媒介変数

目次

1 サイクロイド

1.1 サイクロイド曲線のグラフ

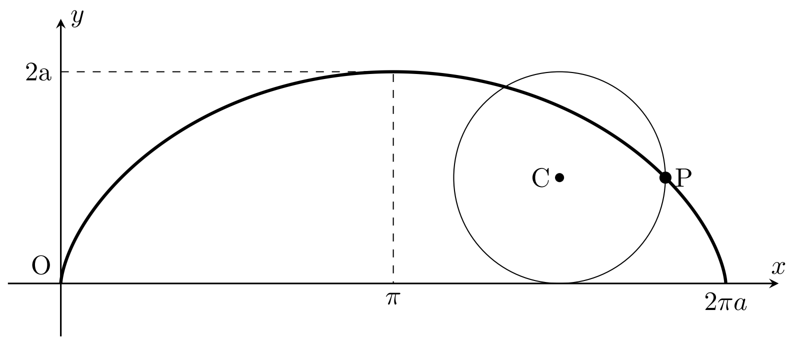

図 1: サイクロイド

1.2 サイクロイドの媒介変数表示

サイクロイドの媒介変数表示

$$\begin{cases} x(\theta) = a(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \tag{1}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} \\
&= \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - \theta\right) \\ a\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi - \theta\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\theta \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ -a\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\theta - a\sin\theta \\ a - a\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これは，式 (1) と一致する． □

1.3　サイクロイドの面積 S

解法 1. $\dfrac{dx}{d\theta} = a - a\cos\theta$ であるから,

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} a\,(1-\cos\theta)\cdot a\,(1-\cos\theta)\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} \left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\
&= a^2\left[\frac{3}{2}\theta\right]_0^{2\pi} \qquad \left(\because \int_0^{2\pi}\cos n\theta\,d\theta = 0\right) \\
&= 3\pi a^2
\end{aligned}
$$

1.4　サイクロイドの曲線の長さ L

解法 1. $\dfrac{dx}{d\theta} = a\,(1-\cos\theta)$, $\dfrac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$ であるから,

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2\,(1-\cos\theta)}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \qquad \left(\because \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right) \\
&= 2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta \\
&= 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \qquad \left(\because \sin\frac{\theta}{2} \geqq 0\right) \\
&= 2a\,\{2-(-2)\} \\
&= 8a
\end{aligned}
$$

1.5　サイクロイドを x 軸周りに回転させた体積 V

解法 1. $\dfrac{dx}{d\theta} = a\,(1-\cos\theta)$ であるから,

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{2\pi a} y^2\,dx \\
&= \pi \int_0^{2\pi} a^2\,(1-\cos\theta)^2 \cdot a\,(1-\cos\theta)\,d\theta \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^3\,d\theta \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta\right) d\theta \\
&= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta\right) d\theta \\
&= \pi a^3 \left[\frac{5}{2}\theta - \frac{15}{4}\sin\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{12}\sin 3\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 5\pi^2 a^3 \qquad \left(\because \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = 0\right)
\end{aligned}
$$

2 アステロイド

2.1 アステロイド曲線のグラフ

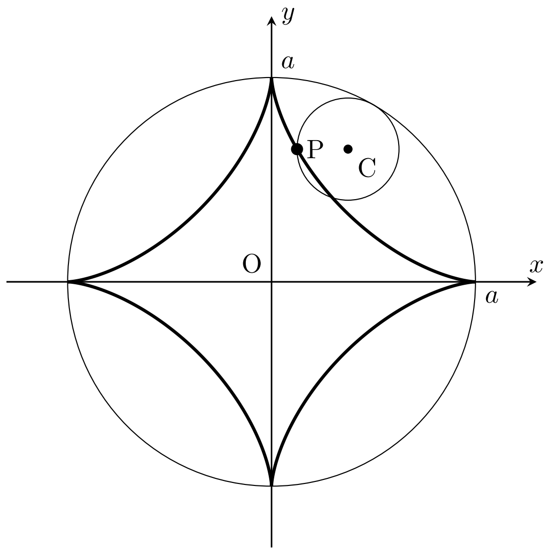

図 2: アステロイド

2.2 アステロイドの媒介変数表示

アステロイドの媒介変数表示

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos^3\theta \\ y(\theta) = a\sin^3\theta \end{cases} \tag{2}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a\cos\theta \\ \frac{3}{4}a\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a\cos(-\theta) \\ \frac{1}{4}a\sin(-\theta) \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos\theta \\ \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} \cos^3\theta \\ \sin^3\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これは，式 (2) と一致する． □

2.3　アステロイドの面積 S

解法 1. $\dfrac{dx}{d\theta}=-3a\sin\theta\cos^2\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a y\,dx \\
&= 4a\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sin^3\theta\cdot\left(-3a\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta \\
&= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 2\theta-\sin^2 2\theta\cos 2\theta\right)d\theta \\
&= \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4\theta-\sin^2 2\theta\cos 2\theta\right)d\theta \\
&= \frac{3}{4}a^2\left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta-\frac{1}{3}\sin^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \left(\because\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right) \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2
\end{aligned}
$$

2.4　アステロイド曲線の長さ L

解法 1. $\dfrac{dx}{d\theta}=-3a\sin\theta\cos^2\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2\theta\cos^4\theta+9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}\,d\theta \\
&= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\sin\theta\cos\theta|\,d\theta \\
&= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\sin\theta\cos\theta|\,d\theta \\
&= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta \\
&= 6a \qquad \left(\because\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\right)
\end{aligned}
$$

2.5　アステロイドを x 軸周りに回転させた体積 V

解法 1. $\dfrac{dx}{d\theta} = -3a\sin\theta\cos^2\theta$ であるので,

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^a \pi y^2\,dx \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6\theta\left(-3a\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta \\
&= 6a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^2\theta\,d\theta \\
&= 6a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(1-\cos^2\right)^3\cos^2\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

ここで，$t=\cos\theta$ と置くと,

$$
\begin{aligned}
V &= 6a^3\pi\int_1^0 \left(1-t^2\right)^3 t^2\,dt \\
&= 6a^3\pi\int_0^1 \left(t^2-1\right)^3 t^2\,dt \\
&= 6a^3\pi\int_0^1 \left(t^8-3t^6+3t^4-t^2\right)dt \\
&= 6a^3\pi\left[\frac{1}{9}t^9-\frac{3}{7}t^7+\frac{3}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\
&= \frac{32}{105}\pi a^3
\end{aligned}
$$

解法 2.

$$
\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}
\iff x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}
$$

$$
\iff y^2=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3=a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2
$$

の様になるので,

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^a \pi y^2\,dx \\
&= 2\pi\int_0^a \left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx \\
&= 2\pi\left[a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a \\
&= \frac{32}{105}\pi a^3
\end{aligned}
$$

3　カージオイド

3.1　カージオイド曲線のグラフ

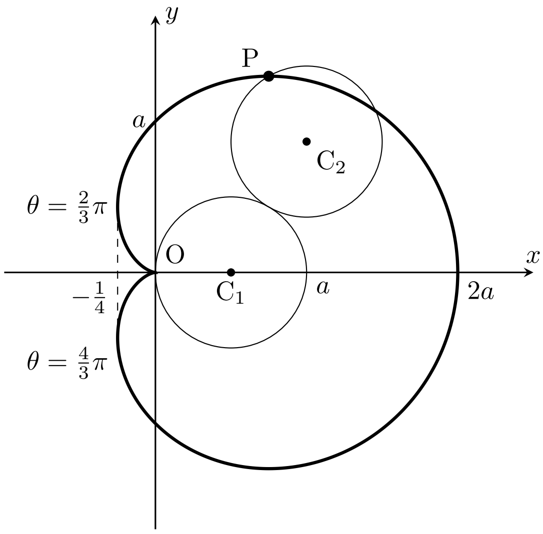

図 3: カージオイド

3.2　カージオイドの表現

3.2.1　カージオイドの媒介変数表示

カージオイドの媒介変数表示

$$\begin{cases} x(\theta) = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \tag{3}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2P} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a\cos 2\theta \\ \frac{1}{2}a\sin 2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + a\cos\theta + \frac{1}{2}a\left(1-2\cos^2\theta\right) \\ a\sin\theta + a\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} (1+\cos\theta)\cos\theta \\ (1+\cos\theta)\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これは，式 (3) と一致する．□

3.2.2 カージオイドの極方程式表示

カージオイドの極方程式表示

$$r = a\left(1+\cos\theta\right) \tag{4}$$

証明. 式 (3) より,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{a^2\left(1+\cos\theta\right)^2\cos^2\theta+\left(1+\cos\theta\right)^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{a^2\left(1+\cos\theta\right)^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)} \\ &= \left|a\left(1+\cos\theta\right)\right| \\ &= a\left(1+\cos\theta\right) \qquad (\because 1+\cos\theta \geqq 0) \end{aligned}$$

これは, 式 (4) と一致する. □

3.3 カージオイドの面積 S

解法 1. 式 (3) より,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= a\left\{-\sin\theta\cos\theta+\left(1+\cos\theta\right)\cdot\left(-\sin\theta\right)\right\} \\ &= -a\sin\theta\left(2\cos\theta+1\right) \end{aligned}$$

となるので, $0 \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$ に対応する部分を y_1, $\frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ に対応する部分を y_2 と置くと,

$$S = 2\left(\int_{-\frac{1}{4}a}^{2a} y_1\,dx - \int_{-\frac{1}{4}a}^{0} y_2\,dx\right)$$

$$= 2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0} a\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta\cdot\left\{-a\sin\theta\left(2\cos\theta+1\right)\right\}d\theta$$

$$- 2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} a\left(1+\cos\theta\right)\sin\theta\cdot\left\{-a\sin\theta\left(2\cos\theta+1\right)\right\}d\theta$$

$$\begin{aligned} &= 2a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\left(1+\cos\theta\right)\left(2\cos\theta+1\right)d\theta \\ &= 2a^2\int_0^{\pi}\left(-2\cos^4\theta-3\cos^3\theta+\cos^2\theta+3\cos\theta+1\right)d\theta \\ &= 2a^2\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{4}\cos 4\theta-\frac{3}{4}\cos 3\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}\right)d\theta \\ &= \frac{3}{2}a^2\pi \qquad \left(\because \int_0^{\pi}\cos nx\,dx = 0\right) \end{aligned}$$

解法 2. 式 (4) より，

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} a^2 \left(1+\cos\theta\right)^2 d\theta \\
&= a^2 \int_0^{\pi} \left(\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1\right) d\theta \\
&= a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\cos 2\theta + 2\cos\theta + \frac{3}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{3}{2} a^2 \pi \qquad \left(\because \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = 0\right)
\end{aligned}
$$

3.4　カージオイド曲線の長さ L

解法 1. 式 (3) より，

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= a\left\{-\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)\right\} \\
&= -a\left(\sin\theta + \sin 2\theta\right) \\
\frac{dy}{d\theta} &= a\left\{-\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)\cdot\cos\theta\right\} \\
&= a\left(\cos\theta + \cos 2\theta\right)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \, d\theta \\
&= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sin\theta + \sin 2\theta\right)^2 + \left(\cos\theta + \cos 2\theta\right)^2} \, d\theta \\
&= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\sin\theta\sin 2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta} \, d\theta \\
&= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2\left(1+\cos\theta\right)} \, d\theta \\
&= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} \, d\theta \\
&= 4a \int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\
&= 4a \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} \, d\theta \qquad \left(\because \cos\frac{\theta}{2} \geqq 0\right) \\
&= 8a \qquad \left(\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = 1\right)
\end{aligned}
$$

解法 2. 式 (4) より，$\dfrac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2\left(1+\cos\theta\right)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2\left(1+\cos\theta\right)}\, d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\
&= 4a\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\
&= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad \left(\because \cos\frac{\theta}{2} \geqq 0\right) \\
&= 8a \qquad \left(\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 1\right)
\end{aligned}
$$

3.5　カージオイドを x 軸周りに回転させた体積 V

解法 1. 3.3 節と同様に，式 (3) より，

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= a\left\{-\sin\theta\cos\theta + \left(1+\cos\theta\right)\cdot\left(-\sin\theta\right)\right\} \\
&= -a\sin\theta\left(2\cos\theta+1\right)
\end{aligned}
$$

となるので，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ に対応する部分を y_1，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ に対応する部分を y_2 と置くと，

$$
V = \pi\int_{-\frac{1}{4}a}^{2a} y_1^2\, dx - \pi\int_{-\frac{1}{4}a}^{0} y_2^2\, dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0} a^2\left(1+\cos\theta\right)^2\sin^2\theta\cdot\left\{-a\sin\theta\left(2\cos\theta+1\right)\right\} d\theta \\
&\qquad - \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} a^2\left(1+\cos\theta\right)^2\sin^2\theta\cdot\left\{-a\sin\theta\left(2\cos\theta+1\right)\right\} d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi a^3\int_0^{\pi} \left(1+\cos\theta\right)^2\left(2\cos\theta+1\right)\sin^2\theta\sin\theta\, d\theta \\
&= \pi a^3\int_0^{\pi} \left(1+\cos\theta\right)^2\left(2\cos\theta+1\right)\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

ここで，$t=\cos\theta$ とした時，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi a^3 \int_{-1}^{1} (1+t)^2 (2t+1) \left(1-t^2\right) dt \\
&= \pi a^3 \int_{-1}^{1} \left(-2t^5-5t^4-2t^3+4t^2+4t+1\right) dt \\
&= 2\pi a^3 \int_{0}^{1} \left(-5t^4+4t^2+1\right) dt \\
&= 2\pi a^3 \left[-t^5+\frac{4}{3}t^3+t\right]_0^1 \\
&= \frac{8}{3}a^3\pi
\end{aligned}
$$

