

# 1 Чистое лямбда-исчисление, практика 1.

## 1.1 Покажем, что

$$B \stackrel{?}{=} S(KS)K$$

$$\begin{aligned} S(KS)K &= (\lambda f g x. f \ x \ (g \ x)) \ (KS) \ K \rightarrow^\beta \\ (\lambda g x. (KS) \ x \ (g \ x)) \ K &= (\lambda g x. ((\lambda m n. m) \ S) \ x \ (g \ x)) \ K \rightarrow^\beta \\ (\lambda g x. (\lambda n. S) \ x \ (g \ x)) \ K &\rightarrow^\beta \\ (\lambda g x. S \ (g \ x)) \ K &= (\lambda g x. (\lambda f h y. f \ y \ (h \ y)) \ (g \ x)) \ K \rightarrow^\beta \\ (\lambda g x. (\lambda h y. (g \ x) \ y \ (h \ y)) \ K &= \dots (\lambda m n. m) \rightarrow^\beta \\ (\lambda x. (\lambda h y. ((\lambda m n. m) \ x) \ y \ (h \ y)) &\rightarrow^\beta \\ (\lambda x. (\lambda h y. (\lambda n. x) \ y \ (h \ y)) &\rightarrow^\beta \\ (\lambda x. (\lambda h y. x \ (h \ y)) = \lambda x h y. x \ (h \ y) &\rightarrow^\alpha \\ \lambda f g x. f \ (g \ x) \end{aligned}$$

$$S(KS)K \twoheadrightarrow B \Rightarrow S(KS)K \stackrel{\beta}{=} B \Rightarrow B \stackrel{\beta}{=} S(KS)K \quad \blacksquare$$

$$K^* \stackrel{?}{=} KI$$

$$\begin{aligned} KI &= (\lambda x y. x) \ I \rightarrow^\beta \\ (\lambda y. I) &= (\lambda y. (\lambda x. x)) = \lambda y x. x \rightarrow^\alpha \\ \lambda x y. y &= K^* \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 1.2 Выделим свободные и связанные переменные в термах и осуществим подстановки.

Свободные переменные в терме выделены:  $\mathbf{x}$   $(\lambda x y. y \ (x \ \mathbf{w}) \ \mathbf{u}) \ \mathbf{y}$ , остальные - *связанные*. Осуществим подстановку  $[x := \lambda z. z]$ :

$$(\lambda z. z) \ (\lambda x y. y \ (x \ w) \ u) \ y$$

Свободные переменные в терме выделены:  $(\lambda x. x \ (\lambda y. y \ x) \ \mathbf{w})(\lambda x. \mathbf{v})$ ,  $(FV = \{w, v\})$ , остальные - *связанные*. Осуществим подстановку  $[w := y \ (\lambda v. v \ x)]$ :

$$(\lambda x'. x' \ (\lambda y'. y' \ x') \ y \ (\lambda v. v \ x))(\lambda x. v)$$

### 1.3 Уберем лишние скобки и осуществим бета-преобразования.

$$((\lambda x.(\lambda y.((x\ y)\ z)))\ (a\ (b\ c))) \longrightarrow (\lambda xy.x\ y\ z)\ (a\ (b\ c)) \rightarrow^\beta \lambda y.(a\ (b\ c))\ y\ z$$

$$(((m\ n)\ m)\ (\lambda x.((x\ (u\ v))\ y))) \longrightarrow m\ n\ m\ (\lambda x.x\ (u\ v)\ y)$$

### 1.4 XOR как терм.

$$fls = \lambda t f.f$$

$$tru = \lambda t f.t$$

$$\mathbf{XOR} = \lambda xy.x\ y\ (y\ tru\ fls)\ fls\ tru$$

### 1.5 Арифметические операции с числами Чёрча.