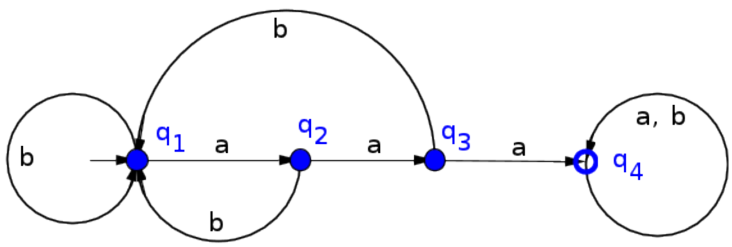
Задание 11

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	5	σ

Задача 1

Построим ПДКА КМП для языка L.



M будет иметь образующие $\{2344, 1114\}$. Замыканием этого множества будет $M = \{1234, 2344, 4444, 1444, 1144, 1114, 2444, 2244, 2224, 3444, 3344, 3334\}$.

Отождествим элементы моноида и состояния автомата, по нему построенному, для удобства записи. Автомат, построенный по моноиду переходов языка L обозначим $A_M(L)$.

Автомат $A_M(L^{\frac{1}{3}})$ будет иметь такие же состояния, как $A_M(L)$, но финальными будут лишь те состояния x, для которых $x^3 \in F(A_M(L))$. Рассчитаем x^3 для каждого $x \in Q(A_M(L))$.

x	1234	2344	4444	1444	1144	1114
x^3	1234	4444	4444	1444	1144	1114
$\in F?$	+			+	+	+

x	2444	2244	2224	3444	3344	3334
x^3	4444	2244	2224	4444	4444	3334
$\in F?$		+	+			+

Построим $A_M(L^{\frac{1}{3}})$. При его минимизации оказывается, что он уже минимален. Приведем сертификат (разбиение множества состояний на множества k-эквивалентности).

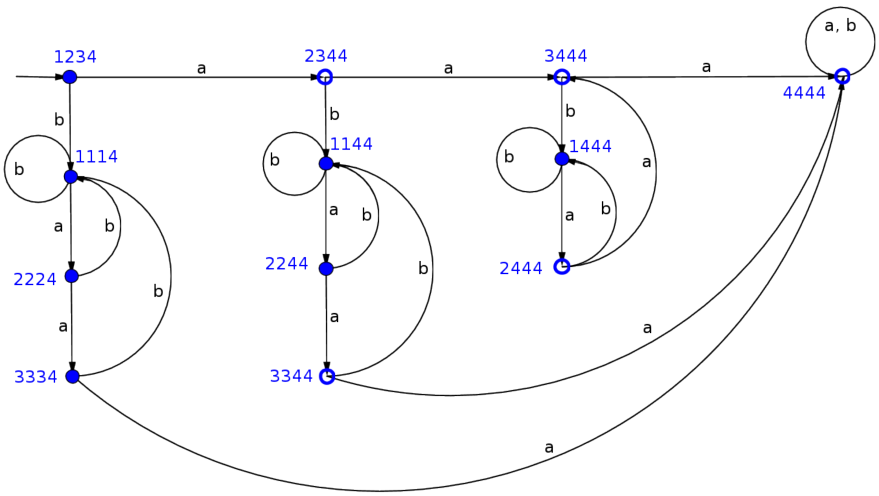
$k = 0 : \{1234, 1114, 2224, 3334, 1144, 2244, 1444\}, \{2344, 3344, 3444, 2444, 4444\}$

$k = 1 : \{1234, 2244, 1444, 3334\}, \{1114, 2224, 1144\}, \{2344, 3344, 3444, 2444\}, \{4444\}$

$k = 2 : \{1234, 2244\}, \{1444\}, \{3334\}, \{1114\}, \{2224, 1144\}, \{2344\}, ..., \{4444\}$

$k = 3 : \{1234\}, ..., \{4444\}$

Сам автомат изображен ниже.



Задача 2

(i) Покажем, что $x \sim_A y \Rightarrow x \sim_L y$. Пусть q_0 - начальное состояние A.

$$
\begin{aligned}
&x \sim_A y \Leftrightarrow \\
&\forall q \in Q(A)\ \delta(q, x) = \delta(q, y) \Rightarrow \\
&\forall w \in \Sigma^*\ \delta(q_0, wx) = \delta(q_0, wy) \Leftrightarrow \\
&\forall w, z \in \Sigma^*\ \delta(q_0, wxz) = \delta(q_0, wyz) \Rightarrow \\
&\forall w, z \in \Sigma^*\ (wxz, wyz \in L) \vee (wxz, wyz \notin L) \Leftrightarrow \\
&x \sim_L y
\end{aligned}
$$

(ii) Покажем, что $x \sim_{min(A)} y \Leftrightarrow x \sim_L y$.

$$
\begin{gathered}
(x \sim_{min(A)} y \Leftrightarrow x \sim_L y) \Leftrightarrow \\
(x \sim_L y \Rightarrow x \sim_{min(A)} y) \wedge (x \sim_{min(A)} y \Rightarrow x \sim_L y)
\end{gathered}
$$

Из пункта (i) видим, что

$$x \sim_{min(A)} y \Rightarrow x \sim_L y$$

Допустим, что $x \sim_L y$, но $x \nsim_{min(A)} y$, тогда

$$
\begin{aligned}
&x \nsim_{min(A)} y \Rightarrow \\
&\exists q \in Q(min(A))\ q_1 = \delta(q, x) \neq \delta(q, y) = q_2
\end{aligned}
$$

Поскольку автомат минимальный, то для q существует достигающая цепочка w.

$$
\begin{aligned}
&x \sim_L y \Rightarrow \\
&\forall z \in \Sigma^* (wxz, wyz \in L) \vee (wxz, wyz \notin L) \Rightarrow \\
&\forall z \in \Sigma^* (\delta(q_1, z), \delta(q_2, z) \in L) \vee (\delta(q_1, z), \delta(q_2, z) \notin L)
\end{aligned}
$$

Но это означает, что q_1 и q_2 - неразличимые, а значит автомат не минимальный. Противоречие. Получаем, что $x \sim_L y \Rightarrow x \sim_{min(A)} y$.

Задача 4

(i) Грамматика, построенная в соответствии с 16.1.6 книги Шеня будет леволинейной. А значит множество $Left(N)$, которое выводится из $\langle LeftN \rangle$ является регулярным.

(ii) Обозначим $P = S'$ для удобства. Будем полагать, что P - начальный символ грамматики, поскольку он явно не указан.

В соответствии с 16.1.6 книги Шеня, построим грамматику:

$$\begin{aligned}
&\langle LeftP \rangle \to \varepsilon \\
&\langle LeftS \rangle \to \langle LeftP \rangle \ | \ \langle LeftS \rangle \, Sa \\
&\langle LeftA \rangle \to \langle LeftP \rangle \, S
\end{aligned}$$

Практически очевидно, что из $\langle LeftP \rangle$ выводится множество $\{\varepsilon\}$, из $\langle LeftA \rangle$ - $\{S\}$, а из $\langle LeftS \rangle$ - $(Sa)^*$. Автоматы для них строятся тривиально.