ANÁLISE NUMÉRICA I
Primeiro Projeto: Envelope de Matrizes Esparsas

Amanda Rocha RA:212573
Augusto Andrade RA:213362
Felipe Gin RA:215628
Luan Corrêa RA:201672

Abril 2021

Introdução

O atual projeto da disciplina de Análise Numérica tem como objetivo analisar matrizes com certas estruturas especiais, como matrizes esparsas (matrizes com uma grande quantidade de zeros relativa ao número total de elementos dessa matriz), assim como a noção de envelope dessas matrizes, uma estrutura de dados razoavelmente simples que pode ser usada para armazenar a posição dos possíveis elementos não nulos de uma matriz esparsa.

No início, serão realizados alguns exercícios envolvendo a implementação de algoritmos específicos que buscam investigar sistemas lineares e estabelecer a noção de envelope por linhas e colunas nesse contexto. Depois, será discutido como a estrutura do envelope junto à fatoração LU (com e sem pivoetamento), possibilita métodos seguros e simples para a resolução de sistemas lineares que, logo em seguida, foram descritos na forma do algoritmo da eliminação Gaussiana adaptado. Por fim, para validar as discussões e os resultados anteriores, foi investigada a resolução de um problema estrutural simples que modela um caso de equilíbrio estático de treliças, um problema real da física.

Desenvolvimento

1. *Escreva um algoritmo para resolver o sistema linear $Ux = b$, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ por substituição regressiva supondo que a matriz U é triangular superior e está armazenada segundo a estrutura de envelope por colunas. Note que, nesse caso, para tirar proveito dessa estrutura é essencial trabalhar por colunas.*

   Solução: Denotaremos

   - $x(i) = i$-ésimo elemento do vetor x
   - $b(i) = i$-ésimo elemento do vetor b
   - $\mathsf{ENV}(i) = i$-ésimo elemento do vetor ENV e assim por diante.

   Assim escrevemos o seguinte algoritmo de substituição regressiva orientado por colunas modificado para receber o envelope de uma matriz segundo a estrutura de dados definida no enunciado:

Algoritmo 1: Resolver $Ux = b$ por substituição regressiva.

Entrada: Envelope da matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e vetor $b \in \mathbb{R}^n$

Inicialize: $x(i) = \dfrac{b(i)}{\mathsf{DIAG}(i)}, \ i = 1, 2, \dots, n.$
para $c = 0$ **até** n-1 **faça**
  j = n-c
  se *ENVcol(j)* $\neq$ *ENVcol(j+1)* **então**
    para i = *ENVcol(j)* **até** *ENVcol(j+1)-1* **faça**
      $aux = \mathsf{ENVlin}(i)$
      $x(aux) = x(aux) - \dfrac{\mathsf{ENV}(i)}{\mathsf{DIAG}(aux)} \cdot x(j)$
    fim
  fim
fim

Saída: Vetor $x \in \mathbb{R}^n$ onde $Ux = b$

2. *Suponha $A^{n\times n}$ é uma matriz esparsa, cuja porção triangular superior é armazenada em um* envelope orientado por colunas *e a porção triangular inferior é armazenada em um* envelope orientado por linhas, *o qual é definido de maneira análoga, com a troca adequada de papel entre as linhas e colunas.*

   *Para fixar idéias, suponha $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ com elementos não nulos indicados pelo símbolo * e localizados da seguinte maneira:*

$$A = \begin{bmatrix} * & & & & & & \\ & * & & & * & & \\ & & * & & & & \\ & * & & * & & * & \\ & & & & * & & \\ & * & & & & * & * \\ & & & & & & * \end{bmatrix}.$$

   Para tal matriz, explicite o envelope orientado por colunas *para sua porção triangular superior e o envelope* orientado por linhas *para sua porção triangular inferior, fazendo, nesse segundo caso, as adaptações necessárias na definição e nos vetores de índices correspondentes às linhas e colunas. Para tanto, exiba as estruturas de dados* $\boxed{\mathsf{DIAG}}$, $\boxed{\mathsf{ENV_{sup}},\mathsf{ENVcol_{sup}},\mathsf{ENVlin_{sup}}}$ e $\boxed{\mathsf{ENV_{inf}},\mathsf{ENVcol_{inf}},\mathsf{ENVlin_{inf}}}$

   Observe que os pares que compõem os envelopes contemplam a possibilidade de preenchimento de posições originalmente nulas ao se efetuar operações de redução por linhas sobre a matriz: a estrutura foi pensada para acomodar o pior caso.

   Solução: Definimos o *envelope orientado por linhas* da porção triangular inferior da matriz A de forma similar à forma que o enunciado definiu o envelope orientado por colunas, isto é, $(i,j), i > j$, pertence ao envelope de A se, e somente se, $a_{i,k} \neq 0$ para algum $k \leq j$. Assim temos:

   - $\mathsf{ENV_{inf}}$: Vetor real que armazena sequencialmente o envelope orientado por linhas da porção inferior da matriz A
   - $\mathsf{ENVlin_{inf}}$: Vetor de tamanho $n+1$ que armazena os apontadores para $\mathsf{ENV_{inf}}$, isto é, $\mathsf{ENVlin_{inf}}(i)$ em geral contém o índice da posição de $\mathsf{ENV_{inf}}$ que armazena o primeiro elemento não nulo da i-ésima linha da matriz. Caso a matriz não possua elementos distintos de zero na linha i abaixo da diagonal principal, então $\mathsf{ENVlin_{inf}}(i)$ apontará para a linha $i+1$. Além disso $\mathsf{ENVlin_{inf}}(n+1)$ aponta para a primeira posição livre após a armazenagem do envelope.
   - $\mathsf{ENVcol_{inf}}$: Armazena os índices das colunas de cada elemento do envelope, ou seja, $\mathsf{ENVcol_{inf}}(j)$ contém o índice da coluna do elemento armazenado em $\mathsf{ENV_{inf}}(j)$

   Os vetores DIAG, $\mathsf{ENV_{sup}}$, $\mathsf{ENVcol_{sup}}$, $\mathsf{ENVlin_{sup}}$ são definidos de maneira igual aos vetores DIAG, ENV, ENVcol, ENVlin do enunciado, respectivamente.

   Dessa forma, tomando a matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & a_{22} & & & a_{25} & & \\ & & a_{33} & & & & \\ & a_{42} & & a_{44} & & a_{46} & \\ & & & & a_{55} & & \\ & a_{62} & & & & a_{66} & a_{67} \\ & & & & & & a_{77} \end{bmatrix},$$

   obtemos

$$\mathsf{DIAG} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & a_{55} & a_{66} & a_{77} \\ \hline\end{array}$$

$$\mathsf{ENV_{sup}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{46} & a_{56} & a_{67} & \\ \hline\end{array}$$

$$\mathsf{ENVcol_{sup}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathsf{ENVlin_{sup}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline\end{array}$$

$$\mathsf{ENV_{inf}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_{42} & a_{43} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & \\ \hline\end{array}$$

$$\mathsf{ENVlin_{inf}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 7 & 7 \\ \hline\end{array}$$

$$\mathsf{ENVcol_{inf}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline\end{array}$$

3. *Supondo que a fatoração LU de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esteja bem definida, mostre que o envelope de L (por linhas) é igual ao envelope da parte triangular inferior de A, e que o envelope U (por colunas) coincide com o envelope da porção triangular superior de A.*

Solução:
Nessa questão devemos mostrar que, ao aplicar a fatoração LU em uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o envelope se conserva, de modo que:

(i) O envelope de L (por linhas) é igual ao envelope da parte triangular inferior de A;

(ii) O envelope de U (por colunas) é igual ao envelope da parte triangular superior de A.

Para nossa discussão, vamos considerar que a fatoração $A = LU$ existe e está bem definida. A partir disso, nossas suposições iniciais são:

(a) O conceito de envelope por colunas: um elemento $A_{i,j}$ pertence ao envelope se $A_{i,j} \neq 0$ ou $A_{k,j} \neq 0$ para algum $k < i$;

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é não-singular, então L e U são únicas e também estão em $\mathbb{R}^{n\times n}$;

(c) L é triangular inferior e $L_{i,i} = 1\ \forall\ i$. Ao mesmo tempo, U é triangular superior e $U_{i,i} \neq 0\ \forall\ i$.

Desse modo, começamos discutindo a parte (ii) aproveitando a Suposição (c). Sabendo que L é uma matriz triangular inferior com $L(1,:) = I(1,:)$, podemos facilmente encontrar uma relação entre a primeira linha de A e de U:

$$L_{1,j}U = A_{1,j} \ \Rightarrow\ 1U_{1,j} = A_{1,j} \ \Rightarrow\ U(1,:) = A(1,:)$$

Analisando o resultado anterior junto ao conceito de envelope, vemos que:

$$A_{1,j} = 0 \ \Leftrightarrow\ U_{1,j} = 0 \quad , \quad A_{1,j} \neq 0 \ \Leftrightarrow\ U_{1,j} \neq 0$$

Portanto, para todo $1 < j \leq n$,

$$A_{1,j} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{sup}} \ \Leftrightarrow\ U_{1,j} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{sup}}$$

Vamos analisar as demais linhas de A e de U:

$$A_{2,j} = L_{2,1}U_{1,j} + L_{2,2}U_{2,j} + ... + L_{2,n}U_{n,j}$$

Porém, como $L_{i,j} = 0\ \forall\ j > i$ e $L_{i,i} = 1\ \forall\ i$, então a equação anterior se reduz à

$$A_{2,j} = L_{2,1}U_{1,j} + U_{2,j}\ ,\ \forall\ 1 \leq j < n,$$

$$\begin{aligned} U_{2,j} = A_{2,j}\ +& \\ U_{1,j}\ [-L_{2,1}]& \end{aligned}$$

Para que $U_{2,j}$ pertença ao envelope, pela Suposição (a), temos 2 opções:

(1) $U_{1,j}$ pertence ao envelope e, nesse caso, $A_{1,j}$ pertence ao envelope e consequentemente $A_{2,j}$ também pertence;

(2) $U_{1,j} = 0$ e $U_{2,j} \neq 0$. Nesse caso, temos que $U_{2,j} = A_{2,j}$ portanto, $U_{2,j} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{sup}}$ de U $\Leftrightarrow A_{2,j} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{sup}}$ de A.

A partir daqui, a demonstração para as próximas linhas segue o mesmo raciocínio. Para a i-ésima linha, teremos:

$$\begin{aligned} U_{i,j} = A_{i,j}\ &+ \\ U_{1,j}\ [-L_{i,1}]\ &+ \\ U_{2,j}\ [-L_{i,2}]\ &+ \\ U_{3,j}\ [-L_{i,3}]\ &+ \\ U_{4,j}\ [-L_{i,4}]\ &+\ ...\ U_{i-1,j}\ [-L_{i,i-1}] \end{aligned}$$

Para que $U_{i,j}$ pertença ao envelope, temos i opções:

(1) $U_{1,j} \neq 0$ e, nesse caso,

i. Todos os $U_{i,j}$ pertencem ao envelope, para i = 1, ..., j-1
ii. $A_{1,j}$ pertence ao envelope e nesse caso todos os $A_{i,j}$ pertencem ao envelope para i = 1, ..., j-1

(2) $U_{1,j} = 0$, $U_{2,j} \neq 0$ e, nesse caso,

i. Todos os $U_{i,j}$ pertencem ao envelope, para i = 2, ..., j-1
ii. $A_{2,j}$ pertence ao envelope e nesse caso todos os $A_{i,j}$ pertencem ao envelope para i = 2, ..., j-1

.
.
.

(i) $U_{1,j} = U_{2,j} = ... = U_{i-1,j} = 0$, $U_{i,j} \neq 0$ e, nesse caso,

i. Todos os $U_{i,j}$ pertencem ao envelope, para i = i, ..., j-1
ii. $U_{i,j} = A_{i,j}$

Desse modo, fica claro que o elemento $U_{i,j}$ depende do elemento associado $A_{i,j}$ e dos (i-1) elementos de U acima dele. O elemento $U_{i-1,j}$ depende de $A_{i-1,j}$ e dos (i-2) elementos acima dele e assim por diante, até que se chegue na primeira linha não nula da coluna j de U, que depende única e exclusivamente da primeira linha não nula da coluna j de A. Sendo assim,

$$U_{i,j} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{sup}} \text{ de U} \Leftrightarrow A_{i,j} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{sup}} \text{ de A.}$$

Para demonstrar a parte (i), vamos adaptar a Suposição (a) para:

(a) O conceito de envelope por linhas: um elemento $A_{i,j}$ pertence ao envelope se $A_{i,j} \neq 0$ ou $A_{i,k} \neq 0$ para algum $k < j$.

Começamos por mostrar a primeira coluna de $A = LU$:

$$A_{i,1} = L_{i,1}U_{1,1} + L_{i,2}U_{2,1} + \ ... \ L_{i,n}U_{n,1}$$

Porém, nos aproveitando do fato de que U é triangular superior, sabemos que $U_{i,k} = 0 \ \forall \ i > k$. Portanto, reduzimos a primeira coluna à

$$A_{i,1} = L_{i,1}U_{1,1}, \ \forall \ 1 \leq i \leq n$$

Como, pela Suposição (c) $U_{i,i} \neq 0$, $L_{i,1} = A_{i,1}/U_{1,1}$. Desse modo,

$$A_{i,1} = 0 \ \Leftrightarrow \ L_{i,1} = 0 \quad , \quad A_{i,1} \neq 0 \ \Leftrightarrow \ L_{i,1} \neq 0$$

Vamos analisar as demais colunas de A e de L:

$$A_{i,2} = L_{i,1}U_{1,2} + L_{i,2}U_{2,2} + \ ... \ + L_{i,n}U_{2,n}$$

Porém, como $A_{i,2} = 0$ para todo $i < j$ e $U_{i,i} \neq 0$ para todo i, então a equação anterior se reduz à

$$A_{i,2} = L_{i,1}U_{1,2} + L_{i,2}U_{2,2} \ , \ \forall \ 2 \leq i \leq n$$

$$L_{i,2} = A_{i,2}/U_{2,2} + \\ L_{i,1}\left[\frac{-U_{1,2}}{U_{2,2}}\right]$$

Para que $L_{i,2}$ pertença ao envelope, temos 2 opções:

(1) $L_{i,1}$ pertence ao envelope e, nesse caso, $A_{i,1}$ pertence ao envelope e consequentemente $A_{i,2}$ também pertence;

(2) $L_{i,1} = 0$ e $L_{i,2} \neq 0$. Nesse caso, temos que $L_{i,2} = A_{i,2}$ portanto, $L_{i,2} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{inf}}$ de L $\Leftrightarrow A_{i,2} \in \mathsf{ENV}_{\mathsf{inf}}$ de A.

A partir daqui, a demonstração para as próximas colunas segue o mesmo raciocínio. Para a j-ésima coluna, teremos:

$$
\begin{aligned}
L_{i,j} = A_{i,j}/U_{j,j} \; + & \\
& L_{i,1}\ [-U_{1,j}/U_{j,j}] \; + \\
& L_{i,2}\ [-U_{2,j}/U_{j,j}] \; + ... \; + \; L_{i,j-1}\ [-U_{j-1,j}/U_{j,j}]
\end{aligned}
$$

Para que $L_{i,j}$ pertença ao envelope, temos j opções:

(1) $L_{i,1} \neq 0$ e, nesse caso,

  i. Todos os $L_{i,j}$ pertencem ao envelope, para j = 1, . . . , i-1

  ii. $A_{i,1}$ pertence ao envelope e nesse caso todos os $A_{i,j}$ pertencem ao envelope para j = 1, . . . , i-1

(2) $L_{i,1} = 0$, $L_{i,2} \neq 0$ e, nesse caso,

  i. Todos os $L_{i,j}$ pertencem ao envelope, para j = 2, . . . , i-1

  ii. $A_{i,2}$ pertence ao envelope e nesse caso todos os $A_{i,j}$ pertencem ao envelope para j = 2, . . . , i-1

.
.
.

(j) $L_{i,1} = L_{i,2} = ... = L_{i,j-1} = 0$, $L_{i,j} \neq 0$ e, nesse caso,

  i. Todos os $L_{i,j}$ pertencem ao envelope, para j = j, . . . , i-1

  ii. $L_{i,j} = A_{i,j}$

Ou seja, de modo análogo à matriz U, vimos que cada coluna de L depende da coluna equivalente em A, de um elemento (diferente de zero) da diagonal de U e das colunas à sua esquerda, até chegar na primeira coluna não nula de L, que só depende da primeira coluna não nula de A e de $U_{1,1} \neq 0$.

Nas duas induções que foram feitas acima, vimos que o primeiro elemento não nulo da coluna j de A, determina a posição do primeiro não nulo da coluna j de U e vice-versa. Assim como, o primeiro elemento não nulo da linha i de A, determina o primeiro elemento não nulo da linha i de L.

Desse modo, como os primeiros elementos não nulos são os que determinam os elementos contidos nos envelopes, os envelope devem ser equivalentes.

4. *Amplie o escopo do item anterior, supondo agora pivoteamento parcial, de modo que $PA = LU$, sendo $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz de permutação. Assumindo conhecida a matriz P, mostre que o resultado do item anterior se aplica aos envelopes L e U, relativamente aos envelopes das porções triangular inferior e superior de PA, respectivamente.*

   Solução:

   Agora, vamos avaliar a validade do resultado acima para uma fatoração LU com pivoteamento parcial. Para isso, vamos assumir que $PA = L'U'$, onde P é uma matriz de permutação conhecida e L', U' são os novos fatores da fatoração LU sobre PA.
   As propriedades que uma matriz PA deve satisfazer para que a demonstração anterior se verifique são:

   (a) $PA,\ L'\ e\ U'$ são quadradas $\in \mathbb{R}^{n\times n}$;

   (b) PA é não-singular, então $L'\ e\ U'$ são únicas.

   Ou seja, para que o envelope por colunas de U' seja equivalente ao envelope por colunas da porção superior de PA e o envelope por linhas de L' seja equivalente ao envelope por linhas de PA, basta mostrarmos que PA satisfaz as condições acima.

   Como a matriz P é uma matriz de permutação, o efeito que ela causa sobre A é equivalente à permutar as linhas de A. Nesse caso, a primeira propriedade já foi satisfeita, visto que PA mantém as mesmas dimensões de A.

   Agora, vamos avaliar a segunda propriedade. Nós sabemos que uma matriz A não-singular é definida quando $Ay = 0$ assume como única solução $y = 0$. Se PA foi obtida de A a partir de operações elementares, então

$$[A \mid 0] \;\Rightarrow\; [PA \mid 0],$$

pois operações elementares nas linhas de A não conseguem produzir elementos diferentes de zero em uma coluna composta por zeros, como é o caso da parte direita das matrizes aumentadas acima. Desse modo, sempre que A for não-singular, PA também o é.

Como PA satisfaz as condições iniciais demonstradas no item 3 e a fatoração $PA = L'U'$ está bem definida, podemos afirmar que as conclusões do item 3 definidas para A, também se aplicam para PA.

5. *Com o objetivo de resolver o sistema $Ax = b$, suponha conhecida a priori a matriz de permutação P, de modo que você trabalhará com $PAx = Pb$. Adapte o algoritmo da eliminação Gaussiana estudado em Cálculo Numérico, para construir os fatores L e U tais que $PA = LU$, trabalhando com os envelopes, orientados por linhas e por colunas, respectivamente. Para computar o vetor solução x, os sistemas triangulares envolvendo as matrizes L e U devem ser resolvidas explorando-se as respectivas estruturas de envelope em que foram armazenadas. Apresente primeiramente o esquema algorítmico completo* em palavras*, organizado em módulos (ou subrotinas) para facilitar tanto a compreensão quanto a programação, para então implementá-lo na linguagem de sua preferência* (`Matlab, Octave, Python`, etc.)

Solução:

Nessa questão, devemos criar um código (em Matlab) que, com o objetivo de resolver o problema Af=b, fatorando a matriz A em um sistema PA=LU, além de criar um sistema de envelopamento para as matrizes L e U encontradas. A partir disso encontraremos o vetor f utilizando f = $(LU)^{-1}Pb$. Primeiramente, para encontrar a matriz U, faremos uso do processo da eliminação de Gauss, que irá basicamente escalonar a matriz permutada PA em uma matriz tringular superior. Com isso, a matriz L será constítuida de acordo com a equação L = $PA(U)^{-1}$. O envelopamento da matriz triangular superior U será realizado a partir dos conceitos ilustrados nas questões anteriores. Para o envelopamento da matriz inferior L utilizaremos o mesmo processo, agora sobre a matriz transposta L^T e invertendo os conceitos de ENVlin e ENVcol. Veja a seguir os algoritmos utilizados:

FATORAÇÃO LU:
n = dimensão de A
se det(A) $\neq 0$
    U = PA
    i = 2:n
        k = i:n
            j = 1:n
                se $U_{i-1,i-1} \neq 0$
                    $U_{k,j} = U_{k,j} - \frac{U_{i-1,j}U_{k,i-1}}{U_{i-1,i-1}}$

finalmente, temos L = $PA(U)^{-1}$

ENVELOPAMENTO DE U:

x_{sup} = tamanho de ENV_{sup} e $ENVlin_{sup}$
j = 2:n
    i = 1:(j-1)
        se $U_{i,j} \neq 0$
                x_{sup}=x_{sup} + j - i
        stop

ie = índice de ENV_{sup}
il = índice de $ENVlin_{sup}$
ie = il = 0
j = 2:n
    i = 1:j
        se $U_{i,j} \neq 0$
            i = i:j
                ie=ie+1
                il=il+1
                $ENV_{sup}[1, ie] = U_{i,j}$
                $ENVlin_{sup}$[1,il = i

stop

tamanho de ENVcol = n+1
$ENVcol_{sup}$[1,1] = 1
$ENVcol_{sup}$[1,2] = 1

ic= índice de $ENVcol_{sup}$
ic = 3:(n+1)
    j = 2:n
        i = 1:(j-1)
            se $U_{i,j} \neq 0$
                $ENVcol_{sup}$[1,ic] = $ENVcol_{sup}$[1,ic-1] + j - i
            stop
            se i = (j-1) e $U_{i,j}$ = 0
                $ENVcol_{sup}$[1,ic] = $ENVcol_{sup}$[1,ic-1]

tamanho de $DIAG_U$ = n
i = 1:n
    $DIAG_U$[i] = $U_{i,i}$

ENVELOPAMENTO DE L:

L^T = tansposta de L
x_{inf} = tamanho de ENV_{inf} e $ENVcol_{inf}$
j = 2:n
    i = 1:(j-1)
        se $L^T_{i,j} \neq 0$
                x_{inf}=x_{inf} + j - i
        stop

ie = índice de ENV_{inf}
il = índice de $ENVcol_{inf}$
ie = il = 0
j = 2:n
    i = 1:j
        se $L^T_{i,j} \neq 0$
            i = i:j
                ie=ie+1
                il=il+1
                $ENV_{inf}[1, ie] = L^T_{i,j}$
                $ENVcol_{inf}$[1,il = i
          stop

tamanho de ENVlin = n+1
$ENVlin_{inf}$[1,1] = 1
$ENVlin_{inf}$[1,2] = 1

ic= índice de $ENVlin_{inf}$
ic = 3:(n+1)
    j = 2:n
        i = 1:(j-1)
            se $L^T_{i,j} \neq 0$
                $ENVlin_{inf}$[1,ic] = $ENVlin_{inf}$[1,ic-1] + j - i
            stop
            se i = (j-1) e $L^T_{i,j}$ = 0
                $ENVlin_{inf}$[1,ic] = $ENVlin_{inf}$[1,ic-1]

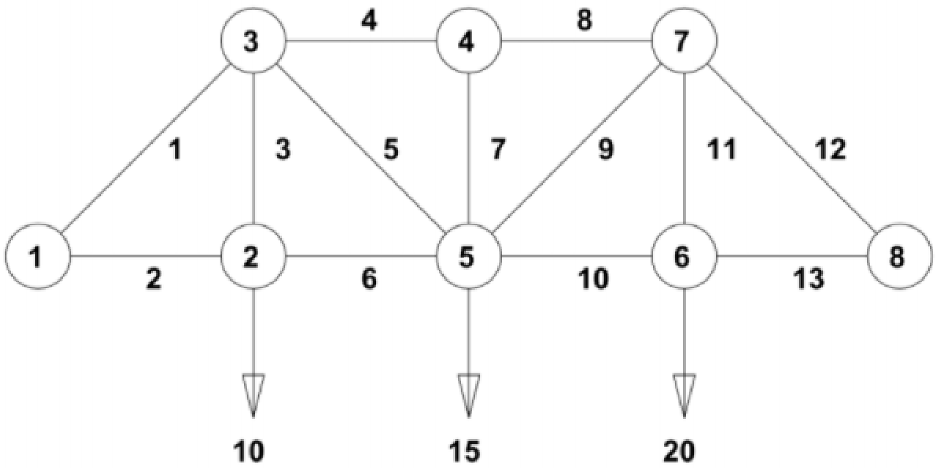
tamanho de $DIAG_L$ = n

i = 1:n
    $DIAG_L$[i] = $L_{i,i}$

ENCONTRANDO f (Af=b):

Af = b ⇒ PAf = Pb ⇒ LUf = Pb ⇒
f = $(LU)^{-1}Pb$

6. *Este item modela um problema estrutural simples, e visa validar a implementação do item anterior. A figura a seguir exibe uma estrutura plana, denominada treliça, com 13 barras (numeradas como indicado), conectados por 8 nós (numerados com círculos). Há cargas (em toneladas) aplicadas nos nós 2, 5 e 5, e o objetivo é determinar as forças atuantes em cada uma das barras da treliça.*



Para que a treliça fique em equilíbrio estático, o saldo de forças em cada um dos nós, tanto na horizontal quanto na vertical, deve ser nulo. Dessa maneira, podemos determinar a força atuante em cada barra igualando, em cada um dos nós, as forças horizontais à direita e à esquerda, assim como as forças verticais, para cima e para baixo. Para os 8 nós, produziríamos 16 equações, que superam as 13 forças a serem determinadas. Para que a treliça fique em equilíbrio estático, de modo que o sistema possua solução única, assumimos que o nó 1 está rigidamente preso tanto na vertical quanto na horizontal, e que o nó 8 só pode se mover horizontalmente (i.e. fixamos 3 graus de liberdade). Impondo o equilíbrio nas componentes horizontal e vertical, e definindo $\alpha = 1/\sqrt{2}$, obtemos o seguinte sistema de equações lineares para as forças nas barras f_i:

$$
\begin{aligned}
\text{Nó 2:}\quad & f_2 = f_6, \\
& f_3 = 10, \\
\text{Nó 3:}\quad & \alpha f_1 = f_4 + \alpha f_5, \\
& \alpha f_1 + f_3 + \alpha f_5 = 0, \\
\text{Nó 4:}\quad & f_4 = f_8, \\
& f_7 = 0, \\
\text{Nó 5:}\quad & \alpha f_5 + f_6 = \alpha f_9 + f_{10}, \\
& \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 = 15, \\
\text{Nó 6:}\quad & f_{10} = f_{13}, \\
& f_{11} = 20, \\
\text{Nó 7:}\quad & f_8 + \alpha f_9 = \alpha f_{12}, \\
& \alpha f_9 + f_{11} + \alpha f_{12} = 0, \\
\text{Nó 8:}\quad & f_{13} = \alpha f_{12}.
\end{aligned}
$$

Resolva esse sistema, da forma $Af = b$, utilizando a implementação desenvolvida no item 5 para fatorar PA, utilizando a matriz de permutação P definida pelo seguinte vetor de índices das linhas:

$$(3, 1, 2, 4, 5, 7, 6, 11, 8, 9, 10, 12, 13)$$

Solução:

O vetor dado representa a seguinte matriz permutação P:

$$
P = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Além disso, o sistema de nós apresentado pode ser representado pelo seguinte sistema $Af = b$:

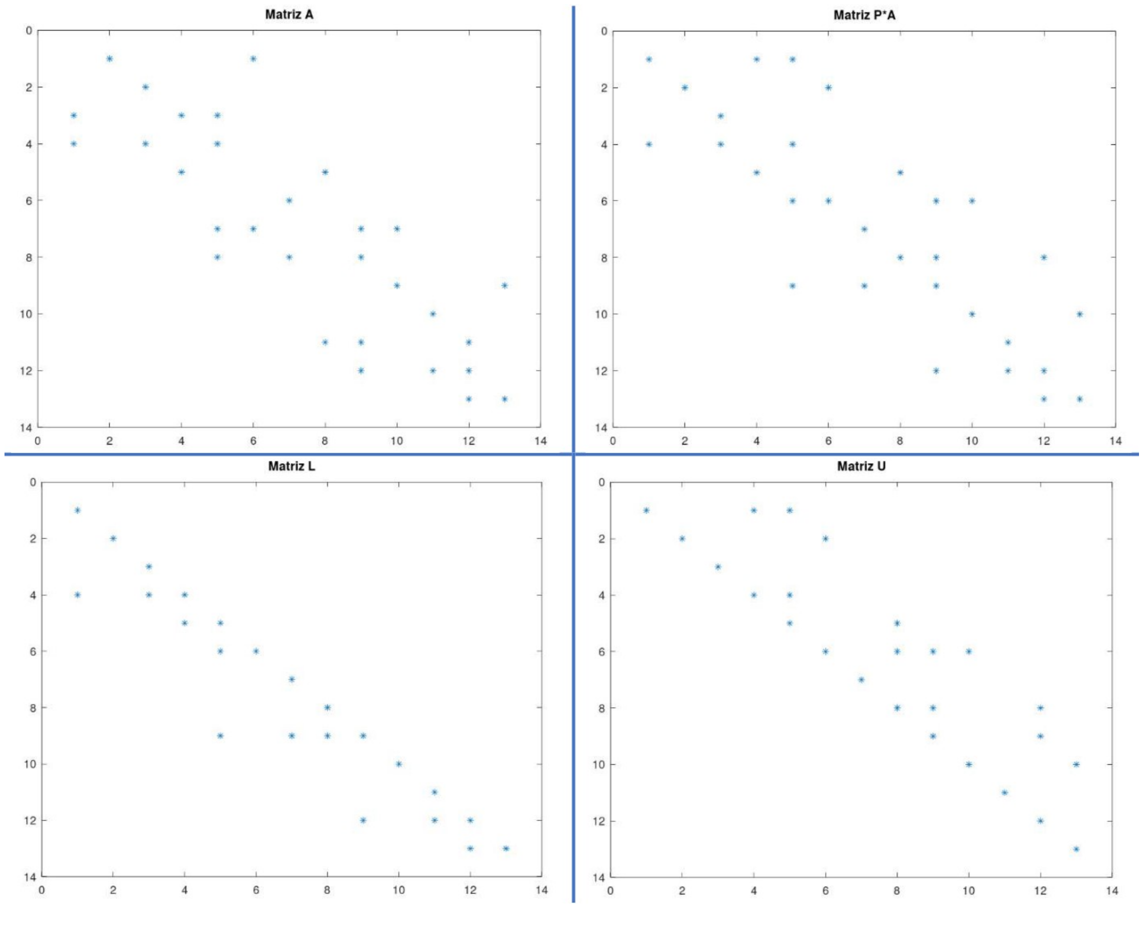
$$
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -1 & -\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

Nesse sistema, a linha 1 representa as forças atuando no nó 2 na horizontal, a linha 2 as forças atuando no mesmo nó porém na vertical, a linha 3 e 4 são as forças no nó 3, a linha 5 e 6 no nó 4 e assim por diante. Os números negativos representam as forças orientadas para a esquerda e para baixo, e os positivos as forças orientadas para direita e para cima. Além disso $\alpha = 1/\sqrt{2}$ pois todas as barras formam triângulos retângulos isósceles, ou seja, possuem 45° nos dois ângulos não retângulos, então $sen(45°) = cos(45°) = \alpha = 1/\sqrt{2}$.

Resolvendo o sistema $Af = b$, utilizando a implementação desenvolvida no item 5 para fatorar PA de forma que $PA = LU$, chegamos no seguinte resultado para o vetor f:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28.28 \\ -30 \\ 10 \\ -30 \\ 14.14 \\ -30 \\ 0 \\ -30 \\ 7.07 \\ -25 \\ 20 \\ -35.36 \\ -25 \end{bmatrix}$$

Além disso, com o comando "spy()"foi possível acompanhar o padrão de elementos não nulos das matrizes envolvidas no problema (A, PA, L e U):



Podemos ver que, como esperado, a matriz PA é uma permutação de linhas da matriz A, além disso, a matriz L é triangular inferior e a matriz U é triangular superior. Observando os envelopes de cada matriz, pode-se perceber que o envelope superior da matriz PA e da matriz U são iguais, e a matriz U possui alguns novos preenchimentos, devido ao processo de eliminação Gaussiana. Já entre a matriz PA e a matriz L, o envelope inferior é muito parecido, com exceção de um elemento que aparece em L na linha 9 / coluna 8.

DIAG_U =

$-\alpha$	-1	1	-1	2α	-1	-1	-1	$3\alpha/2$	-1	1	$-4\alpha/3$	1

$\mathsf{ENV}_{\mathsf{sup}}$ =

1	0	0	α	0	0	-2α	1	0	0	0	1	1/2	0	α	
0	$-\alpha$	1	0	0	0	α	$-\alpha/2$	0	0	1	0	0			

$\mathsf{ENVcol}_{\mathsf{sup}}$ =

1	1	1	1	4	8	12	12	15	18	22	22	26	29

$\mathsf{ENVlin}_{\mathsf{sup}}$=

1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	5	6	7	
6	7	8	6	7	8	9	8	9	10	11	10	11	12	

DIAG_L =

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\mathsf{ENV}_{\mathsf{inf}}$ =

1	0	-1	-1	-1/2	1/2	0	-1	1/2	-2/3	0	-1	3/4	

$\mathsf{ENVlin}_{\mathsf{inf}}$ =

1	1	1	1	4	5	6	6	6	10	10	10	13	14

$\mathsf{ENVcol}_{\mathsf{inf}}$ =

1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	

Conclusão

Com a realização deste projeto foi possível esclarecer a noção de envelopes de matrizes e de como podem ser utilizados com o objetivo de facilitar a resolução de problemas envolvendo a utilização de matrizes esparsas. Além disso, utilizamos esses conhecimentos juntamente ao método da eliminação Gaussiana e à utilização de matrizes de permutação para resolver sistemas lineares que modelam problemas reais. Todos os resultados obtidos foram de acordo com o esperado e foi possível então perceber a eficácia e utilidade destes métodos. Durante o processo, pudemos perceber que quanto maior a dificuldade em lidar com matrizes extremamente esparsas, mais se faz necessário o uso de análises específicas como a aplicação de ENVlinhas e ENVcolunas. Como a fatoração LU tende a depender de uma única e exclusiva matriz permutação P em casos extremos, concluímos que há uma relação direta entre L e ENVinferior, tal como U e ENVsuperior.

Referências

[1] Slides das aulas, disponíveis no Moodle da disciplina;

[2] WATKINS, David. **Fundamentals of matrix computations**, 2ed, John Wiley & Sons, Inc.;

[3] VALLE, Marcos. **Pivoteamento Parcial na Eliminação de Gauss e Fatoração LU.**. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/ valle/Teaching/2015/MS211/Aula7.pdf.

[4] POYRAZOGLU, Gokturk. **Matrix Multiplication Chapter III – General Linear Systems**, *Column Oriented Back Substitution*. Disponível em: http://best.eng.buffalo.edu/Research/Lecture Series 2013/General Linear Systems.pdf

Apêndice 1 : Código Matlab (questões 5 e 6)

```
a=(1/2)^(1/2); %alpha
A=[0    -1     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0
   0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
  -a     0     0     1     a     0     0     0     0     0     0     0     0
  -a     0    -1     0    -a     0     0     0     0     0     0     0     0
```

```
    0     0     0    -1     0     0     0     1     0     0     0     0     0
    0     0     0     0     0     0    -1     0     0     0     0     0     0
    0     0     0     0    -a    -1     0     0     a     1     0     0     0
    0     0     0     0     a     0     1     0     a     0     0     0     0
    0     0     0     0     0     0     0     0     0    -1     0     0     1
    0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0
    0     0     0     0     0     0     0    -1    -a     0     0     a     0
    0     0     0     0     0     0     0     0    -a     0    -1    -a     0
    0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0    -a     1];

b=[ 0
   10
    0
    0
    0
    0
    0
    15
    0
    20
    0
    0
    0];
P=[0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
   1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
   0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
   0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0
   0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0
   0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0
   0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0
   0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0
   0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0     0
   0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0     0
   0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0
   0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1     0
   0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     1];


n=size(A);
n=n(1);
PA=P*A;
if det(A)~=0
    U=PA;
    i=1;
    for r=randn(0,n-1)
        i=i+1;
        k=i-1;
        for r=randn(0,n-i+1)
            k=k+1;
            j=0;
            k3=U(k,i-1)/U(i-1,i-1);
            if U(i-1,i-1)==0
                k3=0;
            end
            for r=randn(0,n)
                j=j+1;
                U(k,j)=U(k,j)-U(i-1,j)*k3;

            end
        end
    end
    L=PA/U;
end


x_sup=1;%descrobrindo tamanho de ENV_sup e ENVlin_sup
j=1;
for r=randn(0,n-1)
    j=j+1;
    i=0;
    for r=randn(0,j-1)
        i=i+1;
        if U(i,j)~=0
            x_sup=x_sup+j-i;
            break
        end
```

```
    end
end
ENV_sup=zeros(1,x_sup);%gerando ENV_sup e ENVlin_sup
ENVlin_sup=zeros(1,x_sup);
ie=0;%indice de ENV
il=0;%indice de ENVlin
j=1;
for r=randn(0,n-1)
    j=j+1;
    i=0;
    for r=randn(0,j-1)
        i=i+1;
        if U(i,j)~=0
            for r=randn(0,j-i)
                ie=ie+1;
                ENV_sup(1,ie)=U(i,j);
                il=il+1;
                ENVlin_sup(1,il)=i;
                i=i+1;
            end
            break
        end
    end
end
ENVcol_sup=zeros(1,n+1);%gerando ENVcol_sup
ENVcol_sup(1,1)=1;
ENVcol_sup(1,2)=1;
ic=2;%indice de ENVcol_sup
j=1;
for r=randn(0,n-1)
    ic=ic+1;
    j=j+1;
    i=0;
    for r=randn(0,j-1)
        i=i+1;
        if U(i,j)~=0
            ENVcol_sup(1,ic)=ENVcol_sup(1,ic-1)+j-i;
            break
        end
        if i==(j-1) && U(i,j)==0
            ENVcol_sup(1,ic)=ENVcol_sup(1,ic-1);
        end
    end
end

DIAG_U=zeros(1,n);%gerando DIAG_U
i=0;
for r=randn(0,n)
    i=i+1;
    DIAG_U(i)=U(i,i);
end
DIAG_U

ENV_sup
ENVcol_sup
ENVlin_sup


Lt=L';%encontrando a transposta de L
x_inf=1;%descrobrindo tamanho de ENV_inf e ENVcol_inf
j=1;
for r=randn(0,n-1)
    j=j+1;
    i=0;
    for r=randn(0,j-1)
        i=i+1;
        if Lt(i,j)~=0
            x_inf=x_inf+j-i;
            break
        end
    end
end
ENV_inf=zeros(1,x_inf);%gerando ENV_inf e ENVcol_inf
ENVcol_inf=zeros(1,x_inf);
ie=0;%indice de ENV
il=0;%indice de ENVcol
```

```
j=1;
for r=randn(0,n-1)
    j=j+1;
    i=0;
    for r=randn(0,j-1)
        i=i+1;
        if Lt(i,j)~=0
            for r=randn(0,j-i)
                ie=ie+1;
                ENV_inf(1,ie)=Lt(i,j);
                il=il+1;
                ENVcol_inf(1,il)=i;
                i=i+1;
            end
            break
        end
    end
end
ENVlin_inf=zeros(1,n+1);%gerando ENVlin_inf
ENVlin_inf(1,1)=1;
ENVlin_inf(1,2)=1;
ic=2;%indice de ENVlin_inf
j=1;
for r=randn(0,n-1)
    ic=ic+1;
    j=j+1;
    i=0;
    for r=randn(0,j-1)
        i=i+1;
        if Lt(i,j)~=0
            ENVlin_inf(1,ic)=ENVlin_inf(1,ic-1)+j-i;
            break
        end
        if i==(j-1) && Lt(i,j)==0
            ENVlin_inf(1,ic)=ENVlin_inf(1,ic-1);
        end
    end
end

DIAG_L=zeros(1,n);%gerando DIAG_L
i=0;
for r=randn(0,n)
    i=i+1;
    DIAG_L(i)=L(i,i);
end
DIAG_L

ENV_inf
ENVlin_inf
ENVcol_inf

f= inv(L*U)*P*b;

spy(L);

figure(1)
spy(A)
title("Matriz A")
figure(2)
spy(P*A)
title("Matriz P*A")
figure(3)
spy(L)
title("Matriz L")
figure(4)
spy(U)
title("Matriz U")
```