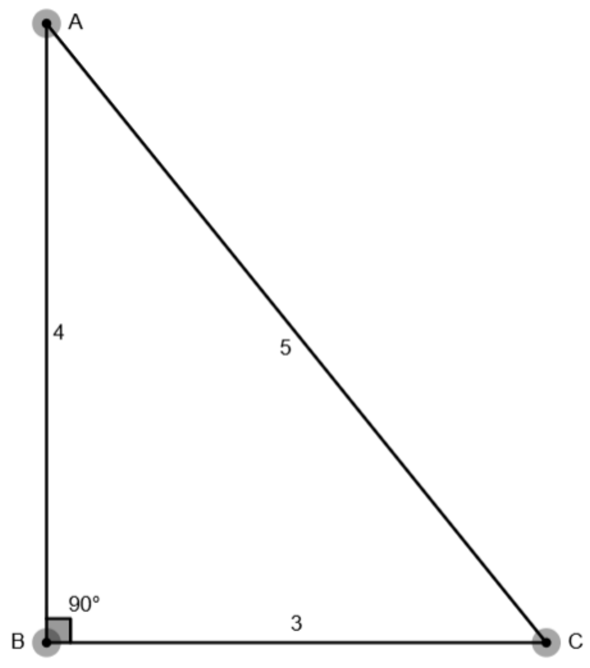
Планиметрия. Трек Легкой геометрии 5. Урок 20. Сложная планиметрия

03-09.11.2025

1 Обратная теорема Пифагора

`Пример, как грамотно доказать, что треугольник прямоугольный, с помощью обратной теоремы Пифагора.`



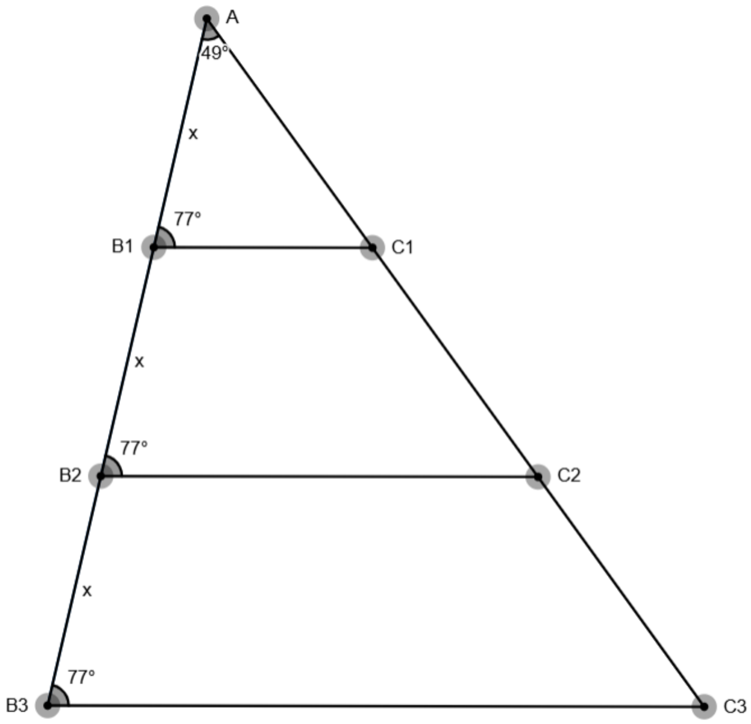
// Пусть доказали, что $\angle ABC = 90°$, $AB = 4$, $BC = 3$ и $AC = 5$

$CB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2 = AC^2$

Значит по обратной теореме Пифагора:
$\triangle ABC$ – прямоугольный

2 Несколько подобных треугольников

Если несколько треугольников подобны между собой, это еще не значит, что их коэффициенты подобия равны.



Треугольники $\triangle AB_1C_1$, $\triangle AB_2C_2$ и $\triangle AB_3C_3$ подобны по двум углам ($\angle AB_1C_1 = \angle AB_2C_2 = \angle AB_3C_3 = 77^\circ$ и $\angle B_3AC_3$ – общий)

Рассмотрим их попарно:

$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$:

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_1}{AB_2} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} = k_1$$

$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_3C_3$:

$$\frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{AC_1}{AC_3} = \frac{AB_1}{AB_3} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} = k_2$$

$\triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3$:

$$\frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{AC_2}{AC_3} = \frac{AB_2}{AB_3} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} = k_3$$

Видно, что $k_1 \neq k_2 \neq k_3$
Значит мы не можем написать:

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_1}{AB_2} \neq \frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{AC_1}{AC_3} = \frac{AB_1}{AB_3} \neq \frac{B_2C_2}{B_3C_3} = \frac{AC_2}{AC_3} = \frac{AB_2}{AB_3}$$

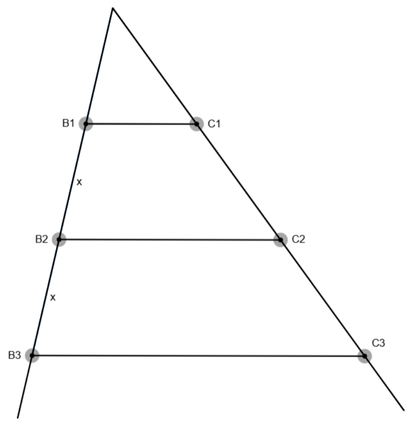
3 Разница между теоремой о пропорциональных отрезках, теоремой Фалеса и отношением из подобия треугольников

`Многие их путают между собой. Разберем различия.`

Теорема Фалеса

<u>Теорема Фалеса</u>: Если параллельные прямые пересекают две данные прямые и отсекают на одной из них равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой данной прямой.

$B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$. **Если** $B_1B_2 = B_2B_3$, **то** $C_1C_2 = C_2C_3$

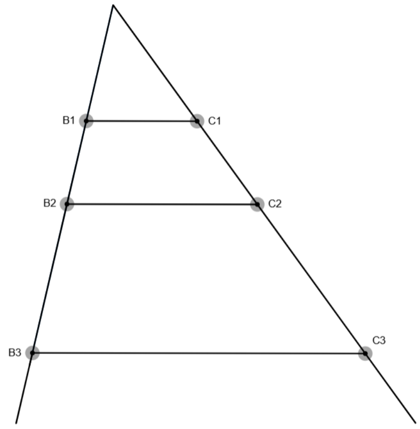


Теорема о пропорциональных отрезках

<u>Теорема о пропорциональных отрезках</u>: Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от его сторон пропорциональные отрезки.

$B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$. **Значит**

$$\frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{C_1C_2}{C_2C_3}$$



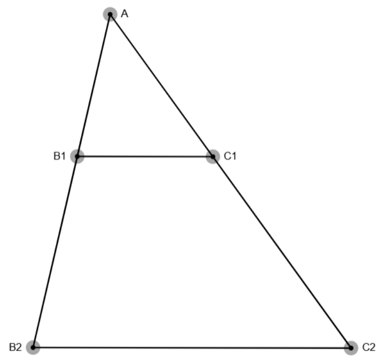
// По сути, теорема Фалеса является частным случаем теоремы о пропорциональных отрезках, поэтому вместо теоремы Фалеса всегда можно использовать теорему о пропорциональных отрезках.

Отношение из подобия треугольников

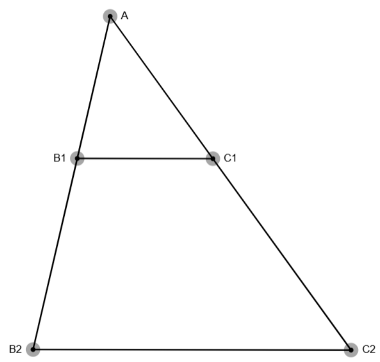
Соответствующие стороны подобных треугольников соотносятся как одно число — коэффициент подобия k

$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$. **Значит**

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$$



Разница между теоремой о пропорциональных отрезках и отношением сторон подобных треугольников



Пусть $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$

По теореме о пропорциональных отрезках

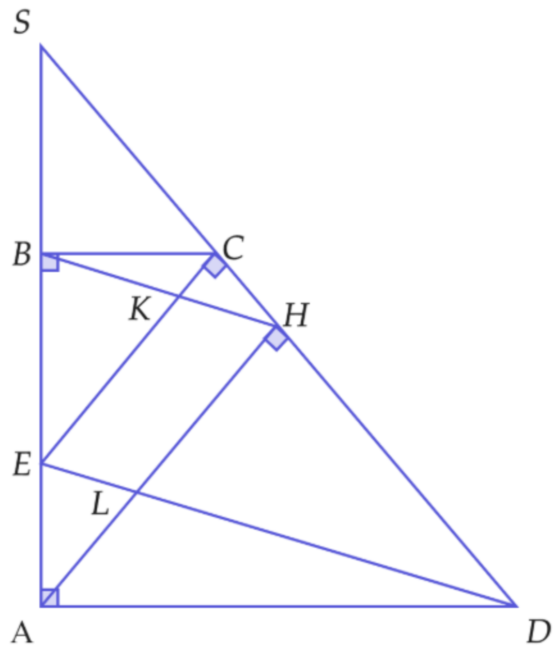
$$\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$$

Отношение сторон подобных треугольников

$$\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$$

4 Пункт а) 1 задачи из дз 20 урока

`Приведу часть решения 1 задачи из дз 20 урока`



1 способ

Рассмотрим $\triangle SCE$:

$$cos(\angle ASD) = \frac{SC}{SE}$$

Рассмотрим $\triangle ASD$:

$$cos(\angle ASD) = \frac{SA}{SD}$$

Рассмотрим $\triangle SHA$:

$$cos(\angle ASD) = \frac{SH}{SA}$$

Рассмотрим $\triangle SBC$:

$$cos(\angle ASD) = \frac{SB}{SC}$$

Рассмотрим равенство:

$$\frac{SH}{SA} = \frac{SB}{SC} \qquad SA = \frac{SH \cdot SC}{SB}$$

Рассмотрим равенство:

$$\frac{SA}{SD} = \frac{SC}{SE} \qquad \frac{SH \cdot SC}{SB \cdot SD} = \frac{SC}{SE} \qquad \frac{SH}{SD} = \frac{SC \cdot SB}{SE \cdot SC} \qquad \frac{SH}{SD} = \frac{SB}{SE}$$

$\triangle SBH \sim \triangle SED$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними ($\frac{SH}{SD} = \frac{SB}{SE}$ и $\angle ASD$ – общий)
Значит $\angle SHB = \angle SDE$, являются соответственными углами при пересечении SD прямых BH и ED, значит $BH \parallel ED$

2 способ

$\triangle SBC \sim \triangle SAD$ по двум углам ($\angle SBC = \angle SAD = 90^\circ$ и $\angle ASD$ – общий)
Значит

$$\frac{SB}{SA} = \frac{SC}{SD} \qquad SB = \frac{SC \cdot SA}{SD}$$

$\triangle SCE \sim \triangle SHA$ по двум углам ($\angle SCE = \angle SHA = 90^\circ$ и $\angle ASD$ – общий)
Значит

$$\frac{SE}{SA} = \frac{SC}{SH} \qquad SE = \frac{SC \cdot SA}{SH}$$

Рассмотрим отношение:

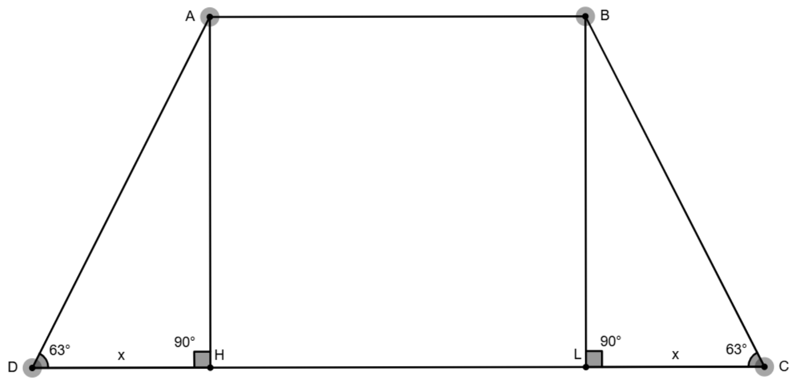
$$\frac{SB}{SE} = \frac{\frac{SC \cdot SA}{SD}}{\frac{SC \cdot SA}{SH}} \qquad \frac{SB}{SE} = \frac{SH}{SD}$$

$\triangle SBH \sim \triangle SED$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними ($\frac{SH}{SD} = \frac{SB}{SE}$ и $\angle ASD$ – общий)
Значит $\angle SHB = \angle SDE$, являются соответственными углами при пересечении SD прямых BH и ED, значит $BH \parallel ED$

5 Отрезки основания, образованные высотами, в равнобедренной трапеции

Многие из вас знают, что высоты из вершин в ранобедренной трапеции образуют равные отрезки, которые можно вычислить как полуразность оснований

$$DH = CL = \frac{CD - AB}{2}$$



Эту формулу можно использовать без доказательства. Но именно в пункте а) 3 задачи из дз 20 урока ее нужно было доказать. Покажу, как это можно сделать.

$ABCD$ – равнобедренная трапеция. Проведем в трапеции на основание CD две высоты – AH и BC

Рассмотрим $ABLH$:

$$AH \perp HL \qquad BL \perp HL \qquad AB \parallel HL$$

Значит $ABLH$ – прямоугольник. Значит $AB = HL$, $AH = BL$

Рассмотрим $\triangle ADH$ и $\triangle BCL$:
$\angle AHD = \angle BLC = 90°$, значит треугольники прямоугольные
$\triangle ADH \sim \triangle BCL$ по гипотенузе и острому углу ($\angle ADH = \angle BCL$ и $AD = BC$ (т.к. $ABCD$ – р/б трапеция))
Значит $DH = CL$

$$CD = CL + LH + HD = AB + 2DH \qquad 2DH = CD - AB \qquad CL = DH = \frac{CD - AB}{2}$$