

Transformações Geométricas 2D

Sistemas Gráficos/
Computação Gráfica e Interfaces

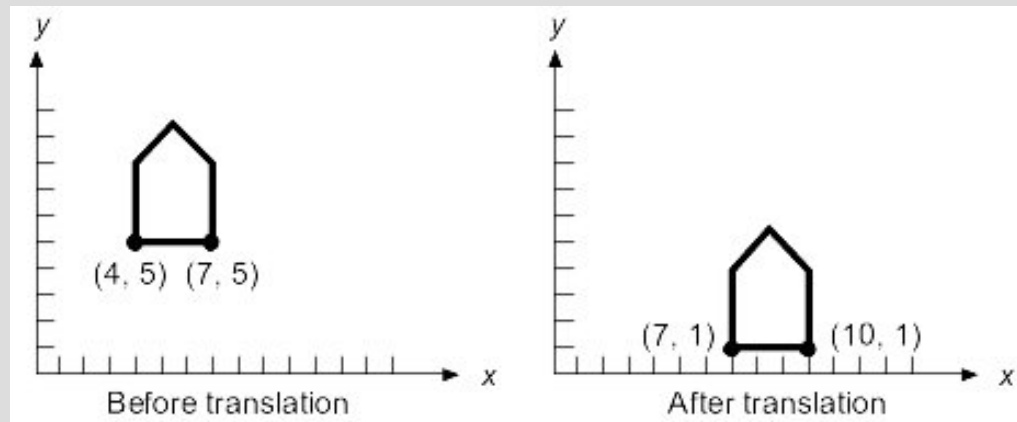
Transformações Geométricas 2D

As transformações geométricas são essenciais na computação gráfica para posicionar, mudar a orientação e escalar objectos na cena criada. O movimento é também implementado por variar os parâmetros de transformação ao longo do tempo.

Transformações:

- Translação
- Escalamento
- Rotação

Translação



$$\begin{cases} x_T = x + T_x \\ y_T = y + T_y \end{cases}$$

Vértices: (4,5) e (7,5)

$$T_x = 3 \quad T_y = -4$$

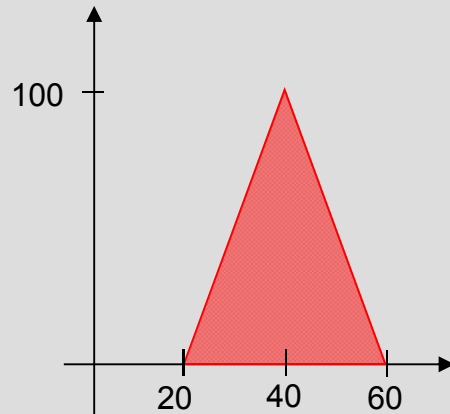
O par de translação denomina-se por *vector de translação*. A cada vértice é aplicado um deslocamento **T**:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Na forma de
produto matricial:

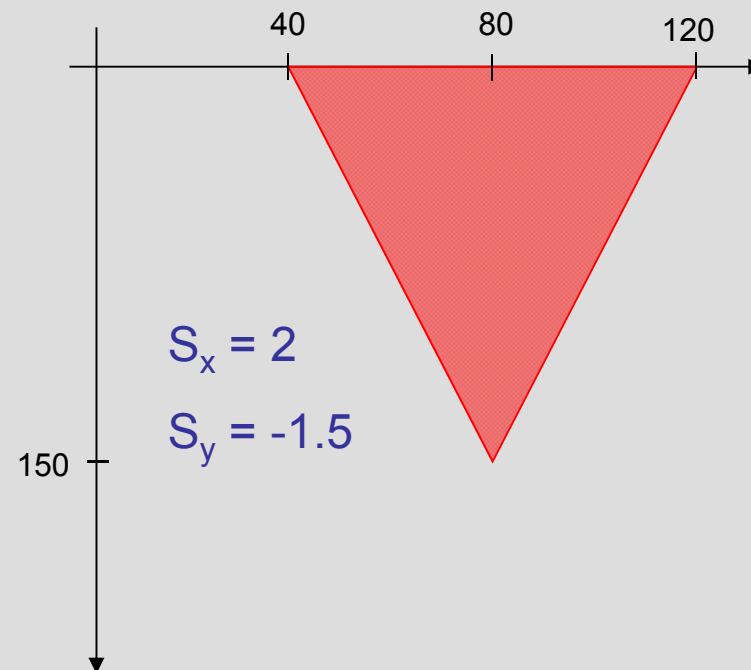
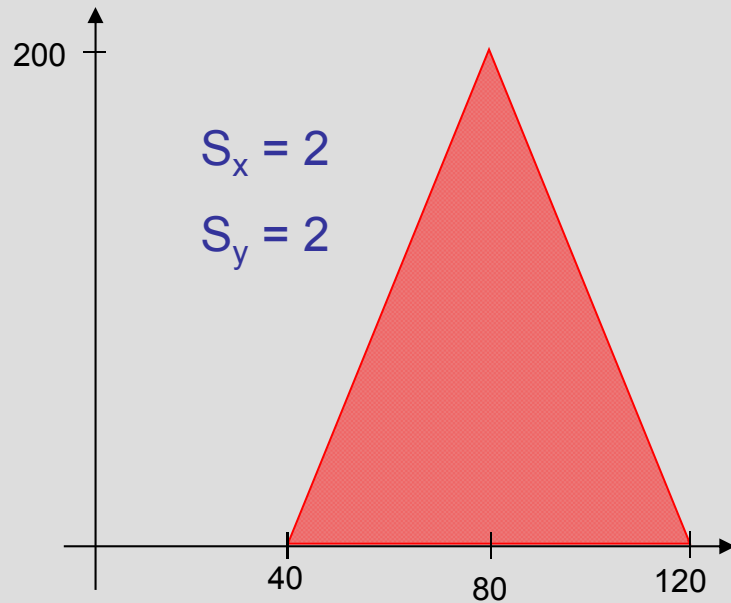
$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento



$$\begin{cases} x_S = x * S_x \\ y_S = y * S_y \end{cases}$$

Em relação à origem.



Escalamento

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

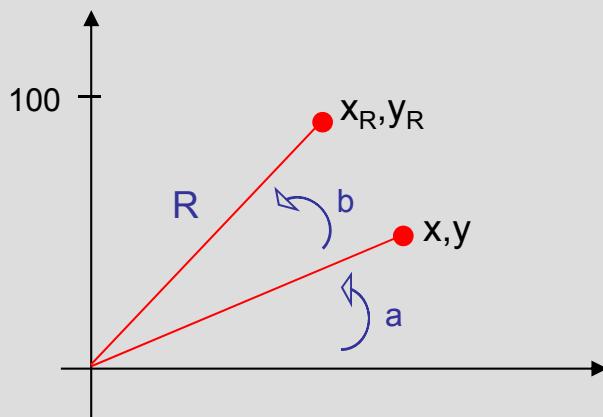
Factor de escala:

>1 aumenta o objecto

<1 reduz o objecto

$s_x=s_y$ factor de escala uniforme → não distorce o objecto

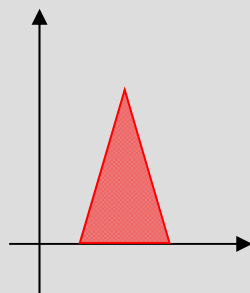
Rotação



$$\begin{cases} x = R \cdot \cos(a) \\ y = R \cdot \sin(a) \end{cases}$$

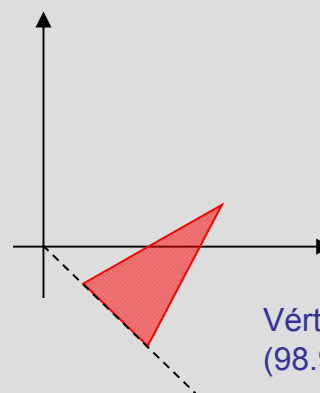
Em torno da origem.

$$\begin{cases} x_R = R \cdot \cos(a+b) = R \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) - R \cdot \sin(a) \cdot \sin(b) = x \cdot \cos(b) - y \cdot \sin(b) \\ y_R = R \cdot \sin(a+b) = R \cdot \sin(b) \cdot \cos(a) + R \cdot \sin(a) \cdot \cos(b) = x \cdot \sin(b) + y \cdot \cos(b) \end{cases}$$



Vértices: (20,0), (60,0), (40,100)

Rotação de -45°



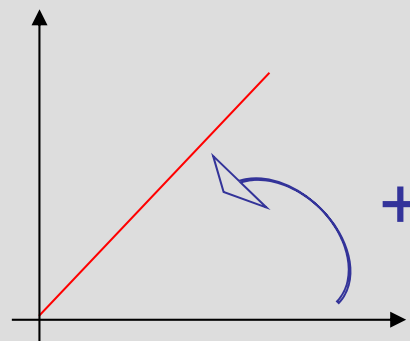
Vértices: (14.14, -14.14), (42.43, -42.43), (98.99, 42.43)

Rotação

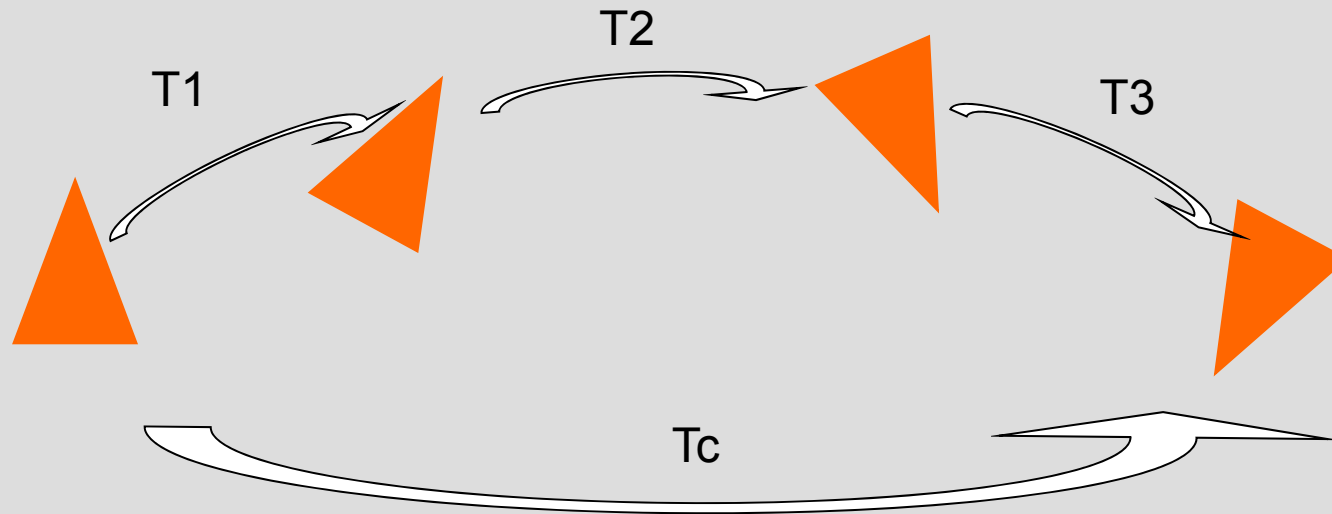
Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(b) & -\text{sen}(b) \\ \text{sen}(b) & \cos(b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nota: b positivo no sentido
contrário ao movimento
dos ponteiros do relógio.



Composição/Concatenação de Transformações

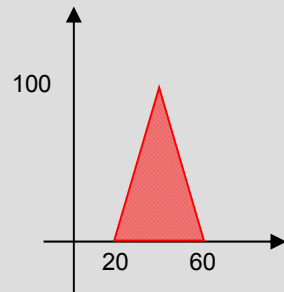


A aplicação de uma sequência de operações

=

1 única transformação: como calcular?

Composição de Transformações



Situação inicial

(20,0)

(60,0)

(40,100)

Após rotação

(0,-20)

(0,-60)

(100,-40)

$a = -90^\circ$

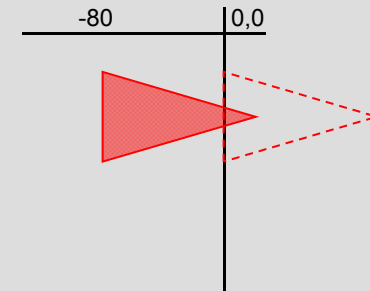
Após translação

(-80,-20)

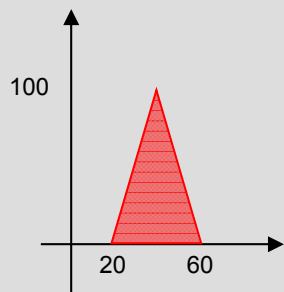
(-80,-60)

(20,-40)

$T_x=-80, T_y=0$



Trocando as transformações:



Situação inicial

(20,0)

(60,0)

(40,100)

Após translação

(-60,0)

(-20,0)

(-40,100)

$T_x=-80, T_y=0$

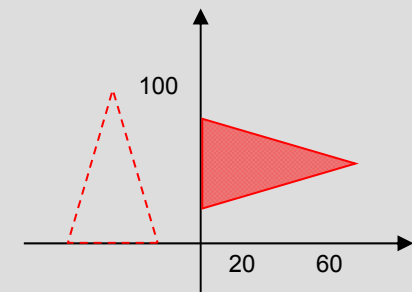
Após rotação

(0,60)

(0,20)

(100,40)

$a = -90^\circ$



Conclusão: a aplicação das transformações não é comutativa

Coordenadas homogêneas

A sequência anterior, rotação seguida de translação, aplicada a cada vértice pode ser escrita como:

$$1^{\circ} \quad \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$2^{\circ} \quad \begin{bmatrix} x_{T2} \\ y_{T2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se as matrizes que representam as transformações fossem da mesma dimensão, poder-se-iam combinar/multiplicar.

No entanto, as transformações anteriores podem também ser escritas como (forma homogênea):

$$\begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = R(a) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_{T2} \\ y_{T2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y) \cdot \begin{bmatrix} x_{R1} \\ y_{R1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos então escrever:

$$\begin{bmatrix} x_{R2} \\ y_{R2} \\ 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y) \cdot R(a) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

O produto de matrizes é:

- **Associativo**
- **Em geral Não comutativo**

$$T(T_x, T_y) \cdot R(a) \neq R(a) \cdot T(T_x, T_y)$$

Coordenadas homogéneas - resumo

Matriz de Rotação

$$\begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(a)$$

Matriz de Translação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y)$$

Matriz de Escalamento

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y)$$

Em coordenadas homogéneas um objecto de n dimensões é representado num espaço a $n+1$ dimensões.

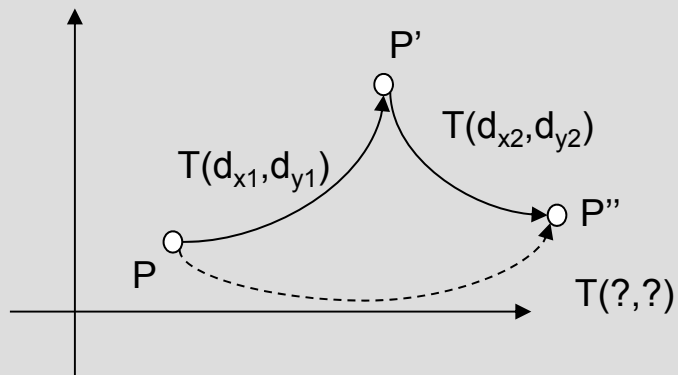
$(x, y) \rightarrow (x.h, y.h, h)$

2D

3D

Consideramos $h=1$

Transformações - Exemplos



$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) * P$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) * P'$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) * T(d_{x1}, d_{y1}) * P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} + d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y2} + d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(d_{x2}, d_{y2}) * T(d_{x1}, d_{y1}) = T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$$

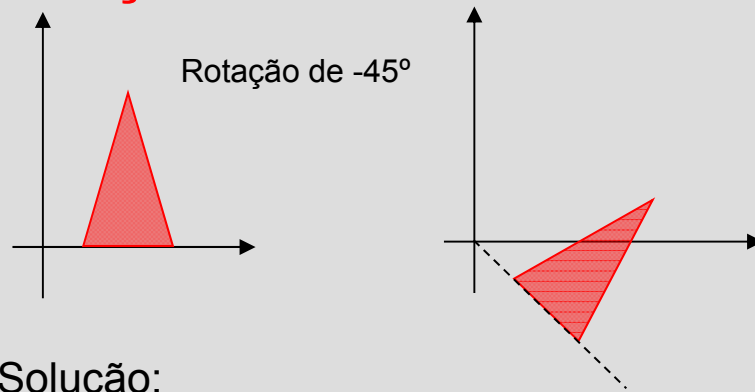
Verificar que:

$$S(s_{x2}, s_{y2}) * S(s_{x1}, s_{y1}) = S(s_{x1} * s_{x2}, s_{y1} * s_{y2})$$

$$R(a_2) * R(a_1) = R(a_2 + a_1)$$

Transformações relativas a um ponto arbitrário (pivot)

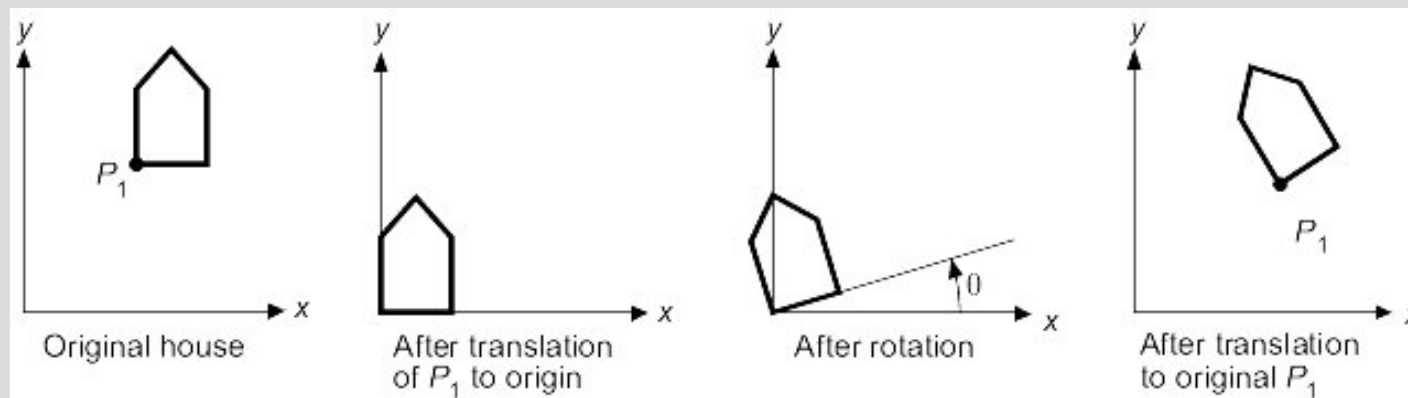
Rotação



A rotação desloca os objectos em torno da origem.

Solução:

- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* coincida com a origem
- Rodar o objecto em torno da origem
- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* volte à posição inicial (inversa da primeira)



Transformações relativas a um ponto arbitrário (pivot)

Matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & d_x(1-\cos(a)) + d_y\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) & d_y(1-\cos(a)) - d_x\sin(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(d_x, d_y) \cdot R(a) \cdot T(-d_x, -d_y)$$

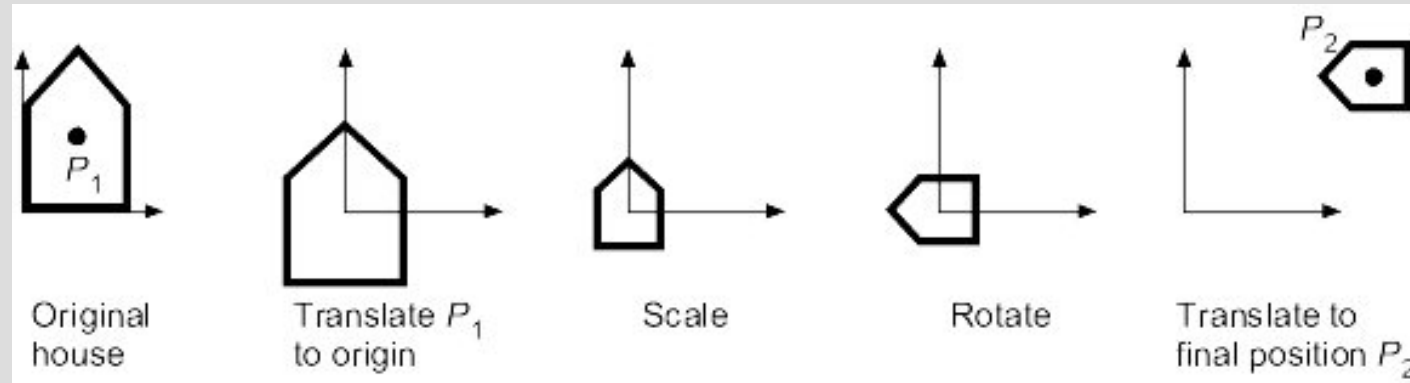
Escalamento

- Fazer a translação do objecto de modo que o ponto *pivot* coincida com a origem
- Escalar o objecto
- Fazer a translação o objecto de modo que o ponto *pivot* volte à posição inicial (inversa da primeira)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & d_x(1-s_x) \\ 0 & s_y & d_y(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(d_x, d_y) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-d_x, -d_y)$$

Exercício

Determinar a matriz de transformação para:



$T(-x_1, -y_1)$

$S(0.5, 0.5)$

$R(90)$

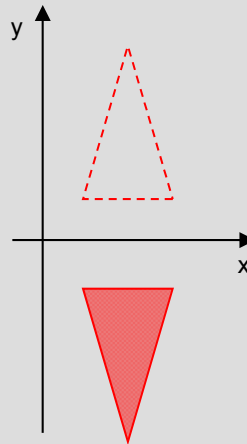
$T(x_2, y_2)$

Se $P_1=(1,2)$ e $P_2=(3,3)$ determine a matriz de transformação equivalente.

Outras transformações

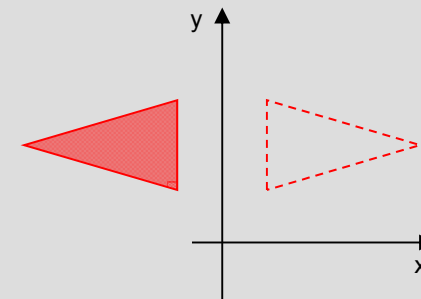
Reflexão

Em relação ao **eixo x** corresponde a uma rotação de 180° no espaço 3D em torno do eixo de reflexão, o que se traduz num escalamento $S(1,-1)$:



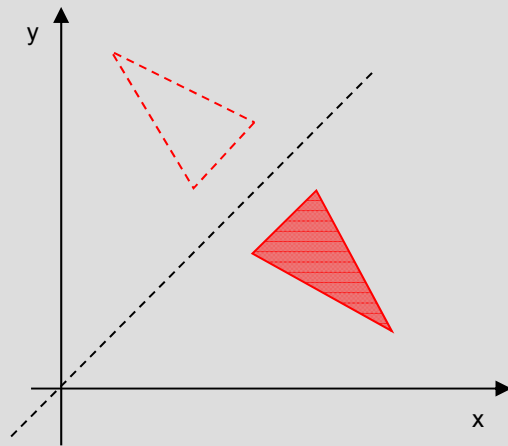
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em relação ao **eixo y**: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



Outras transformações

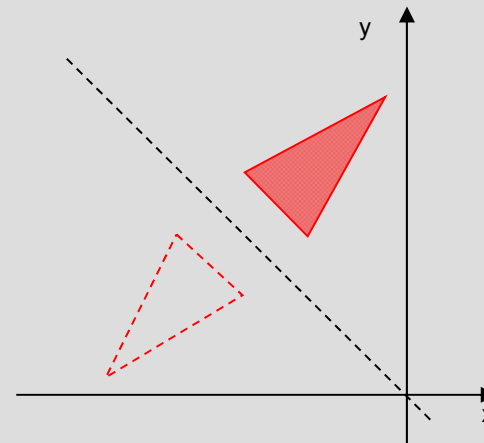
Reflexão em relação à linha $y=x$



$$R(45).S(1,-1).R(-45) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão em relação à linha $y=-x$

$$R(45).S(-1,1).R(-45) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Transformações Inversas

Se uma transformação, possivelmente composta, é dada por uma matriz M de dimensões 3x3, então a transformação inversa que coloca o objecto na sua posição inicial (ou seja sem transformação) é dada por M^{-1} .

Uma vez que M representa uma ou mais transformações, a matriz inversa deverá existir.

$$M.M^{-1} = I$$

Para algumas transformações é fácil encontrar a matriz inversa:

Translação:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

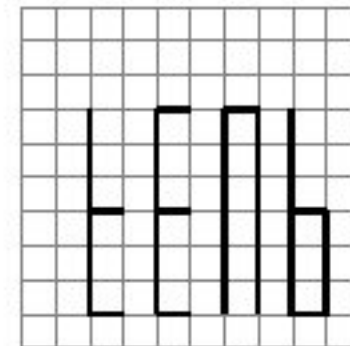
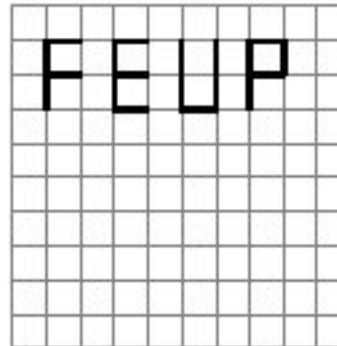
Escalamento:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

2. Da figura seguinte,

a)- Determine a matriz de transformação **2D** necessária para passar a letra *F* da situação da esquerda para a da direita.



b)- Comente a afirmação "A matriz encontrada na alínea anterior é aplicável às restantes três letras".

(Pergunta do teste de 23 Maio 2002)