Homework 4

10910QF 510300 Special Topics on Financial Engineering　王傳鈞　109062631

第一題

開始解題之前，我們先建立以下幾個基本的求解Black-Scholes PDE假設：

1. 選擇權價格可被單位的股票和單位的無風險資產 (risk-free assets) 完美複製 (perfect replication)，即
2. 利用單位的股票和單位的無風險資產建立的投資組合，具有自我融資 (self-financing) 的性質，即
3. 起始股價為、起始無風險資產價值為1

我們針對假設(1)的等式兩邊同取微分，就可以得到：

針對以上等式：左邊套用 Itô formula II、右邊套用假設(2)

代入題目對於的定義

整理式子

利用比較係數的技巧，我們可以得到以下兩條關係式：

* 整理式子(B)得知：
* 把以上的結果，代入假設(1)得知：
* 綜合以上和的結果代入式子(A)，來求解選擇權價格函數：

第五題

假設我們想知道的歐式call option價格函數是，另外題目的已知是。

套用Feynman-Kac theorem：

且

另外，，其中。

透過條件期望值的定義，我們可以把寫做積分的形式：

附註

，其中：

附註：雖然原本計算期望值需要由積分，但是因為只在時才不為零，如此一來條件期望值才不會等於零；因此，我們只需要積分那些會令的就好了。

第六題

已知：如果歐式call option價格函數是、歐式put option價格函數是，則put-call parity代表：，其中代表到期日、代表履約價 (exercise price)、代表在時間的股價。

因為課本第122頁已經提供歐式call option價格函數的封閉解，所以再套用以上put-call parity之後，稍作化簡即可得到歐式put option價格的封閉解：

，其中就是CDF of standard normal distribution

附註：因為標準常態分佈CDF的特性，所以