Алексей Косенко

ВШЭ ПМИ, 2022 г.

1 Рекурсия и редукция, практика 2.

1.1 Формы термов.

$\lambda x.\ fst\ (pair\ x\ 0)$ – терм находится в WHNF, но не в HNF.
$\lambda xy.\ x\ (\lambda z.\ y\ z)\ w$ – находится в HNF, но не в NF.

1.2 Функции для чисел Чёрча.

1.2.1 Equals.

Заметим, что функция $minus$ с аргументами n, m, где второе число будет больше первого, будет всегда возвращать 0.

$$minus\ 1\ 2 = (\lambda nm.m\ pred\ n)\ 1\ 2 \to^{\beta}$$

$$2\ pred\ 1 = (\lambda sz.s\ (s\ z))\ pred\ 1 \to^{\beta}$$

$$pred\ (pred\ 1) \twoheadrightarrow^{\beta} pred\ 0$$

$$pred\ 0 = (\lambda n.\ fst\ (n\ sp\ zp))\ (\lambda sz.\ n) \to^{\beta}$$

$$fst\ ((\lambda sz.\ n)\ sp\ zp) \twoheadrightarrow^{\beta} fst\ (pair\ 0\ 0) = 0$$

Для проверки равенства чисел достаточно вычесть их друг из друга, проверив результат на равенство нулю.

$$equals = \lambda nm.\ if\ (and\ (isZero\ (minus\ n\ m))\ (isZero\ (minus\ m\ n)))\ tru\ fls$$

1.2.2 lt, gt, le, ge.

Для быстрого выведения первых двух формул используем $isZero$ и мини-трюк с $minus$. Затем на основе $lt, gt, equals$ выводим оставшиеся.

$$lt = \lambda mn.\ if\ (not\ (isZero\ (minus\ n\ m)))\ tru\ fls$$
$$gt = \lambda mn.\ if\ (not\ (isZero\ (minus\ m\ n)))\ tru\ fls$$
$$le = \lambda mn.\ if\ (or\ (lt\ m\ n)\ (equals\ m\ n))\ tru\ fls$$
$$ge = \lambda mn.\ if\ (or\ (gt\ m\ n)\ (equals\ m\ n))\ tru\ fls$$

1.2.3 Sum.

Просуммируем числа $[0, n)$. Воспользуемся идеей *pred*, но первым элементом пары будем хранить сумму предыдущих чисел, а на втором месте поддерживать счётчик.

Расширим абстракцию *sp* до $zsp = \lambda p.\ pair\ (plus\ (fst\ p)\ (snd\ p))\ (succ\ (snd\ p))$.

$$sum = \lambda n.\ fst\ (n\ zsp\ zp)$$

$$sum\ 0 = (\lambda n.\ fst\ (n\ zsp\ zp))\ 0 \to^{\beta}$$
$$fst\ (0\ zsp\ zp) \to^{\beta} fst\ zp = 0$$

$$sum\ 4 = (\lambda n.\ fst\ (n\ zsp\ zp))\ 4 \to^{\beta}$$
$$fst\ (4\ zsp\ zp) = fst\ ((\lambda sz.\ s\ (s\ (s\ (s\ z))))\ zsp\ zp) \to^{\beta}$$
$$fst\ (zsp\ (zsp\ (zsp\ (zsp\ zp)))) \to^{\beta}$$
$$fst\ (zsp\ (zsp\ (zsp\ (pair\ 0\ 1)))) \to^{\beta}$$
$$fst\ (zsp\ (zsp\ (pair\ 1\ 2))) \to^{\beta}$$
$$fst\ (zsp\ (pair\ 3\ 3)) \to^{\beta}$$
$$fst\ (pair\ 6\ 4) = 6$$

1.3 Остаток от деления.

$$modCounter = \lambda p.\ if\ (equals\ p\ 3)\ 0\ (succ\ p)$$

Введем лямбда-абстракцию *modCounter*, с помощью которой будем сбрасывать счетчик в 0 при достижении трёх. При большом желании можно расширить *modCounter* для любого числа, заменив захардкоженную константу в переменную и добавив её в абстрактор.

$$mod3 = \lambda m.\ if\ (isZero\ m)\ 0\ (m\ modCounter\ 1)$$

$$mod3\ 3 \to^{\beta}\ \ if\ (isZero\ 3)\ 0\ ((\lambda sz.\ s\ (s\ (s\ z)))\ modCounter\ 1) \to^{\beta}$$
$$modCounter\ (modCounter\ (modCounter\ 1)) \to^{\beta}$$
$$modCounter\ (modCounter\ 2) \to^{\beta}$$
$$modCounter\ 3 = 0$$

$$mod3\ 5 \twoheadrightarrow^{\beta} modCounter\ (modCounter\ (modCounter\ (modCounter\ (modCounter\ 1)))) \to^{\beta}$$
$$modCounter\ (modCounter\ (modCounter\ (modCounter\ 2))) \to^{\beta}$$
$$modCounter\ (modCounter\ (modCounter\ 3)) \to^{\beta}$$
$$modCounter\ (modCounter\ 0) \to^{\beta}$$
$$modCounter\ 1 \to^{\beta} 2$$

1.4 Функции над списками.

1.4.1 Length.

Создаем счётчик по второму элементу, инициализируя его с нуля.

$$counter = \lambda hk.\ succ\ k$$

$$length = \lambda l.\ l\ counter\ 0$$

$$length\ [1,2,3,4] \to^{\beta} (\lambda cn.c\ 1\ (c\ 2\ (c\ 3\ (c\ 4\ n))))\ counter\ 0 \to^{\beta}$$
$$counter\ 1\ (counter\ 2\ (counter\ 3\ (counter\ 4\ 0))) \to^{\beta}$$
$$counter\ 1\ (counter\ 2\ (counter\ 3\ 1)) \to^{\beta}$$
$$counter\ 1\ (counter\ 2\ 2) \to^{\beta}$$
$$counter\ 1\ 3 = 4$$

$$length\ [\ ] \to^{\beta} (\lambda cn.\ n)\ counter\ 0 = 0$$

1.4.2 Tail.

Создаем счётчик от $length - 1$, он будет конкатенировать до тех пор, пока не достигнет нуля.

Идея также схожа с реализацией *pred*, только вместо *c* подставляем *adder*. Время работы $\Theta(n)$.

Adder на каждой итерации добавляет в массив новое значение и уменьшает счётчик на единицу. В конце будет возвращен массив без первого элемента.

$$adder = \lambda ep.\ if\ (isZero\ (snd\ p))\ (fst\ p)\ (pair\ (cons\ e\ (fst\ p))\ (pred\ (snd\ p)))$$

$$tail = \lambda l.\ if\ (isEmpty\ l)\ [\ ]\ (l\ adder\ (pair\ nil\ (pred\ (length\ l))))$$

$$tail\ [5,3,4,1] \twoheadrightarrow^{\beta} (\lambda cn.\ c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 4\ (c\ 1\ n))))\ adder\ (pair\ [\ ]\ 3)$$
$$adder\ 5\ (adder\ 3\ (adder\ 4\ (adder\ 1\ (pair\ [\ ]\ 3)))) \to^{\beta}$$
$$adder\ 5\ (adder\ 3\ (adder\ 4\ (pair\ [1]\ 2))) \to^{\beta}$$
$$adder\ 5\ (adder\ 3\ (pair\ [4,1]\ 1)) \to^{\beta}$$
$$adder\ 5\ (pair\ [3,4,1]\ 0) \to^{\beta} [3,4,1]$$

$$tail\ [5] \twoheadrightarrow^{\beta} (\lambda cn.\ c\ 5\ n)\ adder\ (pair\ [\ ]\ 0) \to^{\beta}$$
$$adder\ 5\ (pair\ [\ ]\ 0) \to^{\beta} [\ ]$$

1.5 Уравнения над термами.

Используя комбинатор неподвижной точки найдём терм F такой что:

$$\begin{aligned}
FM &= MF \\
FM &= (\lambda m.\ m\ F)\ M \\
F &= (\lambda m.\ m\ F) \\
F &= (\lambda fm.\ m\ f)\ F \\
F' &= (\lambda fm.\ m\ f) \\
F &= YF' \\
F &= Y(\lambda fm.\ m\ f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FMN &= NF(MNF) \\
FMN &= (\lambda n.\ n\ F\ (M\ n\ F))\ N \\
FM &= \lambda n.\ n\ F\ (M\ n\ F) \\
FM &= (\lambda mn.\ n\ F\ (m\ n\ F))\ M \\
F &= \lambda mn.\ n\ F\ (m\ n\ F) \\
F &= (\lambda fmn.\ n\ f\ (m\ n\ f))\ F \\
F &= Y(\lambda fmn.\ n\ f\ (m\ n\ f))
\end{aligned}$$

1.6 Нерекурсивные определения функций.

Пусть f и g определены взаимно-рекурсивно. Используя комбинатор неподвижной точки найдем нерекурсивные определения функций f и g.

$$\mathbf{f} = \mathbf{F\ f\ g}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{G\ f\ g}$$

$$M = pair\ f\ g$$

$$M = pair\ (F\ (fst\ M)\ (snd\ M))\ (G\ (fst\ M)\ (snd\ M))$$

$$M = (\lambda P.pair\ (F\ (fst\ P)\ (snd\ P))\ (G\ (fst\ P)\ (snd\ P)))\ M$$

$$M = Y(\lambda P.pair\ (F\ (fst\ P)\ (snd\ P))\ (G\ (fst\ P)\ (snd\ P)))$$

$$K = (\lambda P.pair\ (F\ (fst\ P)\ (snd\ P))\ (G\ (fst\ P)\ (snd\ P)))$$

$$M = YK$$

$$f = fst\ YK$$

$$g = snd\ YK$$

1.7 N-ное число Фибоначчи.

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$$prev = \lambda p.\ pair\ (plus\ (fst\ p)\ (snd\ p))\ (snd\ p)$$

$$fib = \lambda n.\ snd(n\ prev\ (pair\ 1\ 0))$$

$$fib\ 5 \twoheadrightarrow^{\beta} snd\ (5\ prev\ (pair\ 1\ 0)) \rightarrow^{\beta}$$
$$snd\ (prev\ (prev\ (prev\ (prev\ (prev\ (pair\ 1\ 0)))))) \rightarrow^{\beta}$$
$$snd\ (prev\ (prev\ (prev\ (prev\ (pair\ 1\ 1))))) \rightarrow^{\beta}$$
$$snd\ (prev\ (prev\ (prev\ (pair\ 2\ 1)))) \rightarrow^{\beta}$$
$$snd\ (prev\ (prev\ (pair\ 3\ 2))) \rightarrow^{\beta}$$
$$snd\ (prev\ (pair\ 5\ 3)) \rightarrow^{\beta}$$
$$snd\ (pair\ 8\ 5) \rightarrow^{\beta} 5$$

$$fib\ 0 \rightarrow^{\beta} 0$$