Алексей Косенко

ВШЭ ПМИ, 2022 г.

1 Чистое лямбда-исчисление, практика 1.

1.1 Покажем, что

$$B \ \left(=^{?}\right) \ S(KS)K$$

$$S(KS)K = (\lambda fgx.f\ x\ (g\ x))\ (KS)\ K \to^{\beta}$$
$$(\lambda gx.(KS)\ x\ (g\ x))\ K = (\lambda gx.((\lambda mn.m)\ S)\ x\ (g\ x))\ K \to^{\beta}$$
$$(\lambda gx.(\lambda n.S)\ x\ (g\ x))\ K \to^{\beta}$$
$$(\lambda gx.S\ (g\ x))\ K = (\lambda gx.(\lambda fhy.f\ y\ (h\ y))\ (g\ x))\ K \to^{\beta}$$
$$(\lambda gx.(\lambda hy.(g\ x)\ y\ (h\ y))\ K = \ldots\ (\lambda mn.m) \to^{\beta}$$
$$(\lambda x.(\lambda hy.((\lambda mn.m)\ x)\ y\ (h\ y)) \to^{\beta}$$
$$(\lambda x.(\lambda hy.(\lambda n.x)\ y\ (h\ y)) \to^{\beta}$$
$$(\lambda x.(\lambda hy.x\ (h\ y)) = \lambda xhy.x\ (h\ y) \to^{\alpha}$$
$$\lambda fgx.f\ (g\ x)$$

$$S(KS)K \twoheadrightarrow B \Rightarrow S(KS)K =^{\beta} B \Rightarrow B =^{\beta} S(KS)K \qquad \blacksquare$$

$$K^{*} \ \left(=^{?}\right) \ KI$$
$$KI = (\lambda xy.x)\ I \to^{\beta}$$
$$(\lambda y.I) = (\lambda y.(\lambda x.x)) = \lambda yx.x \to^{\alpha}$$
$$\lambda xy.y = K^{*} \qquad \blacksquare$$

1.2 Выделим свободные и связанные переменные в термах и осуществим подстановки.

Свободные переменные в терме выделены: $\boldsymbol{x}$ $(\lambda xy.y\ (x\ \boldsymbol{w})\ \boldsymbol{u})\ \boldsymbol{y}$, остальные - *связанные*. Осуществим подстановку $[x := \lambda z.z]$:

$$(\lambda z.z)\ (\lambda xy.y\ (x\ w)\ u)\ y$$

Свободные переменные в терме выделены: $(\lambda x.x\ (\lambda y.y\ x)\ \boldsymbol{w})(\lambda x.\boldsymbol{v})$, $(FV = \{w,\ v\})$, остальные - *связанные*. Осуществим подстановку $[w := y\ (\lambda v.v\ x)]$:

$$(\lambda x'.x'\ (\lambda y'.y'\ x')\ y\ (\lambda v.v\ x))(\lambda x.v)$$

1.3 Уберем лишние скобки и осуществим бета-преобразования.

$((\lambda x.(\lambda y.((x\ y)\ z)))\ (a\ (b\ c))) \longrightarrow (\lambda xy.x\ y\ z)\ (a\ (b\ c)) \to^{\beta} \lambda y.a\ (b\ c)\ y\ z$

$(((m\ n)\ m)\ (\lambda x.((x\ (u\ v))\ y))) \longrightarrow m\ n\ m\ (\lambda x.x\ (u\ v)\ y)$

1.4 XOR как терм.

$fls = \lambda tf.f$
$tru = \lambda tf.t$
$\boldsymbol{XOR} = \lambda xy.x\ y\ (y\ tru\ fls)\ fls\ tru$

1.5 Арифметические операции с числами Чёрча.

1.5.1 Plus.

С помощью математической индукции проверим работу $plus', mult'$, которые в дальнейшем будем записывать - "$plus, mult$". Заранее упомянем анонимную функцию $succ = \lambda nsz.s(n\ s\ z)$, с помощью которой будем выполнять шаг идукции, правдивость её работы была доказана на семинаре.

Итак, $plus = \lambda mnsz.m\ s\ (n\ s\ z)$. Пусть числа Чёрча для доказательства базы индукции будут равны: $n = 2$ и $m = 1$.

$$plus\ 1\ 2 = (\lambda mnsz.m\ s\ (n\ s\ z))\ 1\ 2 =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda s'z'.s'z')\ s\ (n\ s\ z))\ 2 =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda z'.sz')\ (n\ s\ z))\ 2 =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.s(n\ s\ z))\ 2 =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s((\lambda s'z'.s'(s'z'))\ s\ z) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s((\lambda z'.s(sz'))\ z) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s(s\ (s\ z)) = 3$$

Предположим, что при p и k выполняется $plus\ p\ k$, тогда докажем, что $plus\ p\ (succ\ k)$ также выполняется, то есть результат будет равен $int(p) + int(k) + 1$.

$$plus\ p\ (succ\ k) = (\lambda mnsz.m\ s\ (n\ s\ z))\ p\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda s'z'.s'(s'(\dots(s'z')\dots)))\ s\ (n\ s\ z))\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda z'.s(s(\dots(s\ z')\dots)))\ (n\ s\ z))\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.s(s(\dots(s\ (n\ s\ z))\dots)))\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s(s(\dots(s\ ((\lambda ns'z'.s'(n\ s'\ z'))\ k\ s\ z))\dots)) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s(s(\dots(s\ ((\lambda s'z'.s'((\lambda s''z''.s''(s''(\dots(s''z'')\dots)))\ s'\ z'))\ s\ z))\dots)) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s(s(\dots(s\ ((\lambda s'z'.s'(s'(s'(\dots(s'z')\dots))))\ s\ z))\dots)) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s(s(\dots(s\ (s(s(s(\dots(sz)\dots)))))\dots)) = p + (k+1)$$

Каждое число Чёрча можно охарактеризовать количеством s в записи, то есть число p имеет $int(p)$ повторений s в теле лямбда-абстракции, анологично для k. Грубо говоря, когда мы применили β-редукцию к p, то в абстракторе у числа p осталось z', куда мы редуцируем наше второе число, увеличенное на 1. Значит, что было p раз повторений s, а теперь мы получаем вместо z' ещё $k+1$ повторений s, следовательно количество s равно $p+k+1$, что являтся число Чёрча $p+k+1$, поэтому результат индукционный шага доказан.

1.5.2 Mult.

База индукции для $mult$: $m = 2$ и $n = 3$.

$$mult\ 2\ 3 = (\lambda mnsz.m\ (n\ s)\ z)\ 2\ 3 =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda s'z'.s'(s'z'))\ (n\ s)\ z)\ 3 =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda z'.(n\ s)((n\ s)\ z'))\ z)\ 3 =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(n\ s)((n\ s)\ z))\ 3 =^{\beta}$$
$$\lambda sz.((\lambda s'z'.s'(s'(s'z')))\ s)(((\lambda s'z'.s'(s'(s'z')))\ s)\ z) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.(\lambda z'.s(s(sz')))((\lambda z'.s(s(sz')))\ z) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.(\lambda z'.s(s(sz')))(s(s(sz))) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.s(s(s(s(s(sz))))) = 6$$

Допустим, что для p и k выполняется $mult\ p\ k$, тогда докажем, что для $mult\ p\ (succ\ k)$ результат также верен.

$$mult\ p\ (succ\ k) = (\lambda mnsz.m\ (n\ s)\ z)\ p\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda s'z'.s'(s'(\dots(s'z')\dots)))\ (n\ s)\ z)\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(\lambda z'.(n\ s)((n\ s)(\dots((n\ s)\ z')\dots)))\ z)\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.(n\ s)((n\ s)(\dots((n\ s)\ z)\dots)))\ (succ\ k) =^{\beta}$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(((succ\ k)\ s)(\dots((succ\ k)\ s\ z)\dots)) =$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(((succ\ k)\ s)(\dots((succ\ k)\ s\ ((succ\ k)\ s\ z))\dots)) =$$

Заметим, что $\lambda sz.(succ\ k)\ s\ ((succ\ k)\ s\ z)$ - это $plus\ (succ\ k)\ (succ\ k)$. В предыдущий раз мы доказали верность работы $plus$, поэтому сейчас мы имеем полное право воспользоваться этим. Итак, на данный момент $succ\ k$, который стоит равно p раз вместо предыдущий s. Можем записать результат как сложение:

$$\lambda sz.plus\ (succ\ k)(plus\ (succ\ k)(\ldots(plus\ (succ\ k)\ (succ\ k))\ldots))$$

Запись выше означает сложение $(k+1)$ p-раз, что и есть $p\cdot(k+1)$. Однако можно рассуждать иначе (чем-то схоже с $plus$). Каждый раз при раскрытие внутренних скобок мы получаем число, в котором на $k+1$ больше s, что характеризует число увеличенное на $k+1$. Делаем так, раскрывая все скобки, и получаем $p\cdot(k+1)$.

$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(\ldots((succ\ k)\ s\ ((\lambda s'z'.s'((\lambda s''z''.s''(\ldots(s''z'')\ldots)))\ s'\ z')\ s\ z))\ldots) =^\beta$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(\ldots((succ\ k)\ s\ ((\lambda s'z'.s'(s'(\ldots(s'z')\ldots)))\ s\ z))\ldots) =^\beta$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(\ldots((succ\ k)\ s\ (s(s(\ldots(sz)\ldots))))\ldots) =^\beta$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(\ldots((\lambda s'z'.s'((\lambda s''z''.s''(\ldots(s''z'')\ldots)))\ s'\ z')\ s\ (s(s(\ldots(sz)\ldots))))\ldots) =^\beta$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(\ldots((\lambda s'z'.s'(s'(\ldots(s'z')\ldots)))\ s\ (s(s(\ldots(sz)\ldots))))\ldots) =^\beta$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(\ldots((\lambda z'.s(s(\ldots(sz')\ldots)))\ (s(s(\ldots(sz)\ldots))))\ldots) =^\beta$$
$$\lambda sz.((succ\ k)\ s)(\ldots(s(s(\ldots(s(s(s(\ldots(sz)\ldots))))\ldots))\ldots))$$

Так мы и получаем $p\cdot(k+1)$, проводя β-редукцию. ■

1.5.3 Power.

База индукции для $power = \lambda mnsz.\ n\ m\ s\ z$ при $n=2$ и $m=3$.

$$power\ 3\ 2 = (\lambda mnsz.n\ m\ s\ z)\ 3\ 2 \to^\beta$$
$$(\lambda nsz.n\ (\lambda s'z'.s'(s'(s'z')))\ s\ z)\ 2 \to^\beta$$
$$\lambda sz.(\lambda s''z''.s''(s''z''))\ 3\ s\ z \to^\beta$$
$$\lambda sz.(\lambda z''.3\ (3\ z''))\ s\ z \to^\beta$$
$$\lambda sz.3\ (3\ s)\ z =$$
$$\lambda sz.3\ ((\lambda s'z'.s'(s'(s'z')))\ s)\ z \to^\beta$$
$$\lambda sz.(\lambda s''z''.s''(s''(s''z'')))\ (\lambda z'.s(s(sz')))\ z \to^\beta$$
$$\lambda sz.(\lambda z''.(\lambda z'.s(s(sz')))((\lambda z'.s(s(sz')))((\lambda z'.s(s(sz')))z'')))\ z \to^\beta$$
$$\lambda sz.(\lambda z'.s(s(sz')))((\lambda z'.s(s(sz')))((\lambda z'.s(s(sz')))z)) \to^\beta$$
$$\lambda sz.(\lambda z'.s(s(sz')))((\lambda z'.s(s(sz')))\ (s(s(sz))) \to^\beta$$
$$\lambda sz.(\lambda z'.s(s(sz')))\ (s(s(s(s(s(sz)))))) \to^\beta$$
$$\lambda sz.s(s(s(s(s(s(s(s(sz)))))))) = 9$$

Скажем, что при p и k выполняется "$power\ p\ k$". Тогда докажем, что $power\ p\ (succ\ k)$ также верно.

$$power\ p\ (succ\ k) = (\lambda mnsz.\ n\ m\ s\ z)\ p\ (succ\ k) \to^{\beta}$$
$$(\lambda nsz.\ n\ p\ s\ z)\ (succ\ k) \to^{\beta}$$
$$\lambda sz.\ (succ\ k)\ p\ s\ z = \lambda sz.\ (\lambda ns'z'.\ s'(\ n\ s'\ z'))k\ p\ s\ z \to^{\beta}$$
$$\lambda sz.\ (\lambda s'z'.\ s'(\ (\lambda s''z''.s''(s''(\dots(s''z'')\dots)))\ s'\ z'))\ p\ s\ z \to^{\beta}$$
$$\lambda sz.\ (\lambda s'z'.\ s'(\ s'(s'(\dots(s'z')\dots))))\ p\ s\ z \to^{\beta}$$
$$\lambda sz.\ (\lambda z'.\ p(\ p(\ p(\dots(p\ z')\dots))))\ s\ z \to^{\beta}$$
$$\lambda sz.\ p(\ p(\ p(\dots(p\ s)\dots)))\ z =$$
$$\lambda sz.\ p(\ p(\ p(\dots(\ p(p\ s))\dots)))\ z \to^{\beta}$$

На данный момент наше p повторяется ровно $k+1$ раз, снова мы можем провести аналогию с вложенными суммами в $mult$, но теперь в $power$ используем вложенный $mult$.

$$\lambda sz.p\ (p\ s)\ z = mult\ p\ p$$
$$\lambda sz.\ p(\ p(\ p(\dots(\ p(p\ s))\dots)))\ z = mult\ p\ (mult\ p(\dots(mult\ p\ p)\dots)) = p^{k+1}$$

Или же по-обычному будем подставлять значения в лямбду-абстракцию.

$$\lambda sz.\ (\lambda s'z'.s'(\dots(s'z')\dots))\ (\ p(\ p(\dots(\ p(p\ s))\dots)))\ z \to^{\beta}$$
$$\lambda sz.\ (\lambda z'.p(\ p(\dots(\ p(p\ s))\dots))(\dots(\ p(\ p(\dots(\ p(p\ s))\dots))z')\dots))\ z \to^{\beta}$$
$$\lambda sz.\ p(\ p(\dots(\ p(p\ s))\dots))\ (\dots(\ p(\ p(\dots(\ p(p\ s))\dots))z)\dots)$$

В $k+1$ позицию s подставляем p, которое в свою очередь будет p-раз будет подставляться в во внешнюю значение p, что и является возведением в степень: p^{k+1}.