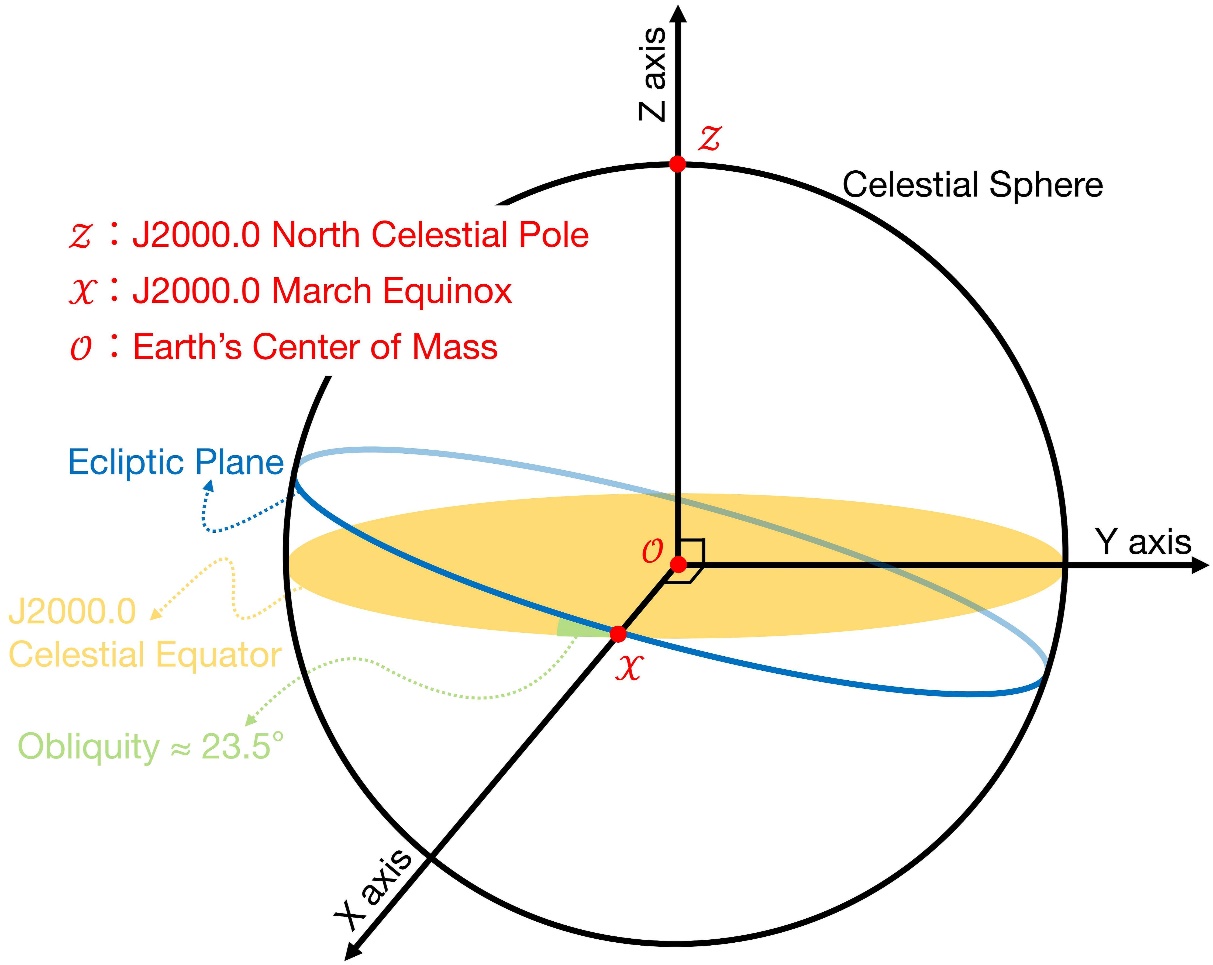
Homework 6

108B (1375) Global Positioning System　王傳鈞　0416047

第一題

因為歲差和章動的影響，所以天球座標系的座標軸沒辦法永遠保持固定，會隨著時間推移而旋轉、偏移。為了解決這樣子的問題，我們可以指定一個特定時刻的座標軸當作固定參照，此方法就稱為「協議」慣性坐標系統。目前國際間最常使用「J2000.0」，它代表terrestrial time 2000/1/1 12:00:00 AM。

天球座標系是一種以通過星體的天球當作參考體、天球赤道面和通過春分點的子午圈當作參考面的座標系統。在卡氏直角座標定義下，座標原點是地球質心、X軸會通過春分點、Z軸會通過天北極，詳細情形如下圖所示。



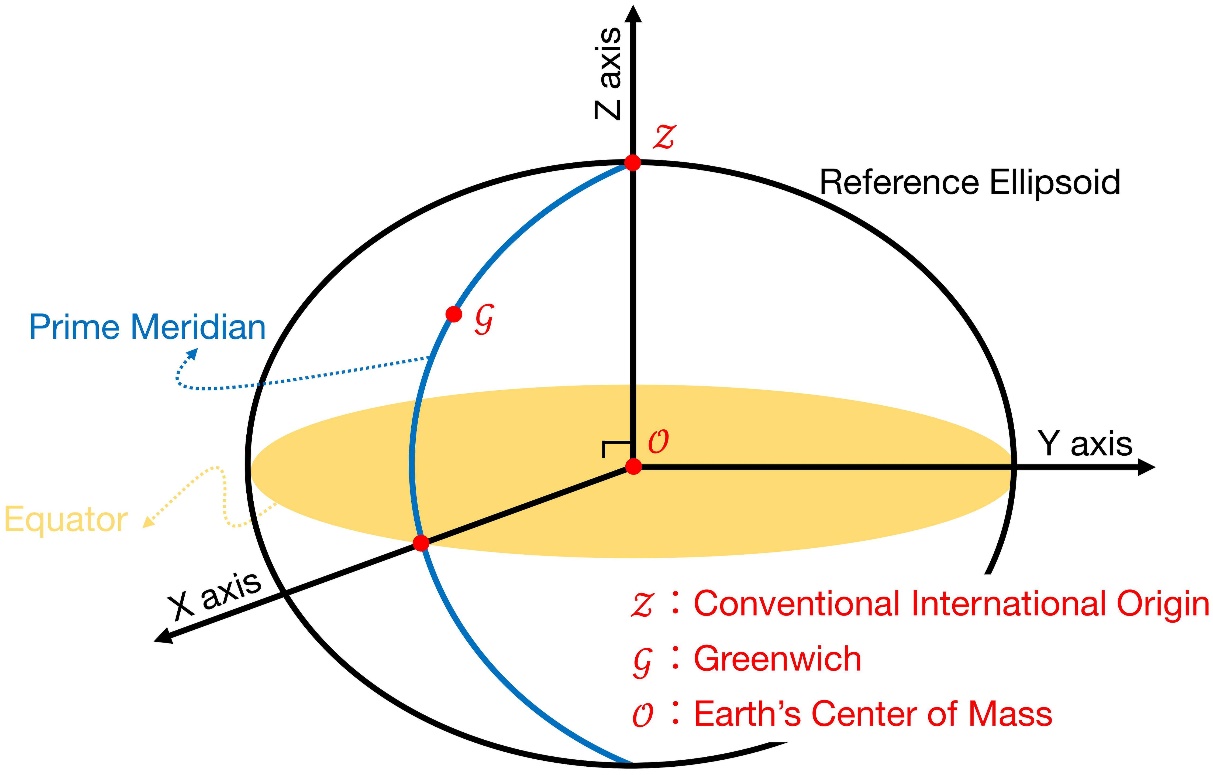
在任何的座標系統當中，都可以有兩種表示座標的方法：直角座標、球面座標。在天球座標系當值中，我們通常用 來表示一個點的球面座標，關於這兩種座標表示法的換算公式如下。

* 直角座標 → 球面座標：
* 直角座標 ← 球面座標：

第二題

因為極運動的影響，所以地球座標系的座標軸沒辦法永遠保持固定，會隨著時間推移而旋轉、偏移。為了解決這樣子的問題，我們可以指定一個特定時刻的座標軸當作固定參照，此方法就稱為「協議」地球坐標系統。目前國際間最常使用conventional terrestrial pole (CTP)，它代表西元1900到1905年，共六年期間的平均地球北極點位置，使用它來當地球座標系的Z軸之固定指向。

地球座標系是一種以參考橢球體 (reference ellipsoid) 當作參考體、赤道面和通過格林威治的本初子午圈當作參考面的座標系統。在卡氏直角座標定義下，座標原點是地球質心、X軸會通過本初子午圈和赤道面的交點、Z軸會通過CTP，詳細情形如下圖所示。



在任何的座標系統當中，都可以有兩種表示座標的方法：直角座標、球面座標。在天球座標系當值中，我們通常用 來表示一個點的球面座標，關於這兩種座標表示法的換算公式如下，以下文字 代表橢球體離心率、 代表橢球體半長軸長度。

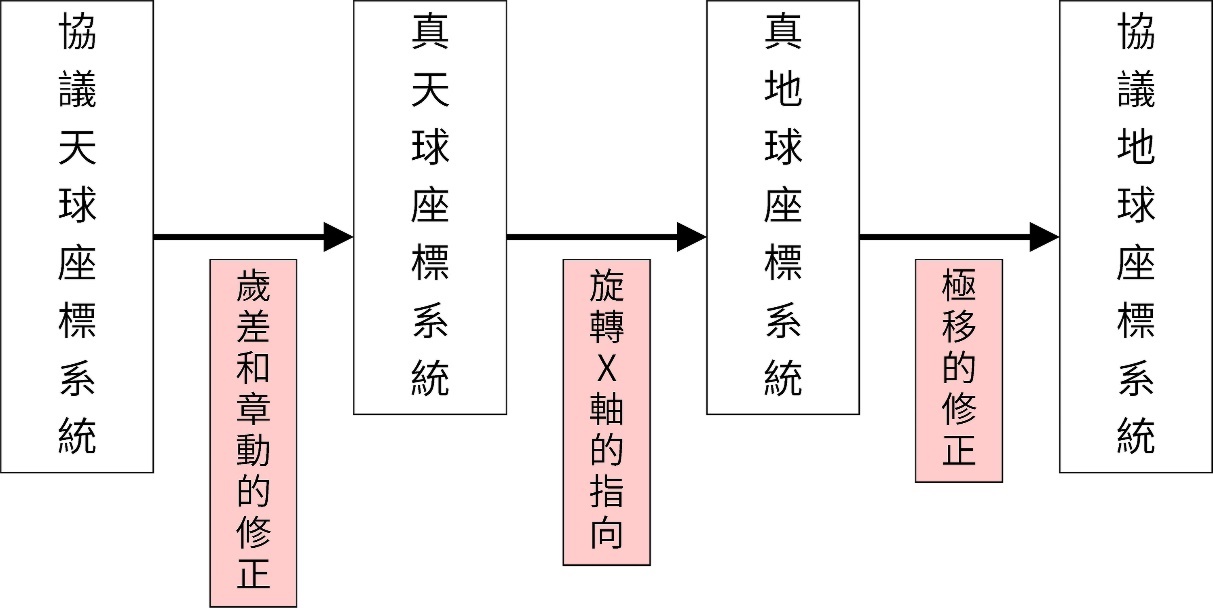
* 直角座標 → 球面座標：
* 直角座標 ← 球面座標：

可以特別注意到上述的公式中，計算 和 的過程，並不是explicit form，造成需要使用疊代法求解。

第三題

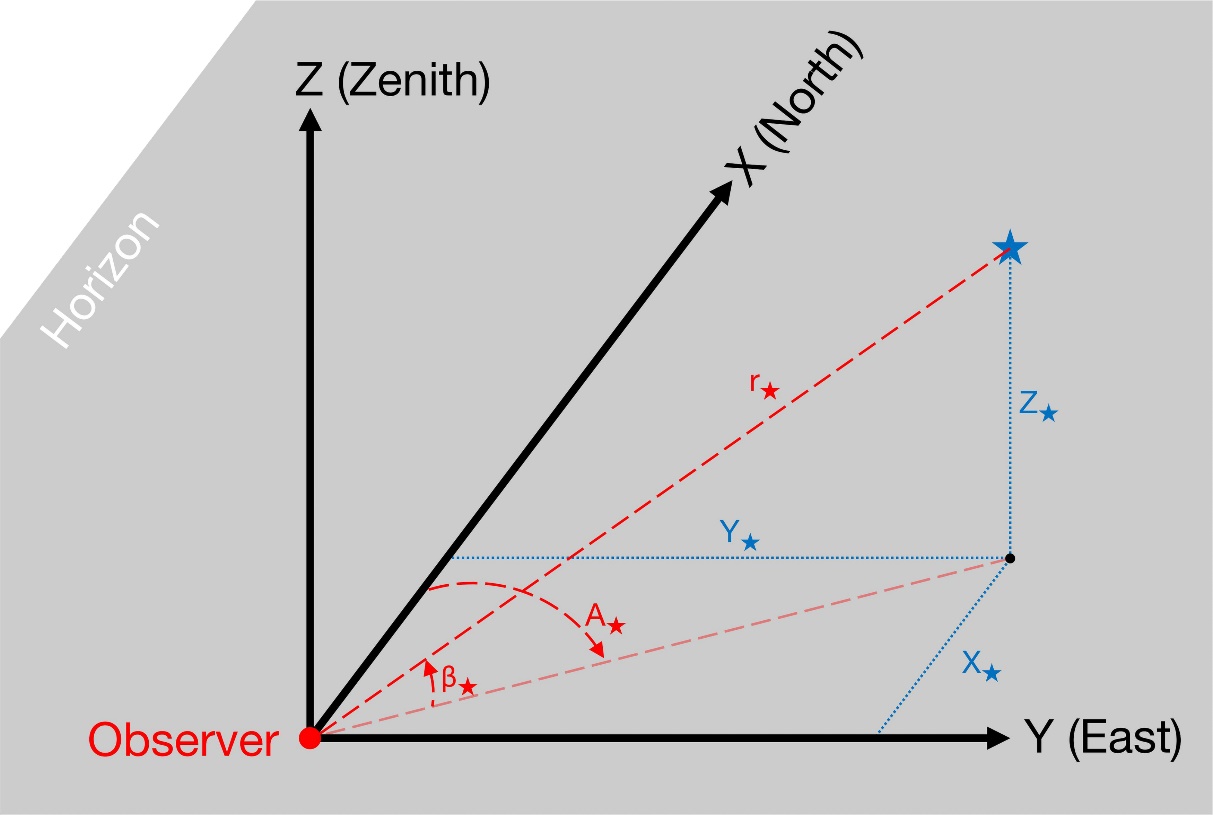
* 歲差 (axial precession)：又稱「進動」，因為地球不是完美的球體，赤道部分較南北兩極隆起，所以太陽和月亮的引力會對隆起的部分形成力矩，讓地球自轉軸無法保持指向一個固定方位，造成現在可以觀測到每年春分點以約 50.3 角秒的速率向西移動。
* 章動 (nutation)：因為太陽和月亮地球的引力不是固定不變的常數，會隨著地球公轉、月球繞地相對位置的不同而有大小變化，所以地球自轉軸在歲差的過程中，不會保持等速而呈顯小幅抖動的現象。
* 極移 (polar motion)：又稱「極運動」，因為地球的自轉軸並不與地球最大慣性軸一致，所以造成南北極點在地球表面的位置會隨時間變化。

從協議慣性坐標系統轉換到協議地球坐標系統的過程，要考慮歲差、章動、極移三種效應帶來的變化量。除此之外，還需要在固定Z軸之下，旋轉X軸的指向由通過春分點，變成通過本初子午圈與赤道面的交點，意即旋轉Greenwich apparent sidereal time (GAST) 角度，詳細步驟如下。



第四題

測站地平座標系是一種完全以測站當作原點來看世界的座標系統。在卡氏直角座標定義下，座標原點是測站、X軸指向測站的正東方、Z軸指向測站正上方的天頂，詳細情形如下圖所示。



在任何的座標系統當中，都可以有兩種表示座標的方法：直角座標、球面座標。在天球座標系當值中，我們通常用 來表示一個點的球面座標，關於這兩種座標表示法的換算公式如下。

* 直角座標 ← 球面座標：
* 直角座標 → 球面座標：

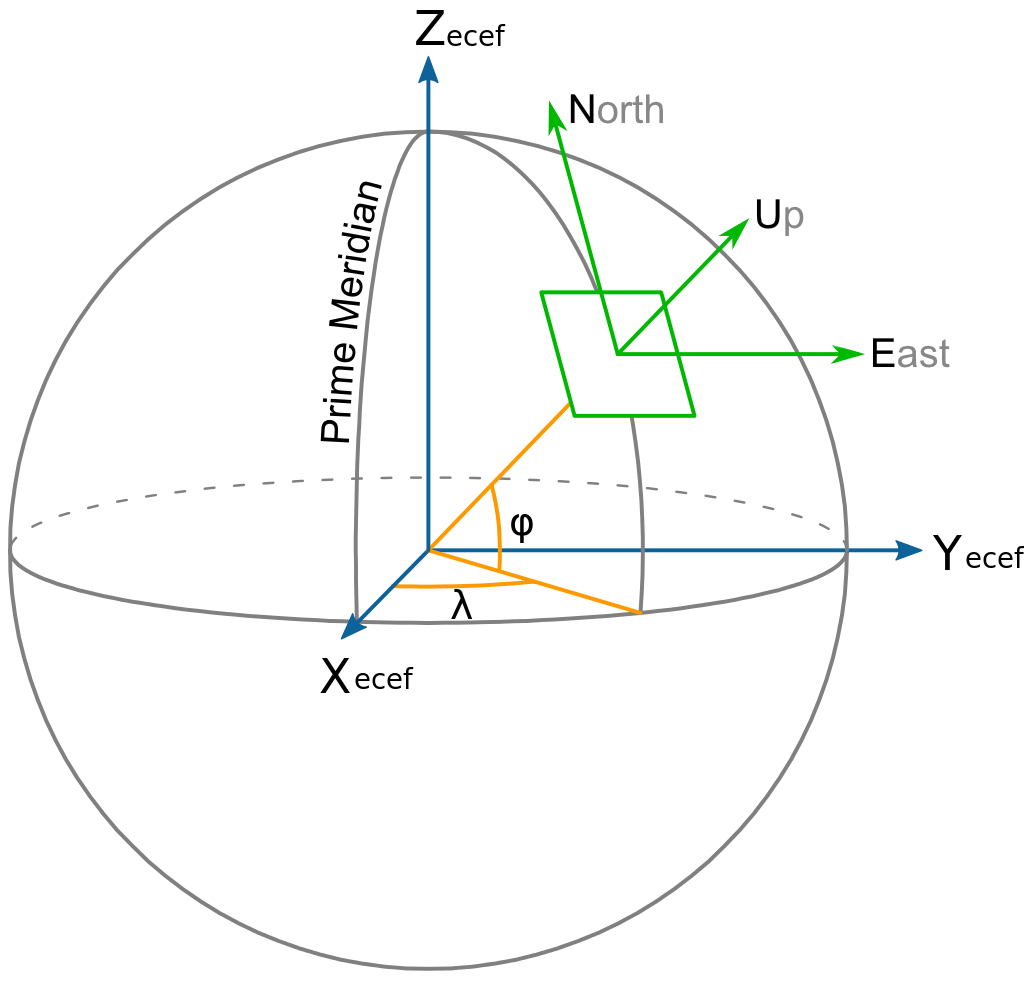
第五題

總共經過三個步驟的旋轉座標軸，就可以把測站地平座標轉換成CTS座標。為了不混淆名稱，這邊把測站地平座標系的三個座標軸分別叫做N、E、U軸，CTS的三個座標軸還是維持X、Y、Z軸的稱呼。

第一步，顛倒E軸指向，讓測站地平座標系的三軸合乎right-hand rule。假設新的E軸叫做E’ 軸。第二步，固定E’ 軸的情形下，旋轉座標軸讓U軸平行CTS的Z軸。假設新的U軸叫做U’ 軸。第三步，固定U’ 軸的情形下，旋轉座標軸讓N軸平行CTS的X軸且E軸平行CTS的Y軸。

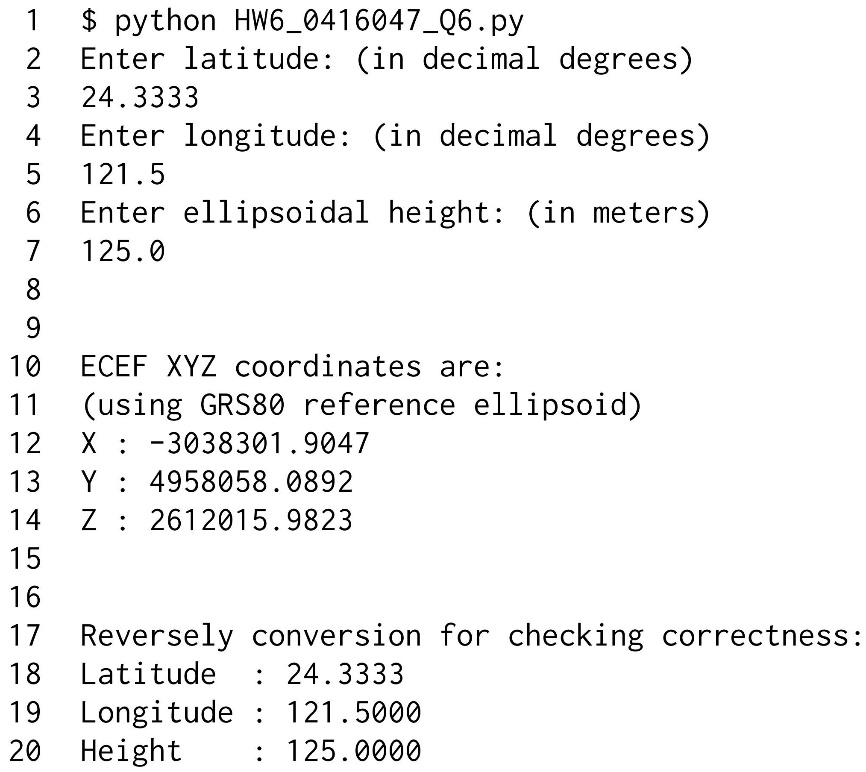
綜合以上的三個步驟，我們可以寫成一個旋轉矩陣，只需要把某一個特定點的測站地平卡氏直角座標乘以旋轉矩陣，就可以輕鬆得到該點相對應的CTS的直角座標值，假設測站在CTS的spherical coordinate是 。

* 轉換公式：， 代表某點的測站地平座標系之卡氏直角座標
* 其中：，而且不難發現 是正交矩陣



第六題

根據題目給定的地心地固經緯度座標 (緯度24.3333度、經度121.5度)，加上我自行撰寫的[python程式](https://github.com/a2468834/Global_Positioning_System/blob/master/HW6/HW6_0416047_Q6.py)，可以得到以下結果。



根據上圖 (第12~14行) 可知該點的卡氏座標為 、  
、。以此數值反推其經緯度座標 (第18~20行)，也可得到與輸入時相同的結果。

第七題

目前我國最新的國家座標系統是TWD97[2010]，採用橫麥卡托二度分帶   
(2°TM)投影，參考橢球體是GRS80。在臺灣本島與周邊離島地區，中央子午線是東經121度、尺度比0.9999，投影原點向西平移250公里；在澎湖、金門、馬祖地區，中央子午線是東經119度、尺度比0.9999，投影原點向西平移250公里。若向我國內政部申請某一個點位的精確座標，會得到三種版本：地心地固座標系的三維卡氏直角座標、地心地固座標系的球面座標、2°TM投影座標與橢球高。

第八題

目前我國最新的國家座標系統是TWD97[2010]，其採用橫麥卡托二度分帶   
(2°TM)投影。在臺灣本島與周邊離島地區，中央子午線是東經121度、尺度比0.9999，投影原點向西平移250公里；在澎湖、金門、馬祖地區，中央子午線是東經119度、尺度比0.9999，投影原點向西平移250公里。

首先，採用此投影方法而非國際間常用的UTM (即6°TM)，是因為上述地區的地理範圍並不大，使用六度分帶將會有很大的投影誤差，使用比較密的二度分帶將可以減少投影誤差。其次，使用二度分帶且中央子午線尺度比0.9999，將可以讓臺灣本島的西部沿岸與東部沿岸，恰好落在尺度比接近1的位置，滿足多數使用者對於重點城市需要高精度投影座標的需求。最後，投影原點向西平移將可以讓所有的投影座標都呈現正數數值，方便我們做數據的處理。

第九題

根據我自行撰寫的[python程式](https://github.com/a2468834/Global_Positioning_System/blob/master/HW6/HW6_0416047_Q9.py)，只要在終端機輸入命令  
「python HW6\_0416047\_Q9.py igs20913.sp3」，就可以得到HW6\_Q9\_Result.csv檔案，裡面含有2020/02/05 08:00:00AM，總共32顆GPS衛星各自的測站地平座標，以下表格詳細列出結果。

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| PRN | Azimuth | Altitude | Distance | PRN | Azimuth | Altitude | Distance |
| G01 | 174.602 | -48.382 | 30753.281 | G17 | 247.631 | -30.195 | 29302.521 |
| G02 | 326.966 | -22.705 | 27808.507 | G18 | 164.213 | -33.453 | 29186.203 |
| G03 | 77.549 | -72.574 | 32556.599 | G19 | 270.532 | -30.162 | 29222.541 |
| G04 | 8.545 | -66.311 | 32258.859 | G20 | 148.513 | 49.392 | 21300.327 |
| G05 | 300.799 | 8.423 | 24999.477 | G21 | 76.417 | 52.615 | 21544.598 |
| G06 | 311.546 | -47.016 | 30806.772 | G22 | 110.578 | -60.363 | 31816.938 |
| G07 | 211.992 | -55.235 | 31351.721 | G23 | 2.167 | -67.705 | 32023.705 |
| G08 | 149.088 | -15.087 | 27588.325 | G24 | 239.453 | 80.806 | 19996.724 |
| G09 | 311.981 | -64.207 | 32183.283 | G25 | 357.244 | 5.971 | 25193.045 |
| G10 | 137.71 | 19.826 | 23818.475 | G26 | 62.175 | -37.635 | 30065.741 |
| G11 | 169.917 | -28.974 | 28766.421 | G27 | 121.25 | -6.995 | 26662.532 |
| G12 | 323.344 | 18.328 | 23849.692 | G28 | 215.054 | -5.486 | 26870.93 |
| G13 | 236.416 | 10.262 | 24630.291 | G29 | 19.355 | 0.471 | 25733.61 |
| G14 | 74.392 | -7.504 | 26657.417 | G30 | 215.239 | -31.101 | 29233.006 |
| G15 | 225.476 | 38.043 | 22006.616 | G31 | 37.509 | -21.949 | 28205.943 |
| G16 | 87.062 | -41.907 | 30686.165 | G32 | 88.659 | 9.813 | 24808.256 |

仔細觀察上面的表格，就可以發現只有編號為G05、G10、G12、G13、G15、G20、G21、G24、G25、G29、G32共十一顆衛星，具有大於零的仰角角度。因此，我們可以推得：如果在題目給定的座標點設置觀測站，則該時間點只能觀測到至多以上列出的十一顆GPS衛星。

第十題

* TWD67

在民國69年公布的我國國家座標系統，又稱「虎子山座標系統」，目前已經被TWD97所取代。TWD67使用GRS67的橢球體當作參考橢球體，測量原點位於南投縣虎子山的一等三角點，使用橫麥卡托二度分帶 (2°TM) 投影。TWD67的座標被拆分為平面和高程兩個部分，因此TWD67不是真正的三維空間系統。

* TWD97 (Taiwan Datum 1997)

在西元1997年公布的我國國家座標系統，目前仍持續使用當中。作為TWD67的進階改良版本，TWD97不設立測量原點，而是使用八個位於我國境內的GNSS衛星追蹤站，建立ITRF97框架來取代。GRS80當作參考橢球體，並且為了最小化2°TM的投影誤差，在臺灣本島及周圍離島的投影中央子午線是東經121度，在澎湖、金門、馬祖地區的投影中央子午線是東經119度。因為結合了GNSS定位系統，所以TWD97是一個原生的三維空間系統，其高程採用橢球高。另外，因為上述地區的地殼變動頻繁，所以大約每個10年，TWD97就會做小幅度的修改，以因應劇烈的地殼變動。

* TWVD2001 (Taiwan Vertical Datum 2001)

在西元2001年公布的我國國家高程系統。採用以鉛垂線為依據的正高系統，並以基隆潮位站1957~1991年的平均潮汐資料，來訂出水準原點。

* WGS84 (World Geodetic System 1984)

GPS衛星定位所採用的座標系統，是一種地心地固座標系。X軸通過BIH 1984本初子午圈與赤道面的交點，Z軸通過BIH 1984 CTP，座標原點則是地球質心。WGS84使用的參考橢球體參數與GRS80有些許不同，只差在扁率的倒數小數點下第五位以後的數值，其餘皆與GRS80相同。

* ITRF (International Terrestrial Reference Frame)

是一種ITRS的實現，由IERS負責制訂與維護。概念是利用遍布全球的地理觀測站組成測量網路，把觀測資料綜合計算並推得一個地心地固座標系統。因為在這個框架哩，座標點是透過與各個觀測站之間的相對位置，與運動方向來定義出來，所以ITRF並沒有參考橢球體，但其維護組織IERS建議可在普通應用時使用GRS80，或直接套用[ITRF transformation parameters](http://itrf.ensg.ign.fr/trans_para.php)來進行ITRF與其他座標系統之間的轉換作業。

第十一題

GPS time永遠與TAI相差19秒鐘，TDT永遠與TAI相差32.184秒鐘。因為UTC是一個會考量到地球自轉因素的時間標準，而地球的自轉並非均勻等速，所以UTC會隨著時間的流逝而可能超前或是落後地球目前的自轉情形，這時就需要加上一些修正量來保持UTC的一致性。因此，與永遠保持均勻等速增加的TAI比起來，UTC與TAI之間的差距就稱為潤秒 (leap second)；截至2020年六月為止，UTC與TAI之間總共差距37秒鐘。