ニュートン法

1　ニュートン法

1.1　解析的な解き方

例題

2 次関数 $y = x^2 - \alpha$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を x_{n+1} とする．ただし，$x_1 > \sqrt{\alpha}$ とし，この時 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

解法 1. $y = f(x)$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ での接線における，x 軸と交わる点の x 座標が x_{n+1} であるから，

$$
\begin{aligned}
y &= f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \\
0 &= f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} \\
&= \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} \\
x_{n+1} - \sqrt{\alpha} &= \frac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} - \sqrt{\alpha} \\
&= \frac{(x_n - \sqrt{\alpha})^2}{2x_n} \qquad (> 0) \qquad (1) \\
&= \frac{x_n - \sqrt{\alpha}}{2x_n}(x_n - \sqrt{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{x_n}\right)(x_n - \sqrt{\alpha}) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$x_1 > \sqrt{\alpha}$ であるから，式 (1) より，帰納的に

$$
\begin{aligned}
& x_n > \sqrt{\alpha} \\
\iff & 0 < 1 - \frac{\sqrt{\alpha}}{x_n} < 1
\end{aligned}
$$

となるので，式 (2) より，

$$
\begin{aligned}
0 < x_n - \sqrt{\alpha} &< \frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \sqrt{\alpha}\right) \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(x_1 - \sqrt{\alpha}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{\alpha}
$$

1.2 図形的な理解

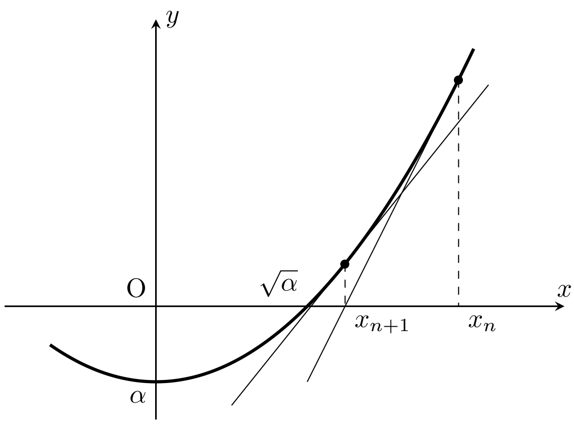

図 1: ニュートン法

図 1 の様に

$$
x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt{\alpha}
$$

となるので，解析的に $f(x) = 0$ の解を求める事ができる．