Поиск собственных чисел и функций краевой задачи

Коновалов Андрей, 073

1 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda - x^2)y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Требуется найти все значения $\lambda \in [0, 20]$ такие, что задача допускает нетривиальное решение, а также численно построить эти решения.

2 Общий метод решения

Поскольку это уравнение второго порядка с неизвестным параметром λ, то для его решения требуется третье условие. В силу линейности и однородности задачи (1), ее решение определяется с точностью до произвольного постоянного множителя, а значит третье условие можно задать произвольным образом. Зададим его так:

$$y'(0) = 1.$$

Решать задачу будем методом стрельбы. Соответствующая задача Коши записывается так:

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda - x^2)y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение $y(\lambda, x)$ задачи Коши будет зависеть от λ и иметь невязку с правым граничным условием краевой задачи:

$$F(\lambda) = y(\lambda, 1) - y(1) = \delta.$$

Решение $y(\lambda, x)$ будет решением краевой задачи, если невязка $\delta = 0$.

Решив численно уравнение

$$F(\lambda) = 0, \tag{3}$$

относительно λ мы найдем собственные значения λ и решения краевой задачи $y(\lambda, x)$.

3 Численный метод решения

Для численного решения задачи (2) составим разностную схему:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{2} + (\lambda - x_n^2)u_n = 0 \\ &u_0 = 0,\ \frac{u_1 - u_0}{\tau} = 1 \\ &x_n = \tau n,\ n \in \overline{0, N},\ \tau N = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Эта разностная схема приближает дифференциальное уравнение задачи (2) со вторым порядком аппроксимации.

Убедимся, что и граничные условия задачи (2) схема (4) приближает со вторым порядком аппроксимации. Для формулы производной на левой границе выпишем главный член невязки:

$$\frac{u_1 - u_0}{\tau} = y'(0) + \frac{\tau}{2} y''(0) + o(\tau)$$

Используя само дифференциальное уравнение и левое граничное условие, получим:

$$y''(0) = -(\lambda + x^2)y(0) = 0.$$

А значит левое граничное условие на производную приближается со вторым порядком аппроксимации:

$$\frac{u_1 - u_0}{\tau} = y'(0) + o(\tau).$$

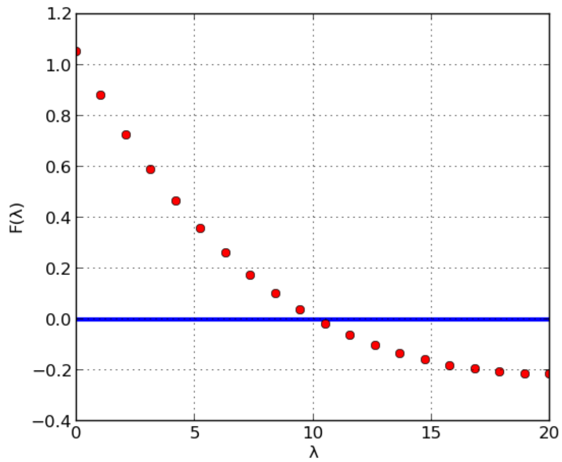

Рис. 1: Зависимость $F(\lambda)$

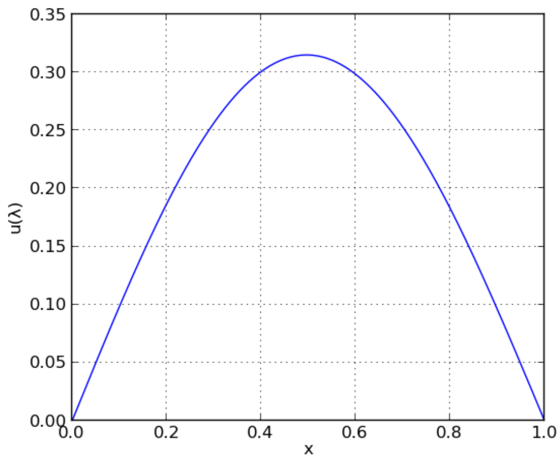

Рис. 2: Решение $u_n(\lambda)$

Построенная схема (4) позволяет численно получить решение задачи (2) для произвольного λ.

Уравнение (3) относительно λ можно решать методом секущих.

4 Процесс решения

Разобьем интервал $[0, 20]$ на $M = 20$ частей и для каждого λ_m численно построим решение $u_n(\lambda_m)$ задачи (2), используя схему (4) с $\tau = 10^{-6}$, а также посчитаем невязку $F(\lambda_m) = u_N(\lambda_m)$.

График зависимости невязки на правом конце $F(\lambda)$ изображен на рисунке 1. Из рисунка видно, что невязка равна 0 при единственном $\lambda \approx 10$.

Уточним результат, решив численно уравнение (3) с помощью метода секущих, взяв в качестве начального приближения $\lambda_0 = 10$. В результате получим $\lambda = 10.151184$.

Для полученного λ построим решение $u_n(\lambda)$. Решение изображено на рисунке 2.