Уравнения математической физики

1 Теоретическая часть

1.1 Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Уравнения характеристик. Первый интеграл. Квазилинейные уравнения. Задача Коши.

Определение 1.

Уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение вида

$$F\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{1}$$

где $x_1 \ldots, x_n$ — независимые переменные, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция (здесь p_i обозначают частные производные $u'_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$) в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, причем в каждой точке области G

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Уравнение (1) сокращенно можно записать в виде

$$F(x, u, \nabla u) = 0, \tag{1'}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

В зависимости от того, как неизвестная функция u и ее частные производные входят в уравнение (1), различают *линейные* и *нелинейные* уравнения.

Определение 2. *(Линейные уравнения с частными производными первого порядка)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \ldots, x_n) = 0$*, то уравнение называется линейным однородным.*

Определение 3. *(Квазилинейные уравнения)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{3}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *квазилинейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$*, то уравнение называется квазилинейным однородным.*

Определение 4. *(Первый интеграл)*

Первым интегралом нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{4}$$

называется такая функция $v(t, x_1, \ldots, x_n)$, что она постоянна вдоль любого решения этой системы. Выражение $v(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется общим интегралом системы.

Замечание: Если $v(t, x_1, \ldots, x_n)$ — первый интеграл системы (4), то его производная вдоль решения равняется нулю, то есть

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\dot{x}_n = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1}f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Справедливо и обратное, то есть функция, удовлетворяющая такому условию, является первым интегралом системы.

Определение 5. *(Задача Коши)*

Задачей Коши называется задача нахождения решения уравнения

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z),$$

проходящего через кривую

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t). \end{cases}$$

1.2 Классификация линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Характеристическое уравнение. Приведение уравнения с частными производными к каноническому виду.

1.3 Уравнение колебаний бесконечной струны (стержня). Задача Коши с начальными условиями. Формула Даламбера. Характеристики.

1.4 Уравнение колебаний полубесконечной струны (стержня). Метод отражений.

1.5 Энергия колебаний ограниченной струны. Теорема единственности для смешанной краевой задачи для уравнения колебаний струны.

1.6 Метод разделения переменных для уравнения колебаний на отрезке.

1.7 Смешанная краевая задача о колебаниях прямоугольной мембраны. Метод разделения переменных.

1.8 Распространение тепла в стержне. Постановка смешанной краевой задачи.

1.9 Принцип максимального значения для параболического уравнения и теорема единственности смешанной краевой задачи в ограниченной области.

1.10 Разделение переменных в смешанной краевой задаче для уравнения теплопроводности/диффузии. Построение функции влияния мгновенного точечного источника.

1.11 Уравнение теплопроводности/диффузии на бесконечной и полубесконечной прямой. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.12 Задача без начального условия для уравнения теплопроводности.

1.13 Функции, гармонические в области. Теорема о среднем значении для гармонических функций. Принцип максимума.

1.14 Уравнение Лапласа в криволинейных ортогональных (полярных, цилиндрических, сферических) координатах.

1.15 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в прямоугольнике. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике.

1.16 Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга и вне круга. Интеграл Пуассона.

1.17 Функция Грина уравнения Лапласа первой краевой задачи в круге, на полуплоскости в полупространстве. Метод отражений.

1.18 Единственность решения краевой задачи (внутренней и внешней) для уравнения Лапласа.

1.19 Первая и вторая формулы Грина в ограниченной области. Потенциалы простого и двойного слоя. Их свойства, физический смысл.

1.20 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круге, в круговом кольце и во внешности круга. Краевые задачи для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.21 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круговом секторе и в кольцевом секторе. Краевая задача для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.22 Рекуррентные и интегральные соотношения для решений уравнения Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Ряды Фурье – Бесселя.

1.23 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для цилиндра. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре.

1.24 Полиномы Лежандра¸их свойства. Формула Родриго. Рекуррентные соотношения. Задача Штурма – Лиувилля на сфере. Присоединенные функции Лежандра.

1.25 Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаровом слое.

1.26 Основные функции и обобщенные функции, сходимость в пространстве основных функций. Регулярная обобщённая функция. Носитель обобщённой функции.

1.27 Регуляризация степенных особенностей. Сингулярная обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Формула Сохоцкого.

1.28 Фундаментальное решение дифференциального оператора. Обобщённое решение задачи Коши.

1.29 Классическая свёртка. Свертка обобщённых функций. Обобщённое решение дифференциального уравнения.

1.30 Пространство быстроубывающих функций и пространство функций медленного роста. Обобщённое преобразование Фурье. Обобщённое преобразование Фурье свертки и обобщённое равенство Парсеваля.

1.31 Фундаментальное решение оператора Лапласа.

1.32 Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.33 Фундаментальное решение оператора Гельмгольца. Сферические волны.