Уравнения математической физики

1 Теоретическая часть

1.1 Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Уравнения характеристик. Первый интеграл. Квазилинейные уравнения. Задача Коши.

Определение 1.

Уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение вида

$$F\Big(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{1}$$

где $x_1 \dots, x_n$ — независимые переменные, $u = u(x_1, \dots, x_n)$ — неизвестная функция, $F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция (здесь p_i обозначают частные производные $u'_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$) в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, причем в каждой точке области G

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Уравнение (1) сокращенно можно записать в виде

$$F(x, u, \nabla u) = 0, \tag{1'}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)$.

В зависимости от того, как неизвестная функция u и ее частные производные входят в уравнение (1), различают *линейные* и *нелинейные* уравнения.

Определение 2. *(Линейные уравнения с частными производными первого порядка)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n), \tag{2}$$

где $a_1, \dots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \dots, x_n) = 0$*, то уравнение называется линейным однородным.*

Определение 3. *(Квазилинейные уравнения)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, u), \tag{3}$$

где $a_1, \dots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *квазилинейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \dots, x_n, u) = 0$*, то уравнение называется квазилинейным однородным.*

Определение 4. *(Первый интеграл)*

Первым интегралом нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{4}$$

называется такая функция $v(t, x_1, \ldots, x_n)$, что она постоянна вдоль любого решения этой системы. Выражение $v(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется общим интегралом системы.

Замечание: Если $v(t, x_1, \ldots, x_n)$ — первый интеграл системы (4), то его производная вдоль решения равняется нулю, то есть

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\dot{x}_n = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Справедливо и обратное, то есть функция, удовлетворяющая такому условию, является первым интегралом системы.

Определение 5. *(Задача Коши)*

Задачей Коши называется задача нахождения решения уравнения

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z),$$

проходящего через кривую

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t). \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

сопоставленная ему система обыкновенныъ дифференциальных уравнений называется *системой уравнений характеристик*

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{5}$$

Также систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_2), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{5'}$$

Замечание: функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ является решением линейного однородного уравнения в частных проихводных первого порядка тогда и только тогда, когда является независящим от времени первым интегралом системы (5').

1.2 Классификация линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Характеристическое уравнение. Приведение уравнения с частными производными к каноническому виду.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называетс соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{6}$$

Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}y_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{7}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Уравнение называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции u и ее первых производных u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \tag{8}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ — функции от x и y. Уравнение называется однородным, если $f(x, y) = 0$.

Аналогично линейным уравнениям с частными производными 1-го порядка, линейные уравнения с частными производными 2-го порядка называются *квазилинейными*, если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} подобно F_1 зависят от x, y, y, u_x, u_y.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквиввалентное исходному. Как выбрать ξ и η так, тчобы получить наиболее простой вид?

Получим ответ на поставленный вопрос для (7). Преобразуя производные к новым переменным, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,\\
&u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy},
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставляя значения производных из (9) в уравнение (7), будем иметь

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned}$$

а функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то $\bar{F}$ имеет вид

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta,$$

т.е. уравнение остается линейным.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_1 1 z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \tag{11}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\bar{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (11).

Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (11), то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \tag{12}$$

Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (12), то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (11).

Уравнение (12) называется *характеристическим* для уравнения (7), а его интегралы - *характеристиками.*

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения (12), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = const$ является другим общим интегралом уравнения (12), независимым от $\varphi(x, y)$, то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (12) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{14}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (7)

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F = 0.$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением:

`гиперболического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
`параболического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,
`эллиптического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) D преобразования переменных отличен от нуля. Вразличных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа - комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Для каждого из типов можно вывести каноническую форму уравнения.

1. Каноническая форма уравнений гиперболического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$)

$$u_{xx} - u_{yy} = \Phi \text{ или } u_{xy} = \Phi. \tag{15}$$

2. Для уравнений параболического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$)

$$u_{xx} = \Phi. \tag{16}$$

3. Для уравнений эллиптического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$)

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi. \tag{17}$$

Во всех случаях $\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$.

1.3 Уравнение колебаний бесконечной струны (стержня). Задача Коши с начальными условиями. Формула Даламбера. Характеристики.

Многие задачи механики и физики описываются уравнением колебаний вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{18}$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от $n(n = 1,2,3)$ пространственных координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и времени t; коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (18) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big).$$

Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x),\\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - adt = 0, \quad dx + adt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Введя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \tag{21}$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{22}$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения, проинтегрировав последнее уравнение по ξ. Очевидно, для всякого решения (22)

$$u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ — некоторая непрерывная функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получаем

$$u(\xi,\eta) = \int^{\eta} f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{23}$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η. Обратно, какими бы ни были f_1 и f_2, функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой (23), представляет собой решение (22). Т.к. всякое решение (23) может быть представленно в виде (22) при соответствующем выборе f_1 и f_2, то формула (22) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно функция

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \tag{24}$$

является общим интегралом уравнения (19).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует, тогда оно дается формулой (24). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{25}$$
$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{26}$$

Интегрируя второе равенство, получаем

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C,$$

где x_0 и C — постоянные. Из равенств

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) &= \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C \end{aligned}$$

находим

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + \tfrac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha - \tfrac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (27) должны иметь место для любого значения аргумента. Подставив в (24) найденные значения f_1 и f_2, получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\,d\alpha\right\} \tag{28}$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha. \tag{29}$$

Формулу (29), называемую *формулой Даламбера*, мы получили, предполагая существование рещения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (19)–(20), то оно бы представлялось формулой (29) и совпадало с первым решением.

Нетрудно убедиться, что (29) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

1.4 Уравнение колебаний полубесконечной струны (стержня). Метод отражений.

Изложенный в пункте 1.3 метод решения задачи Коши позволяет решать некоторые смешанные задачи для этого уравнения. Для определенности рассмотрим смешанную задачу, описыващую колебание полубесконечной струны $x > 0$ с закрепленным левым концом

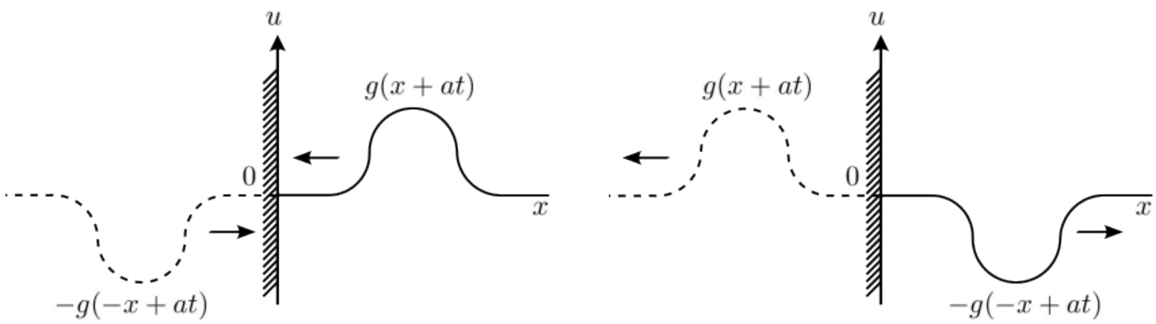
$$u|_{x=0} = 0. \tag{30}$$

Предварительно докажем, что всякое классическое решение $u(x,t)$ уравнения (19) в квадрате $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее условию (30) представляется в виде

$$u(x,t) = g(x+at) - g(-x+at) \tag{31}$$

(т.к. подставляя начальные условия в (24) $0 = f_1(-at) + f_2(at)$ отсюда и вытекает представление (31)).

Построим решение смешанной задачи (19), (20), (30). Всякое классическое решение $u(x,t)$ этой задачи в силу (31) допускает нечетное продолжение $\tilde{u}(x,t)$ по x класса $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, и это продолжение удовлетворяет уравнению (19) в $\mathbb{R}^2$.



(a) (b)

Рис. 1

Отсюда из условий (20) вытекает, что решение $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{u}_1(x), \tag{32}$$

где $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_1$ — нечетные продолжения функций u_0 и u_1 соответственно. Но решение такой задачи Коши единственно и представляется формулой Даламбера (29) с заменой u_0 на $\tilde{u}_0$ и u_1 на $\tilde{u}_1$, если $\tilde{u}_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^1)$ и $\tilde{u}_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1)$. Последние условия будут выполнены, если

$$u_0 \in \mathcal{C}^2(x \geqslant 0), \quad u_1 \in \mathcal{C}^1(x \geqslant 0), \quad u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0. \tag{33}$$

Итак, если выполнены условия (33), то решение задачи (19), (20), (30) существует, единственно и задается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi)\,d\xi, \quad x \geqslant 0. \tag{34}$$

Пусть $x - at \geqslant 0$. Тогда

$$\tilde{u}_0(x-at) = \tilde{u}_0(x-at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = u_1(\xi), \quad \xi \geqslant x - at \geqslant 0, \tag{35}$$

и формула (34) принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi, \quad x \geqslant at. \tag{36}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для $x - at \leqslant 0$.

$$\tilde{u}_0(x - at) = -u_0(-x + at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = -u_1(-\xi), \quad x - at \leqslant \xi \leqslant 0,$$

формула (34) принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x + at) - u_0(-x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{-x+at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant at. \tag{37}$$

Как видно из формулы (37), в точку (x,t), $0 \leqslant x \leqslant at$, приходят два волны: прямая волна из точки $(x + at, 0)$ и один раз отраженная волна из точки $(at - x, 0)$ (совпадающая с прямой волной из фиктивной точки $(x - at, 0)$; см. рис. 2).

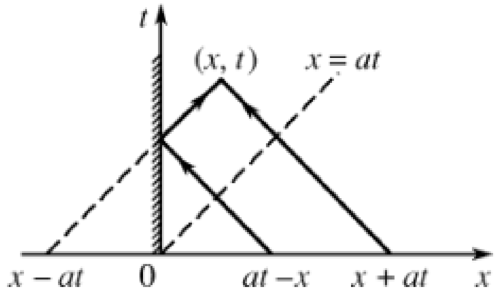


Рис. 2

Аналогично рассматривается смешанная задача для полубесконечной струны $x > 0$ со свободным концом:

$$u_x|_{x=0} = 0.$$

Здесь также имеет место отражение волн от конца струны $x = 0$, но уже без изменения знака.

1.5 Энергия колебаний ограниченной струны. Теорема единственности для смешанной краевой задачи для уравнения колебаний струны.

1.6 Метод разделения переменных для уравнения колебаний на отрезке.

1.7 Смешанная краевая задача о колебаниях прямоугольной мембраны. Метод разделения переменных.

1.8 Распространение тепла в стержне. Постановка смешанной краевой задачи

Уравнение теплопроводности в стержне

Простейшее уравнение параболического (см. 1.2) типа

$$u_{xx} - u_y = 0, \quad y = a^2 t, \tag{38}$$

то есть

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

обычно называют *уравнением теплопроводности.*

Рассмотрим стержень длины l, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Концы стержня будем поддерживать при постоянных температурах u_1 и u_2. Как известно (?), вдоль стержня тогда установится линейной распределение температуры, то есть функция температуры имеет вид

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x,$$

где, например, $u_1 > u_2$.

Тепло[1] течёт от u_1 к u_2. Экспериментальный факт: количество тепла, протекающего через сечение[2] стержня площади S за единицу времени равно

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \tag{39}$$

где k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня. Изучив конечный результат процесса, попробуем изучить сам процесс распространения тепла в стержне.

1. Закон Фурье. Обобщим формулу (39). Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени (t_1, t_2), равно

   $$Q = -S \int\limits_{t_1}^{t_2} k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\, dt. \tag{40}$$

   В общем случае неоднородного стержня коэффициент k является функцией от x.

2. Количество тепла, которое нужно сообщить стержню, чтобы повысить его температуру $\Delta u(x)$, равно

   $$Q = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho(x) S \Delta u(x)\, dx, \tag{41}$$

   где c — удельная теплоёмкость, $\rho(x)$ — плотность неоднородного в общем случае тела. При постоянных ρ, Δu формула упрощается до $Q = cm\Delta u$.

3. Внутри стержня тоже может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, химических реакций и т. д.). Если известна объёмная плотность $F(x, t)$ внутренних тепловых источников, то выделяемое ими тепло на промежутке (x_1, x_2) за время (t_1, t_2) равно

   $$Q = S \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{x_1}^{x_2} F(t, x)\, dx\, dt. \tag{42}$$

[1] То есть энергия теплового электро-магнитного излучения.

[2] Здесь и далее имеется в виду поперечное сечение (?).

Применим к отрезку (x_1, x_2) и промежутку времени (t_1, t_2) закон сохранения энергии и формулы (40), (41), (42), и получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} F(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\, d\xi$$

— уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Предположим, что функция $u(x,t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и u_t. Пользуясь сначала интегральной теоремой о среднем,

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_3} \Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x \Delta t = \{c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\}_{\xi=x_3} \Delta x,$$

а затем дифференциальной теоремой (Лагранжа) о среднем,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}} \Delta x\Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t = \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_5}} \Delta x \Delta t,$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки соответствующих интервалов. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}} + F(x,t)|_{\substack{x=x_4\\ t=t_4}} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_5\\ x=x_3}}.$$

Поскольку все рассуждения относились к произвольным промежуткам (x_1, x_2), (t_1, t_2), то устремив x_1, $x_2 \to x$ и t_1, $t_2 \to t$, получим уравнение

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t},}$$

называемое *уравнением теплопроводности.*

Частные случаи. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. В случае однородного стержня (постоянства всех коэффициентов) приходим к уравнению (38).

2. Если боковые стенки проводят тепло, то согласно *закону Ньютона* количество тепла, которое потеряет стержень на единицу длины и времени, равно

   $$F_0 = h(u - \theta),$$

   где $\theta(x,t)$ — температура окружающей среды, h — коэффициент теплообмена. Тогда $F(x,t) = F_1(x,t) - F_0$ (где F_1 — объёмная плотность источников тепла), и в случае однородности стержня

   $$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x,t),$$

   где $\alpha = h/(c\rho)$, $f(x,t) = \alpha\theta(x,t) + F_1/(c\rho)$.

3. Коэффициенты k и c медленно зависят от температуры. Предположение об их постоянстве обусловленно предполагаемым небольшим изменением температуры. В ином случае уравнение станет квазилинейным.

Постановка смешанной краевой задачи

Начальное условие задаёт лишь значение функции $u(x,t)$ в начальный момент времени t_0.

Рассматривают три основных типа граничных условий. Любая их комбинация будет отдельной задачей.

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура
$$u(0,t) = \mu(t)$$
как функция времени.

2. На конце[3] $x = l$ задано значение пространственной производной
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu(t).$$
К такому условию приходим, если известен торцевой тепловой поток (см. формулу закона Фурье (40)).

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)].$$
Этот тип соответствует теплообмену по закону Ньютона. Действительно, приравнивая плотность излучения внешнего источника (по закону Фурье) и плотность ухода тепла (по закона Ньютона), получаем исходное граничное условие.

Перечислим некоторые особые случаи. Пусть на конце $x = 0$ помещена сосредоточенная теплоёмкость C_1 и происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Такой закон теплового баланса можно записать в виде условия
$$C_1\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$
где u_0 — температура внешней среды.

Помимо перечисленных выше линейных задач, ставятся и нелинейные — например, при излучении торца по закону *Стефана – Больцмана*
$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sigma[u^4(0,t) - \theta^4(0,t)],$$
где θ — температура окружающей среды, а σ — постоянная Стефана – Больцмана.

Дополнительным условием для решения будет его непрерывность в соответствующей замкнутой области. Функция u обязана удовлетворять уравнению лишь внутри фазового прямоугольника, то есть при $0 < x < l$, $0 < t < T$. Требование непрерывности u нужно для этих граничных точек, внутри она непрерывна согласно самому уравнению.

Предельные случаи. В очень длинном стержне граничные условия в течение малого промежутка времени влияют на середину стержня очень слабо. Поэтому их можно опустить, считая стержень бесконечным.

Стержень можно считать и полубесконечным, опуская с такими же рассуждениями одно из граничных условий, если интересующий нас участок находится близко к одному концу и очень далеко от другого.

Опустить можно и начальные условия, если считать, что с начала распространения тепла прошло очень много времени. Тогда считаем, что опыт длится бесконечно. Часто, например, в подобных задачах граничные условия периодические: $\mu(t) = A\cos\omega t$.

[3]Дело в том, что, как и прежде, подразумевается, что тепло идёт слева направо

1.9 Принцип максимального значения для параболического уравнения и теорема единственности смешанной краевой задачи в ограниченной области.

1.10 Разделение переменных в смешанной краевой задаче для уравнения теплопроводности/диффузии. Построение функции влияния мгновенного точечного источника.

Однородная правая часть Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_x)|_{x=0} = 0, \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)|_{x=l} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{43}$$

в которой разделим переменные: $u = X(x)T(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda, \\ (\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0))\, T(t) = 0, \\ (\alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l))\, T(t) = 0. \end{cases}$$

Для $X(x)$ получается такая задача:

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0, \\ (\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0)) = 0, \\ (\alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l)) = 0, \end{cases}$$

разрешая которую, получим систему функций X_n и соотвествующие собственные значения λ_n. Таким образом, решение представляется в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) X_n(x)$$

Для $T(t)$ тогда:

$$\begin{cases} -T_n' - a^2 \lambda_n T_n = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \end{cases}$$

где φ_n – коэффициенты разложения Фурье соответствующей функции. Общее решение этого диффура представляет собой $T_n = \varphi_n e^{-a^2\lambda_n t}$, тогда окончательный ответ:

$$u(x,t) = \sum_n \varphi_n e^{a^2\lambda_n t} X_n(x) = \sum_n \left(\frac{1}{\|X_n\|^2} \int\limits_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi \right) e^{-a^2\lambda_n t} X_n(x) =$$

по свойствам линейности и при выполнении условия равномерной сходимости:

$$= \int\limits_0^l \left(\sum_n \frac{1}{\|X_n\|^2} e^{-a^2\lambda_n t} X_n(\xi) X_n(x) \right) \varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi,$$

а функцию $G = \sum_n \dfrac{1}{\|X_n\|^2} e^{-a^2\lambda_n t} X_n(\xi) X_n(x)$ называют *функцией влияния мгновенного точечного источника.*

Неоднородная правая часть Если в задачу (43) добавить неоднородность правой части:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_x)|_{x=0} = 0, \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)|_{x=l} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{44}$$

то решение изменится только на этапе нахождения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\begin{cases} T_n' = -a^2\lambda_n T_n + f_n(t) \Leftrightarrow -T_n'(t) - a^2\lambda_n T_n(t) = -f_n(t), \\ T_n(0) = 0, \end{cases}$$

где $f_n = \dfrac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l f_n(\xi)X_n(\xi)\,d\xi$ – коэффициенты разложения функции f. Причём решение представим в виде $T_n(t) = C_n(t)\cdot e^{-a^2\lambda_n t}$ (метод вариации произвольных постоянных. Тогда несложно получить, что $C_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)e^{a^2\lambda_n\tau}\,d\tau + C$, подставляя это в начальное условие, получим что $C = \varphi_n$. Собирая всё вместе:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_n \left(\varphi_n + \int_0^t f_n(\tau)e^{a^2\lambda_n\tau}\,d\tau\right) X_n(x) = \\ &= \sum_n \left(\int_0^l \varphi(\xi)X_n(\xi)\,d\xi + \int_0^t \left(\int_0^l f(\xi,\tau)X_n(\xi)\frac{1}{\|X_n\|^2}\,d\xi\right) e^{a^2\lambda_n\tau}\,d\tau\right) X_n(x) = \\ &= \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^l\int_0^t \sum_n \frac{1}{\|X_n\|^2} X_n(x)X_n(\xi)e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau d\xi = \\ &= \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^l\int_0^t G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\tau d\xi. \end{aligned}$$

1.11 Уравнение теплопроводности/диффузии на бесконечной и полубесконечной прямой. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.12 Задача без начального условия для уравнения теплопроводности.

1.13 Функции, гармонические в области. Теорема о среднем значении для гармонических функций. Принцип максимума.

1.14 Уравнение Лапласа в криволинейных ортогональных (полярных, цилиндрических, сферических) координатах.

1.15 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в прямоугольнике. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике.

1.16 Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга и вне круга. Интеграл Пуассона.

1.17 Функция Грина уравнения Лапласа первой краевой задачи в круге, на полуплоскости в полупространстве. Метод отражений.

1.18 Единственность решения краевой задачи (внутренней и внешней) для уравнения Лапласа.

1.19 Первая и вторая формулы Грина в ограниченной области. Потенциалы простого и двойного слоя. Их свойства, физический смысл.

1.20 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круге, в круговом кольце и во внешности круга. Краевые задачи для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.21 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круговом секторе и в кольцевом секторе. Краевая задача для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.22 Рекуррентные и интегральные соотношения для решений уравнения Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Ряды Фурье – Бесселя.

1.23 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для цилиндра. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре.

1.24 Полиномы Лежандра¸их свойства. Формула Родриго. Рекуррентные соотношения. Задача Штурма – Лиувилля на сфере. Присоединенные функции Лежандра.

1.25 Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаровом слое.

1.26 Основные функции и обобщенные функции, сходимость в пространстве основных функций. Регулярная обобщённая функция. Носитель обобщённой функции.

1.27 Регуляризация степенных особенностей. Сингулярная обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Формула Сохоцкого.

1.28 Фундаментальное решение дифференциального оператора. Обобщённое решение задачи Коши.

1.29 Классическая свёртка. Свертка обобщённых функций. Обобщённое решение дифференциального уравнения.

1.30 Пространство быстроубывающих функций и пространство функций медленного роста. Обобщённое преобразование Фурье. Обобщённое преобразование Фурье свертки и обобщённое равенство Парсеваля.

1.31 Фундаментальное решение оператора Лапласа.

1.32 Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.33 Фундаментальное решение оператора Гельмгольца. Сферические волны.