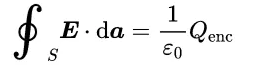


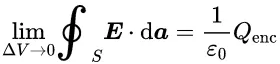
在**积分篇**里，我们一直在跟电场、磁场的**通量**打交道。我们任意画一个曲面，这个曲面可以是闭合的，也可以不是，然后我们让电场线、磁感线穿过这些曲面，它们就两两结合形成了**四个积分**形式的方程组。从这里我们能感觉到：**麦克斯韦方程组的积分形式是从宏观角度来描述问题，这些曲面都是宏观可见的东西**。那么**微分**形式呢？微分形式似乎应该从**微观**角度去看问题，那么我们要怎样把**曲面**、**通量**这些宏观上的东西弄到微观里来呢？  
 一个很简单的想法就是：**我让宏观上的东西缩小缩小，直到缩小成一个点，这样不就进入微观了么**？积分形式的麦克斯韦方程组需要选定一个**曲面**，但是它并没有限定这个**曲面的大小**，我可以把这个曲面选得很大，也可以选得**很小**。**当你把这个曲面选得很小很小的时候，麦克斯韦方程组的积分形式就自然变成了微分形式**。所以，微分形式的基本思想还是很简单的，它真正麻烦的地方是在于**如何寻找一种方便的计算方式**，这些我后面会细说。 因为微分形式和积分形式的这种**承接**关系，我建议大家尽量先看看[**积分篇**](http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIzODU2MzAyNg==&mid=2247484512&idx=1&sn=8f1019b05e3c8a154599c6d7b2290a8a&chksm=e9363fddde41b6cb7890257e631ba585bd9f18da553df1634c55cd58e88a73efd75a0bdbcaa8&scene=21#wechat_redirect)的内容。在积分篇里，我是**从零开始**讲电磁学，讲麦克斯韦方程组，所以阅读起来不会有什么门槛。但是到了微分篇，上篇文章已经详细说了一些东西（诸如**电场**、**通量**、**环流**等概念）这里就不会再细说了。 好，下面进入正题。在[积分篇](http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIzODU2MzAyNg==&mid=2247484512&idx=1&sn=8f1019b05e3c8a154599c6d7b2290a8a&chksm=e9363fddde41b6cb7890257e631ba585bd9f18da553df1634c55cd58e88a73efd75a0bdbcaa8&scene=21" \l "wechat_redirect" \t "_blank)里我跟大家讲过，麦克斯韦方程组总共有**四个**方程，分别描述了**静电**（高斯电场定律）、**静磁**（高斯磁场定律）、**磁生电**（法拉第定律）、**电生磁**（安培-麦克斯韦定律）。这四个方程各有**积分**和**微分**两种形式，积分形式我们上篇已经说过了，**微分**形式我们还是按照顺序，也从**静电**开始。

**01微分形式的静电**在**积分篇**里，我们是这样描述**静电**的：我在空间里**任意**画一个**闭合曲面**，那么**通过闭合曲面的电场线的数量（电通量）就跟这个曲面包含的电荷量成正比**。用公式表述就是这样：

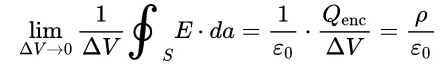


这就是**积分**形式的**高斯电场定律**：左边表示**通过闭合曲面S的电通量**（**E**是电场强度，我们把面积为S的闭合曲面分割成许多小块，每一个小块用da表示，那么通过每一个小块面积的电通量就可以写成**E·da**。套上一个**积分符号**就表示把所有小块的**电通量**累加起来，这样就得到了**通过整个闭合曲面S的电通量**），右边那个带了**enc**下标的**Q**就表示**闭合曲面包含的电荷量**，ε0是个常数。这些内容我在积分篇里都详细说过了，这里不再多言。 下面是重点：**因为这个闭合曲面S是可以任何选取的，它可以大可以小，可以是球面也可以是各种乱七八糟的闭合曲面。那么我们就不妨来学习一下孙悟空，变小变小再变小，我让这个闭合曲面也一直缩小缩小，缩小到无穷小，那么这时候高斯电场定律会变成什么样呢？** 这里会涉及一丢丢**极限**的概念，我们这样考虑：**一个闭合曲面缩小到无穷小，其实就是它的表面积或者体积无限趋向于0**。也就是说，我假设有一个球的体积为ΔV，然后让这个ΔV无限趋近于0，那这样就可以表示这个球**缩小到无穷小**了。用数学符号可以记成这样：

Lim就是英文单词**极限**（**limit**）的缩写，**ΔV通过一个箭头指向0**可以很形象的表示它**无限趋近于0**。有了这个极限的概念，我们就可以很自然的表示**通过这个无穷小曲面的电通量**了（直接在电通量的前面加个极限符号），这时候**高斯电场定律**就成了这样：



这样，我们就把**高斯电场定律**从**宏观**拉到了**微观**：方程的**左边**表示曲面缩小到无穷小时的**电通量**，方程的**右边**表示无穷小曲面包含的**电荷量**。但是，当曲面缩小到无穷小的时候，我们再使用**电荷量Q**就不合适了，所以我们改用**电荷密度（符号为ρ）**。**电荷密度**，从名字里我们就能猜出它表示的是**单位体积内包含电荷量的大小**，所以它的表达式应该是用**电荷量**除以**体积**，即：**ρ=Q/V**。 所以，如果我们把微观的高斯电场定律左右两边都**同时除以体积ΔV**，那么右边的**电荷量Q**除以**体积Δ**就变成了**电荷密度ρ**，左边我们也再除以一个ΔV，那么公式就变成了下面这样：



公式的右边除以一个体积ΔV，就成了**电荷密度ρ**除以**真空介电常数ε0**，那左边呢？左边原来是**通过无穷小曲面的电通量**，这玩意除以一个**体积ΔV**之后表示什么呢？这一长串的东西，我们给它取了个新名字：**散度**。 也就是说，**电场E在一个点（被无穷小曲面围着的这个点）上的散度被定义为电场通过这个无穷小曲面的电通量除以体积**。**散度**的英文单词是**divergence**，所以我们通常就用**div(E)**表示**电场E**的**散度**，即：



所以，**高斯电场定律**的**微分形式**就可以表示成这样：

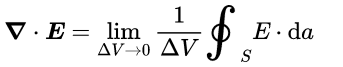


它告诉我们：**电场在某点的散度跟该点的电荷密度成正比**。 然后呢？然后微分篇的第一个方程就这样说完了？这只不过把**高斯电场定律**积分形式的**曲面缩小到了无穷小**，然后**两边同时除了一个体积**，右边凑出了一个电荷密度，左边巴拉巴拉凑出一大堆东西你告诉我这个新东西叫**散度**就完事了？不带这么玩的！那这个**散度**到底有什么物理意义？我要如何去计算具体的散度（你用无穷小通量去定义散度倒是好定义，但是这样计算可就麻烦了）？还有，很多人多多少少知道一些麦克斯韦方程组的样子，虽然不是很懂，那个**倒三角符号**▽倒还是记得的，你这公式里为什么没有▽符号呢？

**02初入江湖的▽**没错，我们用**无穷小曲面的通量和体积的比值**来定义**散度**，这样定义是为了突出它跟**通量**之间的联系，也方便大家从积分的思维自然的转化到微分的思维中来。但是，这种定义**在具体计算的时候是没什么用的**，我们不会通过去计算无穷小曲面的通量和体积的比值来计算一个点的散度，因为这样实在是**太麻烦了**。**我们有种更简单的方式来计算电场在某个点的散度**，而这种方法，就会使用到我们熟悉的**倒三角▽**符号。 在这种新的表示方法里，**电场E**的**散度**可以被写成这样：**▽·E**，所以我们就可以用这个东西替换掉方程左边**div(E)**，那么**麦克斯韦方程组**的**第一个**方程——描述**静电**的**高斯电场定律**的**微分形式**就可以写成这样：

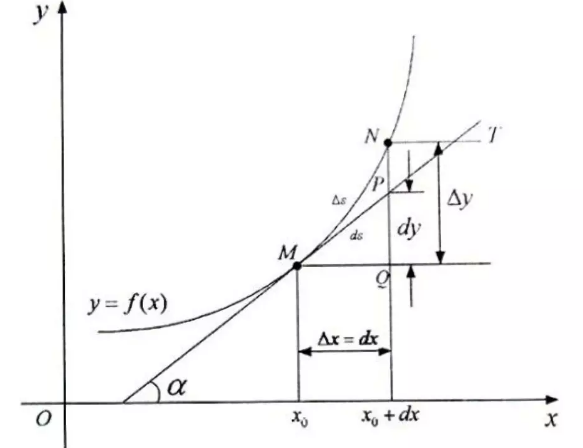


这样写的话，是不是就感觉熟悉多了？也就是说，同样是为了表示散度，我们用**▽·E**代替了代替了原来**无穷小曲面通量和体积比值**那么一大串的东西。而且这样还非常好计算，使用这种新的方式，你只要给出一个电场，我分分钟就可以把电场的散度写出来。这种倒三角▽符号，绝对是**符号简化史**上的奇迹。 所以，我接下来的工作，或者说理解麦克斯韦方程组的**微分形式**的**核心**内容，就是要来告诉大家**这个倒三角▽符号到底是什么意思，▽·（后面加了一个点）又是什么意思？为什么▽·E可以表示电场E的散度就？为什么▽·E跟我们前面散度的定义div（E）是等价的**？也就是说：



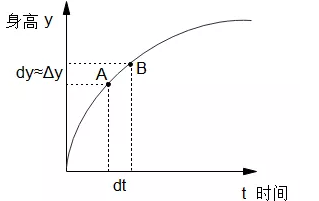
**为什么上面的式子是相等的**，**而且都可以用来表示电场E的散度**？ 这就是我在开篇说的：**微分形式的基本思想还是很简单的，它真正麻烦的地方在于如何寻找一种方便计算的方式**，这种方便的计算方式自然就是▽。那么我们接下来就先把电磁相关的物理内容**搁置一旁**，先一起来看一看这个**传奇符号▽**的前世今生，理解了它，你就理解了**麦克斯韦方程组**的**微分形式**的**精髓**。

**03从导数说起**要理解▽，我们还是得先**再来**看一看这个**衡量事物变化快慢**的概念：**导数**。说“再”是因为我们在积分篇里已经讲过了：**法拉第**发现了**电磁感应**，发现**变化的磁场能产生电场，而且磁场变化得越快，产生的电场越大**。这里我们就需要这样一个量来描述**磁场变化的快慢**，只不过当时我们没有展开说。 我还是借用上篇**身高**的例子来看看我们是如何**描述变化的快慢**的。一个人在十二三岁的时候一年可以长10厘米，我们说他这时候长得**快**；到了十七八岁的时候可能一年就只能长1厘米，我们就说他长得**慢**。也就是说，我们衡量一个量（这里就是**身高**，假设身高用**y**表示）变化快慢的方法是：**给定一个变化的时间dt（比如一年，或者更小），看看这个量的变化Δy是多少，如果这个量的变化很大我们就说它变化得很快，反之则变化得慢**。 在这里，我稍微解释一下**Δy**和**dy**的区别：如下图所示，我们假设函数在x轴上有一个增量Δx，这个用Δx或者dx表示都一样，两者相等。但是，这个在x轴上的变化带来的y轴上的变化就不一样了：**Δy**表示的是y轴**实际的变化量**，是我用**前后两个不同的x对应的y值直接相减得到的真实结果**；而**dy**则不是，**dy**是我们在M点做了一条**切线**，然后我用这条**直线来代替曲线**，当x轴上变化了Δx的时候这条**直线上对应y上的变化**。



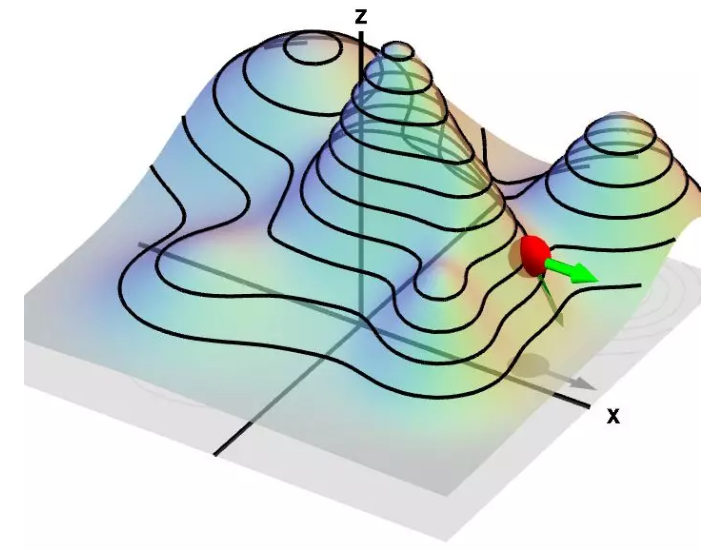
从这个图里我们可以看到：**Δy**的值是要比**dy**大一点点的，但是随着Δx或者dx的减小，它们的之间的差值会**急速减小**，比Δx减小的快得多，这个**差值**也是我们常说的**高阶无穷小**。**Δy**叫做函数从一点到另一点的**增量**，而**dy**则被叫做函数的**微分**，或者叫它的**线性主部**。**“以直（dy）代曲(Δy)”**是现代微积分的一个核心思想，从这个图里可见一斑。  
在微积分刚创立的时候，**莱布尼茨**把**dx**看作一个接近0但又不等于0的**无穷小量**，这种“**朴素**”的思维很符合直觉，而且用这种思想来计算也没什么错，但是它的基础是非常不牢固的。正是这种幽灵般的**无穷小量dx**（**时而可以看作是0，时而可以当除数约分**）导致了**第二次数学危机**，数学家们经过一个多世纪的抢救才给微积分找到了一个坚实的地基：**极限理论**。

这段内容不是太理解**没关系**，只要知道我们可以用**dy/dx**表示函数在M点的**导数**（在这里就是切线的**斜率**），可以用它来表示图像在这里**变化的快慢**就行了。  
 再回到人的身高随年龄变化的这个例子里来。人在各个年龄t都会对应一个身高y，这每个（t,y）就对应了图上的一个点，把这些点全都连起来大致就能得到这样一个图：

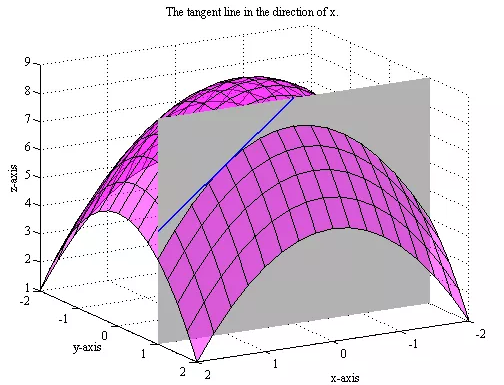


在**导数dy/dt大的地方，图形里的斜率很大，通俗的说就是曲线很陡峭；而导数很小的地方，对应的曲线就很平缓**。 在这个例子里，身高y是随着年龄t变化而变化，也就是说**给定任何一个t的值，都有一个y的值跟它对应**，我们就可以说身高y是一个关于年龄t的**函数**（**function**），记做**y=f(t)**。这个**f**自然就是函数的英文单词**function**的缩写，函数就是这样一种**对应（映射）**关系。在这里，身高y的值只跟年龄t**一个变量**相关，我们就说这是一个**一元函数**。但是，如果我们的问题稍微复杂一些，我的某个量不止跟一个量有关，而是跟多个量有关呢？

**04多个变量的偏导数**比如山的高度，一座山在不同点的高度是不一样的，而在地面上确定一个点的位置需要**经度**和**纬度**两个信息。或者，你可以自己在地面上建立一个坐标系，然后地面上每一个点都可以用**（x,y）**来表示。因为每一个位置（x,y）都对应了那个地方山的高度z，那么z就成了一个关于x和y的函数，记做**z=f(x,y)**。因为山的高度z需要**两个变量**x和y才能确定，所以我们说**z=f(x,y)**是一个**二元函数**。 再例如，我房间的每一个点都有一个温度，所以房间的温度T是一个关于房间内空间点的函数，而房间里每一个点的位置需要长宽高三个变量（x,y,z）才能确定。所以，我房间里的温度T是一个关于x,y,z的**三元函数**，记做**T=f(x,y,z)**。 我们再来回过头来看看**导数**，在**一元函数y=f(t)**里，我们用**dy/dt**来表示这个函数的导数，导数越大的地方曲线变化得越快。因为一元函数的图像是一条曲线，**曲线上的一个点只有一个方向（要么往前，要么往后，反正都是沿着x轴方向）**，所以我们可以直接用**dy/dt表示函数变化得有多快**。但是，如果这个函数不是一元函数，而是二元、三元等**多元函数**呢？

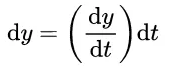


比如山的高度**z**是关于位置**x,y**的**二元函数z=f(x,y)**，这时候地面上的每一个点（x,y）都对应一个值，它的函数图像就是一个**曲面**（如山的表面），而不再是一条**曲线**。而曲面上的每一个点有**无数个**方向（前后左右360°都可以），x和y只是这无数方向中的**两个**，那我们要如何把握这无数个方向上的高度变化快慢呢？ 当然，我们不可能把这无数个方向都一一找出来，也没这个必要。一个平面上有无数个点，但是我只用x和y这两个方向组成的（x,y）就可以表示所有的点。同样的，虽然在函数曲面上的一点有无数个方向，不同方向函数变化的快慢都不一样的，但是我们只要把握了其中的两个，就能把握很多信息。 那么我们要如何表示函数z沿着x轴方向变化的快慢呢？直接用dz/dx么？好像不太对，因为我们的z是一个关于x和y的二元函数，它的变量有两个，你这样直接dz/dx合适么？合法么？但是，**如果我在考虑x轴方向的时候，把y看作一个常数，也就是把y轴固定住，这样函数z就只跟x相关了**，于是我们就把一个**二元函数（曲面）**变成了一个**一元函数（曲线）**。

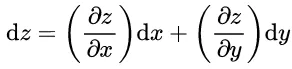


如上图所示，当我们固定**y=1**的时候，这个曲面就被这个y=1的平面切成了两半，而**平面与曲面相交的地方就出现了一条曲线**。这条曲线其实就是当我固定y=1的时候，函数z的图像，只不过这时候z只跟x一个变量有关，所以它变成了一个一元函数。于是，我们就可以仿照**一元函数**的方法定义**导数**了，也就是说：**我们在z=f(x,y)上无法直接定义导数，但是如果我们把y固定起来了，这时候二元函数的曲面就变成了一元函数的曲线，那么我们就在曲线上定义导数了**。这种把y的值固定在某个地方，然后计算函数在x轴方向上的导数，叫作关于x的**偏导数**，记做∂z/∂x。同样，如果我们把x的值固定，计算函数在y轴方向上的导数，那自然就是关于y的**偏导数**，记做∂z/∂y。

**05全微分**有了**偏导数**的概念，我们就有办法写出**dz**和**dx**、**dy**之间的关系了。在一元函数里，导数是dy、dt，我们自然就可以写出dy和dt之间的关系：

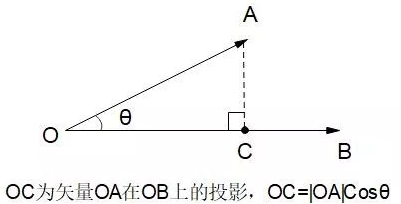


那么，到了二元函数**z=f(x,y)**的时候呢？我们想象有个人在山的一点要往另一点爬，我们让他先沿着x轴的方向爬（也就是固定住y的值），假设他沿x轴移动了dx。根据上面偏导数的定义，**如果我们把y 的值固定了，那么他在x轴方向上的导数是可以用偏导数∂z/∂x来表示，那么在他沿着x轴移动的时候，他上升的高度就可以写成（∂z/∂x）·dx**。同样，接下来他沿着y轴方向走的时候，他上升的高度就可以写成（∂z/∂y）·dy。我们把**这两个部分上升的高度加起来**，不就得到了最终爬山的高度变化**dz**的了么？也就是说：



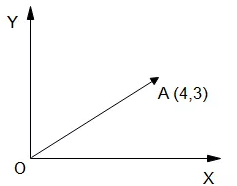
这个公式我们可以把它做作**全微分定理**，它其实是对上面一元函数导数关系的一个自然推广。它告诉我们，**虽然在曲面的一个点上有无数个方向，但是只要我们掌握了其中x和y两个方向上的偏导数，我们就能把握它的函数变化dz**。还原到爬山的这个例子上来，这个公式是在告诉我们：如果我知道你沿着x轴和y轴分别走了多少，然后我知道你这座山在x轴和y轴方向的倾斜度（即偏导数）是多少，那我就知道你爬山的纯高度变化有多少（又是几近大废话~）。 我们费了这么多劲就为了推出这个公式，那么这个公式里肯定隐藏了什么重要的东西。不过，现在这种形式还不容易看清楚，我们还得稍微了解一点**矢量分析**的内容，把公式拆成**矢量点乘**的形式，那就明显了。

**06再谈矢量点乘**关于矢量点乘的事情，我在[积分篇](http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIzODU2MzAyNg==&mid=2247484512&idx=1&sn=8f1019b05e3c8a154599c6d7b2290a8a&chksm=e9363fddde41b6cb7890257e631ba585bd9f18da553df1634c55cd58e88a73efd75a0bdbcaa8&scene=21#wechat_redirect)的**第六节**就已经说过一次了，因为电场的**通量Φ**就是**电场E**和**面积a**的点乘：**Φ=E·a**。因为**矢量**是**既有大小又有方向**的量，而我们小时候学习的乘法它只管大小不管方向，所以两个矢量之间就得重新定义一套乘法规则，而最常见的就是**点乘（符号为‘·’）**。 两个矢量**OA**、**OB**的**点乘**被定义为：**OA**·**OB**=|OA||OB|Cosθ（矢量的表示原本是在它头顶上加一个箭头，但是这里不方便这样表示，那就用**黑体**表示了）。它表示一个矢量**OA**在另一个矢量**OB**上的投影OC（OC=|OA| Cosθ）和另一个矢量的大小的乘积，可见两个矢量点乘之后的结果是一个**标量**（只有大小没有方向）。

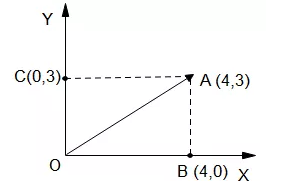


这些内容我在上一篇都已经说了，这篇文章我们再来看看**矢量点乘**的几个性质。 **性质1**：**点乘满足交换律**，也就是说**OA**·**OB**=**OB**·**OA**。这个很明显，因为根据定义，前者的结果是|OA||OB| Cosθ，后者的结果是|OB||OA| Cosθ，它们明显是相等的。 **性质2：点乘满足分配律**，也就是说**OA**·（**OB**+**OC**）=**OA**·**OB**+**OA**·**OC**。这个稍微复杂一点，我这里就不作证明了，当做**习题**留给大家~ **性质3**：**如果两个矢量相互垂直，那么它们点乘的结果为0**。这个也好理解，如果两个矢量垂直，那么一个矢量在另一个矢量上的投影不就是一个点了么？一个点的大小肯定就是0啊，0乘以任何数都是0。如果大家学习了三角函数，从**Cos90°=0**一样一眼看出来。 **性质4**：**如果两个矢量方向一样，那么它们点乘的结果就是他们大小相乘。**理解了性质3，理解4就非常容易了，从cos0°=1也能一眼便知。 此外要注意的是，点乘是**不满足结合律**的，也就是说**没有**（**OA**·**OB**）·**OC**=**OA**·（**OB**·**OC**），为什么？因为两个矢量点乘之后的结果是一个**标量**，你再让一个标量去**点乘**另一个矢量压根就没有意义，点乘是两个矢量之间的运算。 我们小学就开始学的**加法**、**乘法**满足**交换律、结合律、分配律**，而矢量的**点乘**除了不能用**结合律**以外，其它的都满足。我这样写是为了告诉大家：**点乘虽然是一种新定义的运算，但是它和我们平常接触的加法、乘法还是很类似的，大家不用对这种陌生的运算产生未知的恐惧**。

**07坐标系下的点乘**一个矢量有大小又有方向，我们通常是用一个箭头来表示的，箭头的方向就代表了矢量的方向，而箭头的长短就代表了矢量的大小。**如果我们这时候建立一个坐标系，把这个箭头的一端移动到坐标原点，那么箭头的另一端就会固定在坐标系的某个点上，这样的话，我们就可以用一个坐标点来表示一个矢量了**。



如上图，A点的坐标是（4,3），那么这个矢量**OA**就可以记为（4,3）。然后，我们把矢量**OA**沿着x轴y轴做一个分解：

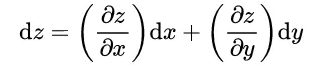


于是，我们的矢量**OA**就可以表示成：**OA**=**OB**+**OC**（矢量的**加法**就是把两个矢量首尾相连，所以**OB**+**BA**=**OA**，而**BA**=**OC**，所以有上面的结论）。这时候，如果我们在x轴上定义一个**单位向量x（1,0）**，那么OB的长度是x长度的四倍，而他们的方向又一样，所以矢量**OB**=4**x**。同样，在y轴上定义一个**单位向量y(0,1)**，那么**OC**=3**y**。那么，我们的OA就可以重新写成：**OA**=**OB**+**OC=**4**x+**3**y**。 这样的话，我任意一个矢量（x1,y1）都可以写成x1**x**+y1**y**。于是我就成功的把那个括号给丢了，把坐标表示的矢量变成了我们熟悉的加法运算。这里我们要特别区分：x1,y1是坐标，是数，是标量，而黑体的**x**,**y**代表的是**单位矢量**。那么矢量的点**乘就**可以写成这样：（x1,y1）·（x2,y2）=（x1**x**+y1**y**）·（x2**x**+y2**y**）。因为**点乘**是满足**分配律**（见**性质2**）的，所以我们可以把上面的结果直接完全展开成：x1x2**xx**+x1y2**xy**+y1x2**yx**+y1y2**yy**。 然后下面是重点：因为矢量**x**和**y**是分别沿着x轴和y轴的，所以它们是**相互垂直**的，而根据**性质3**，**两个矢量如果相互垂直，它们的点乘结果就是0**。也就是说，**xy**=**yx**=0，那么我们展开式的中间两项x1y2**xy**+y1x2**yx**就直接等于0。而根据**性质4，xx**=**yy** =1（因为x和y都是长度为**1**的单位矢量，自己跟自己点乘方向肯定一样）。 于是，我们就可以发现两个矢量**点乘**之后的结果只剩下第一项和第四项的系数部分了，也就是说：（x1,y1）·（x2,y2）=（x1**x**+y1**y**）·（x2**x**+y2**y**）= x1x2 +y1y2。

**08梯度的诞生**对于很多高中生来说，这只是一个熟悉得不能再熟悉的结论，但是我还是从头到尾给大家扎扎实实的推导了一遍。**长尾科技**不喜欢那种凭空突然冒出一个结论的感觉，所以我也希望读者看我的文章，每个结论得出来都是踏踏实实的，都是严密的逻辑推导出来的。这个式子有什么用呢？我们看看它的后面一半（**带箭头的x，y表示矢量，对应上面公式里的黑体x,y**）：



再对比一下我们上面推导出来的**全微分定理**：

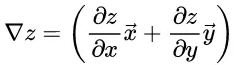


这个**全微分定理**的**右边**跟**矢量点乘**的**右边**是不是很像？都是两个量相乘然后把结果加起来。如果我们把dx看作x2，dy看作y2，两个偏导数看作x1和y1，那么我们就可以按照这个点乘的公式把这个**全微分定理**拆成两个**矢量点乘**的样子，即**dz**可以写成这样：



于是，**dz**就被我们拆成了**两个矢量点乘**的样子，我们再来仔细看看这两个矢量：**右边**的这个矢量的两个分量分别是dx和dy，这分别是我**沿着x轴和y轴分别移动无穷小的距离**，它们相加的结果用**dl**来表示: 

而**左边**呢，左边这个矢量的两个分量分别是函数z=f(x,y)对x和y的两个偏导数，这个我们也用一个新的符号来表示它：



绕了这么久，我们现在终于看到这个**▽符号**了，这个▽z的名字就叫：z的**梯度**。 把左右两边的矢量都单独拎出来之后，我们就可以把原来的式子写成更简单的样子：



这一段信息量有点大，对于没接触过矢量分析的人来说可能会稍有不适。我们前面绕那么大弯子讲全微分dz，讲矢量的点乘，都是为了引出这个式子，然后从中提炼出**梯度▽z**的概念。 搞懂了这些事情的来龙去脉之后，我们就来重点看看我们引出来的**▽z**，也就是z的**梯度**。

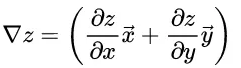
**09梯度的性质**这个梯度我们要怎么去看呢？首先▽z是一个**矢量**，是矢量就既有**大小**又有**方向**，我们先来看看**梯度的方向**。 上面我们已经得到了dz=▽z·dl，把dz表示成了两个矢量的点乘，那我们再根据矢量点乘的定义把它们展开，就可以写成这样：



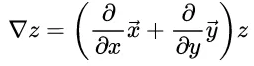
这个dz则表示山的高度的一个微小变化，那么，**沿着哪个方向走这个变化是最快的呢**？也就是说我**选择哪个方向会使得dz的变化最大**？ **Cosθ**表示的是直角三角形里邻边和斜边的比值，而斜边总是比两个直角边大的，所以它的最大值只能取1（极限情况，θ=0°的时候），最小为0（θ=90°）。而根据上面的**dz=|▽z||dl|cosθ**，显然你要让**dz取得最大值**，就必须让**cosθ取最大值1**，也就是必须让▽z和d**l**这两个矢量的夹角**θ=0°**。 两个矢量的夹角等于0是什么意思？那就是这两个矢量的**方向一样**啊。也就是说：**如果我们移动的方向（dl的方向）跟梯度▽z的方向一致的时候，dz的变化最大，我们高度变化最大**。这就告诉我们：**梯度▽z的方向就是高度变化最快的方向，就是山坡最陡的方向**。

假设你站在一个山坡上四处遥望，那个**最陡的地方就是梯度的方向，如果你去测量这个方向的斜率，那这就是梯度的大小**。所以，梯度这个名字还是非常形象的。

**10▽算子**我们再仔细看一下**梯度▽z**的表示:



这是一个**矢量**，但是它看起来**好像是▽和一个标量z“相乘”**，我们把这个z提到括号的外面来，这时候这个梯度▽z就可以写成这样：



所以，如果把▽单独拎出来，就得到了这样一个东西：

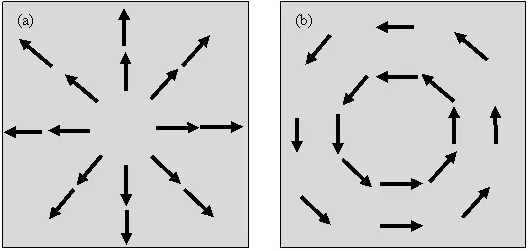


这个东西就值得我们玩味了，这是啥？▽z表示的是**二元函数z=f(x,y)**的**梯度**，也就是说我们先有一个函数z，然后我们把这个▽往函数z前面一放，我们就得到**z的梯度**。从函数z得到z的梯度的具体过程就是**对这个函数z分别求x的偏导和y的偏导**。 也就是说，单独的▽是这么个东西：**我▽自己本身并不是什么具体的东西，我需要你给我一个函数，然后我对你这个函数进行一顿操作（求x和y的偏导），最后返回一个这个函数的梯度给你**。这就像是有一个特定功能的**模具**：你给我一堆**面粉**，我一顿处理之后返回你一个**饼**。但是显然的，它并不是面粉，也不是饼，它单独的存在没有什么意义，它一定要跟面粉结合才能产生有具体意义的东西。

这种东西叫**算子**，▽就叫**▽算子**。基于**▽**算子的巨大影响力，它又有一大堆其他的名字：从它的具体功能上来看，它被称为**矢量微分算子**；因为它是**哈密顿**引入进来的，所以它又被称为**哈密顿算子**；从**读音**上来说，它又被称为**nabla算子**或者**del算子**。这些大家了解一下，知道其他人在谈论这个的时候都是在指▽算子就行了。

**11梯度、散度和旋度**▽算子不是一个**矢量**，除非你把它**作用**在一个函数上，否则它没啥意义。但是，它在各个方面的表现确实又像一个矢量，只要你把▽算子的“**作用**”看成矢量的“**相乘**”。 一个**矢量**一般来说有3种“**乘法**”：1、矢量**A**和一个标量a**相乘**：a**A。**比如我把一个矢量**A**大小变为原来的2倍，方向不变，那么这时候就可以写成2**A**。2、矢量**A**和一个矢量**B**进行**点乘**：**A·B。**这个点乘我们上面介绍很多了，**A·B**=|**A**||**B**|Cosθ，这里就不说了。3、矢量**A**和一个矢量**B**进行**叉乘**：**A×B**。这个叉乘跟点乘类似，也是我们单独针对矢量定义的另外一种乘法，**|A×B|**=|**A**||**B**|Sinθ。大家可以看到，这个叉乘跟点乘唯一的区别就是：**点乘**是两个矢量的大小乘以它们的**余弦值Cosθ**，叉乘是两个矢量的大小乘以它们的**正弦值Sinθ**（在直角三角形里，角的**对边**和斜边的比为正弦Sinθ，**邻边**和斜边的比值为余弦Cosθ）。

那么，同样的，我们的**▽算子**也有3种**作用**方式：1、▽算子作用在一个**标量**函数**z**上：▽z。这个▽z我们上面说过了，它表示函数z的**梯度**，它表示这个函数z变化最快的方向。2、▽算子跟一个**矢量**函数E**点乘**：**▽·E**。这就表示E的**散度**，我们开篇讲的高斯电场定律的左边就是电场E的散度，它就是表示成**▽·E**这样。3、▽算子跟一个**矢量**函数E**叉乘**：**▽×E**。它叫E的**旋度**，这个我们后面会再详细说。



这样，我们就以一种很自然的方式引出了这三个非常重要的概念：**梯度（**▽z**）**、**散度（▽·E）**和**旋度（▽×E）**。大家可以看到，▽算子的这三种作用跟矢量的三种乘法是非常相似的，只不过▽是一个算子，它必须作用在一个**函数**上才行，所以我们把上面的标量和矢量换成了**标量函数**和**矢量函数**。 我们在描述山的**高度**的函数**z=f(x,y)**的时候，不同的点（x,y）对应不同的山的高度，而山的高度只有大小没有方向，所以这是个标量函数，我们可以求它的**梯度▽z**。但是，**电场E**既有大小又有方向，这是一个矢量，所以我们可以用一个矢量函数**E=f(x,y)**表示空间中不同点（x,y）的电场E的分布情况。那么对这种**矢量函数**，我们就不能去求它的**梯度**了，我们只能去求它的**散度▽·E**和**旋度▽×E**。  
 为了让大家对这些能够有更直观的概念，我们接下来就来仔细看看电场的散度▽·E。

**12电场的散度**当我们把电场的散度写成**▽·E**这样的时候，我们会觉得：啊，好简洁！但是我们也知道▽算子的定义是这样的：



那么▽·E就应该写成这样：



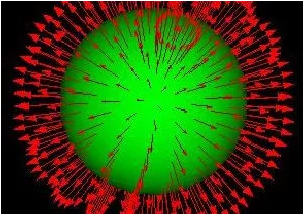
而我们知道电场E其实是一个矢量函数（不同点对应的电场的情况），那我们还是可以把E分解成x,y两个分量的和，这两个分量后面跟一个x和y方向的单位向量就行了。那么，上面的式子就可以写成这样：



然后，因为矢量点乘是满足**分配律**的，所以我们可以把他们按照普通乘法一样展开成四项。而x和y是垂直的单位向量，所以**x·y=y·x=0**，**x·x=y·y=1**，然后我们最后剩下的就只有这两项了（这一块的推导逻辑跟“坐标系下的矢量点乘”那一节一样，觉得有点陌生的可以再返回去看看那一部分）：



这就是电场E的散度的**最终表达式**，它的意思很明显：**我们求电场E的散度就是把矢量函数E分解成x和y方向上的两个函数，然后分别对它们求偏导，最后再把结果加起来就行了**。 为了让大家对这个有个更直观的概念，我们来看两个小例子： **例1**：求函数**y=2x+1**的导数。这个函数的图像是一条直线（不信的可以自己去找一些x的值，代入进去算算y的值，然后把这些点画在图上），它的斜率是2，也就是说导数是2。也就是说，对于**一次函数**（最多只有x，没有x的平方、立方……），**它的导数就是x前面的系数（2x前面的2），而后面的常数（1）对导数没有任何影响**。 **例2**：求电场**E**=2**x**+y**y**的**散度**。我们先来看看这个电场E，它在x方向上（2**x**）的系数是2，也就是说它的电场强度是不变的，一直都是2。但是，在y方向上（y**y**）的系数是y，也就是说当我沿着y轴越走越远的时候，这个系数y也会越来越多，这就表示y方向上的电场强度会越来越大。 所以E=2**x**+y**y**描述的是这样一个在**x轴方向上不变**，在**y轴方向上不断变大**的电场。要求这个电场的散度，根据上面的式子，我们得先求出电场的**偏导数**，那偏导数要怎么求呢？还记得我们是怎么得到偏导数这个概念的么？我们是固定y的值，也就是假设y的值不变，把y看作一个常数，这时候求得了对x的偏导数；同样，把x当做一个常数，求函数对y的偏导数。 那么，当我们求函数对x的偏导数∂E/∂x时，我们可以把y当作常数（就像例1中后面的1一样）。如果y是常数，x方向前面的系数又是2，也是常数，所以这整个就变成了一个常数（常数的导数为0），所以∂E/∂x=0。同样，当我们求y的偏导的时候，就把x都看成常数（导数为0），而y方向前面的系数为y（导数为1），所以∂E/∂y=0+1=1。 那么电场E的**散度▽·E**就可以表示成这两个**偏导数**的和：**▽·E**=∂E/∂x+∂E/∂y=0+1=1，也就是说，电场E的散度为1。 这虽然是一个非常简单的求电场散度的例子，但是却包含了我们求偏导，求散度的基本思想。通过这种方式，我们可以很轻松的就把电场E的散度**▽·E**求出来了。 补了这么多的数学和推导，我们现在有了一个定义良好，计算方便的**散度▽·**表达式了，但是，你还记得我们在开始讲到的**散度的定义**么？我们最开始是怎样引入散度的呢？ 我们是从**麦克斯韦方程组**的**积分形式**引入**散度**的。**高斯电场定律**说通过一个闭合曲面的电通量跟这个闭合曲面包含的电荷量成正比，而且这个曲面可以是任意形状。然后我们为了从宏观进入微观，就让这个**曲面不停地缩小缩小**，当它缩小到**无穷小**，缩小到只包含了一个点的时候，这时候我们就说**通过这个无穷小曲面的通量和体积的比**就叫**散度**（用**div**表示）。

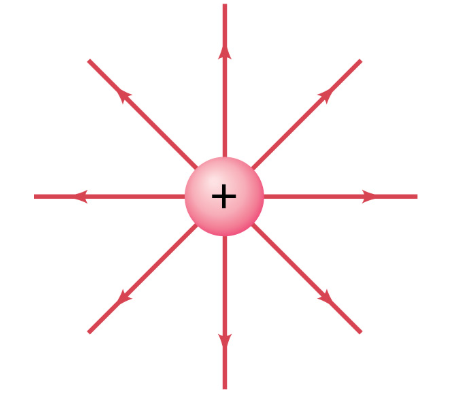


也就是说，我们最开始从**无穷小曲面的通量**定义来的**散度**和我们上面通过**偏导数**定义来的**散度▽·**指的是同一个东西。即：



**13为何这两种散度是等价的？**  
很多人可能觉得难以理解，这两个东西的表达形式和来源都完全不一样，它们怎么会是同一个东西呢？但是它们确实是同一个东西，那我们为什么要弄两套东西出来呢？在最开始我也说了，通过**无穷小曲面的通量**定义的散度很容易理解，跟麦克斯韦方程组的积分形式的通量也有非常大的联系，但是这种定义**不好计算**（上面的例2，你用这种方式去求它的散度试试？），所以我们需要找一种能方便计算、实际可用的方式，这样才出现了▽·形式的散度。 至于为什么这两种形式是等价的，我给大家提供一个**简单的思路**。因为这毕竟是面向大众的科普性质的文章，具体的证明过程我就不细说了。真正感兴趣的朋友可以顺着这个思路去完成自己的证明，或者来我的**社群**（回复“**社群**”即可）里讨论。 **证明思路**：我们假设有一个边长分别为Δx、Δy、Δz的小长方体，空间中的电场为E(x,y,z)，然后假设在这个长方体的正中心有一个点（x,y,z）,那么这个电场通过这个长方体**前面（**沿着x轴**正方向）**的**电场**就可以表示为：**Ex（x+Δx/2,y,z）**。Ex表示电场在x方向上的分量（因为我们是考虑长方体上表面的通量，所以只用考虑电场的x分量），因为中心坐标为（x,y,z），那么沿着x轴移动到表面的坐标自然就是（**x+Δx/2,y,z**）。而这个面的**面积**为**ΔyΔz**，那么通过前面的电通量就可以写成：**Ex（x+Δx/2,y,z）·ΔyΔz。** 同样的，通过长方体**后面**（沿着x轴的**负方向**）的**电通量**，就可以写成**Ex（x-Δx/2,y,z）·ΔyΔz**。因为这两个面的方向是**相反的**（前面后面，一个沿着x轴正方向，一个沿着负方向），所以，这两个沿着x轴方向的面的电通量之和**Φx**就应该是两者相减：**Φx=**（**Ex（x+Δx/2,y,z）·ΔyΔz**-**Ex（x-Δx/2,y,z）·ΔyΔz**）。 如果我们两边都除以**Δv**（其中，**Δv=ΔxΔyΔz**），那么就得到：**Φx/Δv=（Ex（x+Δx/2,y,z）**-**Ex（x-Δx/2,y,z））/Δx**，然后你会发现等式的右边刚好就是**偏导数**的**定义（**标准的极限定义**）**。也就是说，**电场通过沿着x轴的两个面（前后两面）的通量之和就等于电场的x分量对x的偏导数**：**Φx/Δv=**∂Ex/∂x。 同样的，我们发现电场沿着**y轴**的两面（左右两面）和**z轴**的两面（上下两面）的电通量之和分别就等于电场的y分量和z分量对y和z的**偏导**：**Φy/Δv=**∂Ey/∂y，**Φz/Δv=**∂Ez/∂z。然后我们把这三个式子**加起来**，**左边就是电场通过六个面的通量除以体积，也就是通过这个长方体的通量除以体积，右边就是我们▽·E的形式**，这分别就是我们上面两种**散度**的表示方式，**证明完成**。 这个证明一时半会没看懂也没关系，感兴趣的可以后面慢慢去琢磨。我只是想通过这种方式让大家明白**通过某一方向的两个面的通量**跟**这方向的偏导数**之间是存在这种对应关系的，这样我们就容易接受**无穷小曲面的通量**和**▽·这**两种散度的定义方式了。 这两种散度的定义方式各有所长，比如我们在判断某一点的散度是否为零的时候，我用第一个定义，去看看包含这个点的无穷小曲面的通量是不是为零就行了。**如果这一点有电荷，那么这个无穷小曲面的电通量肯定就不为零，它的散度也就不为零；如果这个无穷小曲面没有包含电荷，那这一点的散度一定为0**，这就是**高斯电场定律**的**微分方程**想要告诉我们的东西。但是，如果你要计算这一点的散度是多少，那还是乖乖的拿起▽·去计算吧。

**14散度的几何意义**此外，跟梯度一样，散度这个名字也是非常形象的。很多人会跟你说散度表示的是“**散开的程度**”，这种说法很容易让初学者误解或者迷惑，比如一个正电荷产生的产生的如下的电场线，它看起来是散开的，所以很多就会认为这里**所有的点的散度都是不为零的**，都是正的

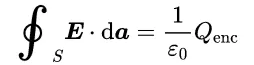


但是，根据我们上面分析，散度反映的是**无穷小曲面的通量**，这直接跟这一点**是否有电荷**对应。那么，这个图的中心有一个正电荷，那么这点的散度不为零没毛病，但是其他地方呢？其他地方看起来也是散开的，但是其他地方并没有电荷，没有电荷的话，其他点电场的散度就应该为0（因为这个地方无穷小曲面的通量有进有出，它们刚好抵消了），而不是你看起来的好像是散开的，所以为正。 也就是说，**对于一个点电荷产生的电场，只有电荷所在的点的散度不为0，其他地方的散度都为0**。我们不能根据一个电场看起来是散开的就觉得这里的散度都不为0，那么，这个**散开**到底要怎么理解呢？ 你可以这么操作：**你把电场线都想象成水流，然后拿一个非常轻的圆形橡皮筋放到这里，如果这个橡皮筋的面积变大，我们就说这个点的散度为正，反正为负**。如果你把橡皮筋丢在电荷所在处，那么这点所有方向都往外流，那么橡皮筋肯定会被冲大（散度为正）；但是在其他地方，**橡皮筋会被冲走，但是不会被冲大（**散度为0**），因为里外的冲力抵消了**。这样的话，这种**散开**的模型跟我们**无穷小曲面的通量**模型就不再冲突了。

**15方程一：高斯电场定律**  
说了这么多，又是证明不同散度形式（**无穷小曲面的通量**和▽·）的**等价性**，又是说明不同散度理解方式的**同一性**（**无穷小曲面的通量**和**散开的程度**），都是为了让大家从更多的维度全方位的理解**散度**的概念，尽量避开初学者学习散度会遇到的各种坑。理解了这个散度的概念之后，我们再来看**麦克斯韦方程组**的**第一个**方程——**高斯电场定律**的**微分形式**就非常容易理解了：

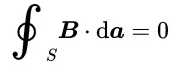


方程的左边**▽·E**表示电场在**某一点**的**散度**，方程右边表示**电荷密度ρ**和**真空介电常数**的比值。为什么右边要用**电荷密度ρ**而不是**电荷量Q**呢？因为**散度**是无穷小曲面的**通量**跟**体积**的比值，所以我们的电量也要除以体积，**电量Q**和**体积V**的比值就是**电荷密度ρ**。对比一下它的积分形式：



两边都除以一个体积V，然后曲面缩小到无穷小：左边的**通量**就变成了电场的**散度▽·E**，右边的**电荷量Q**就变成了**电荷密度ρ**，完美！ **麦克斯韦方程组**的**积分**形式和**微分**形式是一一对应的，理解这种对应的关键就是**理解散度（和后面的旋度）这两种不同定义方式背后的一致性**，它是沟通积分和微分形式的桥梁。理解了它们，我们就能在这两种形式的切换之间如鱼得水，我们就能一看到积分形式就能写出对应的微分形式，反之亦然。

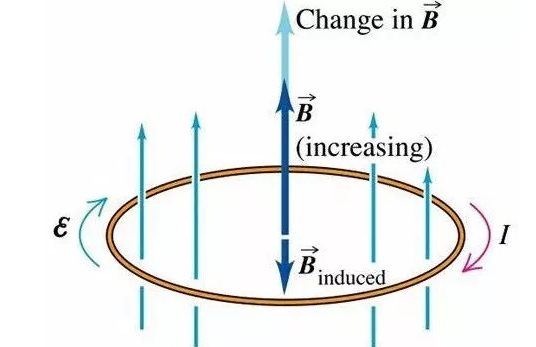
**16方程二：高斯磁场定律**理解了高斯电场定律的微分形式，那么**高斯磁场定律**的微分形式就能轻松写出来了。因为现在还没有找到磁单极子，磁感线都是闭合的曲线，所以**闭合曲面的磁通量一定恒为0**，这就是**高斯磁场定律积分形式**的思想：



那么，我们一样把这个曲面缩小到无穷小，通过这个**无穷小曲面**的**磁通量**就叫**磁场的散度**，那么方程的左边就变成了磁场的散度，而右边还是0。也就是说：**磁场的散度处处为0**。所以，**麦克斯韦方程组**的**第二个**方程——**高斯磁场定律**的**微分形式**就是：



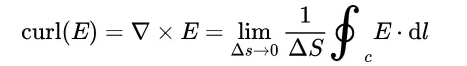
**17旋度**静电和静磁的微分形式我们已经说完了，那么接下来就是**磁如何生电**的**法拉第定律**了。关于**法拉第**是如何通过实验一步一步发现法拉第定律的内容，我在积分篇里已经详细说了，这里就不再多说。对**法拉第定律**的**基本思想**和**积分形式**的内容还不太熟悉的请先去看上一篇[积分篇](http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIzODU2MzAyNg==&mid=2247484512&idx=1&sn=8f1019b05e3c8a154599c6d7b2290a8a&chksm=e9363fddde41b6cb7890257e631ba585bd9f18da553df1634c55cd58e88a73efd75a0bdbcaa8&scene=21#wechat_redirect)的内容。 **法拉第定律**是法拉第对**电磁感应**现象的一个总结，他发现只要一个曲面的**磁通量**（B·a）发生了改变，那么就会在曲面的边缘感生出一个**旋涡状**的**电场E**出来。这个旋涡状的**感生电场**我们是用电场的**环流**来描述的，也就是**电场沿着曲面边界进行的线积分**。



用具体的公式表示就是这样：

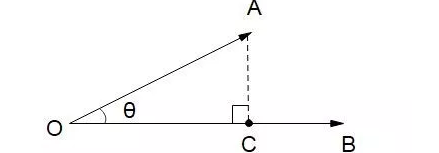


公式左边是**电场E的环流**，用来描述这个被感生出来的电场，而公式的右边是**磁通量的变化率**，用来表示磁通量变化的快慢。 这个法拉第定律是用积分形式写的，我们现在要得到它的微分形式，怎么办？那当然还是跟我们上面的操作一样：**从积分到微分，我把它无限缩小就行了**。那么，这里我们把这个非闭合曲面缩小缩小，一直缩小到无穷小，那么我们这里就出现了一个**无穷小曲面的环流**。 还记得我们怎么定义散度的么？**散度**就是通过**无穷小闭合曲面**的**通量**和闭合曲面**体积**的比值，而我们这里出现了一个无穷小非闭合曲面的环流，因为非闭合曲面就没有体积的说法，只有**面积**。那么，通过**无穷小非闭合曲面**的**环流**和曲面**面积**的比值，会不会也有是一个另外什么量的定义呢？ 没错，这确实是一个全新的量，而且这个量我们在前面稍微提到了一点，它就是**旋度**。我们把**▽算子**跟**矢量**做类比的时候，说一个矢量有三种乘法：跟标量相乘、点乘和叉乘。那么同样的，**▽算子**也有**三种**作用：作用在标量函数上叫**梯度**（**▽**z）,以**点乘**的方式作用在矢量函数上被称为**散度**（**▽·z**），以**叉乘**的方式作用在**矢量函数**上被称为**旋度**（▽×**z**）。 也就是说，我们让▽算子以**叉乘**的方式作用在**电场E**上，我们就得到了**电场E**的**旋度▽×E**，而这个旋度的另一种定义就是我们上面说的**无穷小非闭合曲面的环流和这个曲面的面积之比**。因为旋度的英文单词是**curl**，所以我们用**curl（E）**表示**电场的旋度**。所以，我们就可以写下下面这样的式子：

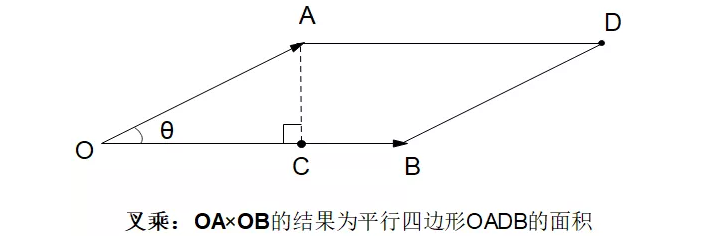


跟散度的两种定义方式一样，我们这里的**旋度**也有**▽×**和**无穷小曲面的环流**两种表述方式。在散度那里，我给大家证明了那两种散度形式等价性，在旋度这里我就不再证明了，感兴趣的朋友可以按照类似的思路去尝试证明一下。

**18矢量的叉乘**因为旋度是**▽算子**以**叉乘×**的方式作用在**矢量场**上，所以这里我们来简单的看一下**叉乘**。两个矢量**A**和**B**的**点乘**被定义为：**A·B**=|**A**||**B**|Cosθ，它们的**叉乘**则被定义为**|A×B|**=|**A**||**B**|Sinθ，其中θ为它们的夹角。单从这样看，它们之间的差别好像很小，只不过一个是乘以**余弦Cosθ**，另一个是乘以**正弦Sinθ**。 从它们的**几何意义**来说，**点乘**表示的是**投影**，因为|OA|Cosθ刚好就是OA在OB上的投影，也就是OC的长度。如下图：



那么**叉乘**呢？叉乘是|OA|Sinθ，这是AC的长度，那么**|A×B|**=|**A**||**B**|Sinθ=|AC||OB|，这是啥？这是**面积**啊，如果我以OA和OB为边长作一个平行四边形，那么AC就刚好是这个平行四边形的**高**，也就是说，矢量**A**和**B**的叉乘（**|A×B|=**|AC||OB|）就代表了**平行四边形OADB的面积**。

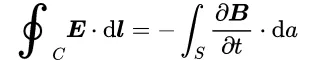


关于矢量的叉乘就说这么多，在前面讲矢量**点乘**的时候我还详细介绍了点乘的**性质**和**坐标运算**的方法，那是因为为了自然的引出**▽算子**，不得不讲那些。**叉乘**也有类似的性质和坐标运算的法则，这个在网上随便一搜或者找一本任意矢量分析的书都能找到。而且，你现在不会熟练的进行叉乘运算，并不会影响你对**麦克斯韦方程组**的**微分形式**的理解，这里了解一下它的定义和几何意义就行了。

**19方程三：法拉第定律**好，知道了矢量的叉乘，知道了**▽×E**可以表示**电场的旋度**，而且知道旋度的定义是：**无穷小非闭合曲面的环流和这个曲面的面积之比**。那我们再来回过头看一看**法拉第定律**的**积分形式**：



公式的左边是电场的环流，右边是磁通量的变化率，它告诉我们变化的磁通量会在曲面边界感生出电场。我在**[积分篇](http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIzODU2MzAyNg==&mid=2247484512&idx=1&sn=8f1019b05e3c8a154599c6d7b2290a8a&chksm=e9363fddde41b6cb7890257e631ba585bd9f18da553df1634c55cd58e88a73efd75a0bdbcaa8&scene=21" \l "wechat_redirect" \t "_blank)**里说过，磁通量（**B·a**）的变化可以有两种方式：**磁场（B）**的变化和**通过曲面面积（S）**的变化，我们上面这种方式是把这两种情况都算在内。但是，还有的学者认为只有磁场（B）的变化产生的电场才算法拉第定律，所以法拉第定律还有另外一个版本：



这个版本的把原来对整个**磁通量（B·da）**的求导变成了只对**磁感应强度B**的求偏导，这就把磁感线通过曲面面积变化的这种情况给过滤了。 在积分形式里有这样两种区别，但是在**微分形式**里就没有这种区分了。为什么？你想想我们是怎么从**积分**变到**微分**的？我们是让这个曲面不停的缩小缩小，一直缩小到无穷小，这个无穷小的曲面就只能包含一个没有大小的点了，你还让它的面积怎么变？所以我们的微分形式就只用考虑**磁感应强度B**的变化就行了（对应后面那个法拉第定律）。 我们现在假设把那个曲面缩小到无穷小，方程的左边除以一个**面积ΔS**，那就是**电场的旋度▽×E**的定义：



左边除了一个**面积ΔS**，那右边也得除以一个**面积**，右边本来是**磁感应强度的变化率**（∂B/∂t）和**面积**的乘积，现在除以一个面积，那么剩下的就是磁感应强度的变化率∂B/∂t了。那么，**麦克斯韦方程组**的**第三个**方程——**法拉第定律**的**微分形式**自然就是这样：

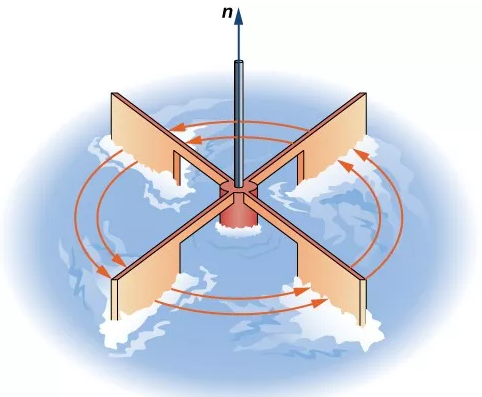


简洁吧？清爽吧？这样表示之后，**法拉第定律**的**微分形式**看起来就比积分形式舒服多了，而且它还只有这一种形式。直接从方程上来看，它告诉我们某一点**电场的旋度**等于**磁感应强度的变化率**。简单归简单，要理解这种公式，核心还是要理解左边，也就是**电场的旋度▽×E**。

**20旋度的几何意义**我们知道**旋度**的定义是**无穷小曲面的环流和面积的比值**，但是它既然取了旋度这个名字，那么它跟**旋转**应该还是有点关系的。我们变化的磁场感生出来的电场也是一个**旋涡状**的电场。那么，是不是只要看起来像漩涡状的矢量场，它就一定有旋度呢？

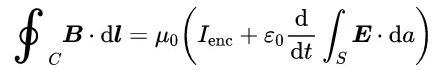


这个问题我们在讨论**散度**的时候也遇到过，很多初学者认为只要看起来发散的东西就是有散度的，然后我们通过分析知道这是不对的。一个点电荷产生静电场，只要在电荷处散度不为零的，在其他地方，虽然看起来是散开的，其实它的**散度**是**零**。如果我们放一个非常轻的橡皮筋在上面，除了电荷所在处，其它地方这个橡皮筋是不会被撑开的（即便会被冲走），所以其他地方的散度都为零。  
 同样的，在旋度这里，一个变换的磁场会产生一个旋涡状的电场，在旋涡的中心，在磁场变化的这个中心点这里，它的旋度肯定是不为零的。但是，在其它地方呢？从公式上看，其它地方的旋度一定为零，为什么？因为其他地方**并没有变化的磁场**啊，所以按照**法拉第定律**的**微分**形式，**没有变化的磁场的地方的电场的旋度肯定是0**。 跟**散度**一样，我们不能仅凭一个感生电场是不是旋转状的来判断这点旋度是否为0，我们也需要借助一个小道具：**小风车**。我们把一个小风车放在某一点上，如**果这个风车能转起来，就说明这点的旋度不为0**。你只要把风车放在**感生电场**中心**以外**的地方，就会发现如果外层的电场线让小风车**顺时针转**，内层的电场线就会让小风车**逆时针转**，这两股力刚好**抵消**了。最终风车不会转，所以旋度为0。

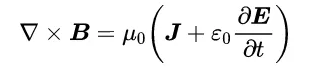


如果大家能理解**静电场**除了中心点以外的地方**散度**处处为零，那么理解**感生电场**除了中心点以外的地方**旋度**处处为零就不是什么难事。在非中心点的地方，**散度的流入流出两股力量抵消了，旋度顺时针逆时针的两股力量抵消了**，为什么刚好他们能抵消呢？本质原因还是因为**这两种电场都是随着距离的平方反比减弱**。如果它们不遵守**平方反比定律**，那么你去计算里外的散度和旋度，它们就不再为零。 关于**旋度**的事情就先说这么多，大家如果理解了旋度，对比法拉第定律的积分方程，要理解它的微分方程是很容易的。我前面花了很大的篇幅给大家讲了矢量的**点乘**和**散度**，作为类比，理解矢量的**叉乘**和**旋度**也不是什么难事，它们确实太相似了。

**21方程四：安培-麦克斯韦定律**讲完了磁生电的法拉第定律，我们麦克斯韦方程组就只剩最后一个电生磁的**安培-麦克斯韦定律**了。它描述的是**电流**和**变化的电场**如何产生**旋涡状的感生磁场**的，因为它电的来源有电流和变化的电场两项，所以它的形式也是最复杂的。方程的**积分形式**如下（具体过程见[积分篇](http://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzIzODU2MzAyNg==&mid=2247484512&idx=1&sn=8f1019b05e3c8a154599c6d7b2290a8a&chksm=e9363fddde41b6cb7890257e631ba585bd9f18da553df1634c55cd58e88a73efd75a0bdbcaa8&scene=21#wechat_redirect)）：

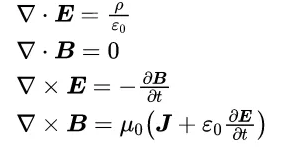


左边的**磁场的环流**，右边是**曲面包围的电流**（带enc下标的I）和**电场的变化率**。它告诉我们，如果我们画一个**曲面**，**通过这个曲面的电流和这个曲面里电通量的变化会在曲面的边界感生出一个旋涡状的磁场出来**，这个旋涡状的磁场自然是用**磁场的环流**来描述。 可以想象，当我们用同样的方法把这个曲面缩小到无穷小的时候，如果我们在方程的左右两边都除以这个曲面的面积，那么方程的左边就成了**磁场B的旋度▽×B**，右边的两项除以一个面积会变成什么呢？ **电通量的变化率**除以面积之后就剩下电场的变化率∂E/∂t，这个跟法拉第定律的磁通量变化率除以面积类似。那么**电流**（带enc的I）那一项呢？**电流I**除以**面积**得到的东西是什么？这里我们定义了一个新的物理量：**电流密度J**。很显然，这个**电流密度**J就是**电流**除以电流通过的曲面的**面积**（注意不是**体积**）。相应的，电流密度的单位是**A/m²**（安培每平方米）而不是A/m³。 这样，**麦克斯韦方程组**的**第四个**方程——**安培-麦克斯韦定律**的**微分形式**就自然出来了：



虽然还是有点长，但是相比积分形式已经是相当良心了，它告诉我们某一点**感生磁场的旋度▽×B**等于**电流密度J**和**电场变化率**∂E/∂t两项的叠加。其实它跟积分形式讲的都是一回事，都是在说电流和变化的电场能够产生一个磁场，只不过**积分形式**是针对一个**曲面**，而**微分形式**只是针对一个**点**而已。

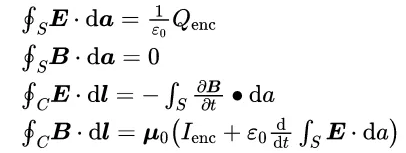
**22麦克斯韦方程组**至此，麦克斯韦方程组的**四个**方程：描述**静电**的**高斯电场定律**、描述**静磁**的**高斯磁场定律**、描述**磁生电**的**法拉第定律**和描述**电生磁**的**安培-麦克斯韦定律**的**微分形式**就都说完了。把它们都写下来就是这样：



**高斯电场定律**说**电场的散度跟这点的电荷密度成正比**。**高斯磁场定律**说**磁场的散度处处为0**。**法拉第定律**说**感生电场的旋度等于磁感应强度的变化率**。**安培-麦克斯韦定律**说**感生磁场的旋度等于电流密度和电场强度变化率之和**。 这里最引入注目的就是**▽算子**了，它以**点乘**和**叉乘**的方式组成的**散度▽·**和**旋度▽×**构成了**麦克斯韦方程组微分形式**的核心，这也是为什么我要花那么大篇幅从**偏导数**、**矢量**点乘一步步给大家引出**▽算子**的原因。也因为如此，微分篇的数学部分比积分篇要多得多得多，相对也要难以理解一些，所以大家要稍微有耐性一点。

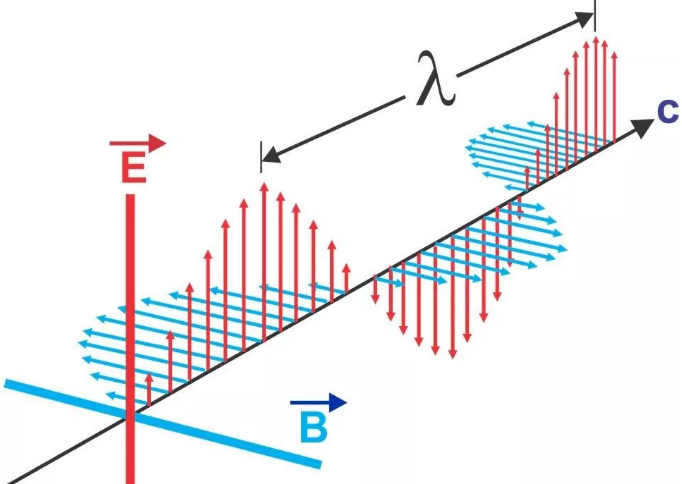
从思想上来讲，**微分**形式和**积分**形式表达的思想是一样的，毕竟它们都是麦克斯韦方程组。它们的差别仅仅在于**积分形式**是从**宏观**的角度描述问题，我们面对的**宏观上的曲面**，所以要用**通量**和**环流**来描述电场、磁场；而**微分形式**是从**微观**的角度来描述问题，这时候曲面缩小都**无穷小**，我们面对的东西就变成了一个**点**，所以我们使用**散度**和**旋度**来描述电场、磁场。 这一点是特别要强调的：**通量**和**环流**是定义在**曲面**上的，而**散度**和**旋度**是定义在一个**点**上的。我们可以说通过通过一个曲面的**通量**或者沿曲面边界的**环流**，但是当我们在说**散度**和**旋度**的时候，我们都是在说**一个点**的**散度**和**旋度**。

理解了这些，你再回过头去看看**麦克斯韦方程组**的**积分形式**：



我们只不过把定义在**曲面**上的**通量**和**环流**缩小到了**一个点**，然后顺势在这个点上用利用通量和环流定义了**散度**和**旋度**。因为定义散度和旋度分别还除了一个**体积**和**面积**，所以我们积分方程的右边也都相应的除了一个体积和面积，然后就出现了**电荷密度ρ**（电荷Q除以**体积V**）和**电流密度J**（电流I除以**面积S**），**电通量**和**磁通量**那边除以一个体积和面积就剩下电场强度E和磁感应强度B的变化率，仅此而已。 如果我们从这种角度去看麦克斯韦方程组的积分形式和微分形式，你就会觉得非常的自然和谐。给出积分形式，你一想散度和旋度的定义，就可以立马写出对应的微分形式；给出微分形式，再想一想散度和旋度的定义，也能立刻写出对应的积分形式。当我想从宏观入手的时候，我看到了**曲面**上的**通量**和**环流**；当我想从微观入手的时候，我也能立马看到**一个点**上的**散度**和**旋度**。积分和微分形式在这里达成了一种和谐的统一。

**23结语**到这里，麦克斯韦方程组的**积分篇**和**微分篇**就都说完了。小编在这两篇文章里先从零开始引出了**通量**，然后从通量的概念慢慢引出了**麦克斯韦方程组**的**积分形式**，再从积分形式用“**把曲面压缩到无穷小**”推出了对应的**微分形式**。整个过程我都极力做到“**通俗但不失准确**”，所有新概念的引出都会先做层层铺垫，绝不从天而降的抛出一个新东西。目的就是为了让多的人能够更好的了解麦克斯韦方程组，特别是让**中学生**也能看懂，能理解麦克斯韦方程组的美妙，同时也激发出他们对科学的好奇和热爱之心，打消他们对“高深”科学的**畏惧**之心：**看，这么高大上的麦克斯韦方程组，年纪轻轻的我也能看懂，也能掌握**~ 此外，麦克斯韦方程组是真的很美，你掌握的物理知识越多，就会越觉得它美。我也更希望**大家是因为它的美而喜欢这个方程组，而不仅仅是因为它的“重要性”**。我们也都知道，麦克斯韦写出这套方程组以后，就从方程推导出了**电磁波**，当他把相关的参数代入进去算出电磁波的速度的时候，他惊呆了！他发现这个**电磁波的速度**跟人们实验测量的**光速**极为接近，于是他给出了一个大胆的预测：**光就是一种电磁波**。



可惜的是，英年早逝的麦克斯韦（48岁去世）并没能看到他的预言被证实，人类直到他去世9年后，也就是1888年才由赫兹首次证实了“光是一种电磁波”。  
 最后，这篇文章主要参考了《**电动力学导论**》（格里菲斯）和《**麦克斯韦方程直观**》（Daniel Fleisch），大家想对麦克斯韦方程组做进一步了解的可以看看这两本书。

**来源：长尾科技，可关注微信公众号长尾科技**