漸化式

目次

1 $a_{n+1} = a_n + d$ (等差数列) 型

例題

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$ の時，a_n を求めなさい.

解法 1.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\,d \\ &= 2 + 3\,(n-1) \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 3n - 1$$

2 $a_{n+1} = ra_n$ (等比数列) 型

例題

$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n$ の時，a_n を求めなさい.

解法 1.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

3 $a_{n+1} = pa_n + q$ (特殊解) 型

例題

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$ の時，a_n を求めなさい.

解法 1.

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = 2a_n + 3 \\ \iff & a_{n+1} + 3 = 2\,(a_n + 3)^{\,1} \\ \iff & a_n + 3 = 2^{n-1}\,(a_1 + 3) \\ \iff & a_n = 2^{n+1} - 3 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2^{n+1} - 3$$

[1] $x = 2x + 3$ の解

4 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ (n 次式) 型

4.1 $p = 1$ (階差数列) の場合

例題

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ の時，a_n を求めなさい.

解法 1. $n \geqq 2$ の時,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1) \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}k + \sum_{k=1}^{n-1}1 \\ &= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\,n + (n-1) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

これは，$n = 1$ でも成り立つ.

$$\therefore a_n = n^2$$

4.2 $p \neq 1$ の場合

考え方 1. 等比数列型 (2 節参照) を利用して解く.

$$\begin{aligned} & a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = p\left(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma\right) \\ \Longleftrightarrow\ & a_{n+1} = pa_n + \alpha(p-1)n^2 + (-2\alpha - \beta + p\beta)n - \alpha - \beta + (p-1)\gamma \end{aligned}$$

この式に当てはまる様な係数 α, β, γ を求めることによって，等比数列型として考える事ができる.

例題

$a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 2n - 3$ の時，a_n を求めなさい.

解法 2. 等比数列型 (2 節参照) を利用して解く.

$$\begin{aligned} & a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = 2\left(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma\right) \\ \Longleftrightarrow\ & a_{n+1} = 2a_n + \alpha n^2 - (2\alpha - \beta)n - (\alpha + \beta - \gamma) \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -2$$

以上より,

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 2n - 3 \\ \Longleftrightarrow\ & a_{n+1} + (n+1)^2 - 2 = 2(a_n + n^2 - 2) \\ \Longleftrightarrow\ & a_n + n^2 - 2 = 2^{n-1}(a_1 + 1 - 2) \\ \Longleftrightarrow\ & a_n = 2^{n-1} - n^2 + 2 \end{aligned}$$

5　$a_{n+1} = pa_n + qr^n$ (指数) 型

例題

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^n$ の時，a_n を求めなさい.

解法 1. 特殊解型 (3 節参照)

$$
\begin{aligned}
& a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^n \\
\iff\quad & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{a_n}{5^n} + \frac{4}{5} \\
\iff\quad & \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} - 2 = \frac{3}{5}\left(\frac{a_n}{5^n} - 2\right) \\
\iff\quad & \frac{a_n}{5^n} - 2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{a_1}{5} - 2\right) \\
\iff\quad & \frac{a_n}{5^n} = -\frac{8}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 2 \\
\iff\quad & a_n = 2 \cdot 5^n - 8 \cdot 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

解法 2. 階差数列型 (4.1 節参照)

$$
\begin{aligned}
& a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 5^n \\
\iff\quad & \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

$n \geqq 2$ の時,

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{3^n} &= \frac{a_1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{20}{9} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{\frac{20}{9}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 1\right\}}{\frac{5}{3} - 1} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{10}{3}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 1\right\} \\
&= 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$$a_n = 2 \cdot 5^n - 8 \cdot 3^{n-1}$$

6 隣接三項間漸化式

考え方 1. 等比数列型 (2 節参照) を利用して解く.

$$\begin{aligned} & a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta \left(a_{n+1} - \alpha a_n \right) \\ \iff \quad & a_{n+2} - \alpha\beta a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0 \end{aligned}$$

したがって，解と係数の関係を利用して，2 次方程式を解くことによって，等差数列を求める事ができる.

例題 1

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ の時，a_n を求めなさい.

解法 1.

$$\begin{aligned} & a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ \iff \quad & {}^{2}\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3\left(a_{n+1} - 2a_n\right) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2\left(a_{n+1} - 3a_n\right) \end{cases} \\ \iff \quad & \begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1}\left(a_2 - 2a_1\right) = -3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}\left(a_2 - 3a_1\right) = -2^n \end{cases} \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = -3^{n-1} & \text{(1a)} \\ a_{n+1} - 3a_n = -2^n & \text{(1b)} \end{cases}$$

また，式 $(1b)$ − 式 $(1a)$ をすることによって，

$$a_n = 2^n - 3^{n-1}$$

例題 2

$a_1 = 1, a_2 = 6, a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ の時，a_n を求めなさい.

解法 2. 指数型 (5 節) を利用して解く.

$$\begin{aligned} & a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \\ {}^{3} \iff \quad & a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3\left(a_{n+1} - 3a_n\right) \\ \iff \quad & a_{n+1} - 3a_n = 3^{n-1}\left(a_2 - 3a_1\right) = 3^n \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = 3a_n + 3^n \\ \iff \quad & \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

[2] $x^2 = 5x - 6$ の解
[3] $x^2 = 6x - 9$ の解

$n \geqq 2$ の時,

$$
\begin{aligned}
& \frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3} \\
\iff \quad & \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{1}{3}n \\
\iff \quad & a_n = n \cdot 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

これは，$n=1$ でも成り立つ.

$$\therefore a_n = n \cdot 3^{n-1}$$

7 $a_{n+1} = \frac{pa_n+q}{ra_n+s}$ (分数) 型

7.1 $p = 0$ の場合

例題 1

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n+2}$$ の時，a_n を求めなさい．

解法 1. $a_{n+1} = 0$ と仮定した時，$a_n = 0$ となる．しかし，$a_1 \neq 0$ であるので，帰納的に $a_n \neq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n+2} \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_n} + \frac{1}{3} \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{1}{a_n} - 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & a_n = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1} \\
\Longleftrightarrow\quad & a_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}+3^{n-1}}
\end{aligned}$$

7.2 $p \neq 0$ の場合

考え方 1.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - \alpha &= \frac{pa_n+q}{ra_n+s} - \alpha \\
&= \frac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha) + (p-r\alpha)\alpha + (q-s\alpha)}{r(a_n-\alpha)+s+r\alpha}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
(p-r\alpha)\alpha + (q-s\alpha) &= 0 \\
\alpha &= \frac{p\alpha+q}{r\alpha+s} \qquad (2)
\end{aligned}$$

の時,

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}{r(a_n-\alpha)+s+r\alpha}$$

となるので，式 (2) を解くことで，7.1 節と同様の解法で解く事ができる．

例題

$$a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} \text{ の時，} a_n \text{ を求めなさい．}$$

解法 1.

$$\begin{aligned} & x = \frac{5x-3}{x+1} \\ \iff\quad & x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \iff\quad & (x-1)(x-3) = 0 \\ \iff\quad & x = 1, 3 \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} & a_{n+1} && = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} \\ \iff\quad & a_{n+1} - 1 && = \frac{5a_n - 3}{a_n + 1} - 1 \\ & && = \frac{4a_n - 4}{a_n + 1} \\ & && = \frac{4(a_n - 1)}{(a_n - 1) + 2} \end{aligned}$$

ここで，$a_n = 1$ と仮定した時に，$a_n = 0$ となる．しかし，$a_1 \neq 0$ であるので，帰納的に $a_n \neq 1$ である．したがって，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_{n+1} - 1} && = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{4} \\ \iff\quad & \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{2} && = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{2}\right) \\ \iff\quad & \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{2} && = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{2}\right) \\ & && = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \iff\quad & \frac{1}{a_n - 1} && = \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 1}{3 \cdot 2^n} \\ \iff\quad & a_n && = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1} - 1} + 1 \\ & && = \frac{9 \cdot 2^{n-1} - 1}{3 \cdot 2^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{9 \cdot 2^{n-1} - 1}{3 \cdot 2^{n-1} - 1}$$

8　$a_{n+1} = pa_n^q$(次数相異) 型

考え方 1. 対数を用いることによって，等比数列型 (2 節参照) に帰着させる事ができる．ただし，両辺に対数を取るため真数条件を確かめる必要があり，適宜数学的帰納法などを用いて示す必要がある．

> 例題
>
> $a_1 = 2, a_{n+1}a_n = 2\sqrt{a_n}$ の時，a_n を求めなさい．

解法 1. $a_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{a_n}}{a_n} = \dfrac{2}{\sqrt{a_n}} \wedge a_1 \geqq 0$ であるから，帰納的に $a_n \geqq 0$ である．したがって，

$$\begin{aligned}
& \log_2 a_{n+1} + \log_2 a_n = 2\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 a_n \\
\iff & \log_2 a_{n+1} = -\frac{1}{2}\log_2 a_n + 1 \\
\iff & \log_2 a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(\log_2 a_n - \frac{2}{3}\right) \\
\iff & \log_2 a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\log_2 a_1 - \frac{2}{3}\right) \\
\iff & \log_2 a_n = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = 2^{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}}$$

9 連立漸化式型

考え方 1.

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= \beta\left(a_n + \alpha b_n\right) \\ &= \beta a_n + \alpha\beta b_n \end{aligned}$$

となるので，ここで係数を比較していく．

例題

$a_1 = 1, b_2 = 2, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 4a_n - b_n \end{cases}$ の時，a_n を求めなさい．

解法 1.

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= (2a_n + b_n) + \alpha(4a_n - b_n) \\ &= (2 + 4\alpha)a_n + (1 - \alpha)b_n \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \beta = 4\alpha + 2 \\ \alpha\beta = 1 - \alpha \end{cases}$$

これを解くことによって，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる．

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = -2(a_n - b_n) = (-2)^{n-1}(a_1 - b_1) \\ a_{n+1} + \dfrac{1}{4}b_{n+1} = 3\left(a_n + \dfrac{1}{4}b_n\right) = 3^{n-1}\left(a_1 + \dfrac{1}{4}b_1\right) \end{cases}$$

の様に変形する事ができる．したがって，

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = (-1)\cdot(-2)^{n-1} & \text{(4a)} \\ a_{n+1} + \dfrac{1}{4}b_{n+1} = \dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1} & \text{(4b)} \end{cases}$$

となるので，式 $(4b)$ − 式 $(4a)$ をすることにより，

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}b_n &= \frac{3}{2}\cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1} \\ \iff \quad b_n &= \frac{6}{5}\cdot 3^{n-1} + \frac{4}{5}\cdot(-2)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{6}{5}\cdot 3^{n-1} - \frac{1}{5}\cdot(-2)^{n-1}$$

以上から，

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{6}{5}\cdot 3^{n-1} - \dfrac{1}{5}\cdot(-2)^{n-1} \\ b_n = \dfrac{6}{5}\cdot 3^{n-1} + \dfrac{4}{5}\cdot(-2)^{n-1} \end{cases}$$

解法 2. 隣接三項間漸化式型 (6 節参照)

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \iff \quad & b_n = a_{n+1} - 2a_n \\ \iff \quad & b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} & b_{n+1} && = 4a_n - b_n \\ \iff \quad & a_{n+2} - 2a_{n+1} && = 4a_n - a_{n+1} + 2a_n \\ \iff \quad & a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n && = 0 \end{aligned}$$

となる．ここで，隣接三項間漸化式 (6 節参照) と同様にすると,

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) \end{cases}$$

よって,

$$\begin{cases} a_{n+1} + 2a_n = 3^{n-1}(a_2 + 2a_1) = 2 \cdot 3^n \\ a_{n+1} - 3a_n = (-2)^{n-1}(a_2 - 3a_1) = (-2)^{n-1} \end{cases}$$

以上から,

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{6}{5} \cdot 3^{n-1} - \dfrac{1}{5} \cdot (-2)^{n-1} \\ b_n = \dfrac{6}{5} \cdot 3^{n-1} + \dfrac{4}{5} \cdot (-2)^{n-1} \end{cases}$$