

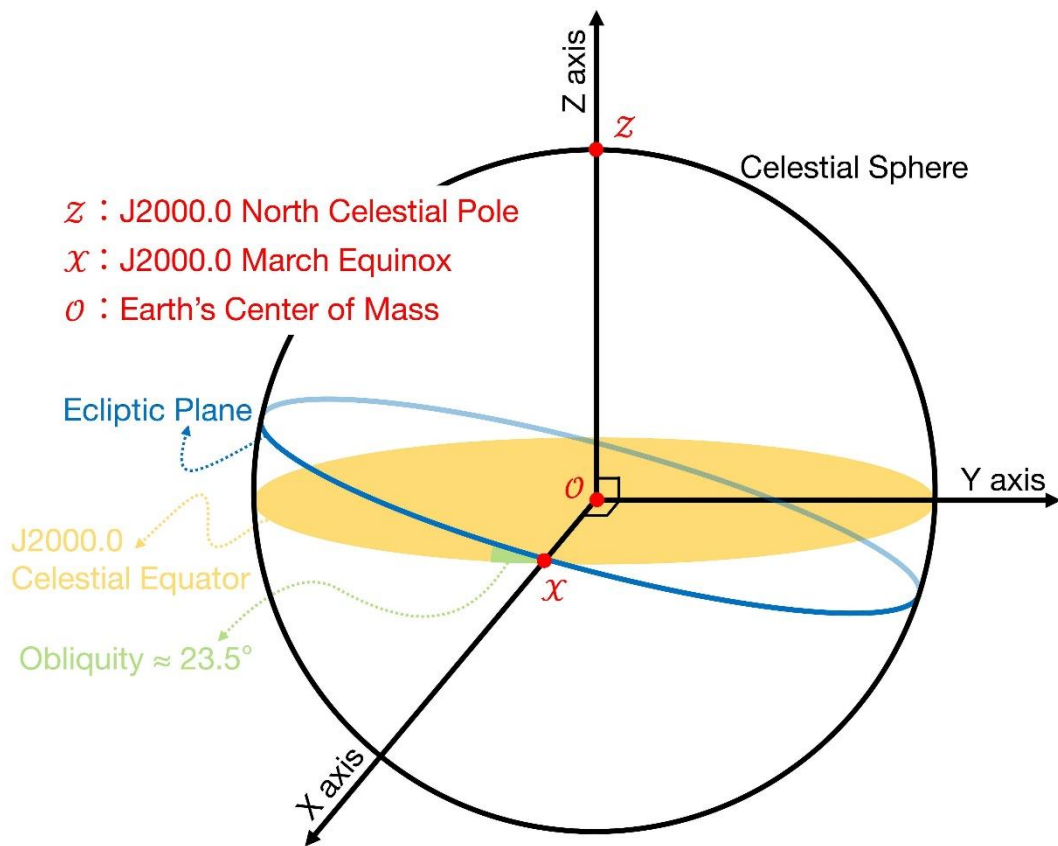
Homework 6

108B (1375) Global Positioning System 王傳鈞 0416047

第一題

因為歲差和章動的影響，所以天球座標系的座標軸沒辦法永遠保持固定，會隨著時間推移而旋轉、偏移。為了解決這樣子的問題，我們可以指定一個特定時刻的座標軸當作固定參照，此方法就稱為「協議」慣性坐標系統。目前國際間最常使用「J2000.0」，它代表 terrestrial time 2000/1/1 12:00:00 AM。

天球座標系是一種以通過星體的天球當作參考體、天球赤道面和通過春分點的子午圈當作參考面的座標系統。在卡氏直角座標定義下，座標原點是地球質心、X 軸會通過春分點、Z 軸會通過天北極，詳細情形如下圖所示。



任何的座標系統當中，都可以有兩種表示座標的方法：直角座標、球面座標。在天球座標系當值中，我們通常用 (α, δ, R) 來表示一個點的球面座標，關於這兩種座標表示法的換算公式如下。

- 直角座標 \rightarrow 球面座標：

$$\begin{cases} \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \delta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

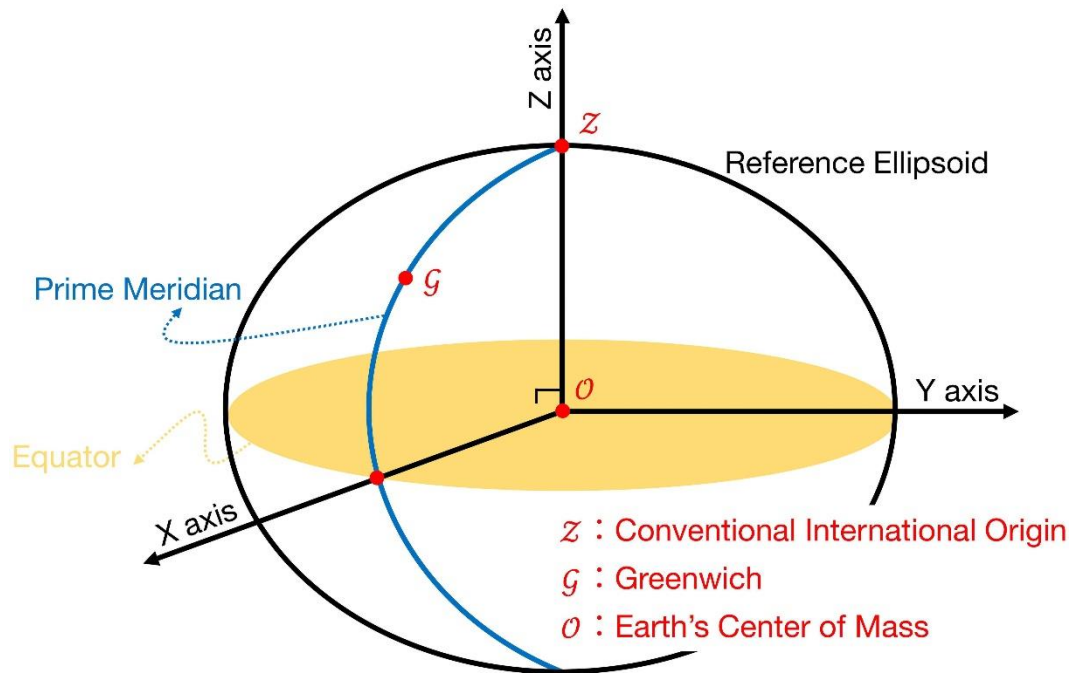
- 直角座標 \leftarrow 球面座標：

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\delta \cdot \cos\alpha \\ y = R \cdot \cos\delta \cdot \sin\alpha \\ z = R \cdot \sin\delta \end{cases}$$

第二題

因為極運動的影響，所以地球座標系的座標軸沒辦法永遠保持固定，會隨著時間推移而旋轉、偏移。為了解決這樣子的問題，我們可以指定一個特定時刻的座標軸當作固定參照，此方法就稱為「協議」地球坐標系統。目前國際間最常使用 conventional terrestrial pole (CTP)，它代表西元 1900 到 1905 年，共六年期間的平均地球北極點位置，使用它來當地球座標系的 Z 軸之固定指向。

地球座標系是一種以參考橢球體 (reference ellipsoid) 當作參考體、赤道面和通過格林威治的本初子午圈當作參考面的座標系統。在卡氏直角座標定義下，座標原點是地球質心、X 軸會通過本初子午圈和赤道面的交點、Z 軸會通過 CTP，詳細情形如下圖所示。



任何的座標系統當中，都可以有兩種表示座標的方法：直角座標、球面座標。在天球座標系當值中，我們通常用 (φ, λ, h) 來表示一個點的球面座標，關於這兩種座標表示法的換算公式如下，以下文字 e 代表橢球體離心率、 a 代表橢球體半長軸長度。

- 直角座標 \rightarrow 球面座標：

$$\begin{cases} \varphi = \arctan\left(\frac{z(N+h)}{\sqrt{x^2+y^2}[N(1-e^2)+h]}\right) \\ \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ h = \frac{z}{\sin\varphi} - N(1-e^2), \text{ where } N = \sqrt{\frac{a^2}{1-(e\sin\varphi)^2}} \end{cases}$$

- 直角座標 \leftarrow 球面座標：

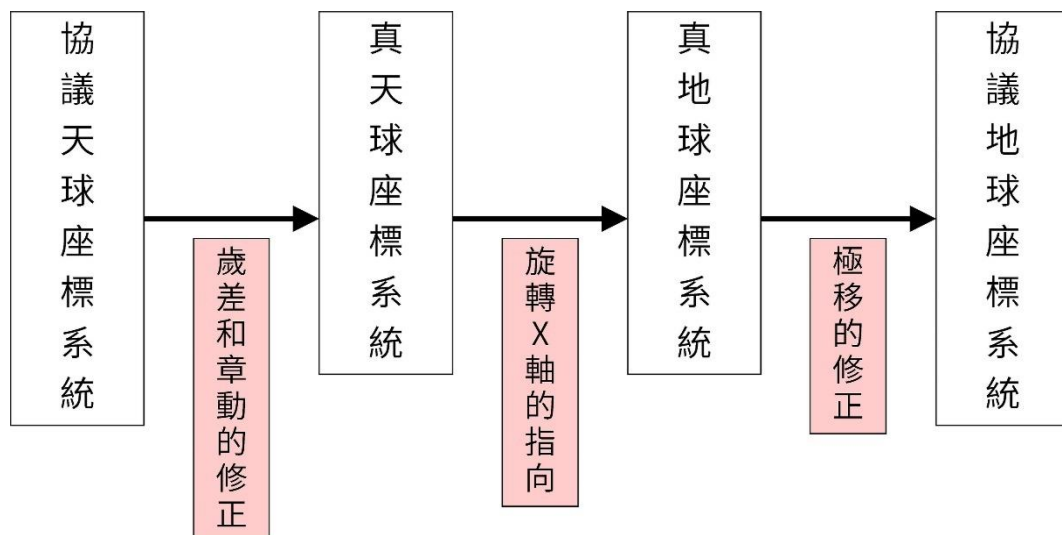
$$\begin{cases} x = (N+h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ y = (N+h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ z = [N(1-e^2)+h] \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

可以特別注意到上述的公式中，計算 φ 和 h 的過程，並不是 explicit form，造成需要使用疊代法求解。

第三題

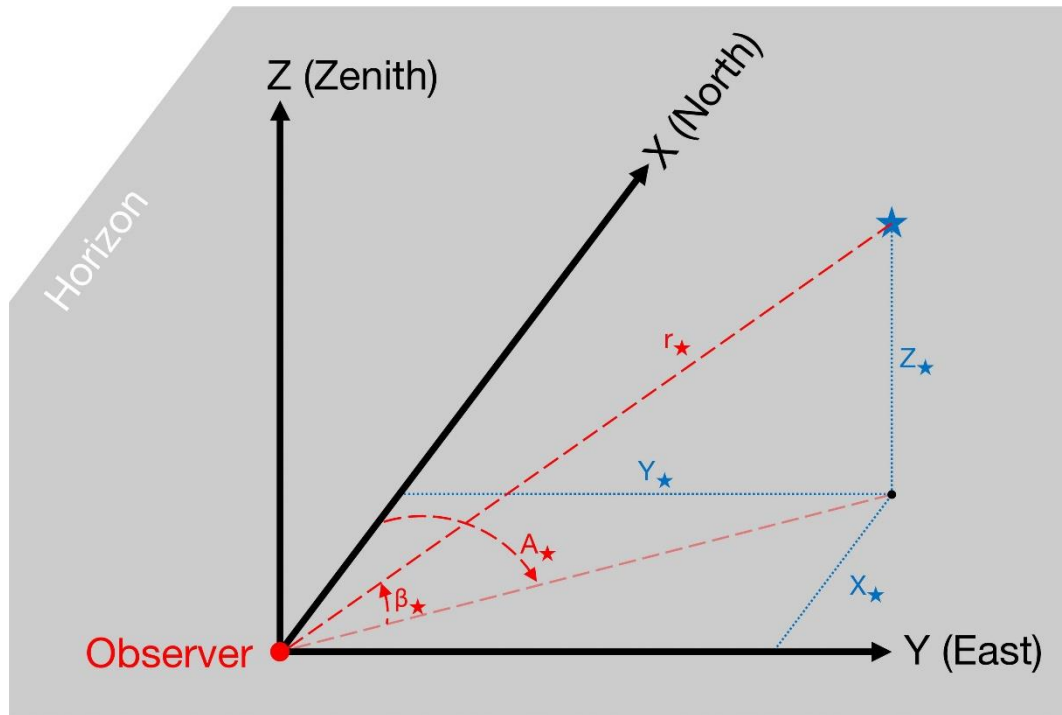
- 歲差 (axial precession)：又稱「進動」，因為地球不是完美的球體，赤道部分較南北兩極隆起，所以太陽和月亮的引力會對隆起的部分形成力矩，讓地球自轉軸無法保持指向一個固定方位，造成現在可以觀測到每年春分點以約 50.3 角秒的速率向西移動。
- 章動 (nutation)：因為太陽和月亮地球的引力不是固定不變的常數，會隨著地球公轉、月球繞地相對位置的不同而有大小變化，所以地球自轉軸在歲差的過程中，不會保持等速而呈顯小幅抖動的現象。
- 極移 (polar motion)：又稱「極運動」，因為地球的自轉軸並不與地球最大慣性軸一致，所以造成南北極點在地球表面的位置會隨時間變化。

從協議慣性坐標系統轉換到協議地球坐標系統的過程，要考慮歲差、章動、極移三種效應帶來的變化量。除此之外，還需要在固定 Z 軸之下，旋轉 X 軸的指向由通過春分點，變成通過本初子午圈與赤道面的交點，意即旋轉 Greenwich apparent sidereal time (GAST) 角度，詳細步驟如下。



第四題

測站地平座標系是一種完全以測站當作原點來看世界的座標系統。在卡氏直角座標定義下，座標原點是測站、X 軸指向測站的正東方、Z 軸指向測站正上方的天頂，詳細情形如下圖所示。



任何的座標系統當中，都可以有兩種表示座標的方法：直角座標、球面座標。在天球座標系當值中，我們通常用 (A, β, r) 來表示一個點的球面座標，關於這兩種座標表示法的換算公式如下。

- 直角座標 \rightarrow 球面座標：

$$\begin{cases} A = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \beta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

- 直角座標 \leftarrow 球面座標：

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\beta \cdot \cos A \\ y = r \cdot \cos\beta \cdot \sin A \\ z = r \cdot \sin\beta \end{cases}$$

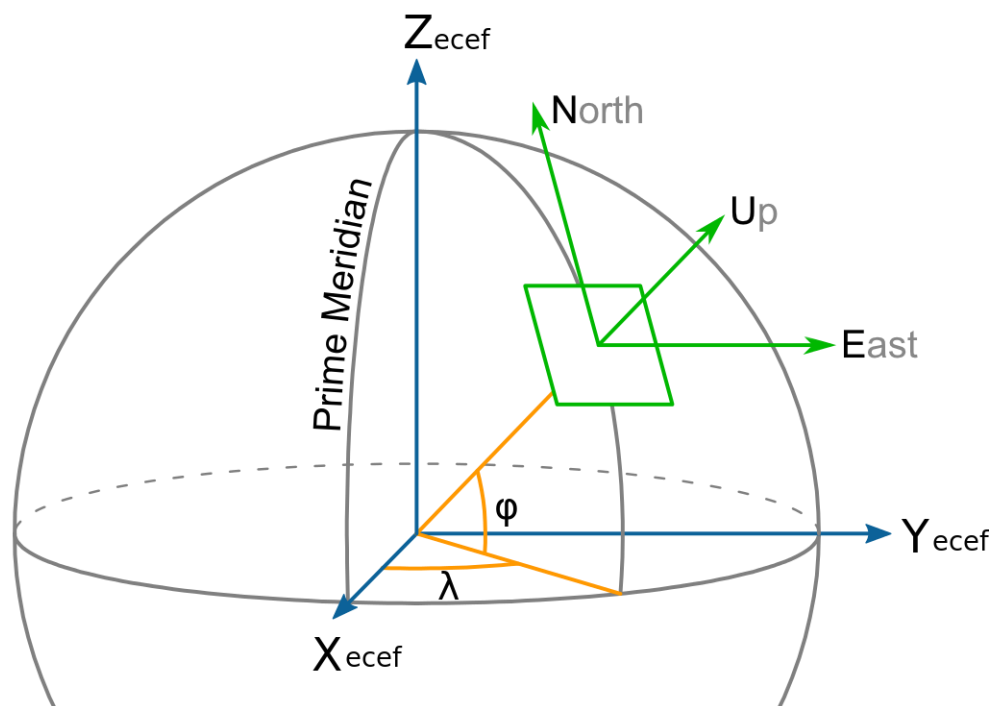
第五題

總共經過三個步驟的旋轉座標軸，就可以把測站地平座標轉換成 CTS 座標。為了不混淆名稱，這邊把測站地平座標系的三個座標軸分別叫做 N、E、U 軸，CTS 的三個座標軸還是維持 X、Y、Z 軸的稱呼。

第一步，顛倒 E 軸指向，讓測站地平座標系的三軸合乎 right-hand rule。假設新的 E 軸叫做 E' 軸。第二步，固定 E' 軸的情形下，旋轉座標軸讓 U 軸平行 CTS 的 Z 軸。假設新的 U 軸叫做 U' 軸。第三步，固定 U' 軸的情形下，旋轉座標軸讓 N 軸平行 CTS 的 X 軸且 E 軸平行 CTS 的 Y 軸。

綜合以上的三個步驟，我們可以寫成一個旋轉矩陣，只需要把某一個特定點的測站地平卡氏直角座標乘以旋轉矩陣，就可以輕鬆得到該點相對應的 CTS 的直角座標值，假設測站在 CTS 的 spherical coordinate 是 (φ, λ, h) 。

- 轉換公式： $\Delta \bar{X} = A \Delta X_e$ ， ΔX_e 代表某點的測站地平座標系之卡氏直角座標
- 其中： $A = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix}$ ，而且不難發現 A 是正交矩陣



第六題

根據題目給定的地心地固經緯度座標 (緯度 24.3333 度、經度 121.5 度)，加上我自行撰寫的 [python 程式](#)，可以得到以下結果。

```
1  $ python HW6_0416047_Q6.py
2  Enter latitude: (in decimal degrees)
3  24.3333
4  Enter longitude: (in decimal degrees)
5  121.5
6  Enter ellipsoidal height: (in meters)
7  125.0
8
9
10 ECEF XYZ coordinates are:
11 (using GRS80 reference ellipsoid)
12 X : -3038301.9047
13 Y : 4958058.0892
14 Z : 2612015.9823
15
16
17 Reversely conversion for checking correctness:
18 Latitude   : 24.3333
19 Longitude  : 121.5000
20 Height     : 125.0000
```

根據上圖 (第 12~14 行) 可知該點的卡氏座標為 $x = -3038301.9047$ 、 $y = 4958058.0892$ 、 $z = 2612015.9823$ 。以此數值反推其經緯度座標 (第 18~20 行)，也可得到與輸入時相同的結果。

第七題

目前我國最新的國家座標系統是 TWD97[2010]，採用橫麥卡托二度分帶 (2°TM) 投影，參考橢球體是 GRS80。在臺灣本島與周邊離島地區，中央子午線是東經 121 度、尺度比 0.9999，投影原點向西平移 250 公里；在澎湖、金門、馬祖地區，中央子午線是東經 119 度、尺度比 0.9999，投影原點向西平移 250 公里。若向我國內政部申請某一個點位的精確座標，會得到三種版本：①地心地固座標系的三維卡氏直角座標、②地心地固座標系的球面座標、③2°TM 投影座標與橢球高。

第八題

目前我國最新的國家座標系統是 TWD97[2010]，其採用橫麥卡托二度分帶 (2°TM) 投影。在臺灣本島與周邊離島地區，中央子午線是東經 121 度、尺度比 0.9999，投影原點向西平移 250 公里；在澎湖、金門、馬祖地區，中央子午線是東經 119 度、尺度比 0.9999，投影原點向西平移 250 公里。

首先，採用此投影方法而非國際間常用的 UTM (即 6°TM)，是因為上述地區的地理範圍並不大，使用六度分帶將會有很大的投影誤差，使用比較密的二度分帶將可以減少投影誤差。其次，使用二度分帶且中央子午線尺度比 0.9999，將可以讓臺灣本島的西部沿岸與東部沿岸，恰好落在尺度比接近 1 的位置，滿足多數使用者對於重點城市需要高精度投影座標的需求。最後，投影原點向西平移將可以讓所有的投影座標都呈現正數數值，方便我們做數據的處理。

第九題

根據我自行撰寫的 [python 程式](#)，只要在終端機輸入命令

「python HW6_0416047_Q9.py igs20913.sp3」，就可以得到 HW6_Q9_Result.csv 檔案，裡面含有 2020/02/05 08:00:00AM，總共 32 顆 GPS 衛星各自的測站地平座標，以下表格詳細列出結果。

PRN	Azimuth	Altitude	Distance	PRN	Azimuth	Altitude	Distance
G01	174.602	-48.382	30753.281	G17	247.631	-30.195	29302.521
G02	326.966	-22.705	27808.507	G18	164.213	-33.453	29186.203
G03	77.549	-72.574	32556.599	G19	270.532	-30.162	29222.541
G04	8.545	-66.311	32258.859	G20	148.513	49.392	21300.327
G05	300.799	8.423	24999.477	G21	76.417	52.615	21544.598
G06	311.546	-47.016	30806.772	G22	110.578	-60.363	31816.938
G07	211.992	-55.235	31351.721	G23	2.167	-67.705	32023.705
G08	149.088	-15.087	27588.325	G24	239.453	80.806	19996.724
G09	311.981	-64.207	32183.283	G25	357.244	5.971	25193.045
G10	137.71	19.826	23818.475	G26	62.175	-37.635	30065.741
G11	169.917	-28.974	28766.421	G27	121.25	-6.995	26662.532
G12	323.344	18.328	23849.692	G28	215.054	-5.486	26870.93
G13	236.416	10.262	24630.291	G29	19.355	0.471	25733.61
G14	74.392	-7.504	26657.417	G30	215.239	-31.101	29233.006
G15	225.476	38.043	22006.616	G31	37.509	-21.949	28205.943
G16	87.062	-41.907	30686.165	G32	88.659	9.813	24808.256

仔細觀察上面的表格，就可以發現只有編號為 G05、G10、G12、G13、G15、G20、G21、G24、G25、G29、G32 共十一顆衛星，具有大於零的仰角角度。因此，我們可以推得：如果在題目給定的座標點設置觀測站，則該時間點只能觀測到至多以上列出的十一顆 GPS 衛星。

第十題

- TWD67

在民國 69 年公布的我國國家座標系統，又稱「虎子山座標系統」，目前已經被 TWD97 所取代。TWD67 使用 GRS67 的橢球體當作參考橢球體，測量原點位於南投縣虎子山的一等三角點，使用橫麥卡托二度分帶 (2°TM) 投影。TWD67 的座標被拆分為平面和高程兩個部分，因此 TWD67 不是真正的三維空間系統。

- TWD97 (Taiwan Datum 1997)

在西元 1997 年公布的我國國家座標系統，目前仍持續使用當中。作為 TWD67 的進階改良版本，TWD97 不設立測量原點，而是使用八個位於我國境內的 GNSS 衛星追蹤站，建立 ITRF97 框架來取代。GRS80 當作參考橢球體，並且為了最小化 2°TM 的投影誤差，在臺灣本島及周圍離島的投影中央子午線是東經 121 度，在澎湖、金門、馬祖地區的投影中央子午線是東經 119 度。因為結合了 GNSS 定位系統，所以 TWD97 是一個原生的三維空間系統，其高程採用橢球高。另外，因為上述地區的地殼變動頻繁，所以大約每個 10 年，TWD97 就會做小幅度的修改，以因應劇烈的地殼變動。

- TWVD2001 (Taiwan Vertical Datum 2001)

在西元 2001 年公布的我國國家高程系統。採用以鉛垂線為依據的正高系統，並以基隆潮位站 1957~1991 年的平均潮汐資料，來訂出水準原點。

- WGS84 (World Geodetic System 1984)

GPS 衛星定位所採用的座標系統，是一種地心地固座標系。X 軸通過 BIH 1984 本初子午圈與赤道面的交點，Z 軸通過 BIH 1984 CTP，座標原點則是地球質心。WGS84 使用的參考橢球體參數與 GRS80 有些許不同，只差在扁率的倒數小數點下第五位以後的數值，其餘皆與 GRS80 相同。

- ITRF (International Terrestrial Reference Frame)

是一種 ITRS 的實現，由 IERS 負責制訂與維護。概念是利用遍布全球的地理觀測站組成測量網路，把觀測資料綜合計算並推得一個地心地固座標系統。因為在這個框架裡，座標點是透過與各個觀測站之間的相對位置，與運動方向來定義出來，所以 ITRF 並沒有參考橢球體，但其維護組織 IERS 建議可在普通應用時使用 GRS80，或直接套用 [ITRF transformation parameters](#) 來進行 ITRF 與其他座標系統之間的轉換作業。

第十一題

GPS time 永遠與 TAI 相差 19 秒鐘，TDT 永遠與 TAI 相差 32.184 秒鐘。因為 UTC 是一個會考量到地球自轉因素的時間標準，而地球的自轉並非均勻等速，所以 UTC 會隨著時間的流逝而可能超前或是落後地球目前的自轉情形，這時就需要加上一些修正量來保持 UTC 的一致性。因此，與永遠保持均勻等速增加的 TAI 比起來，UTC 與 TAI 之間的差距就稱為潤秒 (leap second)；截至 2020 年六月為止，UTC 與 TAI 之間總共差距 37 秒鐘。