対称式とその応用

1　対称式とは

対称式とは，どの 2 つの変数を交換しても変わらない多項式のことを対称式と言う．例えば,

$$x^2 + xy + y^2 \tag{1}$$

の様に 2 つの変数 x, y を入れ替えても全く同じ多項式になるもののことである．これらは全て**基本対称式のみで表現することが可能**である．基本対称式とは，和 $x + y$ と積 xy のことである．式 (1) では,

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$$

の様に書き換える事ができる．

2　対称式の応用例

例題

$x + y = 3, xy = 2$ の時，$x^2 + y^2, x^n + y^n$ を求めなさい．

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 3^2 - 2 \times 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

解と係数の関係より，x, y は $t^2 - 3t + 2 = 0$ を満たすことから,

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^{n+2} - 3x^{n+1} + 2x^n = 0 \\ y^{n+2} - 3y^{n+1} + 2y^n = 0 \end{cases} \quad (\because x \neq 0 \land y \neq 0)$$

この式の両辺をそれぞれ足すと,

$$\left(x^{n+2} + y^{n+1}\right) - 3\left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) + 2\left(x^n + y^n\right) = 0$$

の様になる．ここで，$x^n + y^n = S_n$ と置くと,

$$\begin{aligned} & S_{n+2} - 3S_{n+1} + 2S_n = 0 \\ \iff & S_{n+2} = 3S_{n+1} - 2S_n{}^{1} \end{aligned} \tag{2}$$

[1]隣接三項間漸化式

解法 1.

$$(2) \iff \begin{cases} S_{n+2} - 2S_{n+1} = S_{n+1} - 2S_n \\ S_{n+2} - S_{n+1} = 2\left(S_{n+1} - S_n\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} S_{n+1} - 2S_n = 1^{n-1} \cdot (S_2 - 2S_1) = 1 \\ S_{n+1} - S_n = 2^{n-1} \cdot (S_2 - S_1) = 2^n \end{cases} \tag{3}$$

以上から,

$$\begin{cases} S_{n+1} - 2S_n = -1 & \text{(4a)} \\ S_{n+1} - S_n = 2^n & \text{(4b)} \end{cases}$$

式 $(4b)$ − 式 $(4a)$ をすることにより,

$$S_n = 2^n + 1$$

解法 2. 式 $(4a)$ より,

$$\begin{aligned} & S_{n+1} - 2S_n &&= -1 \\ \iff\ & S_{n+1} - 1 &&= 2\left(S_n - 1\right) \\ \iff\ & S_n - 1 &&= 2^{n-1} \cdot (S_1 - 1) \\ \iff\ & S_n &&= 2^n + 1 \end{aligned}$$