Задание 10

Коновалов Андрей, 074

1	2	3	4	Σ

Задача 2

Поскольку граф планарный, то $|E| = O(|V|)$, а значит $\exists C > 0 : |E| \leq C|V|$. Упорядочим вершины в графе по возрастанию степеней. Будем двигаться по этому списку и набирать вершины в независимое множество.

У первой вершины в списке степень $\leq C$, поскольку иначе $|E| > C|V|$. При добавлении этой вершины в независимое множество, из графа (и списка) нужно выкинуть ее и вершины, с котороми она соединена. Всего $C + 1$ вершина. Для оставшегося графа применяем аналогичное рассуждение. В результате при увеличении размера независимого множества на 1, количество вершин в графе уменьшается не больше, чем на $C + 1$.

Размер полученного в результате независимого множества будет не меньше, чем $\lfloor \frac{n}{C+1} \rfloor |V|$.

Задача 4

(i) Упорядочим множество $\{\frac{c_i}{a_i}\}$ и будем идти по нему последовательно и набирать максимальное количество c_i пока рюкзак не заполнится.

Возьмем любое другое заполнение рюкзака и упорядочим содержимое рюкзака аналогичным образом. Представим теперь его содержимое функцией, определенной на отрезке $[0, b]$ и в каждой точке имеющей значение c_i "объекта", занимающего данную "точку объема" рюкзака. Найдется такая точка, что значение функции в ней, будет меньше, чем значение аналогичной функции для построенного выше заполнения, иначе новое заполнение совпадет со старым. А значит суммарная площадь под графиком функции, которая равна "ценности" набранных "объектов", будет меньше, чем у функции для старого заполнения.