Уравнения математической физики

1 Теоретическая часть

1.1 Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Уравнения характеристик. Первый интеграл. Квазилинейные уравнения. Задача Коши.

Определение 1.

Уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение вида

$$F\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{1}$$

где $x_1 \ldots, x_n$ — независимые переменные, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция, $F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция (здесь p_i обозначают частные производные $u'_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$) в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, причем в каждой точке области G

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Уравнение (1) сокращенно можно записать в виде

$$F(x, u, \nabla u) = 0, \tag{1'}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)$.

В зависимости от того, как неизвестная функция u и ее частные производные входят в уравнение (1), различают *линейные* и *нелинейные* уравнения.

Определение 2. *(Линейные уравнения с частными производными первого порядка)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \ldots, x_n) = 0$, *то уравнение называется линейным однородным.*

Определение 3. *(Квазилинейные уравнения)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n, u), \tag{3}$$

где $a_1, \ldots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *квазилинейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$, *то уравнение называется квазилинейным однородным.*

Определение 4. *(Первый интеграл)*

Первым интегралом нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{4}$$

называется такая функция $v(t, x_1, \ldots, x_n)$, что она постоянна вдоль любого решения этой системы. Выражение $v(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется общим интегралом системы.

Замечание: Если $v(t, x_1, \ldots, x_n)$ — первый интеграл системы (4), то его производная вдоль решения равняется нулю, то есть

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\dot{x}_n = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Справедливо и обратное, то есть функция, удовлетворяющая такому условию, является первым интегралом системы.

Определение 5. *(Задача Коши)*

Задачей Коши называется задача нахождения решения уравнения

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z),$$

проходящего через кривую

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t). \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

сопоставленная ему система обыкновенныъ дифференциальных уравнений называется *системой уравнений характеристик*

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{5}$$

Также систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_2), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{5'}$$

Замечание: функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ является решением линейного однородного уравнения в частных проихводных первого порядка тогда и только тогда, когда является независящим от времени первым интегралом системы (5').

1.2 Классификация линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Характеристическое уравнение. Приведение уравнения с частными производными к каноническому виду.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называетс соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{6}$$

Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}y_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{7}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Уравнение называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции u и ее первых производных u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \tag{8}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ — функции от x и y. Уравнение называется однородным, если $f(x, y) = 0$.

Аналогично линейным уравнениям с частными производными 1-го порядка, линейные уравнения с частными производными 2-го порядка называются *квазилинейными*, если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} подобно F_1 зависят от x, y, y, u_x, u_y.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквиввалентное исходному. Как выбрать ξ и η так, тчобы получить наиболее простой вид?

Получим ответ на поставленный вопрос для (7). Преобразуя производные к новым переменным, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,\\
&u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy},
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставляя значения производных из (9) в уравнение (7), будем иметь

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
&\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
&\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned}$$

а функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то $\bar{F}$ имеет вид

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta,$$

т.е. уравнение остается линейным.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_1 1 z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \tag{11}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\bar{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (11).

Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (11), то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \tag{12}$$

Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (12), то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (11).

Уравнение (12) называется *характеристическим* для уравнения (7), а его интегралы - *характеристиками.*

Пологая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения (12), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = const$ является другим общим интегралом уравнения (12), независимым от $\varphi(x, y)$, то, пологая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (12) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{14}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (7)

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F = 0.$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением:

`гиперболического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
`параболического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,
`эллиптического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) D преобразования переменных отличен от нуля. Вразличных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа - комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Для каждого из типов можно вывести каноническую форму уравнения.

1. Каноническая форма уравнений гиперболического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$)

$$u_{xx} - u_{yy} = \Phi \text{ или } u_{xy} = \Phi. \tag{15}$$

2. Для уравнений параболического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$)

$$u_{xx} = \Phi. \tag{16}$$

3. Для уравнений эллиптического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$)

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi. \tag{17}$$

Во всех случаях $\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$.

1.3 Уравнение колебаний бесконечной струны (стержня). Задача Коши с начальными условиями. Формула Даламбера. Характеристики.

Многие задачи механики и физики описываются уравнением колебаний вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{18}$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от $n(n = 1,2,3)$ пространственных координат $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и времени t; коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (18) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big).$$

Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x),\\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - adt = 0, \quad dx + adt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Введя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \tag{21}$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{22}$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения, проинтегрировав последнее уравнение по ξ. Очевидно, для всякого решения (22)

$$u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ — некоторая непрерывная функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получаем

$$u(\xi,\eta) = \int^{\eta} f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{23}$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η. Обратно, какими бы ни были f_1 и f_2, функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой (23), представляет собой решение (22). Т.к. всякое решение (23) может быть представленно в виде (22) при соответствующем выборе f_1 и f_2, то формула (22) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно функция

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \tag{24}$$

является общим интегралом уравнения (19).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует, тогда оно дается формулой (24). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{25}$$
$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{26}$$

Интегрируя второе равенство, получаем

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C,$$

где x_0 и C — постоянные. Из равенств

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= \varphi(x), \\ f_1(x) - f_2(x) &= \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C \end{aligned}$$

находим

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + \tfrac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha - \tfrac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (27) должны иметь место для любого значения аргумента. Подставив в (24) найденные значения f_1 и f_2, получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{ \int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\,d\alpha \right\} \tag{28}$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha. \tag{29}$$

Формулу (29), называемую *формулой Даламбера*, мы получили, предполагая существование рещения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (19)–(20), то оно бы представлялось формулой (29) и совпадало с первым решением.

Нетрудно убедиться, что (29) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

1.4 Уравнение колебаний полубесконечной струны (стержня). Метод отражений.

Изложенный в пункте 1.3 метод решения задачи Коши позволяет решать некоторые смешанные задачи для этого уравнения. Для определенности рассмотрим смешанную задачу, описывающую колебание полубесконечной струны $x > 0$ с закрепленным левым концом

$$u|_{x=0} = 0. \tag{30}$$

Предварительно докажем, что всякое классическое решение $u(x,t)$ уравнения (19) в квадрате $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее условию (30) представляется в виде

$$u(x,t) = g(x+at) - g(-x+at) \tag{31}$$

(т.к. подставляя начальные условия в (24) $0 = f_1(-at) + f_2(at)$ отсюда и вытекает представление (31)).

Построим решение смешанной задачи (19), (20), (30). Всякое классическое решение $u(x,t)$ этой задачи в силу (31) допускает нечетное продолжение $\tilde{u}(x,t)$ по x класса $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, и это продолжение удовлетворяет уравнению (19) в $\mathbb{R}^2$.

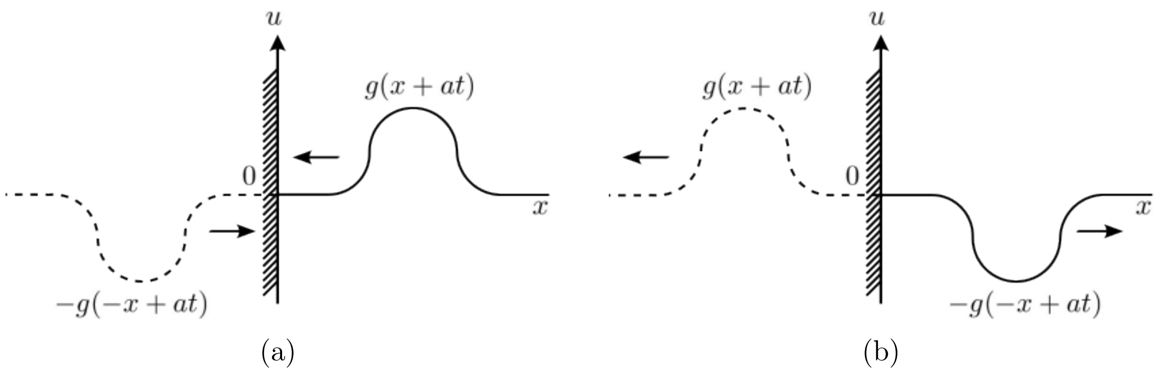

Рис. 1

Отсюда из условий (20) вытекает, что решение $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{u}_1(x), \tag{32}$$

где $\tilde{u}_0$ и $\tilde{u}_1$ — нечетные продолжения функций u_0 и u_1 соответственно. Но решение такой задачи Коши единственно и представляется формулой Даламбера (29) с заменой u_0 на $\tilde{u}_0$ и u_1 на $\tilde{u}_1$, если $\tilde{u}_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^1)$ и $\tilde{u}_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^1)$. Последние условия будут выполнены, если

$$u_0 \in \mathcal{C}^2(x \geqslant 0), \quad u_1 \in \mathcal{C}^1(x \geqslant 0), \quad u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0. \tag{33}$$

Итак, если выполнены условия (33), то решение задачи (19), (20), (30) существует, единственно и задается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(\xi)\,d\xi, \quad x \geqslant 0. \tag{34}$$

Пусть $x - at \geqslant 0$. Тогда

$$\tilde{u}_0(x-at) = \tilde{u}_0(x-at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = u_1(\xi), \quad \xi \geqslant x - at \geqslant 0, \tag{35}$$

и формула (34) принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi, \quad x \geqslant at. \tag{36}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для $x - at \leqslant 0$.

$$\tilde{u}_0(x - at) = -u_0(-x + at), \quad \tilde{u}_1(\xi) = -u_1(-\xi), \quad x - at \leqslant \xi \leqslant 0,$$

формула (34) принимает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x + at) - u_0(-x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{-x+at}^{x+at} u_1(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant at. \tag{37}$$

Как видно из формулы (37), в точку (x,t), $0 \leqslant x \leqslant at$, приходят два волны: прямая волна из точки $(x + at, 0)$ и один раз отраженная волна из точки $(at - x, 0)$ (совпадающая с прямой волной из фиктивной точки $(x - at, 0)$; см. рис.).

Аналогично рассматривается смешанная задача для полубесконечной струны $x > 0$ со свободным концом:

$$u_x|_{x=0} = 0.$$

Здесь также имеет место отражение волн от конца струны $x = 0$, но уже без изменения знака.

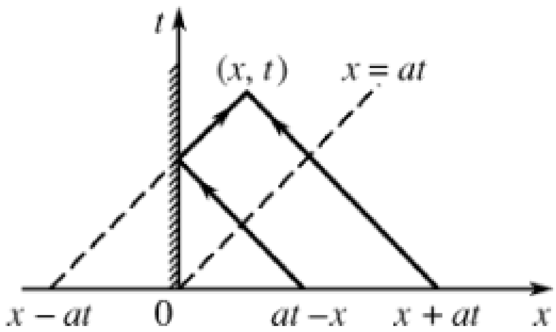

Рис. 2

1.5 Энергия колебаний ограниченной струны. Теорема единственности для смешанной краевой задачи для уравнения колебаний струны.

1.6 Метод разделения переменных для уравнения колебаний на отрезке.

1.7 Смешанная краевая задача о колебаниях прямоугольной мембраны. Метод разделения переменных.

1.8 Распространение тепла в стержне. Постановка смешанной краевой задачи

Уравнение теплопроводности в стержне

Простейшее уравнение параболического (см. 1.2) типа

$$u_{xx} - u_y = 0, \quad y = a^2 t, \tag{38}$$

то есть

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

обычно называют *уравнением теплопроводности.*

Рассмотрим стержень длины l, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Концы стержня будем поддерживать при постоянных температурах u_1 и u_2. Как известно (?), вдоль стержня тогда установится линейной распределение температуры, то есть функция температуры имеет вид

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x,$$

где, например, $u_1 > u_2$.

Тепло[1] течёт от u_1 к u_2. Экспериментальный факт: количество тепла, протекающего через сечение[2] стержня площади S за единицу времени равно

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \tag{39}$$

где k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня. Изучив конечный результат процесса, попробуем изучить сам процесс распространения тепла в стержне.

1. Закон Фурье. Обобщим формулу (39). Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени (t_1, t_2), равно

   $$Q = -S \int\limits_{t_1}^{t_2} k(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt. \tag{40}$$

   В общем случае неоднородного стержня коэффициент k является функцией от x.

2. Количество тепла, которое нужно сообщить стержню, чтобы повысить его температуру $\Delta u(x)$, равно

   $$Q = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho(x) S \Delta u(x)\, dx, \tag{41}$$

   где c — удельная теплоёмкость, $\rho(x)$ — плотность неоднородного в общем случае тела. При постоянных ρ, Δu формула упрощается до $Q = cm\Delta u$.

3. Внутри стержня тоже может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, химических реакций и т. д.). Если известна объёмная плотность $F(x,t)$ внутренних тепловых источников, то выделяемое ими тепло на промежутке (x_1, x_2) за время (t_1, t_2) равно

   $$Q = S \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{x_1}^{x_2} F(t,x)\, dx\, dt. \tag{42}$$

[1] То есть энергия теплового электро-магнитного излучения.
[2] Здесь и далее имеется в виду поперечное сечение (?).

Применим к отрезку (x_1, x_2) и промежутку времени (t_1, t_2) закон сохранения энергии и формулы (40), (41), (42), и получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\bigg|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\bigg|_{x=x_1} \right] d\tau + \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\,d\xi$$

— уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Предположим, что функция $u(x,t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и u_t. Пользуясь сначала интегральной теоремой о среднем,

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\bigg|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\bigg|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_3} \Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t = \{c\rho[u(\xi,t_2) - u(\xi,t_1)]\}_{\xi=x_3}\Delta x,$$

а затем дифференциальной теоремой (Лагранжа) о среднем,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}} \Delta x\Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t = \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_5}} \Delta x\Delta t,$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки соответствующих интервалов. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}} + F(x,t)|_{\substack{x=x_4\\ t=t_4}} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{\substack{t=t_5\\ x=x_3}}.$$

Поскольку все рассуждения относились к произвольным промежуткам (x_1, x_2), (t_1, t_2), то устремив x_1, $x_2 \to x$ и t_1, $t_2 \to t$, получим уравнение

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t},}$$

называемое *уравнением теплопроводности.*

Частные случаи. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. В случае однородного стержня (постоянства всех коэффициентов) приходим к уравнению (38).

2. Если боковые стенки проводят тепло, то согласно *закону Ньютона* количество тепла, которое потеряет стержень на единицу длины и времени, равно

$$F_0 = h(u - \theta),$$

где $\theta(x,t)$ — температура окружающей среды, h — коэффициент теплообмена. Тогда $F(x,t) = F_1(x,t) - F_0$ (где F_1 — объёмная плотность источников тепла), и в случае однородности стержня

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x,t),$$

где $\alpha = h/(c\rho)$, $f(x,t) = \alpha\theta(x,t) + F_1/(c\rho)$.

3. Коэффициенты k и c медленно зависят от температуры. Предположение об их постоянстве обусловленно предполагаемым небольшим изменением температуры. В ином случае уравнение станет квазилинейным.

Постановка смешанной краевой задачи

Начальное условие задаёт лишь значение функции $u(x,t)$ в начальный момент времени t_0.

Рассматривают три основных типа граничных условий. Любая их комбинация будет отдельной задачей.

1. На конце стержня $x = 0$ задана температура
$$u(0,t) = \mu(t)$$
как функция времени.

2. На конце[3] $x = l$ задано значение пространственной производной
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu(t).$$
К такому условию приходим, если известен торцевой тепловой поток (см. формулу закона Фурье (40)).

3. На конце $x = l$ задано линейное соотношение между производной и функцией
$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\lambda[u(l,t) - \theta(t)].$$
Этот тип соответствует теплообмену по закону Ньютона. Действительно, приравнивая плотность излучения внешнего источника (по закону Фурье) и плотность ухода тепла (по закона Ньютона), получаем исходное граничное условие.

Перечислим некоторые особые случаи. Пусть на конце $x = 0$ помещена сосредоточенная теплоёмкость C_1 и происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Такой закон теплового баланса можно записать в виде условия
$$C_1\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$
где u_0 — температура внешней среды.

Помимо перечисленных выше линейных задач, ставятся и нелинейные — например, при излучении торца по закону *Стефана – Больцмана*
$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sigma[u^4(0,t) - \theta^4(0,t)],$$
где θ — температура окружающей среды, а σ — постоянная Стефана – Больцмана.

Дополнительным условием для решения будет его непрерывность в соответствующей замкнутой области. Функция u обязана удовлетворять уравнению лишь внутри фазового прямоугольника, то есть при $0 < x < l$, $0 < t < T$. Требование непрерывности u нужно для этих граничных точек, внутри она непрерывна согласно самому уравнению.

Предельные случаи. В очень длинном стержне граничные условия в течение малого промежутка времени влияют на середину стержня очень слабо. Поэтому их можно опустить, считая стержень бесконечным.

Стержень можно считать и полубесконечным, опуская с такими же рассуждениями одно из граничных условий, если интересующий нас участок находится близко к одному концу и очень далеко от другого.

Опустить можно и начальные условия, если считать, что с начала распространения тепла прошло очень много времени. Тогда считаем, что опыт длится бесконечно. Часто, например, в подобных задачах граничные условия периодические: $\mu(t) = A\cos\omega t$.

[3]Дело в том, что, как и прежде, подразумевается, что тепло идёт слева направо

1.9 Принцип максимального значения для параболического уравнения и теорема единственности смешанной краевой задачи в ограниченной области.

1.10 Разделение переменных в смешанной краевой задаче для уравнения теплопроводности/диффузии. Построение функции влияния мгновенного точечного источника.

Однородная правая часть Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_x)|_{x=0} = 0, \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)|_{x=l} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{43}$$

в которой разделим переменные: $u = X(x)T(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda, \\ (\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0))\, T(t) = 0, \\ (\alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l))\, T(t) = 0. \end{cases}$$

Для $X(x)$ получается такая задача:

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0, \\ (\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0)) = 0, \\ (\alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l)) = 0, \end{cases}$$

разрешая которую, получим систему функций X_n и соотвествующие собственные значения λ_n. Таким образом, решение представляется в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) X_n(x)$$

Для $T(t)$ тогда:

$$\begin{cases} -T_n' - a^2 \lambda_n T_n = 0, \\ T_n(0) = \varphi_n, \end{cases}$$

где φ_n – коэффициенты разложения Фурье соответствующей функции. Общее решение этого диффура представляет собой $T_n = \varphi_n e^{-a^2\lambda_n t}$, тогда окончательный ответ:

$$u(x,t) = \sum_n \varphi_n e^{a^2\lambda_n t} X_n(x) = \sum_n \left(\frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \varphi(\xi) X_n(\xi)\, d\xi \right) e^{-a^2\lambda_n t} X_n(x) =$$

по свойствам линейности и при выполнении условия равномерной сходимости:

$$= \int_0^l \left(\sum_n \frac{1}{\|X_n\|^2} e^{-a^2\lambda_n t} X_n(\xi) X_n(x) \right) \varphi(\xi)\, d\xi = \int_0^l G(x,\xi,t) \varphi(\xi)\, d\xi,$$

а функцию $G = \sum_n \dfrac{1}{\|X_n\|^2} e^{-a^2\lambda_n t} X_n(\xi) X_n(x)$ называют *функцией влияния мгновенного точечного источника.*

Неоднородная правая часть Если в задачу (43) добавить неоднородность правой части:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ (\alpha_1 u + \beta_1 u_x)|_{x=0} = 0, \\ (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)|_{x=l} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{44}$$

то решение изменится только на этапе нахождения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\begin{cases} T_n' = -a^2\lambda_n T_n + f_n(t) \Leftrightarrow -T_n'(t) - a^2\lambda_n T_n(t) = -f_n(t), \\ T_n(0) = 0, \end{cases}$$

где $f_n = \dfrac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l f_n(\xi)X_n(\xi)\,d\xi$ – коэффициенты разложения функции f. Причём решение представим в виде $T_n(t) = C_n(t)\cdot e^{-a^2\lambda_n t}$ (метод вариации произвольных постоянных. Тогда несложно получить, что $C_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)e^{a^2\lambda_n\tau}\,d\tau + C$, подставляя это в начальное условие, получим что $C = \varphi_n$. Собирая всё вместе:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_n \left(\varphi_n + \int_0^t f_n(\tau)e^{a^2\lambda_n\tau}\,d\tau\right) X_n(x) = \\ &= \sum_n \left(\int_0^l \varphi(\xi)X_n(\xi)\,d\xi + \int_0^t \left(\int_0^l f(\xi,\tau)X_n(\xi)\frac{1}{\|X_n\|^2}\,d\xi\right) e^{a^2\lambda_n\tau}\,d\tau\right) X_n(x) = \\ &= \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^l\int_0^t \sum_n \frac{1}{\|X_n\|^2}X_n(x)X_n(\xi)e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau d\xi = \\ &= \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^l\int_0^t G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\tau d\xi. \end{aligned}$$

1.11 Уравнение теплопроводности/диффузии на бесконечной и полубесконечной прямой. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.12 Задача без начального условия для уравнения теплопроводности.

1.13 Функции, гармонические в области. Теорема о среднем значении для гармонических функций. Принцип максимума.

1.14 Уравнение Лапласа в криволинейных ортогональных (полярных, цилиндрических, сферических) координатах.

1.15 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в прямоугольнике. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике.

1.16 Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга и вне круга. Интеграл Пуассона.

1.17 Функция Грина уравнения Лапласа первой краевой задачи в круге, на полуплоскости в полупространстве. Метод отражений.

1.18 Единственность решения краевой задачи (внутренней и внешней) для уравнения Лапласа.

1.19 Первая и вторая формулы Грина в ограниченной области. Потенциалы простого и двойного слоя. Их свойства, физический смысл.

1.20 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круге, в круговом кольце и во внешности круга. Краевые задачи для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.21 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круговом секторе и в кольцевом секторе. Краевая задача для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.22 Рекуррентные и интегральные соотношения для решений уравнения Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Ряды Фурье – Бесселя.

1.23 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для цилиндра. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре.

1.24 Полиномы Лежандра¸их свойства. Формула Родриго. Рекуррентные соотношения. Задача Штурма – Лиувилля на сфере. Присоединенные функции Лежандра.

1.25 Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаровом слое.

1.26 Основные функции и обобщенные функции, сходимость в пространстве основных функций. Регулярная обобщённая функция. Носитель обобщённой функции.

1.27 Регуляризация степенных особенностей. Сингулярная обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Формула Сохоцкого.

1.28 Фундаментальное решение дифференциального оператора. Обобщённое решение задачи Коши.

1.29 Классическая свёртка. Свертка обобщённых функций. Обобщённое решение дифференциального уравнения.

1.30 Пространство быстроубывающих функций и пространство функций медленного роста. Обобщённое преобразование Фурье. Обобщённое преобразование Фурье свертки и обобщённое равенство Парсеваля.

1.31 Фундаментальное решение оператора Лапласа.

1.32 Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.33 Фундаментальное решение оператора Гельмгольца. Сферические волны.