Задание 1

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	5.1	5.2	6	σ

Задача 1

1. Докажем что $L \subseteq T$ индукцией по количеству конкатенаций n. Пустое слово $\varepsilon \in L$ и $\varepsilon \in T$, поэтому докажем включение, учитывая слова ненулевой длины.

База. Все слова, полученные с помощью одной конкатенации, т.е. слова вида $bax, baax, bbax, bbaax$, где $x = \varepsilon$, принадлежат языку T, поскольку начинаются с a, заканчиваются на b, и не имеют подслов aaa и bbb. База доказана.

Переход. Пусть слова, полученные с помощью n конкатенаций принадлежат языку T. Докажем, что слова полученные с помощью $n+1$ конкатенации принадлежат языку T.

Каждое слово $w \in L$, полученное после $n+1$ конкатенации состоит из префикса $p \in \{ba, baa, bba, bbaa\}$ и суффикса $s \in T$. Заметим, что p начинается с b, а s, по предположению индукции, заканчивается на a. Получаем, что w начинается с b и заканчивается на a. Поскольку p заканчивается на a, а s начинается с b, а также p и s не содержат подслов aaa и bbb, то слово $w = ps$ не содержит подслов aaa и bbb. Получаем, что слово $w \in T$. Переход доказан.

2. Докажем, что $T \subseteq L$ индукцией по длине слова n.

База. Посмотрим на слова, принадлежащие языку T длины $0 \le n \le 4$. Они представляют собой множество $W = \{\varepsilon, ba, baa, bba, baba, bbaa\}$. Заметим, что $W \subseteq L$. База доказана.

Переход. Пусть слова длины меньше n принадлежат языку L. Докажем, что слова длины n принадлежат языку L. Поскольку база была доказана для $0 \le n \le 4$, то при доказательсте перехода будем считать, что $n \ge 5$.

Каждое слово $w \in T$ должно начинаться с b и не может иметь подслово bbb. Следовательно префикс длины 3 слова w может быть лишь: baa, bab или bba. Разберем эти три случая.

Если baa является префиксом, то следующей буквой после этого префикса может быть лишь b, поскольку иначе существовало бы подслово aaa. Получаем, что $baab$ является префиксом. В этом случае $w = baa \cdot x$, где $x \in L$ по предположению индукции. Следовательно $w \in L$.

Если bab является префиксом, то $w = ba \cdot x$, где $x \in L$ по предположению индукции. Следовательно $w \in L$.

Если bba является префиксом, то возможны 2 случая: префиксом является $bbab$ или $bbaa$. В первом случае $w = bba \cdot x$, где $x \in L$ по предположения индукции. Следовательно $w \in L$. Во втором случае префиксом является $bbaab$, поскольку $bbaaa$ содержит подслово aaa и не может быть префиксом. Получаем, что $w = bbaa{\cdot}x$, где $x \in L$ по предположения индукции. Следовательно $w \in L$. Переход доказан.

3 Используя пункты 1 и 2 и соответственно факты $L \subseteq T$ и $T \subseteq L$ получаем, что $L = T$.

Задача 2

1. Заметим, что $a \in \{a^{5n+1} | n \geq 0\}$. Следовательно $\{a^{5n+1} | n \geq 0\}^* = \{a^n | n \geq 1\} = \{a\}^*$. Следовательно $\{a^{3n} |\, n > 0\} \cap \{a^{5n+1} | n \geq 0\}^* = \{a^{3n} |\, n > 0\} \cap \{a\}^* = \{a^{3n} |\, n > 0\}$.

2. В пересечение множеств входят только те элементы, которое входят в оба множества. Но в пустое множество не входит ни одного элемента, следовательно $\emptyset \cap \{\varepsilon\} = \emptyset$.

3. Заметим, что в $h^{-1}(L)$ входят лишь слова x в алфавите $\{a, b\}$, такие что $3|x|_a + 2|x|_b = 7n$ для некоторого $n \geq 0$, поскольку $h(a) = aaa$ и $h(b) = aa$, и никакие другие. Значит, $h^{-1}(L) = \{x \in \{a, b\}^* | 3|x|_a + 2|x|_b = 7n | n \geq 0\}$.

Задача 3

1. Докажем, что равенство ложно. Рассмотрим $L = \{\varepsilon, a\}$ в алфавите $\{a\}$. Рассмотрим h: $h(\varepsilon) = \varepsilon$, $h(a) = \varepsilon$. Заметим, что $h^{-1}(L) = \{a^n | n \geq 0\}$. А значит $h(h^{-1}(L)) = \{\varepsilon\} \neq L$.

2. Докажем, что равенство ложно. Рассмотрим $L = \{a^n | n \geq 0\}$ в алфавите $\{a, b\}$. Рассмотрим h: $h(\varepsilon) = \varepsilon$, $h(a) = a$, $h(b) = a$. Заметим, что $h(L) = L$. Заметим, что $h^{-1}(L) = \{x \in \{a, b\}^* || x|_a + |x|_b = n\} \neq L$. А значит $h^{-1}(h(L)) = h^{-1}(L) \neq L$.

Задача 4

1. $\mathcal{A}$ является детерминированным, поскольку для $\forall$ вершины $\nexists$ двух исходящих из нее ребер, помеченных одинаковой буквой.

2. Последовательность конфигураций: $(q_0, 011001) \vdash (q_0, 11001) \vdash (q_1, 1001) \vdash (q_0, 001) \vdash (q_0, 01) \vdash (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon)$. Поскольку q_1 - финальное состояние, то $w \in L(\mathcal{A})$.

3. Последовательность конфигураций: $(q_0, 001100) \vdash (q_0, 01100) \vdash (q_0, 1100) \vdash (q_1, 100) \vdash (q_0, 00) \vdash (q_0, 0) \vdash (q_0, \varepsilon)$.

4. Слова $\{1, 01\} \in L(\mathcal{A})$. Последовательности конфигураций для них: $(q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon)$ и $(q_0, 01) \vdash (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon)$ соответственно.

Слова $\{\varepsilon, 0\} \notin L(\mathcal{A})$. Последовательности конфигураций для них: (q_0, ε) и $(q_0, 0) \vdash (q_0, \varepsilon)$ соответственно.

Задача 5.1

2. Докажем, что автомат $\mathcal{A}$, заданный в задаче 4 принимает язык L_4 по индукции по длине слова n. А именно докажем, что после обработки слова, которое дает остаток i при делении на 3, $\mathcal{A}$ будет находится в состоянии q_i (в соответствии с обозначениями в условии). Соответственно слова, которые представляют собой числа, дающие остаток 1 при делении на 3, будут переводить $\mathcal{A}$ в состояние q_1, которое является финальным. Поскольку каждому слову сопоставляется число, далее будем говорить про слова, как про числа. Также, далее, при упоминании остатка, имеется ввиду остаток при делении на 3.

База. Заметим, что слово ε не принимается $\mathcal{A}$. Посмотрим на слова $\{0,1\}$ длины $n = 1$. После обработки слова 0, дающее остаток 0, $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_0, а после обработки слова 1, дающее остаток 1 - в состояние q_1. База доказана.

Переход. Пусть после обработки любого слова длины меньше n, дающего остаток i, $\mathcal{A}$ находится в состоянии q_i. Докажем, что для всех слов длины n это тоже выполняется.

Посмотрим на произвольное слово x длины n. Представим его ввиде: $x = y \cdot a$, где y - слово длины $n - 1$, $a \in \{0,1\}$. Заметим, что $x = 2_{10} \cdot y + a$. Обозначим остаток числа t: $r(t)$. Заметим, что $r(x) = r(2_{10} \cdot r(y) + a)$.

Дадим $\mathcal{A}$ обработать слово y.

Пусть сейчас $\mathcal{A}$ находится в состоянии q_0, и, соответственно, $r(y) = 0$. Если $a = 0$, то $r(x) = 0$, а $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_0. Если $a = 1$, то $r(x) = 1$, а $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_1. В обоих случаях доказываемое свойство выполняется.

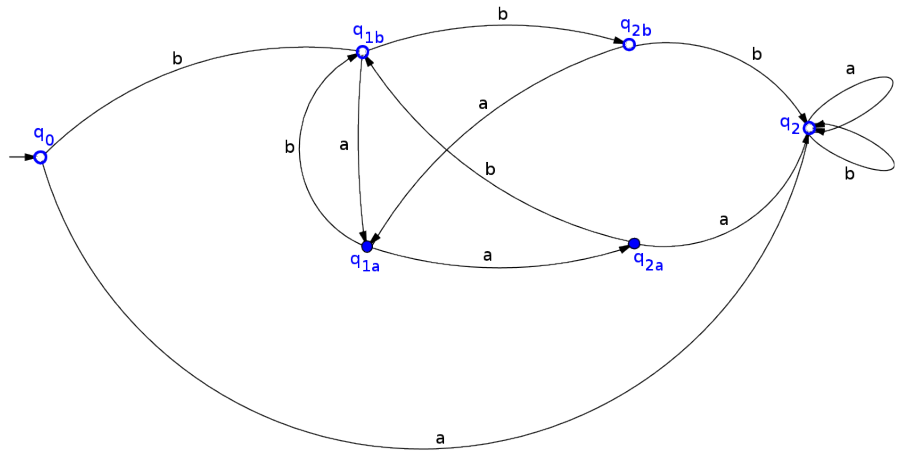
Пусть сейчас $\mathcal{A}$ находится в состоянии q_1, и, соответственно, $r(y) = 1$. Если $a = 0$, то $r(x) = 2$, а $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_2. Если $a = 1$, то $r(x) = 0$, а $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_0. В обоих случаях доказываемое свойство выполняется.

Пусть сейчас $\mathcal{A}$ находится в состоянии q_2, и, соответственно, $r(y) = 2$. Если $a = 0$, то $r(x) = 1$, а $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_1. Если $a = 1$, то $r(x) = 2$, а $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_2. В обоих случаях доказываемое свойство выполняется.

Все случаи разобраны, в каждом из них доказываемое свойство для слова x выполняется. Переход доказан.

Задача 6.

2. Докажем, что автомат $\mathcal{A}$, изображенный на диаграмме ниже, является искомым. q_0 - начальное состояние. q_{1a} и q_{2a} - финальные состояния. Заметим, что если $\mathcal{A}$ пришел в нефинальное состояние q_2, то он из него уже не выйдет и текущее слово не может быть принято.



Сначала докажем, что $\mathcal{A}$ принимает слова из языка T. Первой буквой любого слова из языка T является b. Это означает, что после ее обработки $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_{1b}. Далее $\mathcal{A}$ в состояние q_0 уже не вернется, поскольку в него не входит ни одно ребро.

Докажем, что, после обработки слова из языка T, $\mathcal{A}$ не может оказаться в состоянии q_2. Заметим, что в q_2 можно попасть только из q_{2b} по букве b или из q_{2a} по букве a. В состояние q_{2b} можно попасть только из состояния q_{1b}, перейдя по букве b, в которое, в свою очередь, можно попасть только по букве b. Это означает, что, что бы перейти в состояние q_2 по букве b, что бы 3 последние обработанные буквы были буквами b. Аналогично, что бы перейти в состояне q_2 по букве a, надо, что бы 3 последние обработанные буквы были буквами a. Но любое слово из T не содержит подслов aaa и bbb.

Это означает, что после окончания обработки слова из языка T, $\mathcal{A}$ окажется в одном из состояний: q_{1b}, q_{2b}, q_{1a} или q_{2a}. Поскольку последней буквой слова из T всегда является a, то $\mathcal{A}$ закончит исполнение в одном из состояний: q_{1a} или q_{2a}, поскольку только в них можно перейти по букве a. А эти состояния являются финальными, а значит $\mathcal{A}$ принимает слова из языка T.

Теперь докажем, что $\mathcal{A}$ не принимает никакие другие слова. Поскольку из q_0 существует ребро в q_2 подписанное буквой a, то быть принятым может лишь слово, начинающееся с буквы b. Также, поскольку в финальные состояния входят лишь ребра, подписанные буквой a, то слово, оканчивающееся на b принято быть не может. Заметим, что если в слове встречается подслово aaa или подслово bbb, то после его обработки $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_2, в каком бы состоянии он до этого не находился.

Получаем, что $\mathcal{A}$ принимает язык T.

3. Заметим, что после обработки первой буквы слова, $\mathcal{A}$ перейдет в состояние q_2, и далее из него не выйдет. Последовательность конфигураций: $(q_0, abbabbbabbabbbabbbababbabba) \vdash (q_2, bbabbbabbabbbabbbababbabba) \vdash^* (q_2, \varepsilon)$.