1)

Determine a resposta natural para o sistema descrito pela seguinte equação de diferença: y[n] -(1/4).y[n-1] -(1/8).y[n-2] = x[n] + x[n-1].
Considere as condições iniciais: y[-1] = 0, y[-2] = 1

A resposta natural é a saída do sistema quando a entrada é zero:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y^{(n)}[n-k] = 0$$

Em tempo discreto, a resposta natural $y^{(n)}$ tem a forma:

$$y^{(n)}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i r_i^{\,n}$$

em que r_i são as N raízes da equação característica do sistema:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, r^{N-k} = 0$$

$$\Rightarrow \underset{a_0}{1} \cdot y[n-0] - \underset{a_1}{\frac{1}{4}} y[n-1] - \underset{a_2}{\frac{1}{8}} y[n-2] = 0, \quad N = 2$$

Eq. Característica:

$$\Rightarrow a_0 \cdot r^{2-0} + a_1 \cdot r^{2-1} + a_2 \cdot r^{2-2} = 0$$

$$r^2 - \frac{1}{4} r - \frac{1}{8} = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{+\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1+8}{16}}\right) = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore y^{(n)}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot c_1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot c_2$$

A partir das condições iniciais encontramos os coeficientes c1 e c2

$$\Rightarrow y[-1] = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot c_1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot c_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 2 \cdot c_2$$

$$y[-2] = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot c_1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot c_2 = 1 \Leftrightarrow 4c_1 + 16c_2 = 1$$

$$8c_2 + 16c_2 = 1$$

$$\therefore c_2 = \frac{1}{24}, \quad c_1 = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{\therefore y^{(n)}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{12}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{24}\right)}$$