Уравнения математической физики

1 Теоретическая часть

1.1 Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Уравнения характеристик. Первый интеграл. Квазилинейные уравнения. Задача Коши.

Определение 1.

Уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение вида

$$F\Big(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{1}$$

где $x_1 \dots, x_n$ — независимые переменные, $u = u(x_1, \dots, x_n)$ — неизвестная функция, $F(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция (здесь p_i обозначают частные производные $u'_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$) в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, причем в каждой точке области G

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Уравнение (1) сокращенно можно записать в виде

$$F(x, u, \nabla u) = 0, \tag{1'}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)$.

В зависимости от того, как неизвестная функция u и ее частные производные входят в уравнение (1), различают *линейные* и *нелинейные* уравнения.

Определение 2. *(Линейные уравнения с частными производными первого порядка)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n), \tag{2}$$

где $a_1, \dots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \dots, x_n) = 0$*, то уравнение называется линейным однородным.*

Определение 3. *(Квазилинейные уравнения)*

Уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, u), \tag{3}$$

где $a_1, \dots, a_n, b \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$, называется *квазилинейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка. Если* $b(x_1, \dots, x_n, u) = 0$*, то уравнение называется квазилинейным однородным.*

Определение 4. *(Первый интеграл)*

Первым интегралом нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{4}$$

называется такая функция $v(t, x_1, \ldots, x_n)$, что она постоянна вдоль любого решения этой системы. Выражение $v(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется общим интегралом системы.

Замечание: Если $v(t, x_1, \ldots, x_n)$ — первый интеграл системы (4), то его производная вдоль решения равняется нулю, то есть

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}\dot{x}_n = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Справедливо и обратное, то есть функция, удовлетворяющая такому условию, является первым интегралом системы.

Определение 5. *(Задача Коши)*

Задачей Коши называется задача нахождения решения уравнения

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z),$$

проходящего через кривую

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t). \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$a_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

сопоставленная ему система обыкновенныъ дифференциальных уравнений называется *системой уравнений характеристик*

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{5}$$

Также систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_2), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{5'}$$

Замечание: функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ является решением линейного однородного уравнения в частных проихводных первого порядка тогда и только тогда, когда является независящим от времени первым интегралом системы (5').

1.2 Классификация линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Характеристическое уравнение. Приведение уравнения с частными производными к каноническому виду.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называетс соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{6}$$

Уравнение называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}y_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{7}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Уравнение называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции u и ее первых производных u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \tag{8}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ — функции от x и y. Уравнение называется однородным, если $f(x, y) = 0$.

Аналогично линейным уравнениям с частными производными 1-го порядка, линейные уравнения с частными производными 2-го порядка называются *квазилинейными*, если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} подобно F_1 зависят от x, y, y, u_x, u_y.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквиввалентное исходному. Как выбрать ξ и η так, тчобы получить наиболее простой вид?

Получим ответ на поставленный вопрос для (7). Преобразуя производные к новым переменным, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,\\
&u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy},
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставляя значения производных из (9) в уравнение (7), будем иметь

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
&\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
&\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned}$$

а функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т.е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то $\bar{F}$ имеет вид
$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta,$$
т.е. уравнение остается линейным.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_1 1 z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \tag{11}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\bar{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (11).

Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (11), то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \tag{12}$$

Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (12), то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (11).

Уравнение (12) называется *характеристическим* для уравнения (7), а его интегралы - *характеристиками.*

Пологая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = const$ есть общий интеграл уравнения (12), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = const$ является другим общим интегралом уравнения (12), независимым от $\varphi(x, y)$, то, пологая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (12) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{13}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{14}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (7)

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F = 0.$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением:

`гиперболического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
`параболического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$,
`эллиптического` типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) D^2, \quad D = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) D преобразования переменных отличен от нуля. Вразличных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа - комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Для каждого из типов можно вывести каноническую форму уравнения.

1. Каноническая форма уравнений гиперболического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$)

$$u_{xx} - u_{yy} = \Phi \text{ или } u_{xy} = \Phi. \tag{15}$$

2. Для уравнений параболического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$)

$$u_{xx} = \Phi. \tag{16}$$

3. Для уравнений эллиптического типа ($a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$)

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi. \tag{17}$$

Во всех случаях $\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$.

1.3 Уравнение колебаний бесконечной струны (стержня). Задача Коши с начальными условиями. Формула Даламбера. Характеристики.

Многие задачи механики и физики описываются уравнением колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{18}$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от $n(n = 1,2,3)$ пространственных координат $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и времени t; коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (18) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big).$$

Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - adt = 0, \quad dx + adt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Введя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at, \tag{21}$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{22}$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения. Очевидно, для всякого решения (22)

$$u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ — некоторая непрерывная функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получаем

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \tag{23}$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η. Обратно, какими бы ни были f_1 и f_2, функция $u(\xi,\eta)$, определяемая формулой (23), представляет собой решение (22). Т.к. всякое решение (23) может быть представленно в виде (22) при соответствующем выборе f_1 и f_2, то формула (22) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно функция

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \tag{24}$$

является общим интегралом уравнения (19).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует, тогда оно дается формулой (24). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{25}$$
$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{26}$$

Интегрируя второе равенство, получаем

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C,$$

где x_0 и C — постоянные. Из равенств

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$
$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C$$

находим

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + \tfrac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha - \tfrac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (27) должны иметь место для любого значения аргумента. Подставив в (24) найденные значения f_1 и f_2, получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\,d\alpha\right\} \tag{28}$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha. \tag{29}$$

Формулу (29), называемую *формулой Даламбера*, мы получили, предполагая существование рещения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (19)-(20), то оно бы представлялось формулой (29) и совпадало с первым решением.

Нетрудно убедиться, что (29) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

1.4 Уравнение колебаний полубесконечной струны (стержня). Метод отражений.

1.5 Энергия колебаний ограниченной струны. Теорема единственности для смешанной краевой задачи для уравнения колебаний струны.

1.6 Метод разделения переменных для уравнения колебаний на отрезке.

1.7 Смешанная краевая задача о колебаниях прямоугольной мембраны. Метод разделения переменных.

1.8 Распространение тепла в стержне. Постановка смешанной краевой задачи.

1.9 Принцип максимального значения для параболического уравнения и теорема единственности смешанной краевой задачи в ограниченной области.

1.10 Разделение переменных в смешанной краевой задаче для уравнения теплопроводности/диффузии. Построение функции влияния мгновенного точечного источника.

1.11 Уравнение теплопроводности/диффузии на бесконечной и полубесконечной прямой. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.12 Задача без начального условия для уравнения теплопроводности.

1.13 Функции, гармонические в области. Теорема о среднем значении для гармонических функций. Принцип максимума.

1.14 Уравнение Лапласа в криволинейных ортогональных (полярных, цилиндрических, сферических) координатах.

1.15 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в прямоугольнике. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике.

1.16 Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга и вне круга. Интеграл Пуассона.

1.17 Функция Грина уравнения Лапласа первой краевой задачи в круге, на полуплоскости в полупространстве. Метод отражений.

1.18 Единственность решения краевой задачи (внутренней и внешней) для уравнения Лапласа.

1.19 Первая и вторая формулы Грина в ограниченной области. Потенциалы простого и двойного слоя. Их свойства, физический смысл.

1.20 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круге, в круговом кольце и во внешности круга. Краевые задачи для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.21 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в круговом секторе и в кольцевом секторе. Краевая задача для уравнения Лапласа в указанных областях.

1.22 Рекуррентные и интегральные соотношения для решений уравнения Бесселя. Ортогональность функций Бесселя. Ряды Фурье – Бесселя.

1.23 Собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля для цилиндра. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре.

1.24 Полиномы Лежандра¸их свойства. Формула Родриго. Рекуррентные соотношения. Задача Штурма – Лиувилля на сфере. Присоединенные функции Лежандра.

1.25 Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаровом слое.

1.26 Основные функции и обобщенные функции, сходимость в пространстве основных функций. Регулярная обобщённая функция. Носитель обобщённой функции.

1.27 Регуляризация степенных особенностей. Сингулярная обобщённая функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Формула Сохоцкого.

1.28 Фундаментальное решение дифференциального оператора. Обобщённое решение задачи Коши.

1.29 Классическая свёртка. Свертка обобщённых функций. Обобщённое решение дифференциального уравнения.

1.30 Пространство быстроубывающих функций и пространство функций медленного роста. Обобщённое преобразование Фурье. Обобщённое преобразование Фурье свертки и обобщённое равенство Парсеваля.

1.31 Фундаментальное решение оператора Лапласа.

1.32 Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Функция влияния мгновенного точечного источника.

1.33 Фундаментальное решение оператора Гельмгольца. Сферические волны.