

Алексей Косенко

ВШЭ ПМИ, 2022 г.

1 Рекурсия и редукция, практика 2.

1.1 Формы термов.

$\lambda x. fst (pair\ x\ 0)$ – терм находится в WHNF, но не в HNF.

$\lambda xy. x (\lambda z. y\ z)\ w$ – находится в HNF, но не в NF.

1.2 Функции для чисел Чёрча.

1.2.1 Equals.

Заметим, что функция *minus* с аргументами n, m , где второе число будет больше первого, будет всегда возвращать 0.

$$minus\ 1\ 2 = (\lambda nm. m\ pred\ n)\ 1\ 2 \rightarrow^\beta$$

$$2\ pred\ 1 = (\lambda sz. s\ (s\ z))\ pred\ 1 \rightarrow^\beta$$

$$pred\ (pred\ 1) \rightarrow^\beta pred\ 0$$

$$pred\ 0 = (\lambda n. fst\ (n\ sp\ zp))\ (\lambda sz. n) \rightarrow^\beta$$

$$fst\ ((\lambda sz. n)\ sp\ zp) \rightarrow^\beta fst\ (pair\ 0\ 0) = 0$$

Для проверки равенства чисел достаточно вычесть их друг из друга, проверив результат на равенство нулю.

$$equals = \lambda nm. if\ (and\ (isZero\ (minus\ n\ m))\ (isZero\ (minus\ m\ n)))\ tru\ fls$$

1.2.2 lt, gt, le, ge.

Для быстрого выведения первых двух формул используем *isZero* и мини-трюк с *minus*. Затем на основе *lt, gt, equals* выводим оставшиеся.

$$lt = \lambda mn. if\ (not\ (isZero\ (minus\ n\ m)))\ tru\ fls$$

$$gt = \lambda mn. if\ (not\ (isZero\ (minus\ m\ n)))\ tru\ fls$$

$$le = \lambda mn. if\ (or\ (lt\ m\ n)\ (equals\ m\ n))\ tru\ fls$$

$$ge = \lambda mn. if\ (or\ (gt\ m\ n)\ (equals\ m\ n))\ tru\ fls$$

1.2.3 Sum.

Просуммируем числа $[0, n)$. Воспользуемся идеей *pred*, но первым элементом пары будем хранить сумму предыдущих чисел, а на втором месте поддерживать счётчик.

Расширим абстракцию *sp* до $zsp = \lambda p. \text{pair } (\text{plus } (\text{fst } p) (\text{snd } p)) (\text{succ } (\text{snd } p))$.

$$\begin{aligned}
\text{sum} &= \lambda n. \text{fst } (n \text{ zsp } zp) \\
\text{sum } 0 &= (\lambda n. \text{fst } (n \text{ zsp } zp)) 0 \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{fst } (0 \text{ zsp } zp) \rightarrow^\beta \text{fst } zp = 0 \\
\\
\text{sum } 4 &= (\lambda n. \text{fst } (n \text{ zsp } zp)) 4 \rightarrow^\beta \\
\text{fst } (4 \text{ zsp } zp) &= \text{fst } ((\lambda sz. s (s (s (s z)))) \text{ zsp } zp) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{fst } (\text{zsp } (\text{zsp } (\text{zsp } (\text{zsp } zp)))) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{fst } (\text{zsp } (\text{zsp } (\text{zsp } (\text{pair } 0 \ 1)))) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{fst } (\text{zsp } (\text{zsp } (\text{pair } 1 \ 2))) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{fst } (\text{zsp } (\text{pair } 3 \ 3)) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{fst } (\text{pair } 6 \ 4) = 6
\end{aligned}$$

1.3 Остаток от деления.

$$\text{modCounter} = \lambda p. \text{if } (\text{equals } p \ 3) \ 0 (\text{succ } p)$$

Введем лямбда-абстракцию *modCounter*, с помощью которой будем сбрасывать счетчик в 0 при достижении трёх. При большом желании можно расширить *modCounter* для любого числа, заменив захардкоженную константу в переменную и добавив её в абстрактор.

$$\begin{aligned}
\text{mod3} &= \lambda m. \text{if } (\text{isZero } m) \ 0 (m \text{ modCounter } 1) \\
\\
\text{mod3 } 3 &\rightarrow^\beta \text{if } (\text{isZero } 3) \ 0 ((\lambda sz. s (s (s z))) \text{ modCounter } 1) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{modCounter } (\text{modCounter } (\text{modCounter } 1)) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{modCounter } (\text{modCounter } 2) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{modCounter } 3 = 0 \\
\\
\text{mod3 } 5 &\rightarrow^\beta \text{modCounter } (\text{modCounter } (\text{modCounter } (\text{modCounter } (\text{modCounter } 1)))) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{modCounter } (\text{modCounter } (\text{modCounter } (\text{modCounter } 2))) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{modCounter } (\text{modCounter } (\text{modCounter } 3)) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{modCounter } (\text{modCounter } 0) \rightarrow^\beta \\
&\quad \text{modCounter } 1 \rightarrow^\beta 2
\end{aligned}$$

1.4 Функции над списками.

1.4.1 Length.

Создаем счётчик по второму элементу, инициализируя его с нуля.

$$counter = \lambda h k. succ\ k$$

$$length = \lambda l. l\ counter\ 0$$

$$length\ [1, 2, 3, 4] \rightarrow^\beta (\lambda cn. c\ 1\ (c\ 2\ (c\ 3\ (c\ 4\ n))))\ counter\ 0 \rightarrow^\beta$$

$$counter\ 1\ (counter\ 2\ (counter\ 3\ (counter\ 4\ 0))) \rightarrow^\beta$$

$$counter\ 1\ (counter\ 2\ (counter\ 3\ 1)) \rightarrow^\beta$$

$$counter\ 1\ (counter\ 2\ 2) \rightarrow^\beta$$

$$counter\ 1\ 3 = 4$$

$$length\ [] \rightarrow^\beta (\lambda cn. n)\ counter\ 0 = 0$$

1.4.2 Tail.

Создаем счётчик от $length - 1$, он будет конкатенировать до тех пор, пока не достигнет нуля.

$$adder = \lambda ep. if\ (isZero\ (snd\ p))\ (fst\ p)\ (pair\ (cons\ e\ (fst\ p))\ (pred\ (snd\ p)))$$

$$tail = \lambda l. if\ (isEmpty\ l)\ []\ (l\ adder\ (pair\ nil\ (pred\ (length\ l))))$$

$$tail\ [5, 3, 4, 1] \twoheadrightarrow^\beta (\lambda cn. c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 4\ (c\ 1\ n))))\ adder\ (pair\ []\ 3)$$

$$adder\ 5\ (adder\ 3\ (adder\ 4\ (adder\ 1\ (pair\ []\ 3)))) \rightarrow^\beta$$

$$adder\ 5\ (adder\ 3\ (adder\ 4\ (pair\ [1]\ 2))) \rightarrow^\beta$$

$$adder\ 5\ (adder\ 3\ (pair\ [4, 1]\ 1)) \rightarrow^\beta$$

$$adder\ 5\ (pair\ [3, 4, 1]\ 0) \rightarrow^\beta [3, 4, 1]$$

$$tail\ [5] \twoheadrightarrow^\beta (\lambda cn. c\ 5\ n)\ adder\ (pair\ []\ 0) \rightarrow^\beta$$

$$adder\ 5\ (pair\ []\ 0) \rightarrow^\beta []$$

1.5 Уравнения над термами.

$$\begin{aligned} FM &= MF \\ FM &= (\lambda m. m F) M \\ F &= (\lambda m. m F) \\ F &= (\lambda f m. m f) F \\ F' &= (\lambda f m. m f) \\ F &= YF' \\ F &= Y(\lambda f m. m f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FMN &= NF(MNF) \\ FMN &= (\lambda n. n F (M n F)) N \\ FM &= \lambda n. n F (M n F) \\ FM &= (\lambda mn. n F (m n F)) M \\ F &= \lambda mn. n F (m n F) \\ F &= (\lambda f mn. n f (m n f)) F \\ F &= Y(\lambda f mn. n f (m n f)) \end{aligned}$$

1.6 Нерекурсивные определения функций.

$$\begin{aligned} f &= F f g \\ g &= G f g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= pair f g \\ M &= pair (F (fst M) (snd M)) (G (fst M) (snd M)) \\ M &= (\lambda P. pair (F (fst P) (snd P)) (G (fst P) (snd P))) M \\ M &= Y(\lambda P. pair (F (fst P) (snd P)) (G (fst P) (snd P))) \\ K &= (\lambda P. pair (F (fst P) (snd P)) (G (fst P) (snd P))) \\ M &= YK \\ f &= fst YK \\ g &= snd YK \end{aligned}$$

1.7 N-ное число Фибоначчи.

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$prev = \lambda p. pair\ (plus\ (fst\ p)\ (snd\ p))\ (snd\ p)$$

$$fib = \lambda n. snd(n\ prev\ (pair\ 1\ 0))$$

$$fib\ 5 \rightarrow^\beta snd\ (5\ prev\ (pair\ 1\ 0)) \rightarrow^\beta$$

$$snd\ (prev\ (prev\ (prev\ (prev\ (prev\ (pair\ 1\ 0)))))) \rightarrow^\beta$$

$$snd\ (prev\ (prev\ (prev\ (prev\ (pair\ 1\ 1)))) \rightarrow^\beta$$

$$snd\ (prev\ (prev\ (prev\ (pair\ 2\ 1)))) \rightarrow^\beta$$

$$snd\ (prev\ (prev\ (pair\ 3\ 2))) \rightarrow^\beta$$

$$snd\ (prev\ (pair\ 5\ 3)) \rightarrow^\beta$$

$$snd\ (pair\ 8\ 5) \rightarrow^\beta 5$$

$$fib\ 0 \rightarrow^\beta 0$$