Глава 1. Полиномы и их корни

1.1. Комплексные числа

Хорошо известные операции в математике можно разбить на два класса — прямые и обратные, например, сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня. При этом обратная операция зачастую выводит за рамки того множества, в котором рассматриваются элементы. Действительно, любое число можно возвести в целую степень, но корень четной степени из отрицательного числа в множестве вещественных чисел не существует. Поэтому следует расширить множество вещественных чисел.

Определение 1.1.1. *Комплексным числом* α называется пара вещественных чисел a и b, взятых в определенном порядке, т. е. $\alpha = (a, b)$. Число a именуют *действительной частью* комплексного числа, а число b — *мнимой частью* и обозначают $a = \operatorname{Re}(\alpha)$, $b = \operatorname{Im}(\alpha)$.

Если $b = 0$, то комплексное число $(a, 0)$ совпадает с вещественным числом a. Если действительная часть комплексного числа равна нулю, то это число называется *чисто мнимым*.

Определим операции сложения и умножения комплексных чисел.

Определение 1.1.2. *Суммой двух комплексных чисел* $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ называется комплексное число $\alpha + \beta = (a + c,\ b + d)$.

Определение 1.1.3. *Произведением двух комплексных чисел* $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ называется комплексное число $\alpha\beta = (ac - bd,\ ad + bc)$.

Заметим, что введенные правила сложения и умножения комплексных чисел не противоречат соответствующим операциям в множестве вещественных чисел. Действительно, если $\alpha = (a, 0)$, $\beta = (c, 0)$, то $\alpha + \beta = (a + c, 0) = a + c$, $\alpha\beta = (ac, 0) = ac$.

Непосредственно из определения следует, что произведение двух комплексных чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Для комплексных чисел, очевидно, справедливы следующие свойства:

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (*коммутативность сложения*);
2. $\alpha\beta = \beta\alpha$ (*коммутативность умножения*);
3. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (*ассоциативность сложения*);
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (*ассоциативность умножения*);
5. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Особое место среди комплексных чисел занимает число $i = (0, 1)$, называемое *мнимой единицей*. Оно обладает тем свойством, что $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, т. е. $i^2 = -1$.

Заметим, что

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Таким образом, любое комплексное число можно представить в виде суммы вещественного числа и чисто мнимого числа.

Определение 1.1.4. Два комплексных числа (a,b) и (c,d) называются *равными*, если $a=c,\ b=d$.

Определение 1.1.5. Два комплексных числа (a,b) и (c,d) называются *сопряженными*, если $a=c,\ b=-d$.

В дальнейшем, если дано комплексное число $\alpha=(a,b)$, то сопряженное к нему число $(a,-b)$ будем обозначать $\overline{\alpha}$. Для сопряженных комплексных чисел, как нетрудно видеть, справедливы соотношения

$$\alpha+\overline{\alpha}=(2a,0)=2\,\mathrm{Re}(\alpha),$$

$$\alpha\overline{\alpha}=(a,b)(a,-b)=(a^2+b^2,0)=a^2+b^2.$$

Очевидно, что $(a,b)+(0,0)=(a,b)$, т. е. число $(0,0)$ играет роль нуля в множестве комплексных чисел. Докажем, что другого нулевого элемента в указанном множестве не существует.

Действительно, пусть для некоторого числа $\theta=(c,d)$ справедливо $\alpha+\theta=\alpha$, следовательно, $(a,b)+(c,d)=(a,b)$. Добавляя в обе части последнего соотношения одно и то же число $(-a,-b)$, получаем $(-a,-b)+(a,b)+(c,d)=(-a,-b)+(a,b)$, отсюда $\theta=(c,d)=(0,0)$.

Поскольку $(a,b)(1,0)=(a,b)$, то число $(1,0)$ служит единицей при умножении. Покажем, что другой единицы в множестве комплексных чисел не существует.

Действительно, допустим, что для некоторого числа ε выполнено $\alpha\varepsilon=\alpha$. Умножая обе части этого равенства на одно и то же число $\overline{\alpha}/(a^2+b^2)$, получаем

$$\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}\alpha\varepsilon=\frac{\overline{\alpha}}{a^2+b^2}\alpha,$$

но $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$, поэтому $\varepsilon=1$.

Определение 1.1.6. *Разностью* двух комплексных чисел $\beta=(c,\ d)$ и $\alpha=(a,b)$ называется число $\gamma=\beta-\alpha$ такое, что $\alpha+\gamma=\beta$.

Заметим, что в силу свойств комплексных чисел, если $\alpha+\gamma=\beta$, то $-\alpha+\alpha+\gamma=-\alpha+\beta$, следовательно, $\gamma=(c,d)+(-a,-b)=(c-a,d-b)$.

Определение 1.1.7. Запись $1/\alpha$, где $\alpha\neq(0,0)$, обозначает комплексное число δ такое, что $\alpha\delta=1$.

Для определения числа δ умножим обе части равенства $\alpha\delta=1$ на величину $\overline{\alpha}/(a^2+b^2)$. В силу соотношения $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$ имеем $\delta=\overline{\alpha}/(a^2+b^2)$.

Определение 1.1.8. *Частным* двух комплексных чисел называется число $\beta/\alpha=\beta\delta$.

Отметим, что операция деления двух комплексных чисел легко сводится к операции умножения. Для этого числитель и знаменатель следует умножить на число, сопряженное знаменателю, т. е.

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}=\frac{\beta\overline{\alpha}}{a^2+b^2}.$$

Определение 1.1.9. Вещественное число $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}=|\alpha|=r$ называют *модулем* комплексного числа α.

Возьмем произвольное комплексное число α. Тогда

$$\alpha=a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где r — модуль комплексного числа. Угол φ такой, что

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

называется *аргументом* комплексного числа α и обозначается $\varphi=\arg(\alpha)$.

Очевидно, что аргумент определен с точностью до $2\pi k$, где k — любое целое число. Заметим, что число $(0,0)$ не имеет определенного аргумента.

Определение 1.1.10. *Форма* записи комплексного числа $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где r — модуль, а $\varphi=\arg(\alpha)$ — аргумент, называется *тригонометрической*.

Теорема 1.1.1. *Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент произведения — сумме аргументов сомножителей.*

<u>Доказательство.</u> Возьмем произвольно два комплексных числа, представленных в тригонометрической форме $\alpha_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $\alpha_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\alpha_1\alpha_2=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right),$$

т. е. $|\alpha_1\alpha_2|=r_1r_2$, $\arg(\alpha_1\alpha_2)=\varphi_1+\varphi_2$.

Следствие 1.1.1. *Справедливы соотношения*

$$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|=|\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_n|,$$

$$\arg(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=\sum_{k=1}^{n}\arg(\alpha_k).$$

В частности, когда $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n$, получаем *формулу Муавра*

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Докажем, что формула Муавра справедлива, в том числе, для любого целого $n\le 0$. Сначала заметим, что при $n=0$ формула Муавра, очевидно, имеет место. Пусть теперь $k=-m$, где $m>0$. Тогда

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^k=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-m}=\frac{1}{[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^m}=$$

$$=r^{-m}\frac{(\cos\varphi-i\sin\varphi)^m}{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^m}=r^{-m}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]^m=r^{-m}[\cos(-m)\varphi+i\sin(-m)\varphi]=$$

$$=r^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi).$$

Теорема 1.1.2. *Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Доказательство. Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме $\alpha_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad \alpha_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Найдем частное

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}=\frac{r_2}{r_1}(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)=$$

$$=\frac{r_2}{r_1}[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=$$

$$=\frac{r_2}{r_1}(\cos(\varphi_2-\varphi_2)+i\sin(\varphi_2-\varphi_2)).$$

Таким образом, модуль частного $\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|=\frac{r_2}{r_1}=\frac{|\alpha_2|}{|\alpha_1|}$, а аргумент частного

$$\arg\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)=\varphi_2-\varphi_1=\arg(\alpha_2)-\arg(\alpha_1).$$

Определение 1.1.11. Для любого натурального n *корнем n-й степени* из комплексного числа α называется комплексное число $\beta=\sqrt[n]{\alpha}$ такое, что $\beta^n=\alpha$.

Допустим, что число $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r\neq0$, а число $\beta=R(\cos\psi+i\sin\psi)$. По определению имеем $\beta^n=R^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\alpha$, следовательно, $R^n=r,\ \cos n\psi=\cos\varphi,\ \sin n\psi=\sin\varphi$. Отсюда получаем, что

$$R=\sqrt[n]{r},\ n\psi=\varphi+2\pi k, \tag{1.1.1}$$

где k — любое целое число.

Теорема 1.1.3. *Существует ровно n значений корня n-й степени из произвольного комплексного числа* $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ *, которые определяемых по формуле*

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right],\ k=0,1,2,\dots,n-1.$$

Доказательство. В соответствии с формулой (1.1.1) произвольный корень n-й степени определяется выражением

$$\beta_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right],$$

где k — произвольное целое число. Аргументы равных комплексных чисел могут отличаться лишь на величину кратную 2π. Поэтому, если $\beta_{k_1} = \beta_{k_2}$, то для аргументов справедливо соотношение

$$\frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} + 2\pi m$$

для некоторого целого m. Отсюда следует, что $k_1 = k_2 + nm$. Если положить, например, $k_2 = 0$, то ближайший равный ему корень будет соответствовать значению $k_1 = \pm n$. Поэтому при $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ получаем различные значения β_k.

Все корни n-й степени из комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ располагаются на окружности с радиусом $\sqrt[n]{|\alpha|}$ в вершинах правильного n-угольника, вписанного в эту окружность.