DOI：10.13195/j.cd.2009.02.3.zhuchx.030
第 24 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 2009 年 2 月
Vol.24 No.2 Control and Decision Feb. 2009
文章编号: 1001-0920(2009)02-0161-09

分数阶控制研究综述

朱呈祥[1,2], 邹 云[1]
(1.南京理工大学 自动化学院, 南京 210094; 2.徐州师范大学 电气工程及自动化学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 作为控制科学与工程中一个新的研究领域,分数阶控制的研究愈来愈被关注.简要介绍了分数阶控制的数学背景和基本知识,对分数阶控制理论及应用(分数阶系统模型、系统分析、分数阶控制器、非线性分数阶系统、系统辨识)的研究作了总结、评述和展望.

关键词: 控制理论; 分数阶微积分(FOC); 分数阶系统
中图分类号: TP273 文献标识码: A

Summary of research on fractional-order control

ZHU Cheng-xiang [1,2], *ZOU Yun* [1]
(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. School of Electrical Engineering and Automation, Xuzhou Normal University, Xuzhou 221116, China. Correspondent: ZHU Cheng-xiang, E-mail: zhu0228@sohu.com)

Abstract: As a new study field of control theory and applications, the fractional-order control is attracted much attention recently. In this paper, an overview in this field is surveyed. The historical development and the basic knowledge of fractional-order control are introduced. The latest works of fractional-order control are summarized and reviewed, including mathematical model, system analysis, fractional-order controller, nonlinear fractional-order system and identification, etc. Some future trends in its further studies are perspected.

Key words: Theory of control; Fractional-order calculus(FOC); Fractional-order system

1 引 言

目前,几乎所有的以微分方程描述的控制系统,其微分均考虑为整数阶.实际上,许多物理系统因其特殊的材料和化学特性而展现出分数阶动力学行为.文献[1]认为:“实际系统通常大都是分数阶的”,采用分数阶描述那些本身带有分数阶特性的对象时,能更好地揭示对象的本质特性及其行为.之所以忽略系统的实际阶次(分数阶),主要是因其复杂性和缺乏相应的数学工具.近年来,这一“瓶颈”正被逐渐克服,相关成果不断涌现.当然,目前对分数阶系统的研究还不深入,主要集中在线性时不变领域,在系统建模、分析和综合及参数估计、系统辨识等方面均有涉及.

需指出的是:“分数阶”一词只是沿用历史的习惯称谓.从严格的数学意义上讲,应称之为“非整数阶”,理论上阶次可以是任意的,包括无理数,甚至复数.当然,“非有理阶次”的研究迄今未见报道.

广义而言,分数阶控制研究至少应涵盖 3 个方面: 1) 基于对分数阶对象的刻画更准确、简洁的目的而建立的分数阶系统模型及其分析; 2) 基于获得更优控制性能目的而选用分数阶控制策略; 3) 应用分数阶运算对信号、数据等进行处理.

自 20 世纪 60 年代分数阶微积分应用于控制领域以来,分数阶控制的研究经历了一段相当长的缓慢发展岁月,直到 20 世纪末出现了一些令人瞩目的成果,如: Oustaloup 等提出了 CRONE 控制原理[2]; Matignon 研究了分数阶系统的稳定性、可控性、可观性[3,4]; Podlubny 研究了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器[5].其中为分数阶控制理论的发展作出突出贡献的当属 Podlubny,标志性成果为文献[5,6].其基本结论、思想和方法影响深远,尤其是他提出了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器. $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的出现是一个里程碑,分数阶控制的意义在于对古典整数阶控制的普遍化[7].直到今天,Podlubny 仍活跃在分数阶控制研究的前沿.

收稿日期: 2007-12-04; 修回日期: 2008-04-09.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60474078).

作者简介: 朱呈祥(1971—),男,江苏徐州人,博士生,从事控制理论与控制工程的研究; 邹云(1962—),男,江苏宜兴人,教授,博士生导师,从事非线性建模与控制、应急控制理论与方法等研究.

目前国内还没有关于分数阶控制的系统完整的公开出版物. 由于分数阶控制具有相对独特的数学背景, 本文结合分数阶微积分等数学基础研究的简要介绍, 对分数阶控制理论及应用的研究作以总结、评述和展望.

2 数学背景及相关研究

2.1 分数阶微积分

分数阶微积分(FOC)是一个古老而又现代的课题. 它同整数阶微积分几乎同时起源于300多年前, 曾被许多大数学家涉及和探讨过, 然而长期以来几乎没有引起工程技术界的关注. 据文献[8-12]可知, FOC的起源最早(1695年)可追溯到Hospital与Leibnitz的讨论. 1819年Lacroix给出了第1个有意义的幂函数的分数阶微分定义; 1832年Liouvill给出了Liouvill第1公式和第2公式, 扩大了定义适用的函数类; Riemann(1847年)以此为基础作了补充, 将定义中函数一般化; 后来Letnikov(1872年)将他们二人的成果综合起来, 形成了第1个较为完备的定义, 即R-L定义, 目前仍为最常用的理论分析形式; 其间Grumwald(1867年)和Letnikov(1868年)用相同的方法(即Gamma函数和M-L函数)给出了适于离散化数值估算的解析定义式(G-L定义); 1967年Caputo给出了Caputo定义. Euler和Laplace等都曾涉及FOC, 运用各自的概念、方法导出了一些相关性质. 1974年, Ross组织了第1届FOC及其应用学术会议, 同年Oldham和Spanier联合推出了第1部关于FOC的著作[8], 详细总结了FOC, 目前仍是FOC理论和应用研究中十分重要的基础性文献.

随着现代科技的发展, 尤其是计算机的应用, FOC理论又为许多学科的发展提供了新的理论基础和数学工具. 同时, 一些在工程中必要的基础理论也得到了相应的研究和发展, 如FOC的可微性、运算规则、数值算法、变分问题等. 近年来, 将其应用于控制领域已引起了一些学者的研究兴趣. FOC数值方法及其算法的不断改进, 各种分数阶分析方法和控制策略以及分数阶控制器设计的不断提出, 更加推动了分数阶控制理论的应用和快速发展.

FOC算子可表示为

$$
{}_aD_t^{\alpha}=\begin{cases} \mathrm{d}^{\alpha}/\mathrm{d}t^{\alpha}, & R(\alpha)>0;\\ 1, & R(\alpha)=0;\\ I^{-\alpha}=\int(\mathrm{d}\tau)^{-\alpha}, & R(\alpha)<0. \end{cases} \tag{1}
$$

式中: a和t为运算上下限, α为阶次, $R(\alpha)$为α的实部. 数学家们根据自己的理解, 给出了不同的定义. 其中, 比较知名的有G-L定义、R-L定义和Caputo定义等[6,9,13,14], 这些定义的合理性和科学性已在实践中得到检验. G-L定义是从整数阶微分的定义出发, 归纳并扩展到分数阶而得到的FOC统一性表达式; R-L定义中的积分是由函数$f(t)$的n重积分可由卷积形式的单一积分(即Cauchy公式)表示成而扩展到分数重, 其微分可表示为$D^{\alpha}f(t)=D^nI^{n-\alpha}f(t)$, 即先积再微, 少积多微; Caputo微分可表示为$D^{\alpha}f(t)=I^{n-\alpha}D^nf(t)$, 即先微再积, 多微少积. 不同的定义要求满足的条件不相同, 其应用范围也不同. 对于控制系统而言, 以上3种定义要求的条件一般都满足, 而且初始条件为0, 因此实际上它们是等价的. 在实际应用中, 3者各有特点和优势, 例如G-L定义为离散化和数值计算提供了直接依据; Caputo定义让其Laplace变换式更为简洁, 有利于方程解的讨论. 对于几种定义的分析比较, 文献[9]作了比较详细的论述.

2.2 FOC的几何解释和物理意义

整数阶微积分有着清晰的几何解释和物理意义, 如微分表示斜率、速度; 积分对应面积、距离. 这些清晰易于理解的解释和意义有利于其在实际问题的研究中得以应用. 然而, 由于FOC本身的复杂性, 使得对其概念的理解比较困难, 导致了在实际应用中存在一定障碍. 目前的专著和文献也很少有这方面的内容, 因此可以说至今FOC还没有普适的、统一的物理意义和几何解释. 当然, 随着FOC在不同领域的应用和研究逐步深入, 将会越来越被关注, 相信这方面的成果会越来越多.

在已有成果中, Podlubny对分数阶积分的几何解释为"Moving Shadows on the Walls"(墙上移动的阴影)[15], 文献[16]给出了范例图示, 其合理性显而易见. 由分数阶积分的定义式[16]

$$
I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\phi_{\alpha}(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{2}
$$

相当于对$f(t)$作了一个积分变换$g(t)=I^{\alpha}f(t)$, 考虑权函数ϕ_{α}的性质

$$
\lim_{t\to 0^+}\phi_{\alpha}(t)=\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\phi_{\alpha}(t)=0,
$$

易得分数阶积分的物理意义: 如果将积分看作对某种量的存储, 那么分数阶积分是有记忆的存储, 近则储之, 对过去的渐渐遗弃.

北京大学大气物理系刘式达教授将分数阶导数描述为"天气与气候之间的桥梁"[17], 气候的分数阶导数是天气, 正是由于分数阶导数的存在, 使得气候较天气的记忆性好.

由分数阶微分的定义式可得出基本结论: 1) 输

入函数的初值以衰减形式加入到输出中; 2) 零初值下分数阶微分是卷积分的形式. 因此, 分数阶微分实际上是一个积分, 且也具有逐渐遗忘的特性(或时间衰减记忆) . 这一有趣的记忆功能和遗传特性正是分数阶微分算子的魅力所在, 也是 FOC 应用于系统控制的功用独特之处.

2.3　分数阶微分方程

分数阶控制理论是基于 FOC 发展起来的, 其数学上的核心问题是求解分数阶微分方程(FDEs) . 求解方法有解析法和数值法两类: 解析法主要是应用数学变换法得到方程解的解析表达式; 数值法是基于对分数阶算子进行离散化运算而得到方程的近似数值解. 许多学者对此作出了贡献, 其中作出奠基性工作的当属 Podlubny. 在其著作[6] 和论文[18-20] 中系统介绍了 FOC 的计算及 FDEs 的解法, 将 Laplace 变换等一些工程常用工具性知识引入到分数阶控制系统研究中, 对线性分数阶微分方程给出了解的存在性及唯一性定理, 并且给出了基于 Green 函数和 M-L 函数表示的解析解. 近年来, 国内学者刘发旺、徐明渝教授等对 FDEs 的研究也取得了不少成果, 薛定宇教授[13, 14] 对 FOC 和 FDEs 及分数阶控制等详细地给出了基本的求解计算、分析、设计和仿真方法, 是难得的工具性文献, 被国内研究者广为引用. 对于非线性的 FDEs, 目前仍是难题. 文献 [21, 22] 应用不动点定理讨论了解的存在性和唯一性. 一般而言, 解析解很难找到, 只能借助计算机求取数值解.

实际上, 对控制系统而言, 相比一般只着眼于具有理论分析价值的解析解, 寻求数值解法更具工程实际意义. 因此, 基于数值算法的相关研究正是目前的热点, 近年来出现了不少成果. 研究者给出了各具特色的解法[23-29], 并得到了很好的仿真验证, 其中有的已在工程中得到了成功应用.

3　分数阶系统数学模型

控制理论研究的主体是动力学系统, 系统建模在控制理论中具有基本的重要性[30]. 对系统动态过程进行数学描述, 其目的在于深入和定量地揭示系统行为的规律性和因果关系, 是系统分析和综合的基础.

整数阶线性系统理论是控制理论中研究最为充分、发展最为成熟和应用最为广泛的一个分支. 将整数阶线性系统理论中的建模方法平行扩展到分数阶线性系统是最为自然的做法. Matignon 的论文[3, 4] 中曾涉及多项式和状态空间两种模型, 文献[9, 16, 31] 较为系统地进行了这方面的研究, 关于模型的两类形式(时域模型和频域模型) 都有讨论. 尽管对模型的刻画形式有差异, 但都是基于整数阶线性系统模型扩展的思路和方法而给出的. 具体形式有: FDEs 描述、传递函数描述、状态空间描述、分数阶差分方程和分数阶离散传递函数描述、多项式描述等, 并给出了模型间转换的方法.

线性 SISO 系统的 FDEs 模型一般描述为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j D^{\beta_j} u(t), \tag{3}$$

其中 α_i 和 β_j 为阶次. 文献[9] 基于阶次的数值特征对分数阶系统进行了分类, 提出了同元次、非同元次等概念, 并给出了定义, 分析了所谓“同元次” 系统

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j D^{j\alpha} u(t) \tag{4}$$

的 FDEs 描述、传递函数描述和状态空间描述之间的关系. 而在文献[16] 中则称之为“同比阶次” 系统, 也有文献称之为“成比例” 系统. 推究可知, 只要是有理阶次的, 便可化成“同元次” 的形式, 只需对式(3) 中的 α_i, β_j 求取分母的最小公倍数 q, $q \in Z^+$, 显然元次 $\alpha = 1/q$. 因此, 如同整数阶情形一样, 可以获得如下分数阶状态方程模型:

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{5}$$

进而为系统稳定性、能控性、能观性等分析研究提供方便. 当然, 非有理阶次也可同“元”, 文献检索表明, 目前的研究仅限于此类所谓“有理同元” 系统. 对于含有多个阶次参数且阶次不规则情形, 式(5) 的维数往往过高. 此时可沿用通常的状态变量的一阶导数来建模, 状态方程将变为含有分数阶变量的形式, 从而达到降维目的.

4　系统分析

以系统数学模型为基础, 可以把研究工作进一步分为“分析” 和“综合” 两个基本部分. “分析” 又包括“定性分析” 和“定量分析”, 二者对研究系统的运动规律和结构特性具有同等重要的意义. 文献检索表明, 后者的研究成果比较丰富.

4.1　定性分析研究

定性分析着重于研究对系统性能和控制具有重要意义的基本结构特性, 包括稳定性、能控性与能观性、互质性等. 对系统结构和特性的分析, 既是对系统特性本身的揭示, 也是进一步研究系统综合与设计问题的需要.

文献[3, 4] 中, Matignon 对分数阶系统的稳定性、能控性与能观性的理论研究作了开创性工作[32], 给出并证明了基于式(5) 所描述系统的渐近稳定性、可控性、可观性的“结构性结论”, 分别是: $|\arg(\operatorname{spec} A)| > \alpha\pi/2$, $\operatorname{rank}[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] =$

n, rank $[C, CA, \cdots, CA^{n-1}]^{\mathrm{T}} = n$. 近年来, 一些学者也做出了卓有成效的工作[9, 16, 32-37].

稳定性是系统正常工作的前提, 是系统设计时需要考虑的最主要的因素之一. 对分数阶系统稳定性的分析远比整数阶复杂, 其中一个重要原因是分数阶系统的传递函数一般不是复变量 s 的有理函数, 因而目前还没有什么有效的多项式判据可以用来分析其稳定性. 文献[32] 直接从复分析中的辐角原理出发, 推导出了分数阶线性定常系统的两个稳定性判据: 分数阶奈奎斯特判据和分数阶对数频率判据, 不需求取闭环特征根即可判断系统是否稳定, 给出了有效性验证实例. 文献[33] 运用 Laplace 变换和留数定理讨论了分数阶线性定常系统内部稳定性和外部稳定性(BIBO) 条件, 并给出了其相互关系的3个推论. 文献[34, 35] 在对分数阶系统频率域分析研究的基础上, 提出了"扩展频率域法", 并据之改进和扩展了 Nyquist 判据, 能够直观判断任意阶次系统的稳定性. 文献[36] 以[34] 为基础, 提出并论证了"空间根轨迹法", 应用扩展 s 平面和 s^{u} 主黎曼空间, 讨论了分数阶系统根轨迹的运动特性, 为分数阶系统的分析研究提供了新的思路. 文献[37] 研究了一类延迟分数阶动力学系统的稳定性问题.

能控性和能观性概念对系统控制和系统估计问题的研究具有基本的重要性[30]. 博士论文[9, 16] 中, 基于式(5) 所描述的 SISO 分数阶 LTI 系统的模型, 利用 Cayley-Haimilton 定理及双参数 M-L 函数, 分析讨论了能控、能观条件并给出了证明. 关于系统的另一个重要性质 —— 鲁棒性的研究, 也有涉及, 但多是基于仿真结果等外部响应特征而直接给出结论, 其深入的内部机理等理论分析仍有待进一步研究. 文献[38] 首次解决了基于状态空间描述的一类系数矩阵不确定分数阶线性时不变系统(FO-LTI) 的鲁棒性检验问题, 给出了验证方法和两个例证以及具体的 Matlab 程序.

其他更深入的研究成果, 如可靠性、系统结构分解以及时变系统、离散系统等问题, 未见报道.

4.2 定量分析研究

现代科学技术研究方法趋于定量化. 定量分析的关注点是建立系统状态和输出相对于输入的因果关系的一般表达式, 作为分析系统的响应和性能的基础. 从数学的角度, 归结为求解系统数学模型(微分方程(组) 或差分方程(组) 等). 当应用关系式分析响应时, 将会面临繁多和复杂的计算, 需要借助计算机来完成. 目前, 相关研究成果比较丰富, 具体方法可归纳为解析法和数值法两大类.

解析法以显式形式给出了运动过程与系统结构和参数的依赖关系, 具体有两种情形:

1) 对于FDEs 模型, 式(3) 应用 Laplace 变换及其逆变换, 可求得系统输出的解析解[5, 6, 9, 31]

$$y(t) = L^{-1}[G(s)U(s)] = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (6)$$

Podlubny 给出了更为详细的单位脉冲响应 $g(t)$ 和单位阶跃响应的解析表达式[5, 6].

2) 对于式(5) 中的状态变量 $x(t)$ 的解析解为

$$x(t) = E_{\alpha,1}(At^{\alpha})x(0) + \int_0^t (t-\tau)E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha})Bu(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (7)$$

文献[9] 在状态空间描述中进一步讨论了状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 和 $x(t)$ 关系, 指出了与整数阶系统的区别. 但 $\Phi(t)$ 的特性有待进一步分析研究.

基于对传统整数阶系统的研究已相对成熟的考虑, 用整数阶系统去近似分数阶系统是一个基本的研究思路和方法. 于是, 问题便转化为用标准整数阶算子去逼近一般为无理数的分数阶算子, 这也同时解决了在现有软件(如 Matlab) 的计算与仿真中不允许直接进行分数阶算子运算的难题.

复频域的分数阶算子 s^{α}, 其有理化近似法有[9-14, 16]: 连分式展开(CFE)、Pade 近似、Oustlop 滤波法、Carlson 法、Matsuda 法、Charef 法、周期函数的 Fourier 级数展开法等.

显然, 解析算法的积分变换公式复杂, 计算量太大, 状态空间法维数过高, 有理化近似后的模型也因其高阶次、过于复杂而不便于求解和进一步分析. 实际上, 现有解析算法都是针对特殊形式的方程, 很多方程往往不存在解析解. 另一方面, 解析法的应用前提是原型函数为已知, 而在实际工程应用中常会遇到对已知数据求微积分的问题, 如系统参数辨识、状态估计、信号分析等. 因此, 正是由于解析法的局限性, 数值算法逾显必要, 更具工程实际意义. 因为现代控制是以计算机为主要实现工具, 其"实现" 的意义并非单指将系统付诸于实际运行, 还包含其分析及设计过程的"实现". 计算机科学的发展, 使得一些以前棘手的计算问题迎刃而解. 尽管如此, 研究既快速又适应于不同分数阶系统的数值算法仍是个充满魅力的课题.

数值法实质是对 FDEs 进行离散近似, 从而得到相应的近似数值解, 其核心问题是 FOC 算子的离散化. 具体有两种方法: 直接离散法和间接离散法.

直接离散法的基本思想是应用格栅函数 $f(nh)$ 和生成函数 $\omega(\zeta^{-1})$ 去逼近函数 $f(t)$ 的分数阶微积分[16], 即

$$D^{\alpha}f(t) \approx D^{\alpha}f(t) = h^{-\alpha}(\omega(\zeta^{-1}))^{\alpha}f(nh). \quad (8)$$

在控制理论中, 可用采样周期 T 取代 h, z 代替 ζ, 便可将函数 $f(t)$ 转化为序列 $f(nh)$ 的 z 变换, 即实现了离散化近似.

对应于不同的方法, 可以得到不同的生成函数[9-14, 16, 39]: Euler 后向差分法, Tustin 法(梯形法 or 双线性变换), Al-Alaoui 法等.

同样, 由于对应的生成函数为无理函数, 需要对其进行有理化近似处理. 常采用的方法是幂级数展开(PSE) 和 CFE 法. 将上述不同方法进行组合, 便得到形式各异的离散算法. 应用于式(3) 可得到分数阶系统的离散模型.

当然, 无论是 PSE 法还是 CFE 法, 其求解表达式仍为无穷多项. 考虑到各项的权系数具有明显的衰减特性, 故在实际应用时可采用有限项近似, 即短记忆法(SMP)[6].

将 PSE 与 Euler 后向差分法相结合, 其实质上与最为直接、广为应用的 G-L 定义离散法等价, 即

$$\mathrm{PSE}\{(1-z^{-1})^{\alpha}\} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}z^{-j}, \quad (9)$$

其中 $\binom{\alpha}{j}$ 为二项式系数. 此算法的精度是 $0(h)$[6]. 文献[9] 介绍了更高精度的权系数求解公式, 当然精度的提高是以增加计算量为代价的.

所谓间接法, 是基于由复频域微积分算子容易得到分数阶系统的频域特性, 先将 s^{α} 近似为连续域的整数阶传递函数结构算子, 再将近似的整数阶系统离散, 其实质是频域拟合法. 但频域拟合法不能保证其近似系统为稳定的最小相位系统. 文献[13, 14] 介绍了几种滤波算法, 如: FIR 滤波法、IIR 滤波法等, 并进行了比较分析, 同时指出了各自的优缺点及适用情况.

基于不同的应用目的, 近年来一些学者提出了不少各具特色的分数阶分析求解方法[23-29]. 其中文献[29] 总结了 14 种时域近似公式并进行了分析比较, 研究了阶次对方法选择的影响. 本文认为, 分数阶系统的数值仿真已得到较好解决.

5　分数阶控制器及其应用研究

"综合" 是"分析" 的反命题, 即根据系统模型和期望性能指标确定控制策略, 主要工作是求取控制律、设计控制器.

目前, 文献报道的具有代表性的分数阶控制器有 4 种: TID 控制器[40], CRONE 控制器[2], $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器[5] 和超前滞后校正补偿器[41]. 文献[42] 对 4 种控制器的概念、基本结构、原理、性能特点以及设计方法等作了比较详细的介绍和分析比较.

TID 控制器在结构上是以分数阶环节 $s^{-1/n}$ 取代传统 PID 中的比例环节, 实质上是 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的特殊形式. 其参数较少, 调节简便, 闭环对参数变化不敏感, 更抗干扰, 但系统的参数整定方法仍需提供和检验.

CRONE(法语"非整数阶鲁棒控制器" 缩写) 由 Oustaloup 提出[2], 因其基于人们习惯的设计方法(Bode 图、Nichols 图) 和清晰的解释而被认为是一个比较好的选择, 且已有很好的工业应用范例, 并得到了 Matlab 控制工具箱的支持[42].

$PI^{\lambda}D^{\mu}$(或 $PI^{\lambda}D^{\delta}$)[42] 控制器的传递函数为

$$G_C(s) = K_P + K_I/s^{\lambda} + K_D s^{\mu}, \quad (10)$$

其与工业应用中流行的常规 PID 控制器相比, 多了 2 个控制参数 λ和μ, 在设计上也多了 2 个自由度, 因此 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的提出为系统获得更优性能提供了新的可能性. 但是, 由于 I^{λ} 和 D^{μ} 导致 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 本身成为一个无穷维的滤波器, 其 5 个参数的整定和优化也变得困难得多.

超前滞后补偿器也是流行的控制方案. 分数阶超前滞后补偿器与 CRONE 和 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 一样具有优良的控制特性, 然而, 直观、系统的设计方法仍有待进一步研究. 其典型结构为[42]

$$C_r(s) = C_0[(1+s/\omega_b)/(1+s/\omega_h)]^{\gamma}. \quad (11)$$

分数阶控制器的出现是一个里程碑[7], 特别是 Podlubny 提出了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制, 使得研究者的视角在对分数阶控制基本理论建立和发展的同时, 转移到应用研究上, 尤其是更加关注 $PI^{\lambda}D^{\mu}$. 目前的研究热点主要集中在 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的算法改进与设计技巧及其工程应用上.

$PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的特性研究是一个基本问题. 文献[16] 基于 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 对控制参数和系统参数的变化均不敏感的仿真结果, 得出了鲁棒性强的结论. 文献[43] 研究表明: PID 和 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 对线性环节的控制效果差别不大, 但对非线性控制对象, 后者具有很强的抑制力, 可以实现对非线性环节较好的控制, 研究结论在气动位置伺服控制应用中得以验证[44]. 文献[45] 讨论了阶次变化对系统的影响. 本文认为, 基于某一具体对象的仿真结果所形成的结论还缺乏足够的说服力, 仍需在充分的理论分析基础上给出普适性的统一结论.

$PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的参数整定与优化是目前重点关注的研究课题. 如: 文献[46] 基于 ITAE 和 ISE 最优指标讨论了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 设计, 包括参数取值、近似算法阶次选择、鲁棒性和在位置伺服系统中的应用; [7, 47] 讨论了给定相位裕量和幅值裕量的 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 设计方法, 并与前人的方法作了对比分析; [48, 49] 应用 PSO 算法解决了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的参数优化设计; 遗传算法[50]: 具有密集和分散搜索机制的随机搜索算法

(RasID)[51]; 极点阶数搜索法[52] 等.

文献[53] 应用扩展频率域设计方法, 给出了具有新结构形式的超前滞后补偿器和分数阶 $P(ID)^{\mu}$ 控制器的设计步骤. 为简化设计, 将超前滞后两部分分离进行独立控制, $P(ID)^{\mu}$ 提供的零极点对系统性能的影响权重可由阶次调节.

分数阶控制的优势在于采用简单的分数阶控制器, 即可取得比常规控制器更优的动态性能和鲁棒性. 目前, 在不少工程领域已有成功应用分数阶控制的文献报道. 近期的有: 电力自动稳压器(AVR)[49], Active Car Body Suspension System[54], lightweight flexible manipulator 控制[55] 等.

6 其他相关分支中的研究

随着分数阶控制理论与应用研究的不断深入, 分数阶控制正逐渐向传统整数阶控制领域的其他分支渗透. 关于非线性系统, 一是传统非线性整数阶系统的分数阶控制策略研究; 二是对非线性分数阶系统的研究. 二者均有涉及, 但成果不多. 目前对于非线性分数阶微分方程的求解还未能很好地解决, 因此对于非线性分数阶系统, 现不存在能够直接分析研究的方法. 文献[56] 提出了一种通过 Simulink 仿真框图求解分数阶非线性系统的方法, 可以解决由一般 FOC 基础知识无法或很难求解的问题, 但也指出了仿真框图中滤波器近似模块存在局限性. 文献[57] 基于分数阶因素对电力系统的影响, 应用 FOC 理论建立了分数阶电力系统模型, 通过仿真分析了系统的混沌现象, 并基于 Backstepping 方法对分数阶混沌振荡进行控制. 文献[44] 讨论了传统方法很难实现精确控制的一种强非线性时变系统(气动位置伺服系统) 的分数阶控制策略, 在 Matlab/Simulink 下进行了建模仿真. 文献[58, 59] 对分数阶系统的混沌控制进行了分析研究.

系统辨识作为现代控制理论中的一个主要分支, 目前已成为一个非常活跃的学科. 文献检索表明, 对系统辨识的分数阶理论与方法研究很少, 相关成果都是基于将传统的整数阶辨识算法推广到分数阶的思路与做法[9, 10, 60, 61].

文献[62] 针对现有整数阶系统 H_∞ 控制方法对于分数阶系统不可行的问题, 提出了一种分数阶系统的 H_∞ 设计方法, 并进行了仿真验证. [63] 基于模糊逻辑自调整参数的 PID 控制器, 在难于建模的复杂控制对象中获得更优控制效果的思想, 构建了模糊分数阶 PID 控制器结构, 给出了实现过程. 仿真结果表明, 该控制器对非线性和参数不确定性具有较强的鲁棒性. [64] 将 FOC 的应用拓展到学习控制中; [65, 66] 讨论了在自适应控制中应用分数阶控制的理论与方法及其工程实例.

7 结 论

分数阶控制是现代控制理论中逐渐引起人们研究兴趣的一个分支. 由于运用传统控制理论和方法无法达到期望指标, 以及人们对控制最优化的不懈追求, 分数阶控制的相关研究显得愈为必要. 目前其研究尚处于起步走向逐渐深入的阶段, 还有许多工作要做, 比如: 分数阶非线性微分方程的求解和解的特性等数学基础研究, 分数阶非线性系统的稳定性、可靠性等问题, 分数阶时变系统和分布参数系统的分析研究, 分数阶系统时域和频域性能之间的数学联系, 分数阶控制器的设计理论与方法的深入研究(尤其是更为简单实用的参数整定方案研究), 系统辨识的分数阶理论与方法研究, FOC 在工程建模中的应用等.

可以预见, 随着分数阶控制理论的研究和发展, 其将成为控制领域的热点, 并向各分支及相关学科中快速渗透. 人们期待着更有价值的研究成果.

参考文献(References)

[1] Torvik P J, Bagley R L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real material[J]. J of Applied Mechanics, Transaction of the ASMF, 1984, 51(2): 294-298.

[2] Oustaloup A, Mathieu B, Lanusse P. The CRONE control of resonant plants: Application to a flexible transmission[J]. European J of Control, 1995, 1(2): 275-283.

[3] Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[C]. Computational Engineering in Systems and Application Multiconference. Lille: IMACS IEEE-SMC, 1996: 963-968.

[4] Matignon. Some results on control ability and obser-vability of finite-demensional fractional differential systems[C]. Computational Engineering in Systems and Application Multiconference. Lille: IMACS IEEE-SMC, 1996: 952-956.

[5] Podlubny I. Fractional-order systems and controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.

[6] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Acdemic Press, 1999.

[7] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771-776.
(Xue D Y, Zhao C N. Fractional order PID controller design for fractional order system[J]. Control Theory and Applications, 2007, 24(5): 771-776.)

[8] Oldham K B, Spanier J. The fractional calculus[M].

New York: Academic, 1974.

[9] 王振滨. 分数阶线性系统及其应用[D]. 上海: 上海交通大学, 2004.
(Wang Z B. Fractional order linear system and its application [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2004.)

[10] 李远禄. 分数阶微积分滤波原理、应用及分数阶系统辨识[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.
(Li Y L. FOC filter theory, application and fractional-order system identification [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.)

[11] 张邦楚. 基于分数阶微积分的飞航导弹控制系统设计方法研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2005.
(Zhang B C. The study on the control system of aerodynamic missile based on fractional calculus [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2005.)

[12] 蒲亦非. 分数阶微积分在现代信号分析与处理中应用的研究[D]. 成都: 四川大学, 2006.
(Pu Y F. Research on application of fractional calculus to latest signal analysis and processing[D]. Cheng Du: Sichuan University, 2006.)

[13] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 Matlabe 求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
(Xue D Y, Chen Y Q. The solution methods of advanced applied math using Matlab [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[14] 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2006.
(Xue D Y. Computer aided control system design using Matlab language [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.)

[15] Podlubny I. Geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation[J]. Fractional Calculus & Applied Analysis, 2002, 5(4): 357-366.

[16] 曾庆山. 分数阶控制系统的研究及其在 MCFC 中的应用[D]. 上海: 上海交通大学, 2004.
(Zeng Q S. Research on fractional order control system and its application in MCFC [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2004.)

[17] 刘式达, 时少英, 刘式适, 等. 天气和气候之间的桥梁——分数阶导数[J]. 气象科技, 2007, 35(1): 15-19.
(Liu S D, Shi S Y, Liu S S, et al. Bridge between weather and climate: Fractional derivative [J]. Meteorological Science and Technology, 2007, 35(1): 15-19.)

[18] Podlubny I. Solution of linear fractional differential equations with constant coefficients [M]. Transform Methods and Special Function. Singapore: SCT Publishers, 1995: 217-228.

[19] Podlubny I. Analytical solution of linear differential equations of the fractional [C]. The 14th World Congress on Computation and Applied Mathematics. Atlanta, 1994: 102-106.

[20] Podlubny I. Numerical solution of ordinary fractional differential equations by the fractional difference method[C]. Proc of the 2# Int Conf in Difference Equations. London, 1997: 507-516.

[21] Zhang S Q. The existence of positive solution for a nonlinear fractional differential equation [J]. Math Analysis Applied, 2000, 252(4): 804-812.

[22] Babakhani A, Daftardar-Gejji V. Existence of positive solutions of nonlinear fractional differential equation [J]. Math Analysis Applied, 2003, 278(2): 434-442.

[23] 胡亦郑, 刘发旺. 一类分数阶系统的数值解法[J]. 厦门大学学报, 2005, 44(3): 313-317.
(Hu Y Z, Liu F W. Nynerucal methods for a fractional-order control system [J]. J of Xiamen University, 2005, 44(3): 313-317.)

[24] 赵春娜, 薛定宇. 一种分数阶线性系统求解方法[J]. 东北大学学报, 2007, 28(1): 10-13.
(Zhao C N, Xue D Y. A solution to fractional order linear systems[J]. J of Northeastern University, 2007, 28(1): 10-13.)

[25] Chen Y Q, Vinagre Blas M. A new IIR-type digital fractional order differentiator[J]. Signal Processing, 2003, 83(11): 2359-2365.

[26] Chen Y Q, Vinagre Blas M, Podlubny I. A new discretization method for fractional order differentiators via continued fraction expansion[C]. DETC2003/VIB-48391. Chicago, 2003: 1-8.

[27] 薛定宇, 赵春娜, 潘峰. 基于框图的分数阶非线性系统仿真方法及应用[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(8): 2405-2408.
(Xue D Y, Zhao C N, Pan F. Simulation model method and application of fractional order nonlinear system[J]. J of System Simulation, 2006, 18(8): 2405-2408.)

[28] 蒲亦非, 袁晓, 廖科, 等. 现代信号分析与处理中分数阶微积分的五种数值实现算法[J]. 四川大学学报, 2005, 37(5): 118-124.
(Pu Y F, Yuan X, Liao K, et al. Five numerical algorithms of fractional calculus applied in modern signal analyzing and processing [J]. J of Sichuan University, 2005, 37(5): 118-124.)

[29] 李远禄, 于盛林. 分数阶微分器的实现及阶次对方法选择的影响[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(4): 505-509.
(Li Y L, Yu S L. Digital implementation of fractional order differentiators and its order influence on choice of

methods[J]. J of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 39(4): 505-509.)

[30] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 第2版: 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Zheng D Z. Theory of linear system[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua Unieversity Press, 2002.)

[31] 王振滨, 曹广益. 分数微积分的两种建模方法[J]. 系统仿真学报, 2004, 16(4): 810-812.
(Wang Z B, Cao G Y. Two system modeling methods using fractional calculus[J]. J of System Simulation, 2004, 16(4): 810-812.)

[32] 王振滨, 曹广益, 朱新坚, 等. 分数阶线性定常系统的稳定性及其判据[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(6): 922-926.
(Wang Z B, Cao G Y, Zhu X J, et al. Stability conditions and criteria for fractional order linear time-invariant systems[J]. Control Theory and Applications, 2004, 21(6): 922-926.)

[33] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶线性系统的内部和外部稳定性研究[J]. 控制与决策, 2004, 19(10): 1171-1173.
(Wang Z B, Cao G Y, Zhu X J. Research on the internal and external stability of fractional order linear systems[J]. Control and Decision, 2004, 19(10): 1171-1173.)

[34] 汪纪锋, 李元凯. 分数阶控制系统稳定性分析与控制器设计: 扩展频率域法[J]. 控制理论与应用, 2006, 25(5): 7-12.
(Wang J F, Li Y K. Stability analysis and controller design for fractional-order control systems: The extended frequency domain method[J]. Control Theory and Applications, 2006, 25(5): 7-12.)

[35] Wang J F, Li Y K. Frequency domain stability criteria for fractional-order control systems[J]. J of Chongqing University, 2006, 1(1): 30-35.

[36] 王萌, 汪纪锋, 李元凯. 分数阶控制系统的空间根轨迹分析法[J]. 重庆工学院学报, 2007, 21(8): 105-111.
(Wang M, Wang J F, Li Y K. Space root locus: Classical analysis method for fractional-order control systems[J]. J of Chong Institute of Technology, 2007, 21(8): 105-111.)

[37] Yangquan Chen, Mooore. Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems[C]. Proc of the 40th IEEE Conf, Decision and Control'01. Orlando: IEEE Press, 2001: 1421-1426.

[38] Yangquan Chen, Hyo-Sung Ahn, Podlubny I. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties[C]. Mechatronics and Automation, 2005 IEEE Int Conf. Canada: IEEE Press, 2005, 1: 210-215.

[39] 曹军义, 曹秉刚. 分数阶控制器离散方法的评估策略研究[J]. 西安: 西安交通大学学报, 2007, 41(7): 842-846.
(Cao J Y, Cao B G. Evaluation strategies of fractional order controllers discretization methods[J]. J of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(7): 842-846.)

[40] Lune B J. Three-parameter tunable tilt-integral-derivative (TID) controller[P]. US Patent US5371670, 1994.

[41] Raynaud H F, ZergaInoh A. State-space representation for fractional order controllers[J]. Automatica, 2000, 36(7): 1017-1021.

[42] Dingyu Xue, Yangquan Chen. A comparative introduction of four fractional order controllers[C]. Proc of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation. Shanghai, 2002: 3228-3235.

[43] 曹军义, 曹秉刚. 分数阶控制器的数字实现及其特性[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 791-794.
(Cao J Y, Cao B G. Digital realization and characteristics of fractional order controllers[J]. Control Theory and Applications, 2006, 23(5): 791-794.)

[44] 曹军义, 曹秉刚. 分数阶控制器在气动位置伺服控制中的应用研究[J]. 化工自动化及仪表, 2006, 33(2): 61-64.
(Cao J Y, Cao B G. Application of fractional order controllers in pneumatic position servo control[J]. Control and Instruments in Chemical Industry, 2006, 33(2): 61-64.)

[45] Zeng Q S, Cao G Y, Zhu X J. The effect of the fractional-order controller's orders variation on the fractional-order control systems[C]. Proc of 2002 Int Conf, Machine Learning and Cybernetics'02. Beijing, 2002, 1: 367-372.

[46] Dingyu Xue, Chunna Zhao, Yangquan Chen. Fractional order PID control of a DC-motor with elastic shaft: A case study[C]. Proc of the 2006 American Control Conf. Minneapolis, 2006: 3182-3187.

[47] Chunna Zhao, Dingyu Xue, Yangquan Chen. A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants[C]. Proc of the IEEE Int Conf on Mechatronics and Automation, Canada, 2005: 216-221.

[48] Nasser Sadati, Majid Zamani, Deyman Mohajerin. Optimum design of fractional order PID for MIMO and SISO systems using particle swarm optimization techniques[C]. Proc of Int Conf on Mechatronics. Kumamoto, 2007: 1-6.

[49] Karimi-Ghartemani Masoud, Zamani Majid, Sadati Nasser, et al. An optimal fractional order controller for an AVR system using particle swarm optimization

algorithm [C]. Power Engineering, 2007 Large Engineering Systems Conf. IEEE Press, 2007: 244-249.

[50] 李大字, 刘展, 靳其兵, 等. 基于遗传算法的分数阶控制器参数整定研究[J]. 控制工程, 2006, 13(4): 384-387.
(Li D Z, Liu Z, Jin Q B, et al. Fractional-order controller tuning based on genetic algorithm [J]. Control Engineering of China, 2006, 13(4): 384-387.)

[51] 李大字, 刘展, 靳其兵, 等. 分数阶控制器参数整定策略研究[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(19): 4402-4406.
(Li D Z, Liu Z, Jin Q B, et al. Study on optimization of fractional-order controller PID parameters[J]. J of System Simulation, 2007, 19(19): 4402-4406.)

[52] 严慧, 于盛林, 李远禄. 分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器参数设计方法: 极点阶数搜索法[J]. 信息与控制, 2007, 36(4): 445-450.
(Yan H, Yu S L, Li Y L, et al. A design method of the parameters of fractional order PID controller poles-orders searching method[J]. Information and Control, 2007, 36(4): 445-450.)

[53] 汪纪锋, 李元凯. 分数阶 $P(ID)^{\mu}$ 控制器和分数阶超前滞后校正器的设计[J]. 电路与系统学报, 2006, 11(10): 21-25.
(Wang J F, Li Y K. Design for two types of fractional-order controllers: $P(ID)^{\mu}$ controller and lead-lag compensator[J]. J of Circuits and Systems, 2006, 11(10): 21-25.)

[54] Tar J K, Bito J F, Bencsik A L, et al. Preliminary design of a fractional order controller for an active car body suspension system [C]. 6th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics. IEEE Press, 2008: 297-302.

[55] Monje C A, Ramos F, Feliu V, et al. Tip position control of a lightweight flexible manipulator using a fractional order controller [J]. IET Control Theory Applications, 2007, 1(5): 1451-1460.

[56] 薛定宇, 赵春娜. 基于框图的分数阶非线性系统仿真方法及应用[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(8): 2405-2408.
(Xue D Y, Zhao C N. Simulation model method and application of fractional order nonlinear system[J]. J of System Simulation, 2006, 18(8): 2405-2408.)

[57] 高心. 分数阶动力学系统的混沌、控制和同步的研究[D]. 西安: 电子科技大学, 2005.
(Gao X. Study on the chaos, it's control and synchronization in fractional order dynamic systems [D]. Xi'an: Xidian University, 2005.)

[58] Toossian Shandiz Heydar, Hajipoor Ahmad. Nonlinear control for synchronization scheme to chaotic fractional order chen-lee systems[C]. The 26th Chinese Control Conf. Zhangjiajie, 2007: 267-269.

[59] 高金峰, 张成芬. 基于非线性观测器实现一类分数阶混沌系统的同步[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2007, 4(2): 50-55.
(Gao J F, Zhang C F. Synchronization of a class of fractional-order chaotic systems by employing nonlinear observers[J]. Complex Systems and Complex Science, 2007, 4(2): 50-55.)

[60] Wang Z B, Cao G Y, Zhu X J. Identification algorithm for a kind of fractional order system[J]. J of Southeast University, 2004, 20(3): 297-302.

[61] Li Yuanlu, Yu Shenglin. Frequency domain identification of non-integer order dynamical systems [J]. J of Southeast University, 2007, 23(1): 47-50.

[62] 赵春娜, 潘峰, 薛定宇. 分数阶系统 H_{∞}控制器设计[J]. 东北大学学报, 2006, 27(11): 1189-1192.
(Zhao C N, Pan F, Xue D Y. H_{∞} controller design for fractional order system [J]. J of Northeastern University, 2006, 27(11): 1189-1192.)

[63] 曹军义, 梁晋, 曹秉刚. 基于分数阶微积分的模糊分数阶控制器研究[J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(11): 1246-1249.
(Cao J Y, Liang J, Cao B G. Fuzzy fractional order controller based on fractional calculus [J]. J of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(11): 1246-1249.)

[64] Chen, Kevin L More. On D^{a}-type iterative learning control[C]. Proc of the 40 IEEE Conf on Decision and Control. Florida, 2001: 451-456.

[65] Bilbao-Guillerna A, Sen M de la, Alonso-Quesada S. A multiestimation discrete-time adaptive control incorporating fractional order holds and multirate sampling with stabilization of the discrete plant zeros [C]. 2007 Mediterranean Conf on Control and Automation. Athens, 2007: 1-6.

[66] Rubio L, De la Sen M, Bilbao-Guillerna A. Discrete-time adaptive control of milling forces using fractional order holds by on-line adjustment of the correcting gain [C]. 16th IEEE Int Conf on Control Applications. Singapore: IEEE Press, 2007: 1330-1335.