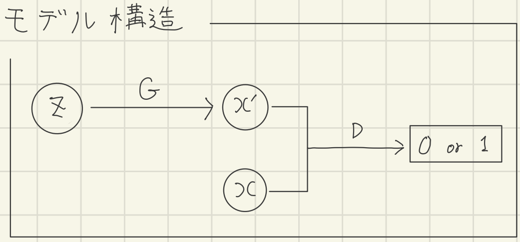
敵対的生成ネットワーク

GAN(Generative Adversarial Nets)

モデル構造



z:ノイズと呼ばれるベクトル。
　一般的には正規分布や一様分布からサンプリングされる。
G, D:生成器(Generator), 識別器(Discriminator)と呼ばれる関数。
　ニューラルネットワークで表現される。

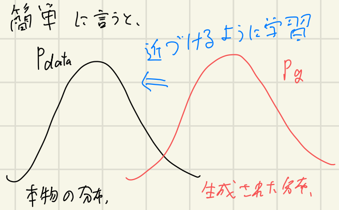
GANの目的関数 ↓

$$\max_D V(D,G) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})}[\log D(\boldsymbol{x})] + \mathbb{E}_{\boldsymbol{z}\sim p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z})}[\log(1-D(G(\boldsymbol{z})))]$$

$D(x)$ は x が本物のとき 1 に したい。
　　　　偽物のとき 0 に

$G(x)$ は $D(G(x))$ を 1 に したい。

簡単に言うと、



補題

$(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ で

$$f(x) = a\log x + b\log(1-x)$$ を考えると、

$$\min f(x) = \frac{a}{a+b}$$

∵
$$\frac{df}{dx} = \frac{a}{x} - \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x)-bx}{x(1-x)} = \frac{-(a+b)x+a}{x(1-x)}$$

$$\frac{df}{dx} = 0$$
$$\Leftrightarrow -(a+b)x + a = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

GANの目的関数は、

$$V(D,G) = \int_x p_{data}(x)\cdot\log D(x)\,dx + \int_z p_z(z)\cdot\log(1-D(G(z)))\,dz$$
$$= \int_x p_{data}(x)\cdot\log D(x) + p_g(x)\cdot\log(1-D(x))\,dx$$

とかける。

Gを固定したときの、最適なDをD^*_Gとする

$$D^*_G(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)} \cdots ①$$

ちなみに、$p_{data} = p_g$ のとき、
(生成器が本物と全く同じ出力なら)

$$D^*_G(x) = \frac{p_g}{p_g+p_g} = \frac{1}{2}$$

Dの出力は $\frac{1}{2}$ (見わけられない) になる。

Thm1

$C(G)$の大域的な最小値は$-\log 4$である。

∵

ここで、Gにとっての目的関数は

$$C(G) = \max_D V(G,D)$$
$$= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}[\log D^*_G(x)] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}[\log(1-D^*_G(x))]$$

$$1 - D^*_G(x) = 1 - \frac{p_{data}}{p_{data}+p_g} = \frac{p_{data}+p_g-p_{data}}{p_{data}+p_g} = \frac{p_g}{p_{data}+p_g}$$

①より
$$= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\left(\frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right)\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\left(\frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right)\right]$$

$\left(m(x) = \frac{p_{data}(x)+p_g(x)}{2}\right.$ とおく$\left.\right)$

$$= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\left(\frac{p_{data}(x)}{2m(x)}\right)\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\left(\frac{p_g(x)}{2m(x)}\right)\right]$$

期待値の線形性より、分母の2をだす!

$$= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\left(\frac{p_{data}(x)}{m(x)}\right)\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\left(\frac{p_g(x)}{m(x)}\right)\right] - 2\log 2$$

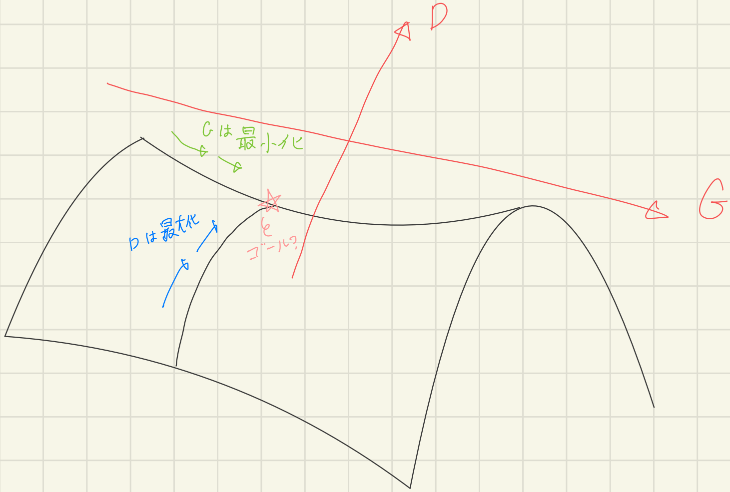
Def (KLダイバージェンス)

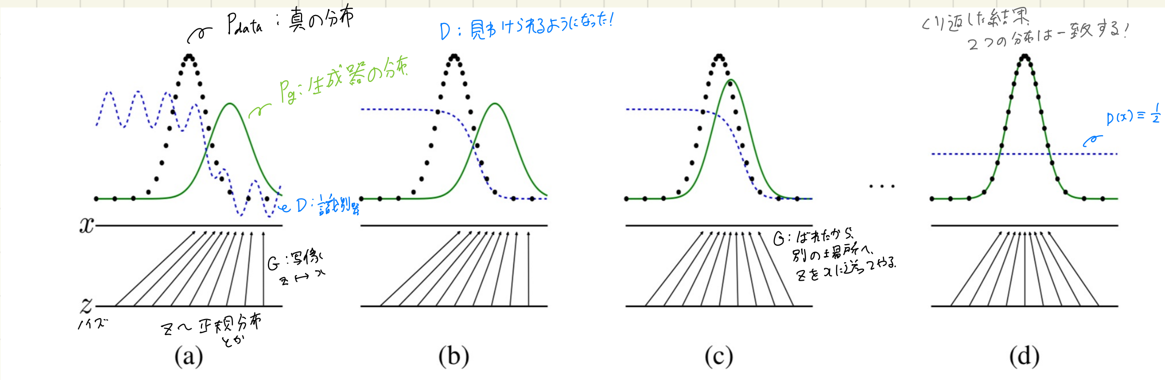
$$KL(p\|q) = \mathbb{E}_{x\sim p(x)}\left[\log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\right]$$

$$= KL(p_{data}\|m) + KL(p_g\|m) - 2\log 2$$

ここで、KLダイバージェンスは非負なので、

$$\min C(G) = -2\log 2$$
$$= -\log 4$$ である。





P.S. はじめから積分できる前提だが、
ゲンミツには、より一般的なギロンが必要で、
数学的にとても大変そう…
そこで、WGANの論文では、けっこう条件を限定した話をしてる。