

Homework 3

108B (1375) Global Positioning System 王傳鈞 0416047

第一題

- (1) 利用 GPS 進行單點定位，至少需要接收四顆衛星訊號。

在三度空間當中：如果 GPS receiver 接收到一顆衛星訊號，則可以推算出該接收器所有可能的座標值位在一顆球體上 (圖一)；如果接收到二顆衛星訊號，則可推算出座標值位在一個平面圓形上；如果接收到三顆衛星訊號，則可推算出座標值有兩個可能值；只有在接收到四顆衛星訊號，才可以唯一確定 GPS receiver 的三度空間座標 (圖二的紅點)。

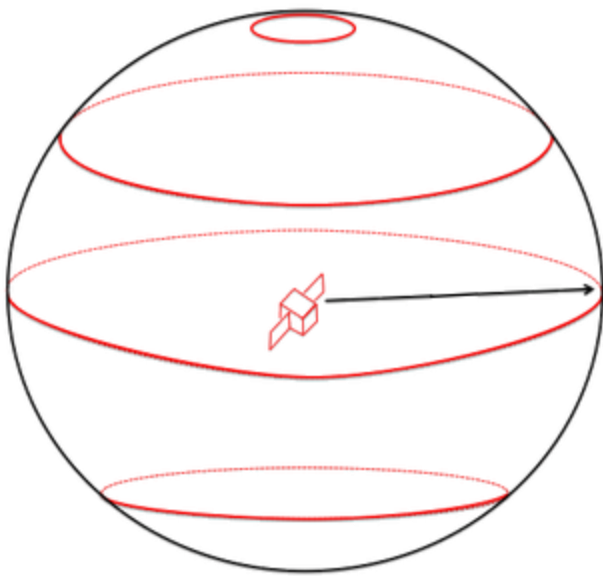


Figure 1 GPS Positioning with One Satellite [\[1\]](#)

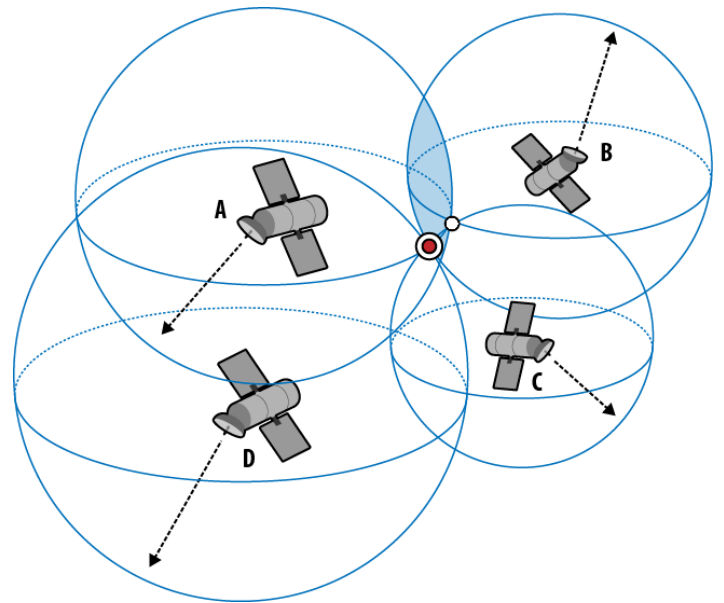


Figure 2 GPS Positioning with Four Satellites [\[2\]](#)

- (2) 利用以上的觀念，我們可以透過四顆以上的衛星訊號來推算出 GPS receiver 的座標。根據以下圖三所示，我們可以得到兩個公式：

true distance: $r = c \times (t_{rec} - t_{sat})$

pseudo range: $\rho = c \times [(t_{rec} + \Delta t_{rec}) - (t_{sat} + \Delta t_{sat})]$

其中， c 代表光速、 t_{rec} 代表 GPS receiver 接收到衛星訊號的 GPS system time 時刻、 t_{sat} 代表衛星發射訊號的 GPS system time 時刻、 Δt_{rec} 和 Δt_{sat} 分別代表 GPS receiver 和衛星與 GPS system time 的時鐘差等。

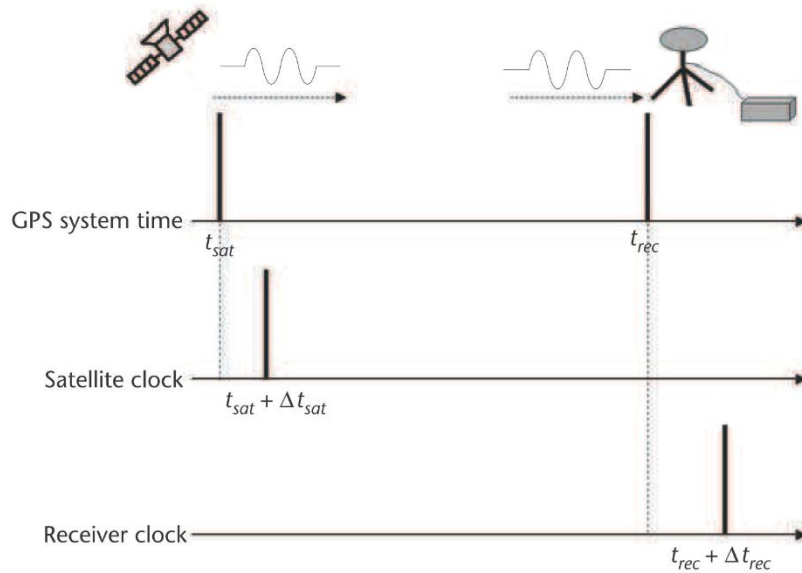


Figure 3 Timing relationships in the range measurement [3]

因為衛星定期與地面控制站進行同步訊號的工作，所以 Δt_{sat} 可以忽略不計。

接著，再將 r 和 ρ 兩式整理之後，就可以得到： $\rho = r + c \times \Delta t_{rec}$ 。

如果 i 號衛星的座標為 $(x_i^{sat}, y_i^{sat}, z_i^{sat})$ 、GPS receiver 為 $(x^{rec}, y^{rec}, z^{rec})$ ，則 receiver 與 i 號衛星之間的 pseudo range 可寫成：

$$\rho_i = \sqrt{(x_i^{sat} - x^{rec})^2 + (y_i^{sat} - y^{rec})^2 + (z_i^{sat} - z^{rec})^2} + c \times \Delta t_{rec}$$

最終，我們就可以得到以下方程式組：

$$\begin{cases} \rho_1 = \sqrt{(x_1^{sat} - x^{rec})^2 + (y_1^{sat} - y^{rec})^2 + (z_1^{sat} - z^{rec})^2} + c \times \Delta t_{rec} \\ \rho_2 = \sqrt{(x_2^{sat} - x^{rec})^2 + (y_2^{sat} - y^{rec})^2 + (z_2^{sat} - z^{rec})^2} + c \times \Delta t_{rec} \\ \rho_3 = \sqrt{(x_3^{sat} - x^{rec})^2 + (y_3^{sat} - y^{rec})^2 + (z_3^{sat} - z^{rec})^2} + c \times \Delta t_{rec} \\ \rho_4 = \sqrt{(x_4^{sat} - x^{rec})^2 + (y_4^{sat} - y^{rec})^2 + (z_4^{sat} - z^{rec})^2} + c \times \Delta t_{rec} \end{cases}$$

對於上述方程組的求解：

首先，我們可以透過 GPS receiver 接收到廣播星曆，其內含的發送訊號時刻來計算出 pseudo range，也就是 $\rho_i = c \times (\text{收到的時刻} - \text{發送的時刻})$ 。

接著，透過廣播星曆的其他內容，我們可以再計算出各個衛星目前的座標值 $(x_i^{sat}, y_i^{sat}, z_i^{sat})$ for $i = 1, 2, 3, 4$ 。

最後，方程組就只剩下 x^{rec} 、 y^{rec} 、 z^{rec} 、 Δt_{rec} 四個未知數需要求解。

第二題

(1) 電碼的觀測方程式

$$\begin{cases} P1 = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} + \Delta t_{ion_1} + \varepsilon_{P1} \\ P2 = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} + \Delta t_{ion_2} + \varepsilon_{P2} \end{cases}$$

載波的觀測方程式

$$\begin{cases} L1 = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_1} + \lambda_1 N_1 + \varepsilon_{L1} \\ L2 = r + c(\Delta t_{rec} - \Delta t_{sat}) + \Delta t_{trop} - \Delta t_{ion_2} + \lambda_2 N_2 + \varepsilon_{L2} \end{cases}$$

上述公式當中的符號分別代表：(長度單位 meter、時間單位 second)

P_i ：利用 GPS L_i 頻率所測得的電碼 pseudo range， $i = 1, 2$

L_i ：利用 GPS L_i 頻率所測得的載波 pseudo range， $i = 1, 2$

r ：代表衛星到 GPS receiver 之間的真實距離

Δt_{rec} ：GPS receiver 與 GPS system time 的時鐘差等

Δt_{sat} ：衛星與 GPS system time 的時鐘差等

Δt_{trop} ：對流層延遲誤差

Δt_{ion_i} ：電離層對 GPS L_i 頻率造成的延遲誤差， $i = 1, 2$

λ_i ：GPS L_i 頻率的波長， $\lambda_1 = c/(1575.42 \text{ MHz})$ 、 $\lambda_2 = c/(1227.6 \text{ MHz})$

N_i ：利用 GPS L_i 進行載波觀測的 integer ambiguity， $i = 1, 2$

ε_{P_i} ：電碼 pseudo range 觀測量的雜訊與多路徑效應， $i = 1, 2$

ε_{L_i} ：載波 pseudo range 觀測量的雜訊與多路徑效應， $i = 1, 2$

- (2) 電碼觀測方程式與載波觀測方程式最大的差異處： Δt_{ion_i} 項在電碼當中為加項，在載波當中為減項；載波觀測方程式多了整數週波未定值 $\lambda_i N_i$ 項目。

第三題

GPS receiver 接收衛星訊號之後，會將結果輸出為 RINEX 格式。根據 RINEX 2.10 版本規定，總共被分為六個不同的 RINEX 檔案：observation data (.o)、navigation message (.n)、meteorological file、GLONASS navigation message file、geostationary satellites data file、satellite and receiver clock data file。

observation data (.o) 檔案內含 GPS receiver 天線接收到的衛星訊號，例如：C1、P1、P2、L1、L2 等類型。衛星發射的訊號總共可以分成三大部分：coarse/acquisition code (C/A code)、precision code (p code)、navigation message。C1 屬於 C/A code，可以用來計算電碼 pseudo range；P1、P2 屬於 p code，其精度比 C1 還要高，也可計算出電碼 pseudo range，但實施 anti-spoofing 效應之後，p code 已被加密而無法被直接存取；L1、L2 為載波相位觀測量，可計算出最高精度的載波 pseudo range。

navigation message (.n) 檔案內含衛星向用戶廣播的訊息，包含：衛星時鐘參考時刻、衛星時鐘修正參數、6 個克卜勒軌道係數、9 個擾動係數。透過這些數值，我們可以計算出該衛星在發送訊號當下的三度空間座標值。

上面提到的電碼與載波相位，兩者均可以計算出 GPS receiver 與衛星之間的 pseudo range，但是運用電碼計算簡便、過程快速、精度較低，使用載波相位因為需求解未知的 ambiguity，所以計算困難、過程較慢、精度較高。

第四題

- (1) IGS：International GNSS Service 的縮寫，是一個公開提供免費、高品質全球衛星導航系統數據，以利科學發展、社會進步的國際組織。

- (2) GNSS：Global Navigation Satellite System 的縮寫，是覆蓋全球的空間定位衛星系統，通常融合了 GPS、GLONASS、Galileo、BDS 等系統。
- (3) pseudo range：利用電碼或載波直接得到的空間距離，因為內含有 Δt_{rec} 、 Δt_{sat} 、 Δt_{trop} 、 Δt_{ion} 等誤差尚未消除，所以並非衛星至 GPS receiver 之間真正的距離。
- (4) RINEX：Receiver Independent Exchange Format 的縮寫，是一種與 GPS receiver 品牌無關的原始衛星導航系統數據交換格式。這種格式並非原始 binary file，而可以直接以 ASCII code 閱讀內容，因此使用者可以對接收到的數據進行後處理，以產生更精確的結果。

第五題

造成 GPS receiver 收到的訊號含有誤差的原因有四大分類：衛星誤差、訊號傳播誤差、接收儀誤差、其他誤差。

- (1) 衛星誤差：衛星軌道誤差、衛星時鐘誤差
 - 衛星軌道誤差：廣播星曆提供的衛星座標與實際位置不一致，這可能來自於地球非均質對稱造成的重力場不一致、地潮、海潮、太陽輻射壓、空氣阻力等影響。
 - 衛星時鐘誤差：廣播星曆提供的發送時刻與實際 GPS system time 有偏差，因為大約只有 6 公尺的誤差量，所以普通應用可以忽略不計，而透過差分技巧也可完善消除此誤差。
- (2) 訊號傳播誤差：電離層延遲誤差、對流層延遲誤差、多路徑效應誤差
 - 電離層延遲誤差：無線電訊號在電離層內會發生極大的折射，造成傳播延遲。在電離層內，地球大氣被太陽輻射解離而變成許多離子與高能電子，它們會造成無線電訊號通過時會有巨大的折射。利用雙頻觀測可以大幅降低此項誤差、使用差分技巧、於晚上觀測衛星訊號、建立數學修

正模型，同樣也有降低此項誤差的效果。

- 對流層延遲誤差：在對流層內溫度、壓力、濕度，隨著離地高度的不同有很大的差異，因此會造成無線電訊號有折射的現象而發生延遲誤差。因為這項影響與 GPS 訊號之頻率無關，所以無法利用雙頻觀測來消除，只能使用差分技巧、排除離地仰角過小的衛星訊號、水氣輻射儀測定大氣水氣含量、建立數學修正模型等方式來消除此項誤差。
- 多路徑效應誤差：天線除了直接接收到衛星訊號外，可能也同時接收到經周圍物體反射的間接訊號，兩種訊號到達天線的時間不同步且疊加在一起，導致 GPS receiver 無法分辨出真正的相位觀測量。選擇有檔板的天線或加上抗波環圈、將 GPS receiver 放置在平坦空曠處、增加觀測時間等方式，都可以減弱多路徑效應誤差。

(3) 接收儀誤差：接收儀時鐘誤差、週波未定值、週波脫落、天線相位中心誤差

- 接收儀時鐘誤差：即第二題的符號 Δt_{rec} 。因為 GPS receiver 一般採用石英鐘計時，其穩定度並不如衛星所搭載的原子鐘，再加上 GPS receiver 也不會定期與 GPS 控制中心同步時差，所以有此項誤差。在第一題的第二小題裡，我們得知可以透過解方程組的方式，把 Δt_{rec} 當作一個未知數去求解，另外也可以用差分技術將此項誤差消除。
- 週波未定值：即第二題的符號 N_1 和 N_2 。利用載波觀測方程式測距，會需要非常精確的 ambiguity 數值，才可獲得正確的結果。早期會直接將 ambiguity 當作未知數來求解，或用三次差分技術來消除之，目前多採用 widelane method、ambiguity function method、integer search method 等方法求解，但仍然有計算量龐大、無法即時獲得的缺點。
- 週波脫落：如果 GPS receiver 持續鎖定某顆衛星的訊號，就可以重複利用一開始算好的 ambiguity，得到連續一段時間的高精度定位；然而，

在實際操作時，衛星訊號可能會暫時中斷，造成 GPS receiver 短暫停止計數 ambiguity，這種現象稱為週波脫落。衛星訊號中斷原因通常為被障礙物阻礙、儀器暫時故障、出現強烈干擾訊號等，這時候可以採用二次差分獲三次差分來偵測出週波脫落並修復之。

- 天線相位中心誤差：無線電波訊號於量測時所對應的點稱為天線相位中心，這個中心應該跟天線的幾何中心保持一致，但相位中心可能隨著電波訊號的強度與方向而有不同的改變，形成與幾何中心的不一致。使用相同的天線、擺設方為保持一致，都可以消除這項誤差。

(4) 其他誤差：Selective Availability、Anti-Spoofing

- Selective Availability：這是一種人工加入的誤差，刻意在廣播星曆當中加入誤差、對衛星時鐘加入誤差，造成使用者的定位精度降低。因為美國已於 2000 年 5 月 1 日解除這項干擾，所以目前無此項誤差。
- Anti-Spoofing：這是一種人工加入的效應，是對 GPS 信號 P code 進行加密的措施，使用 Y code 取代 P code；當這個效應啟動時，一般使用者無法正常使用 P code，只有已知解密金鑰的用戶可以正常解讀。

第六題

造成衛星軌道誤差的原因：地球非均質對稱造成的重力場不一致、地潮、海潮、太陽輻射壓、空氣阻力等因素。因為地球並非完美均質對稱的球體，所以實際上在不同的地點測量到的重力加速度 g 值會有所不同，而這會造成衛星實際軌道與預測的軌道具差異，這項因素占衛星軌道誤差最大比例。另外，太陽系當中的其他星體對衛星的引力作用，也會造成軌道誤差。

海洋會因為太陽、月球的引力作用，產生潮汐現象；固體地球具有彈性，同樣會因為太陽、月球的引力作用，而產生潮汐現象，以上兩種 solid Earth tide、ocean tide 都會造成軌道誤差。最後，太陽風對衛星產生的輻射壓力、衛星繞地

過程中遇到的空氣阻力，也都會造成軌道誤差。

第七題

無線電訊號在電離層內會發生極大的折射，造成傳播延遲。在電離層內，地球大氣被太陽輻射解離而變成許多離子與高能電子，它們會造成無線電訊號通過時會有巨大的折射。利用雙頻觀測可以大幅降低此項誤差、使用差分技巧、於晚上觀測衛星訊號、建立數學修正模型，同樣也有降低此項誤差的效果。

第八題

在對流層內溫度、壓力、濕度，隨著離地高度的不同有很大的差異，因此會造成無線電訊號有折射的現象而發生延遲誤差。大約有 90%的誤差是由乾分量所引起，它與大氣溫度、壓力有密切關聯，容易使用數學模型來消除；另外約 10%的誤差是由濕分量所引起，它與大氣濕度有關並難以被建模來消除之。對流層延遲誤差最大的特色是與 GPS 訊號之頻率無關，所以無法利用雙頻觀測來消除，只能使用差分技巧、排除離地仰角過小的衛星訊號、水氣輻射儀測定大氣水氣含量、建立數學修正模型等方式來消除。

第九題

天線除了直接接收到衛星訊號外，可能也同時接收到經周圍物體反射的間接訊號，兩種訊號到達天線的時間不同步且疊加在一起，導致 GPS receiver 無法分辨出真正的相位觀測量。選擇有檔板的天線或加上抗波環圈、將 GPS receiver 放置在平坦空曠處、增加觀測時間等方式，都可以減弱多路徑效應誤差。

第十題

無線電波訊號於量測時所對應的點稱為天線相位中心，這個中心應該跟天線的幾何中心保持一致，但相位中心可能隨著電波訊號的強度與方向而有不同的改變，形成與幾何中心的不一致。使用相同的天線、擺設方為保持一致，都可以消除這項誤差。

References

- [1] <http://www.aviationchief.com/gps-system.html>
- [2] <https://www.oreilly.com/library/view/html5-geolocation/9781449308049/ch01.html>
- [3] Ramjee Prasad, Marina Ruggieri, “Applied Satellite Navigation Using GPS, GALILEO, and Augmentation Systems”, p.29 (2005)