1.2. Теорема Безу. Схема Горнера

Определение 1.2.1. *Полиномом степени* n называется сумма

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $a_i,\ i = \overline{0, n}$ — комплексные числа, причем $a_0 \neq 0$. Число n называется *степенью полинома* $f(x)$ и обозначается $n = \deg f(x)$. Если $a_0 = 1$, то полином называется *приведенным*.

Непосредственно из определения следует, что число a_0 является полиномом нулевой степени. Число 0 также является полиномом, но его степень не определена.

Определение 1.2.2. Два полинома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ и $g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$ называются *равными* (обозначение $f(x) = g(x)$), если для любого $k = \overline{0, n}$ справедливы равенства $a_k = b_k$.

Теорема 1.2.1. Для любых двух полиномов $f(x)$ и $g(x)$, $\deg f \geq \deg g$, существуют такие однозначно определяемые полиномы $q(x)$ и $r(x)$, что

$$f(x) = g(x) q(x) + r(x), \tag{1.2.1}$$

причем $\deg r(x) < \deg g(x)$, либо $r(x) \equiv 0$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, $g(x) = b_0 x^m + \ldots + b_{m-1} x + b_m$, $n \geq m$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Построим вспомогательный полином

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x). \tag{1.2.2}$$

Очевидно, что степень построенного полинома $n_1 = \deg f_1(x) < n$. Пусть a_{10} — старший коэффициент полинома $f_1(x)$, таким образом, $f_1(x) = a_{1,0} x^{n_1} + \ldots + a_{1,n_1-1} x + a_{1,n_1}$. Если $n_1 \geq m$, то строим следующий полином

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{1,0}}{b_0} x^{n_1 - m} g(x). \tag{1.2.3}$$

Ясно, что справедливо соотношение $n_2 = \deg f_2(x) < n_1$, причем $f_2(x) = a_{2,0} x^{n_2} + \ldots + a_{2,n_2-1} x + a_{2,n_2}$, где коэффициент $a_{2,0} \neq 0$. Если $n_2 \geq m$, то находим другой полином

$$f_3(x) = f_3(x) - \frac{a_{2,0}}{b_0} x^{n_2 - m} g(x), \tag{1.2.4}$$

причем $n_3 = \deg f_3(x) < n_2$ и т. д.

По построению $n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$, поэтому после конечного числа шагов получаем полином $f_k(x)$ такой, что $n_k = \deg f_k(x) < m$, где

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1} - m} g(x). \tag{1.2.5}$$

Складывая последовательно записанные равенства, получаем

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_{k-1}(x)+f_k(x)=$$

$$=f(x)+f_1(x)+\ldots+f_{k-1}(x)-\left[\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right]g(x).$$

Тогда после сокращений окончательно имеем

$$f_k(x)=f(x)-\left[\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right]g(x),$$

поэтому если

$$q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m},\ r(x)=f_k(x),$$

то получаем равенство (1.2.1).

Докажем теперь, что полиномы $q(x)$ и $r(x)$ определяются однозначно. Предположим, что существуют полиномы $\overline{q}(x)$ и $\overline{r}(x)$, причем $f(x)=g(x)\overline{q}(x)+\overline{r}(x)$, $\deg\overline{r}(x)<\deg g(x)$ (или $\overline{r}(x)\equiv 0$). Вычитая указанное равенство из (1.2.1), получаем

$$g(x)[q(x)-\overline{q}(x)]=\overline{r}(x)-r(x).$$

Но $\deg\{g(x)[q(x)-\overline{q}(x)]\}\ge\deg g(x)$, в то время как $\deg[\overline{r}(x)-r(x)]<\deg g(x)$. Полученное противоречие доказывает однозначность определения полиномов $q(x)$ и $r(x)$, т. е. $q(x)=\overline{q}(x),\ r(x)=\overline{r}(x)$.

Определение 1.2.3. Полином $q(x)$ называется *частным*, а $r(x)$ — *остатком от деления* полинома $f(x)$ на полином $g(x)$.

Определение 1.2.4. Если $r(x)\equiv 0$, то говорят, что полином $f(x)$ делится нацело на полином $g(x)$ (обозначение $f\,\vdots\,g$), а сам полином $g(x)$ при этом называется *делителем полинома* $f(x)$.

Теорема 1.2.2 (Теорема Безу). *Полином* $g(x)=x-c$ *является делителем полинома* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(c)=0$.

Доказательство. *Необходимость*. Если полином $g(x)=x-c$ является делителем полинома $f(x)$, то последний представим в виде $f(x)=(x-c)q(x)$, поскольку $r(x)\equiv 0$. Поэтому, очевидно, что $f(c)=0$.

Достаточность. Пусть $f(c)=0$. Согласно формуле (1.2.1) имеем соотношение $f(x)=(x-c)q(x)+r(x)$, причем $\deg r(x)<\deg g(x)=\deg(x-c)=1$. Следовательно, $r(x)=\mathrm{const}$, тогда $r(c)=f(c)=0$, отсюда $f\,\vdots\,g$.

Следствие 1.2.1. *Остаток от деления полинома* $f(x)$ *на полином* $g(x)=x-c$ *равен* $f(c)$.

Доказательство. Заметим, что $f(x)=(x-c)q(x)+r$, где $r=\mathrm{const}$. Поэтому при $x=c$ получаем $r=f(c)$, что и требовалось доказать.

Возьмем произвольно полином $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Пусть $f(x)=(x-c)q(x)+r$, где $r=\mathrm{const}$. Ясно, что $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$. Тогда для определения остатка r и коэффициентов b_k, $k=\overline{0,n-1}$ имеем очевидное соотношение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-c)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})+r.$$

Сравнивая коэффициенты полиномов при одинаковых степенях x, имеем

$$a_0=b_0,\ a_k=b_k-b_{k-1}c, k=\overline{1,n-1},\ a_n=r-b_{n-1}c,$$

поэтому окончательно получаем

$$b_0=a_0,\ b_k=a_k+b_{k-1}c, k=\overline{1,n-1},\ r=a_n+b_{n-1}c. \tag{1.2.6}$$

Формулы (1.2.6), позволяющие производить последовательные вычисления коэффициентов частного и остатка от деления, носят название *схемы Горнера*.

Определение 1.2.5. *Корнем полинома* $f(x)$ называется число c, такое что $f(c)=0$.

Пусть $x=c$ — корень полинома $f(x)$. Так как в этом случае $f(c)=0$, то полином $x-c$ является делителем полинома $f(x)$, т. е. $f(x)=(x-c)f_1(x)$. Если $f_1\,\vdots\,(x-c)$, то $f(x)=(x-c)^2f_2(x)$. Понятно, что существует такое значение k, для которого $(x-c)^k$ является делителем полинома $f(x)$, но $(x-c)^{k+1}$ уже таковым не является. Это означает, что $f(x)=(x-c)^kf_k(x)$, причем $f_k(c)\neq 0$.

Определение 1.2.6. Указанное число k называется *кратностью корня* $x=c$ полинома $f(x)$. Если $k=1$, то соответствующий корень называется *простым*, а при $k>1$ — *кратным*.