$, $j = 1\,..\,6 - i + 1$ для слова $ababab$ в соответствии с алгоритмом. Получим:

t_{ij}	1	2	3	4	5	6
1	$\{A\}$	$\{S\}$	$\{A\}$	$\{S\}$	$\{A\}$	$\{S\}$
2	$\{S\}$	$\{A\}$	$\{S\}$	$\{A\}$	$\{S\}$	
3	$\{A\}$	$\{S\}$	$\{A\}$	$\{S\}$		
4	$\{S\}$	$\{A\}$	$\{S\}$			
5	$\{A\}$	$\{S\}$				
6	$\{S\}$					

Вертикальная нумерация соответствует j, горизонтальная - i.

Поскольку $S \in t_{16}$, то $ababab \in L$.

Задача 3

(i) Покажем, что лемма о разрастании для линейных языков не выполняется. Для $\forall k \geq 0$, возьмем слово $z = b^k a^k b^k \in L_2$, и посмотрим на произвольное его разбиение $z = uvwxy$, такое, что $|uvxy| \leq k$, $|vx| > 0$.

$|z| = 3k \wedge |uvxy| \leq k \Rightarrow |w| \geq 2k$. В таком случае, получаем, что подслово a^k слова z полностью лежит в w. А значит v и x имеют вид $b^t, t \geq 0$. Поскольку $|vx| > 0$, то либо $|v| > 0$, либо $|x| > 0$, а значит в слове $p = uv^i wx^i y$ при $i = 2$ не будет выполняться соотношение $|p|_b = 2|p|_a$, а значит $p \notin L_2$.

Поскольку лемма о разрастании не выполняется, то L_2 - нелинейный.

(ii) Нет, не согласен. Любое из слов вида $b^k a^k b^k$, где $k \geq 3$ не подпадает ни под один из перечисленных шаблонов (перечисленных в фигурных скобках в условии), и, при этом, счетчик не обнулится внутри этого слова, значит рассуждение не верно. Тем не менее, исходное утверждение верно. Его доказательство приведено мной в задаче 5 задания 6.

(iii) Докажем, что M принимает L_2. Введем следующую "потенциальную функцию": в состоянии q_0 собираются слова w для которых $|w|_b = 2|w|_a$, причем в стеке находится лишь Z; в состоянии q_+ собираются слова w для которых $|w|_b - 2|w|_a > 0$, причем количество символов 1 в стеке равно $|w|_b - 2|w|_a$; в состоянии q_- собираются слова w для которых $|w|_b - 2|w|_a < 0$, причем количество символов 1 в стеке равно $||w|_b - 2|w|_a|$.

Проверим корректность всех переходов.

Проверим переходы из q_0. При переходе $(a, Z, 11Z)$ в состояние q_- число $|w|_b - 2|w|_a = -2 < 0$, причем в стеке окажется 2 символа 1. При переходе $(b, Z, 1Z)$ в состояние q_+ число $|w|_b - 2|w|_a = 1 > 0$, причем в стеке окажется 1 символ 1.

Проверим переходы из q_+. При переходе по b счетчик увеличивается на 1, а в стек, соответственно дописывается 1 символ 1. При переходе по a возможны несколько случаев: счетчик $= 1$, тогда осуществляется переход в q_-, а счетчик становится равным -1, в стеке оказывается 1 символ 1; счетчик $= 2$, тогда осуществляется переход в q_0, а счетчик становится равным 0, в стеке не оказывается символов 1; счетчик > 2, тогда в стеке лежит ≥ 3 символов 1, а значит возможен и осуществляется переход $(a, 111, 1)$ в q_+. При всех переходах "потенцальная функция" выполняется для текущего считанного слова.

Аналогично проверяются переходы из q_-.

(vi) Да, поскольку для него выполняются условия в определении: (i) выполняется, (ii) выполняется, (iii) очевидно выполняется, поскольку ε-переходов вообще в автомате нет.

Задача 4

(i) Покажем, что лемма о разрастании для КС-языков не выполняется. Для $\forall k \geq 0$, возьмем слово $w = a^k b^k c^k \in L$, и посмотрим на произвольное его разбиение $w = uvzxy$, такое, что $|vzx| \leq k$, $|vx| > 0$.

$|vzx| \leq k$. В таком случае vzx не может содержать буквы a и c одновременно, а значит либо a, либо c не будет содержаться ни в одном слове из v и x. Получаем, что в слове $p = uv^i wx^i y$ при $i = 2$ не будет выполняться соотношение $|p|_a = |p|_b = |p|_c$, а значит $p \notin L$.

Поскольку лемма о разрастании не выполняется, то L_2 - не КС.

(ii) Язык $\bar{L} = \{w \mid |w|_a \neq |w|_b \vee |w|_b \neq |w|_c \vee |w|_c \neq |w|_a\}$. Докажем, что язык КС, построив F-автомат, который его принимает. Для построения сначала построим 3 автомата, которые принимают языки $\{|w|_a \neq |w|_b\}$, $\{|w|_b \neq |w|_c\}$, $\{|w|_c \neq |w|_a\}$ используя конструкцию счетчика с маркером дна стека z. Теперь построим новый автомат, в котором будет новое начальное состояние, соединенное со всеми бывшими начальными состояниями переходами вида (ε, z, z). Построенный автомат будет принимать все слова, принимаемые хотя бы одним из построенных до этого автоматов и никакие другие, а значит и язык $\bar{L}$.