1.6. Рациональные дроби

Определение 1.6.1. *Рациональной дробью* называется отношение двух полиномов с вещественными коэффициентами $f(x)/g(x)$, где полином $g(x)$ тождественно не равен нулю.

Определение 1.6.2. Рациональная дробь называется *несократимой*, если полиномы $f(x)$ и $g(x)$ взаимно просты.

Очевидно, что любая рациональная дробь $f(x)/g(x)$ приводится к несократимой, если ее числитель и знаменатель разделить на наибольший общий делитель полиномов $f(x)$ и $g(x)$.

Определение 1.6.3. Рациональная дробь $f(x)/g(x)$ называется *правильной*, если $\deg f(x) < \deg g(x)$.

Добавим к множеству всевозможных правильных рациональных дробей число 0.

Теорема 1.6.1. *Любая рациональная дробь однозначно представляется в виде суммы полинома и правильной дроби.*

<u>Доказательство.</u> Действительно, если $\deg f(x) \geq \deg g(x)$, то существуют такие однозначно определяемые полиномы $q(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где $\deg r(x) < \deg g(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

причем $q(x)$ — полином, а $r(x)/g(x)$ — правильная дробь.

Определение 1.6.4. Правильная дробь $f(x)/g(x)$ называется *простейшей*, если ее знаменатель $g(x)$ является степенью неприводимого полинома $p(x)$, т. е. $g(x) = p^k(x)$.

Теорема 1.6.2. *Любая правильная рациональная дробь однозначно с точностью до порядка слагаемых разлагается в сумму простейших дробей.*

<u>Доказательство.</u> Для доказательства рассмотрим сначала правильную несократимую рациональную дробь

$$\frac{f(x)}{f_0(x)f_1(x)}. \tag{1.6.1}$$

Будем считать, что $f_0(x)$ и $f_1(x)$ два взаимно простых полинома, а поэтому в силу следствия 1.4.1 существуют такие $\bar{u}_0(x)$ и $\bar{u}_1(x)$, что $\bar{u}_0(x)f_0(x) + \bar{u}_1(x)f_1(x) = 1$. Умножим обе части этого равенства на полином $f(x)$, получаем

$$f_0(x)[\bar{u}_0(x)f(x)] + f_1(x)[\bar{u}_1(x)f(x)] = f(x). \tag{1.6.2}$$

Представим полином $\bar{u}_0(x)f(x)$ в виде $\bar{u}_0(x)f(x) = f_1(x)q(x) + u_0(x)$, где $\deg u_0(x) < \deg f_1(x)$, и подставим его в соотношение (1.6.2). Тогда

$$f_0(x)u_0(x) + f_1(x)[f_0(x)q(x) + \bar{u}_1(x)f(x)] = f(x),$$

т. е.

$$f_0(x)u_0(x)+f_1(x)u_1(x)=f(x), \tag{1.6.3}$$

где $u_1(x)=f_0(x)q(x)+\bar{u}_1(x)f(x)$. Поскольку дробь (1.6.1) является правильной, то $\deg f<\deg(f_0 f_1)$. Так как по построению $\deg u_0<\deg f_1$, то, очевидно, $\deg(f_0u_0)<\deg(f_0 f_1)$. Наконец, из соотношения (1.6.3) находим, что $f_1(x)u_1(x)=f(x)-f_0(x)u_0(x)$, поэтому $\deg(f_1u_1)\le\max\{\deg f,\deg(f_0u_0)\}<\deg(f_0 f_1)$. Если разделить обе части соотношения (1.6.3) на произведение $f_0(x)f_1(x)$, то получаем

$$\frac{f(x)}{f_0(x)f_1(x)}=\frac{f_0(x)u_0(x)}{f_0(x)f_1(x)}+\frac{f_1(x)u_1(x)}{f_0(x)f_1(x)}=\frac{u_0(x)}{f_1(x)}+\frac{u_1(x)}{f_0(x)}.$$

Таким образом, исходная несократимая правильная рациональная дробь (1.6.1) представима в виде суммы правильных дробей.

В силу формулы (1.5.1) полиномы $f_0(x)$ и $f_1(x)$ можно представить в виде произведения степеней неприводимых, а значит, взаимно простых полиномов. Поэтому дробь (1.6.1) допускает однозначное разложение в сумму правильных дробей

$$\frac{f(x)}{f_0(x)f_1(x)}=\frac{h_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}+\frac{h_2(x)}{p_2^{k_2}(x)}+\cdots+\frac{h_m(x)}{p_m^{k_m}(x)}, \tag{1.6.4}$$

где $f_0(x)f_1(x)=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_m^{k_m}(x)$, причем $p_i(x)\ne p_j(x)$, когда $i\ne j$.

Рассмотрим отдельно, например, первую дробь из правой части соотношения (1.6.4). Разделим $h_1(x)$ на полином $p_1^{k_1-1}(x)$ с остатком, а затем полученный остаток делим на полином $p_1^{k_1-2}(x)$ и т. д. В итоге получаем цепочку равенств:

$$h_1=p_1^{k_1-1}q_1+r_1,\ r_1=p_1^{k_1-2}q_2+r_2,\ldots.,\ r_{k_1-2}=p_1q_{k_1-1}+r_{k_1-1}.$$

Так как рассматриваемая дробь является правильной, то $\deg h_1<\deg p_1^{k_1}$. Кроме того, по построению $\deg r_1<\deg p_1^{k_1-1}$, следовательно, $\deg q_1<\deg p_1$. Рассуждая подобным образом, получаем, что для любого $i=\overline{1,k_1-1}$ справедливы неравенства $\deg q_i<\deg p_1$, $\deg r_i<\deg p_1$. Так как

$$h_1(x)=p_1^{k_1-1}(x)q_1(x)+p_1^{k_1-2}(x)q_2(x)+\ldots+p_1(x)q_{k_1-1}(x)+r_{k_1-1}(x),$$

то дробь

$$\frac{h_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}=\frac{q_1(x)}{p_1(x)}+\frac{q_2(x)}{p_1^2(x)}+\cdots+\frac{q_{k_1-1}(x)}{p_1^{k_1-1}(x)}+\frac{r_{k_1-1}(x)}{p_1^{k_1}(x)}. \tag{1.6.5}$$

Таким образом, доказали, что произвольная правильная рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей.

Для доказательства однозначности разложения в сумму простейших дробей рассмотрим соотношение (1.6.5). Допустим, что существует другое разложение дроби

$$\frac{h_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}=\frac{\bar{q}_1(x)}{p_1(x)}+\frac{\bar{q}_2(x)}{p_1^2(x)}+\cdots+\frac{\bar{q}_{k_1-1}(x)}{p_1^{k_1-1}(x)}+\frac{\bar{r}_{k_1-1}(x)}{p_1^{k_1}(x)}.$$

Вычтем это соотношение из (1.6.5), имеем

$$\frac{q_1(x)-\overline{q}_1(x)}{p_1(x)}+\frac{q_2(x)-\overline{q}_2(x)}{p_1^2(x)}+\cdots+\frac{q_{k_1-1}(x)-\overline{q}_{k_1-1}(x)}{p_1^{k_1-1}(x)}+\frac{r_{k_1-1}(x)-\overline{r}_{k_1-1}(x)}{p_1^{k_1}(x)}=0\,.$$

Умножая обе части на полином $p_1^{k_1-1}(x)$, получаем, что сумма полинома и правильной дроби равна нулю, что, однако, невозможно.