

Алексей Косенко

ВШЭ ПМИ, 2022 г.

1 Типизированное лямбда-исчисление.

1.1 Заселяем типы.

- $\lambda xyz.x : a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$
- $\lambda xyz.y : a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow b$
- $\lambda xyz.z : a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow a$
- $\lambda xyz.x : a \rightarrow a \rightarrow a \rightarrow a$

1.2 Найдём обитателей типов.

$$\lambda xyzw. y (x w w) (z w) : (d \rightarrow d \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (d \rightarrow b) \rightarrow d \rightarrow c$$

Для типа $(d \rightarrow d \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow d$ существует два терма. Тело лямбда-функции должно быть типа b , есть только одна вершина, в которой получается этот тип, и два ребра, чтобы добраться до него.

- $\lambda xyzwk. z (x w w)$
- $\lambda xyzwk. z (y k)$

1.3 Типизируем по Чёрчу.

Типизируем аппликацию комбинаторов по Чёрчу.

$$SKK = (\lambda f^{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha} g^{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha} x^\alpha. f x (g x)) (\lambda x^\alpha y^{\beta \rightarrow \alpha}. x) (\lambda x^\alpha y^\beta. x) : \alpha \rightarrow \alpha$$

$$SKI = (\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha} g^{\alpha \rightarrow \alpha} x^\alpha. f x (g x)) (\lambda x^\alpha y^\alpha. x) (\lambda x^\alpha. x) : \alpha \rightarrow \alpha$$

1.4 Конструируем термы с условием.

Сконструируем терм типа: $(c \rightarrow e) \rightarrow ((c \rightarrow e) \rightarrow e) \rightarrow e$, которому нельзя будет приписать $a \rightarrow (a \rightarrow e) \rightarrow e$. Добьёмся этого мы тем, что внутри лямбда-абстракции пропишем вложенную абстракцию.

Итак, наша внутренняя лямбда-абстракция будет принимать тип c , а возвращать тип e , результатом последнего является аппликация внешних термов.

$$\lambda xy. y (\lambda z. y x) : (c \rightarrow e) \rightarrow ((c \rightarrow e) \rightarrow e) \rightarrow e$$

1.5 Сложная конструкция.

Для первого сформируем абстракцию, которая принимает a и возвращает b (*аппликация в теле*), то есть $a \rightarrow b$, тогда получим:

$$\lambda x y. x (\lambda z. y z z) : ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow a \rightarrow b) \rightarrow a$$

Во втором будет дважды повторяться терм, который возвращает $a \rightarrow b$ для того, чтобы путём аппликации с x получить a .

$$\lambda x y. y (x (\lambda z. y z z)) (x (\lambda z. y z z)) : ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow a \rightarrow b) \rightarrow b$$

Третье, оно же самое вложенное, должны получить: $((((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a) \rightarrow b) \rightarrow b$. В самом вложенном получим $a \rightarrow b$, затем $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a$, чтобы после получить b , апплицируя с x .

$$\lambda x. x (\lambda z_1^{(a \rightarrow b) \rightarrow a}. z_1 (\lambda z_2^a. (\lambda z_3^{a \rightarrow b}. z_3 z_2)))$$