Homework 4

108B (1375) Global Positioning System　王傳鈞　0416047

第一題

(1) Selective Availability：這是一種人工加入的誤差，美國國防部 (DoD) 為了防止 GPS 系統被敵方陣營利用，造成國家安全的危機，因此刻意在廣播星曆、衛星時鐘當中加入隨機誤差，造成使用者的定位精度降低。因為 DoD 早已於 2000 年 5 月 1 日解除這項干擾，所以目前已無此項誤差。

(2) Anti-Spoofing：這是一種人工加入的效應，是針對 GPS 信號當中的 P code 進行加密，進而產生 Y code 來取代 P code。當這個效應啟動時，一般使用者無法正常使用 P code，只有知曉解密金鑰的用戶可以正常解讀 Y code。

第二題

(1) 週波未定值：利用載波觀測方程式測距，會需要非常精確的整數 ambiguity，才可獲得正確的測距結果。早期方法採直接將 ambiguity 當作未知數來求解，或用三次差分技術來消除之；目前多採用 widelane method、ambiguity function method、integer search method 等方法求解。但是，無論是哪一種方式，都伴隨著龐大的計算量，因此無法即時獲得結果。

(2) 週波脫落：如果 GPS receiver 持續鎖定某顆衛星的訊號，就能夠重複利用一開始算好的 ambiguity，加速得到連續該段時間內的高精度定位結果。然而，在實際操作時，衛星訊號可能會因為一些因素而暫時中斷，造成 GPS receiver 短暫停止計數 ambiguity，這種現象稱為週波脫落。衛星訊號中斷通常為被障礙物阻礙、儀器暫時故障、出現強烈干擾訊號等原因，這時候可以採用二次差分獲三次差分來偵測出週波脫落並修復之。

第三題

載波相位的差分大致分成三種方法：一次差分、二次差分、三次差分，以下分別詳細敘述細節與差異。

我們先回顧前一次作業提及的載波觀測方程式：

$$\begin{cases} \mathrm{L1} = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_1} + \lambda_1 N_1 + \varepsilon_{\mathrm{L1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1) \\ \mathrm{L2} = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_2} + \lambda_2 N_2 + \varepsilon_{\mathrm{L2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2) \end{cases}$$

附註：上述符號之意涵，請參閱前一次作業之說明。

(1) 一次差分：single differences (SD)，又可細分為地面 SD 與空中 SD。

- 地面 SD：同一時刻裡，兩部 GPS 接收儀對同一顆衛星進行觀測，將觀測方程式相減而得；目的是消除衛星時鐘差Δt_{sat} (圖一)。

  假設只觀測 L1 頻率，有兩部接收儀 A 與 B 接收衛星 P，我們可得：

  $$\begin{cases} \mathrm{L1}_A^P = r_A^P + c(\Delta t_A - \Delta t_P) + \Delta t_{trop}{}_A^P - \Delta t_{ion_1}{}_A^P + \lambda_1 N_1{}_A^P + \varepsilon \\ \mathrm{L1}_B^P = r_B^P + c(\Delta t_B - \Delta t_P) + \Delta t_{trop}{}_B^P - \Delta t_{ion_1}{}_B^P + \lambda_1 N_1{}_B^P + \varepsilon \end{cases}$$

  兩式相減：$\Delta \mathrm{L1}_{AB}^P = \Delta r_{AB}^P + c\Delta t_{AB} + \Delta t_{trop}{}_{AB}^P - \Delta t_{ion_1}{}_{AB}^P + \lambda_1 \Delta N_1{}_{AB}^P + \varepsilon$

- 空中 SD：同一時刻裡，一部 GPS 接收儀對二顆不同衛星進行觀測，將觀測方程式相減而得；目的是消除接收儀時鐘差Δt_{rec}。

  假設接收儀 A 只觀測衛星 P 和 Q 的 L1 頻率，我們可得：

  $$\begin{cases} \mathrm{L1}_A^P = r_A^P + c(\Delta t_A - \Delta t_P) + \Delta t_{trop}{}_A^P - \Delta t_{ion_1}{}_A^P + \lambda_1 N_1{}_A^P + \varepsilon \\ \mathrm{L1}_A^Q = r_A^Q + c(\Delta t_A - \Delta t_Q) + \Delta t_{trop}{}_A^Q - \Delta t_{ion_1}{}_A^Q + \lambda_1 N_1{}_A^Q + \varepsilon \end{cases}$$

  兩式相減：$\nabla \mathrm{L1}_A^{PQ} = \nabla r_A^{PQ} + c\nabla t_{PQ} + \nabla t_{trop}{}_A^{PQ} - \nabla t_{ion_1}{}_A^{PQ} + \lambda_1 \nabla N_1{}_A^{PQ} + \varepsilon$

(2) 二次差分：double differences (DD)，同一時刻裡，兩部 GPS 接收儀對二顆衛星求得兩條 SD 方程式，再進行一次 SD；目的是同時消除衛星時鐘差Δt_{sat}與接收儀時鐘差Δt_{rec} (圖一)。

假設只觀測 L1 頻率，有兩部接收儀 A 與 B 接收衛星 P 與 Q，我們可得：

$$\begin{cases} \mathrm{L1}_A^P = r_A^P + c(\Delta t_A - \Delta t_P) + \Delta t_{trop}{}_A^P - \Delta t_{ion_1}{}_A^P + \lambda_1 N_1{}_A^P + \varepsilon \\ \mathrm{L1}_A^Q = r_Q^Q + c(\Delta t_A - \Delta t_Q) + \Delta t_{trop}{}_A^Q - \Delta t_{ion_1}{}_A^Q + \lambda_1 N_1{}_A^Q + \varepsilon \\ \mathrm{L1}_B^P = r_B^P + c(\Delta t_B - \Delta t_P) + \Delta t_{trop}{}_B^P - \Delta t_{ion_1}{}_B^P + \lambda_1 N_1{}_B^P + \varepsilon \\ \mathrm{L1}_B^Q = r_B^Q + c(\Delta t_B - \Delta t_Q) + \Delta t_{trop}{}_B^Q - \Delta t_{ion_1}{}_B^Q + \lambda_1 N_1{}_B^Q + \varepsilon \end{cases}$$

兩式相減：$\nabla\Delta \mathrm{L1}_{AB}^{PQ} = \nabla\Delta r_{AB}^{PQ} + \nabla\Delta t_{trop}{}_{AB}^{PQ} - \nabla\Delta t_{ion_1}{}_{AB}^{PQ} + \lambda_1 \nabla\Delta N_1{}_{AB}^{PQ} + \varepsilon$

(3) 三次差分：triple differences (TD)，相異兩個時刻，兩部 GPS 接收儀對二顆衛星求得兩條 DD 方程式，再進行一次 SD；目的是消除衛星時鐘差Δt_{sat}、接收儀時鐘差Δt_{rec}與 ambiguity N_1 (圖二)，可用來偵測週波脫落。

假設在 time i 觀測一次 L1 頻率、在 time j 也觀測一次，有兩部接收儀 A 與 B 接收衛星 P 與 Q，我們可得：

$$\text{time } i: \nabla\Delta \mathrm{L1}_{AB}^{PQ}(i) = \nabla\Delta r_{AB}^{PQ}(i) + \nabla\Delta t_{trop}{}_{AB}^{PQ}(i) - \nabla\Delta t_{ion_1}{}_{AB}^{PQ}(i) + \lambda_1 \nabla\Delta N_1{}_{AB}^{PQ} + \varepsilon$$

$$\text{time } j: \nabla\Delta \mathrm{L1}_{AB}^{PQ}(j) = \nabla\Delta r_{AB}^{PQ}(j) + \nabla\Delta t_{trop}{}_{AB}^{PQ}(j) - \nabla\Delta t_{ion_1}{}_{AB}^{PQ}(j) + \lambda_1 \nabla\Delta N_1{}_{AB}^{PQ} + \varepsilon$$

兩式相減：$\Delta^3 \mathrm{L1}_{AB}^{PQ} = \Delta^3 r_{AB}^{PQ} + \Delta^3 t_{trop}{}_{AB}^{PQ} - \Delta^3 t_{ion_1}{}_{AB}^{PQ} + \varepsilon$

通常我們會希望觀測衛星訊號得到的結果彼此獨立同分布 (Independent and Identically Distributed, IID)，但是差分技術的本質是方程式的線性組合，無可避免造成使用差分技術去求解的答案，相當程度地減弱彼此 IID 的程度。因此，相關性由低到高分別為一次差分、二次差分、三次差分。

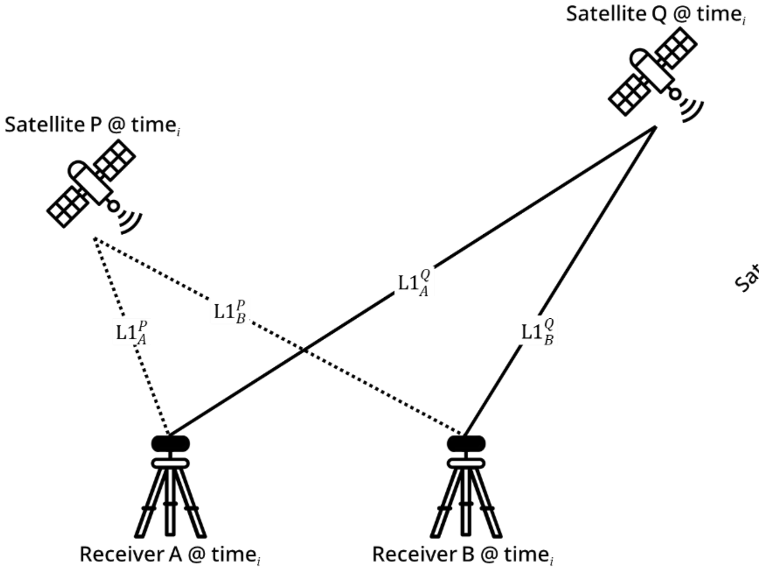

Figure 1

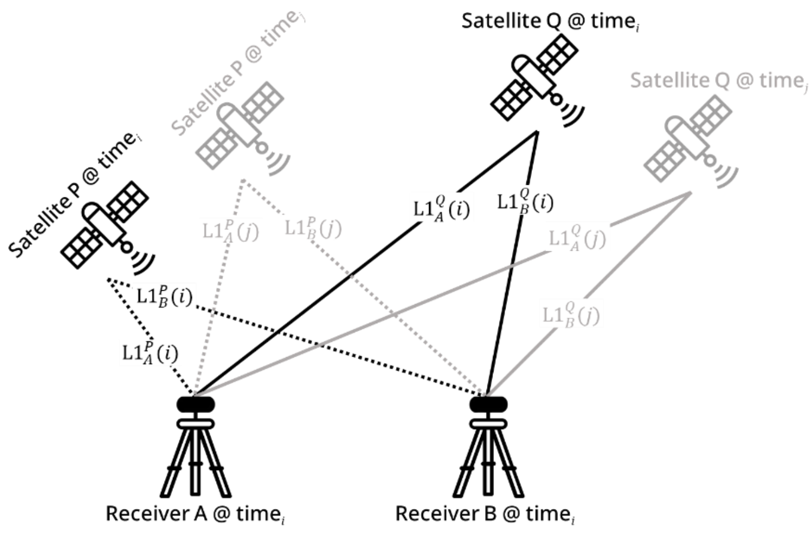

Figure 2

第四題

GPS 衛星發送的訊號有兩種頻率，分別為 L1 (1575.42 MHz)及 L2 (1227.60MHz)，這兩種訊號內含的訊息都是一樣的，都可以解讀出電碼並求出電碼虛擬距離。如果我們對這兩種訊號測量其載波相位，得到兩條載波觀測方程式，並求其線性組合，則能夠得到去除電離層射誤差的觀測方程式。也就是所謂的無電離層線性組合 (Ionosphere-Free Combination, L3)、無幾何距線性組合 (Geometry-Free Combination, L4)、寬巷線性組合 (Wide Lane Combination, L5)、窄巷線性組合 (Narrow Lane Combination, L6)。

附註：以下符號之定義，詳細請見第五題。

(1) L3：目的是消除載波觀測方程式的電離層折射誤差，詳見第五題。

$$\mathrm{L3} = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} + \lambda_1(N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2) + \varepsilon_{\mathrm{L3}}$$

其中：$\alpha_1 = {f_1}^2/\left({f_1}^2 - {f_2}^2\right) \approx 2.5457$、$\alpha_2 = -f_1 f_2/\left({f_1}^2 - {f_2}^2\right) \approx -1.9837$

(2) L4：目的是消除載波觀測方程式的真實距離r和對流層折射誤差Δt_{trop}。

$$\mathrm{L4} = L1 - L2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 - \left(\Delta t_{ion_1} - \Delta t_{ion_2}\right) + \varepsilon_{\mathrm{L4}}$$

其中：$\Delta t_{ion_1} - \Delta t_{ion_2} = \left[\left({f_2}^2 - {f_1}^2\right)/{f_2}^2\right]\Delta t_{ion_1} \approx -0.6469\Delta t_{ion_1}$

(3) L5：目的是形成波長較 L1 和 L2 更長，且具有整數 ambiguity 之組合波

$$\mathrm{L5} = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_5} + \lambda_5(N_1 - N_2) + \varepsilon_{\mathrm{L5}}$$

其中：$\lambda_5 = c/(f_1 - f_2) \approx 86.1918\ \mathrm{cm}$

(4) L6：目的是形成波長較 L1 和 L2 更短，且具有整數 ambiguity 之組合波

$$\mathrm{L6} = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_6} + \lambda_6(N_1 + N_2) + \varepsilon_{\mathrm{L6}}$$

其中：$\lambda_6 = c/(f_1 + f_2) \approx 10.6953\ \mathrm{cm}$

第五題

首先，我們回顧前一次作業提及的載波觀測方程式：

$$\begin{cases}\mathrm{L1} = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_1} + \lambda_1 N_1 + \varepsilon_{\mathrm{L1}} \\ \mathrm{L2} = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_2} + \lambda_2 N_2 + \varepsilon_{\mathrm{L2}}\end{cases}$$

上述公式的符號分別代表：(長度單位 meter、時間單位 second)

Li：利用 GPS Li 頻率所測得的載波 pseudo range，$i = 1, 2$

r：代表衛星到 GPS receiver 之間的真實距離

Δt_{rec}：GPS receiver 與 GPS system time 的時鐘差等

Δt_{sat}：衛星與 GPS system time 的時鐘差等

Δt_{trop}：對流層延遲誤差

Δt_{ion_i}：電離層對 GPS Li 頻率造成的延遲誤差，$i = 1, 2$

λ_i：GPS Li 頻率的波長，$\lambda_1 = c/(1575.42\ MHz)$、$\lambda_2 = c/(1227.6\ MHz)$

N_i：利用 GPS Li 進行載波觀測的 integer ambiguity，$i = 1, 2$

$\varepsilon_{\mathrm{Li}}$：載波 pseudo range 觀測量的雜訊與多路徑效應，$i = 1, 2$

同一台 GPS 接收儀針對同一顆衛星進行 L1 和 L2 頻率的觀測，我們可以得到兩條載波觀測方程式，若以週波數 (# of cycles) 作為單位可表示為：

$$\begin{cases}\mathrm{L1}/\lambda_1 = \left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_1}\right]/\lambda_1 + N_1 + \varepsilon_{\mathrm{L1}}/\lambda_1 \\ \mathrm{L2}/\lambda_2 = \left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_2}\right]/\lambda_2 + N_2 + \varepsilon_{\mathrm{L2}}/\lambda_2\end{cases}$$

或寫做：

$$\begin{cases}\Phi_1 = \dfrac{f_1}{c}\left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_1}\right] + N_1 + \varepsilon_{\Phi_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (5.1) \\ \Phi_2 = \dfrac{f_2}{c}\left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_2}\right] + N_2 + \varepsilon_{\Phi_2} \cdots\cdots\cdots\cdots (5.2)\end{cases}$$

其中：

Φ_i：利用 GPS Li 頻率所測得的載波觀測量 (# of cycles)，$i = 1, 2$

f_i：GPS Li 的頻率，$i = 1, 2$；$f_1 = 1575.42\ MHz$、$f_2 = 1227.60\ MHz$

接著，我們計算 $(5.1) \times f_1 - (5.2) \times f_2$：

$$\Phi_1 f_1 - \Phi_2 f_2 = \frac{{f_1}^2 - {f_2}^2}{c}\left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop}\right] - \frac{\left({f_1}^2 \Delta t_{ion_1} - {f_2}^2 \Delta t_{ion_2}\right)}{c} + (N_1 f_1 - N_2 f_2) + \left(\varepsilon_{\Phi_1} f_1 - \varepsilon_{\Phi_2} f_2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.3)$$

因為電離層折射誤差與 GPS Li 頻率的平方成反比[1]，意即：

$$\Delta t_{ion_i} = \frac{-40.3TEC}{{f_i}^2}, \text{where } TEC = \int N_e\, dr \text{ and } N_e = \text{\# of electrons per meter}^3$$

(附註：TEC即為訊號由衛星傳播到 GPS 接收儀的路徑上的總電子量)

所以，${f_1}^2 \Delta t_{ion_1} = {f_2}^2 \Delta t_{ion_2} = constant$，也就是 (5.3) 可化簡為：

$$\Phi_1 f_1 - \Phi_2 f_2 = \frac{{f_1}^2 - {f_2}^2}{c}\left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop}\right] + (N_1 f_1 - N_2 f_2) + \left(\varepsilon_{\Phi_1} f_1 - \varepsilon_{\Phi_2} f_2\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5.4)$$

最後，我們計算 $(5.4) \times \left[f_1 / \left({f_1}^2 - {f_2}^2\right)\right]$，再稍微化簡等式：

$$\Phi_1 \alpha_1 + \Phi_2 \alpha_2 = {}^{f_1}\!/_{c}\left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop}\right] + (N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2) + \left(\varepsilon_{\Phi_1} \alpha_1 - \varepsilon_{\Phi_2} \alpha_2\right)$$

其中：$\alpha_1 = {f_1}^2 / \left({f_1}^2 - {f_2}^2\right) \approx 2.5457$、$\alpha_2 = -f_1 f_2 / \left({f_1}^2 - {f_2}^2\right) \approx -1.9837$

更進一步，藉著定義全新名詞：Ionosphere-Free Combination (L3)，幫助我們化簡最終消除電離層折射誤差的載波觀測方程式。

$$\Phi_3 = {}^{f_1}\!/_{c}\left[r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop}\right] + (N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2) + \varepsilon_{\Phi_3}$$

或寫回以單位為公尺的形式：

$$\mathrm{L3} = \Phi_3 \lambda_1 = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} + \lambda_1 (N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2) + \varepsilon_{\mathrm{L3}}$$

第六題

分成兩大定位：單點定位、相對定位。這兩大定位方式又分別可運用兩種觀測量：電碼、載波，代入相應觀測方程式，以求得最終定位座標、相對距離。

(1) 單點定位：又稱絕對定位、導航定位，是一種利用單獨一個觀測站接收衛星訊號，進而求得該測站的絕對 X、Y、Z 座標值，大部分採用電碼觀測量來求解。一般可以再細分為傳統單點定位、精確單點定位 (Precise Point Positioning , PPP)。

(2) 相對定位：由兩個以上的測站同時接收衛星訊號，其中一部接收儀放置於已知座標點，進行聯合解算而求得任兩個不同測站之間的基線向量 (baseline vector)，大部分採用載波觀測量來求解。一般可再細分為靜態、動態兩個分類。由於此方法必定有大量的多餘觀測量，因此相當適合配合差分技術來提升精確度。值得一提的是：測站的間距離如果小於十公里，則測得的電離層、對流層折射誤差就會很相近，可提升差分技術消除誤差的能力。

以上是 GNSS 定位方式的綱要式簡介，接下來針對不同名詞做進一步介紹。

- 精確單點定位：雖然傳統單點定位最為簡便、成本最低、資料後處理要求最少，但是其定位誤差最大。為了解決這樣子的缺點，我們可以透過事前向國際組織 (例如：IGS) 索取精密星曆，結合現場觀測的雙頻衛星訊號，就可以得到高精度的定位座標。首先，我們利用雙頻 GPS 接收儀測得非差分電碼虛擬距離與載波相位觀測量；接著，利用數學公式獲得無電離層線性組合 L3 的電碼虛擬距離與載波相位觀測量；最後，就可以求解未知數：測站座標、接收儀時鐘差、載波相位 ambiguity、電離層折射誤差、對流層折射誤差。PPP 的優點顯而易見：只需一台 GPS 接收儀就可求得精密度達公分的座標；然而其缺點就是精密星曆無法即時獲得，例如 IGS 最快只能延遲 12 天提供精密星曆。另外，PPP 也無法避免需面對求解 ambiguity 的困難過程。

- 靜態相對定位：顧名思義，就是兩個以上的 GPS 接收儀全部都維持不動地同步觀測衛星訊號，以求出固定長度的基線向量。
- 動態相對定位：在觀測過程中，有一台接收儀放置在運動物體上，一般出現在需要即時得到座標的應用場域。又可以再細分為：DGPS 與 KGPS。DPGS (Differential GPS)是利用差分技術來修正電碼觀測量虛擬距離的定位方法，目前廣為人知的 WAAS、LAAS 系統皆有使用這項技術。KGPS (Kinematic GPS)是利用載波相位觀測量虛擬距離來定位，目前最為出名的應用就是即時動態測量 (Real Time Kinematic, RTK)，根據我國工研院的最新發展[2]指出：RTK 已經可達成每 100 毫秒提供公分等級的定位座標。

第七題

前述文字提及的相對定位，提升其精度有兩種主要路線：衛星空間分布盡量分散、提高觀測量的精度。對於提高觀測量的精度有許多做法，並非本題重點而不在此贅述。

理想的衛星訊號應該來自於測站上空「四面八方」，而非全部集中在某一個方位。為了數值化這樣子的概念，方便我們互相比較何種情況應該視作理想狀態，因此創造了精度因子 (Dilution of Precision, DOP)來度量。常用的 DOP 有 horizontal DOP (HDOP)、vertical DOP (VDOP)、position DOP (PDOP)、time DOP (TDOP)與 geometric DOP (GDOP)，其中又以 GDOP 最廣為使用。

概念上，GDOP 等於 GPS 接收儀的 X、Y、Z 座標值與時鐘差四個分量的變異數之和的開根號，也就是 PDOP 的平方加上 TDOP 的平方再取開根號。在幾何空間裡，GPS 接收儀與四顆衛星所形成的六面體體積，與 GDOP 成反比，因此 GDOP 越小代表該六面體體積越大，意味著四顆衛星的分散程度越大，也就是越接近理想的衛星空間分布，習慣上以 GDOP 值為 10 當作分界點。

第八題

雖然傳統單點定位最為簡便、成本最低、資料後處理要求最少，但是其定位誤差最大。為了解決這樣子的缺點，我們可以透過事前向國際組織 (例如：IGS) 索取精密星曆，結合現場觀測的雙頻衛星訊號，就可以得到高精度的定位座標，這個概念就稱作精密單點定位 (Precise Point Positioning, PPP)。

首先，我們利用雙頻 GPS 接收儀測得非差分電碼虛擬距離與載波相位觀測量；接著，利用數學公式獲得無電離層線性組合 L3 的電碼虛擬距離與載波相位觀測量；最後，就可以求解未知數：測站座標、接收儀時鐘差、載波相位 ambiguity、電離層折射誤差、對流層折射誤差。

PPP 的優點顯而易見：只需一台 GPS 接收儀就可以求得精密度達公分等級的絕對座標值，而非相對測定位的基線向量，同時兼顧成本以及精確度；另外，因為沒有使用到差分技術，所以接收儀時鐘差、電離層誤差、對流層誤差不會被消去，適合進行相關領域的研究。PPP 的缺點來自於其核心概念：精密星曆無法即時獲得，例如 IGS 最快只能延遲 12 天提供精密星曆，因此 PPP 無法應用在動態測量的場域。另外，PPP 也無法避免需面對求解 ambiguity 的困難過程。

輔助全球衛星定位系統 (Assisted GPS, or Augmented GPS, abbreviated as AGPS)是一種利用向手機基地台索取定位輔助訊息，配合觀測傳統 GPS 衛星信號，讓定位速度更快的方法。如果只有手機獨立觀測 GPS 訊號，首先需要搜尋所有 PRN 編號的訊號，接著針對訊號良好的 PRN 解讀 L1 頻率當中的 observation data 與跟隨在其後的 navigation message，最後才能進行定位相關的計算與求解，此過程不僅緩慢而且耗費許多計算能力。AGPS 可以讓手機基地台發送良好訊號的 PRN 清單與 navigation message 給手機，隨後手機只需要針對特定 PRN 觀測其 observation data，即可開始進行定位計算與求解。

References

- [1]

  B.Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and J.Collins, “GPS Theory and Practice 5/e”, Section 6.3.2, p.100

- [2]

  https://ictjournal.itri.org.tw/Content/Messagess/contents.aspx?MmmID=654304432061644411&MSID=1035144027215166537