共通テスト微積

目次

1 $\frac{a}{3}$ 公式

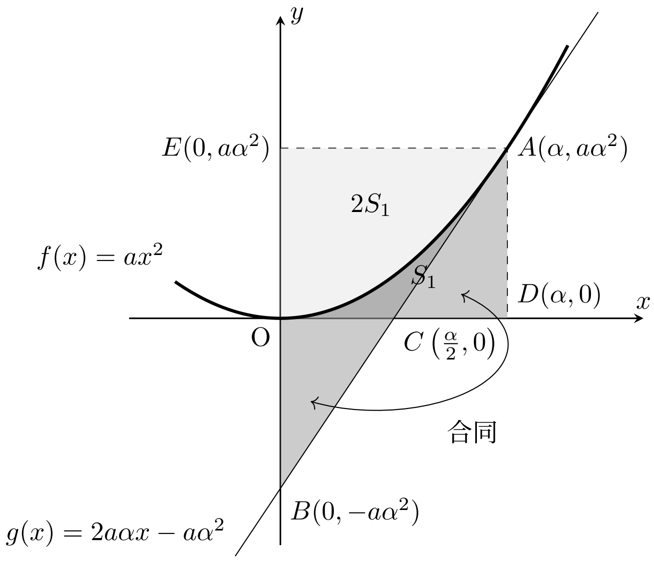

図 1: 二次関数とその接線

1.1 二次関数と x 軸によってできる面積

まず，ここで，二次関数 $f(x) = ax^2$ と x 軸で囲まれた面積を $S_1 = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx$ とすると[1]，

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha ax^2\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^\alpha \\ &= \frac{a}{3}\alpha^3 \end{aligned}$$

1.2 二次関数における接線

二次関数上の接線を $A(\alpha, a\alpha^2)$ とおくと，

$$\begin{aligned} & f(x) = ax^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & f'(x) = 2ax \end{aligned}$$

であるから，接線の方程式は，

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(x)\,(x-\alpha) + a\alpha^2 \\ &= 2a\alpha\,(x-\alpha) + a\alpha^2 \\ &= 2a\alpha x - a\alpha^2 \end{aligned}$$

[1] *cf.* 四角形 $ODAE$ の面積：$a\alpha^3$

であるので，x 軸との交点は $\left(\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$ となる．

1.3　二次関数の接線と x 軸に囲まれた面積

二次関数 $f(x) = ax^2$ と，二次関数 $f(x)$ 上の点 $A(\alpha, a\alpha^2)$ における接線と，x 軸によって囲まれた面積を S_2 とおくと，1.2 節より $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$[2]であるから，

$$S_2 = S_1 = \frac{a}{3}\alpha^3$$

また，

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_0^{\alpha} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\
&= \int_0^{\alpha} \left\{ax^2 - \left(2a\alpha x - a\alpha^2\right)\right\} dx \\
&= \int_0^{\alpha} a\,(x-\alpha)^2\,dx \\
&= \left[\frac{a}{3}\,(x-\alpha)^2\right]_0^{\alpha} \\
&= \frac{a}{3}\alpha^3
\end{aligned}$$

とすることも可能である．

[2]図 1 参照

2　二次関数における $\frac{a}{6}, \frac{a}{12}$ 公式

2.1　一次関数と二次関数で囲まれた面積

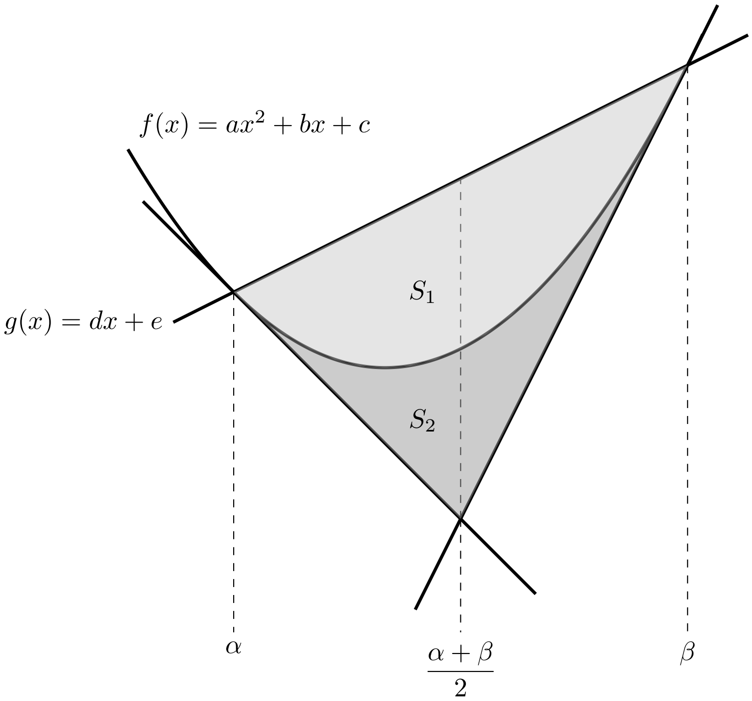

図 2: 二次関数における 2 つの接線

一次関数 $g(x) = dx + e$ と二次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ で囲まれた面積を S_1 とおいた時に,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_\alpha^\beta \left\{ \left(ax^2 + bx + c\right) - (dx + e) \right\} dx \\
&= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\, dx \\
&= a \int_\alpha^\beta (x-\alpha) \left\{ (x-\alpha) + (\alpha-\beta) \right\} dx \\
&= a \int_\alpha^\beta \left\{ (x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha) \right\} dx \\
&= a \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2 \right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3 + \frac{a}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2 \\
&= \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$

2.2 二次関数とその2つの接線によって囲まれる面積

1.1 節より，$S_1 : S_2 = 2 : 1$ であるから，

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}S_1 \\ &= \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

2.3 二次関数の共通接線

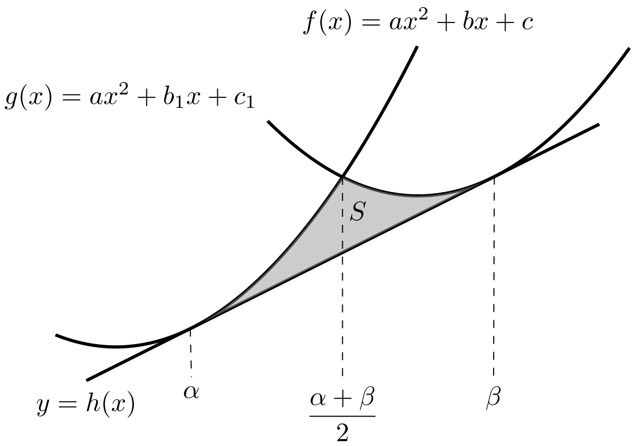

図 3: 二次関数の共通接線

1.3 節を参考にすることで，

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{f(x) - h(x)\}\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)^3 + \frac{a}{3}\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3 \\ &= \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 + \frac{a}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 \\ &= \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

3　三次関数

3.1　三次関数の対称性

一般的に，図 3.1 の様に三次関数が変曲点 (P) について点対象で，縦横がそれぞれ等間隔になることが一般的に知られている．

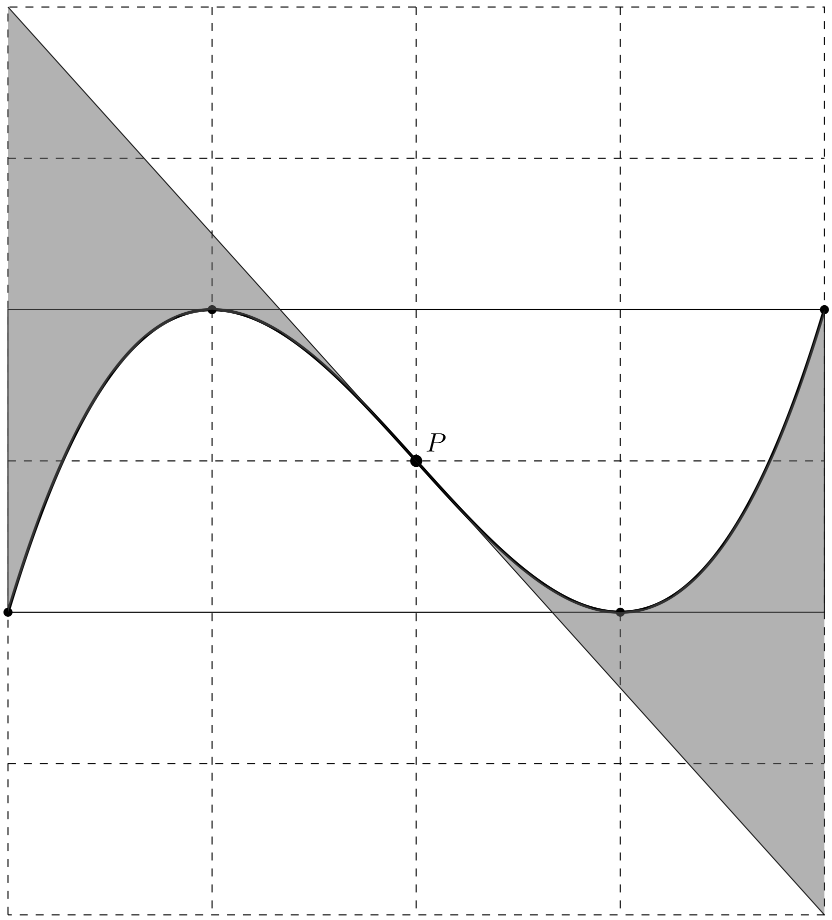

図 4: 三次関数の対称性

また，黒く塗りつぶされている部分から三つの接線を引くことができることも知られている．

例題

$f(x)=x^3-3x^2$ とし，x, y 平面上の点 (p,q) から関数 $f(x)$ へ引いた接線の本数を (p,q) 平面で図示しなさい．

解法 1. $y=f(x)$ 上の点を (t, t^3-t^2) とおくと，この点における接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= f'(x)(x-t)+t^3-t^2 \\ &= (3t^2-6t)(x-t)+t^3-t^2 \\ &= (3t^2-6t)x-2t^3+3t^2 \end{aligned}$$

これが点 (p,q) を通る時,

$$\begin{aligned} & q=(3t^2-6t)p-2t^3+5t^2 \\ \iff & 2t^3-3(p+1)t^2+6pt+q=0 \end{aligned}$$

ここで，$g(t)=2t^3-3(p+1)t^2+6pt+q$ とおいたときに，$g(x)=0$ の解の個数と求める接線の個数は一致する．ここで,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6t^2-6(p+1)t+6p \\ &= 6(t-1)(t-p) \end{aligned}$$

であるから,

$$g(1)\cdot g(p)=(3p+q-1)(-p^3+3p^2+q)$$

となり,

$$\begin{cases} (3p+q-1)(-p^3+3p^2+q)>0 & \text{(1a)} \\ (3p+q-1)(-p^3+3p^2+q)=0 & \text{(1b)} \\ (3p+q-1)(-p^3+3p^2+q)<0 & \text{(1c)} \end{cases}$$

の 3 つに場合分けをする事ができる．

$$\begin{aligned} \text{式 }(1a) &\iff \begin{cases} 3p+q-1>0 \\ -p^3+3p^2+q>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3p+q-1<0 \\ -p^3+3p^2+q<0 \end{cases} \\ \text{式 }(1b) &\iff (3p+q-1=0)\vee(-p^3+3p^2+q=0) \\ \text{式 }(1c) &\iff \begin{cases} 3p+q-1>0 \\ -p^3+3p^2+q<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3p+q-1<0 \\ -p^3+3p^2+q>0 \end{cases} \end{aligned}$$

式 $(1a)$ で 1 つ，式 $(1b)$ で 2 つ，式 $(1c)$ では 3 つの接線を引くことのできる条件となっていて，3 つの接線を引くことのできる条件は図 5 の黒い部分となる．

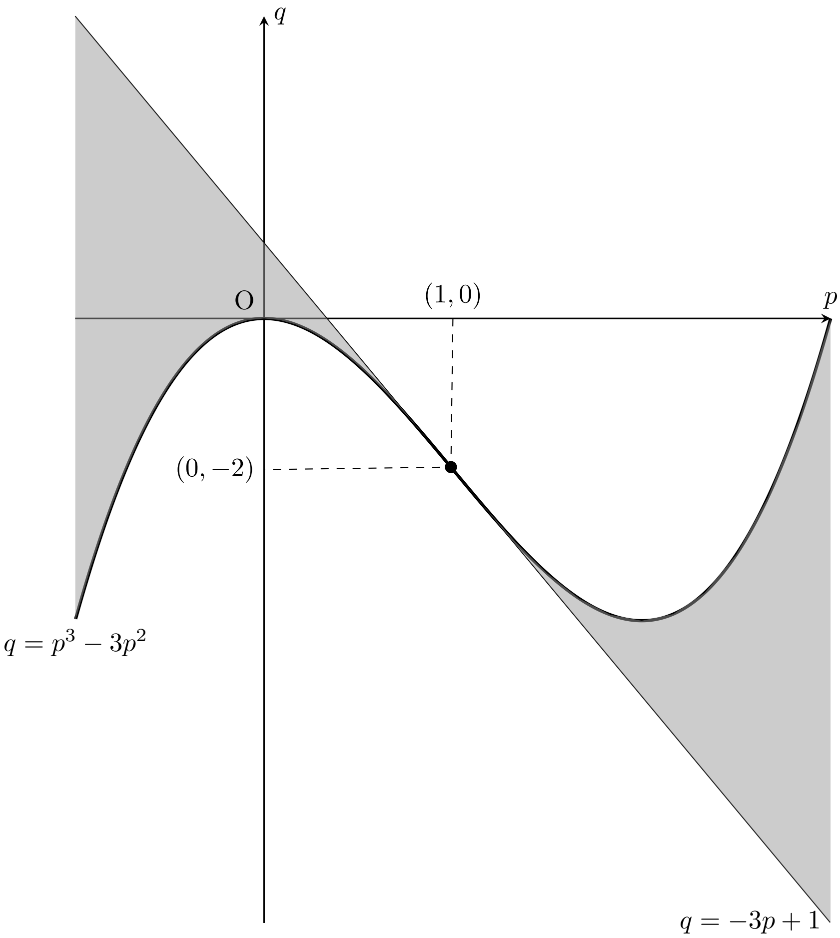

図 5: 三次関数における接線の本数

3.2　三次関数の接線で囲まれた面積

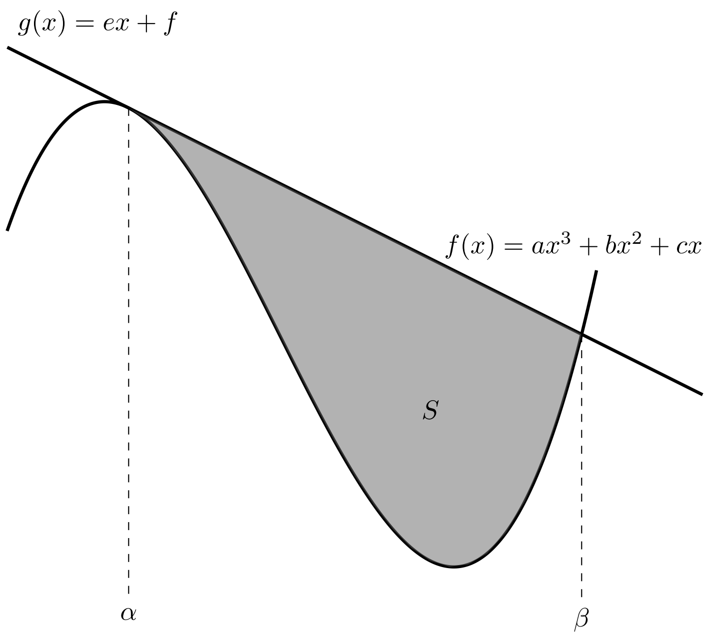

図 6: 三次関数の接線で囲まれた面積

三次関数とその接線で囲まれた面積を S とおいた時に，求める面積 S は，図 6 の黒い部分となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\}\, dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 (x-\beta)\, dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 \{(x-\alpha) + (\alpha-\beta)\}\, dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{(x-\alpha)^3 + (\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4 + \frac{1}{3}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta} \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4 - \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4 \\
&= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4
\end{aligned}
$$