Алгоритмы компьютерной алгебры

Конспект лекций

2019

Содержание

1. Лекция 1.

Предмет изучения компьютерной алгебры - точные вычисления. Рассматриваются именно алгоритмы точного, а не приближенного вычисления, как в вычислительной математике. Эти алгоритмы лежат в основе математических пакетов MATLAB, Mathematica. Основной объект исследований - числовые системы с точными вычислениями.

1.1. Основные факты из теории многочленов

Определение 1. ***Числовым полем*** *называется множество* $\mathrm{F} \subset \mathbb{C}$*, если:*

1. $0, 1 \in F$,
2. $|\mathrm{F}| \geqslant 2$,
3. $\forall a, b \in F : a \pm b,\ ab \in F;\ b \neq 0, \dfrac{a}{b} \in F.$

Пример 1. *Числовые поля* - $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$

Множество многочленов над полем рациональных чисел обозначается как $\mathbb{Q}[x]$, над целыми $-$ $\mathbb{Z}[x]$, над произвольным числовым полем F $-$ $F[x]$.

Определение 2. *Многочлен* $f(x) \in \mathrm{F}[x]$*, отличный от константы, называют* ***приводимым*** *над полем* F*, если он допускает представление вида* $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$*, где* $\varphi(x), \psi(x) \in \mathrm{F}[x]$ *и* $\deg \varphi, \deg \psi < \deg f$*, и* ***неприводимым****, если он не допускает такого разложения (то есть один из многочленов* φ, ψ *является константой).*

1. $\deg f = 1$. Пусть f допускает разложение: $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$.

   $$\underset{=0}{\deg} \varphi, \underset{=0}{\deg} \psi < \deg f \Rightarrow \deg f = 0.$$

   Полученное противоречие доказывает неприводимость любого многочлена первой степени.

2. Пусть $\deg f > 1$ и $f(\alpha) = 0, \alpha \in F$.

   $$(x - \alpha) \mid f(x) \Rightarrow \exists g(x) : f(x) = (x - \alpha)g(x).$$

   $$\deg(x - \alpha) = 1 < \deg f.$$

   $$\deg g = \deg f - 1 < \deg f.$$

   Если многочлен f имеет корень в поле F, то f приводим над полем F.

Обратное утверждение. *Если многочлен* $f \in F[x]$ *степени 2 или 3 приводим над полем* F*, то он имеет в этом поле корень.*

Доказательство. Допустим, многочлен приводим, следовательно, $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$.

$$\deg \varphi, \deg \psi < \deg f \Rightarrow \deg \varphi = 1 \text{ или } \deg \psi = 1.$$

Допустим, $\varphi(x) = ax + b, a \neq 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{b}{a}, \alpha \in F.$ $\square$

Пример 2.

1. $f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. *Многочлен приводим над полями* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

2. $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. *У него нет рациональных корней, следовательно, он неприводим над* $\mathbb{Q}$. *Но* $f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \Rightarrow f(x)$ *приводим над* $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = x^2 + 1$ *неприводим над* $\mathbb{Q}$ *и* $\mathbb{R}$. *Но* $f(x) = (x - i)(x + i) \Rightarrow f(x)$ *приводим над* $\mathbb{C}$.

Многочлены второй и третьей степени приводимы над полем F тогда и только тогда, когда имеют в этом корень. Для многочленов степени, больше чем 3, данное утверждение не является справедливым.

Пример 3. $f(x) = (x^2+1)^2 \in \mathbb{R}[x]$ *не имеет действительных корней, но приводим.*

Определение 3. *Многочлен называется* ***нормированным****, если его старший коэффициент равен единице.*

Теорема 1 (Фундаментальная теорема о многочленах)**.** *Пусть* $f \in \mathrm{F}[x]$, $deg\ f \geqslant 1$. *Тогда* f *допускает разложение* $f(x) = a_0\varphi_1(x)\varphi_2(x)...\varphi_k(x)$, *где* $a_0 \in \mathrm{F}$, $\varphi_i \in \mathrm{F}[x]$ *и любой многочлен* φ_i *- нормированный и неприводимый. При этом данное разложение является единственным с точностью до порядка следования сомножителей.*

1.2. Многочлены с рациональными коэффициентами

Задача. *Дан многочлен с рациональными коэффициентами. Необходимо найти разложение этого многочлена в произведение многочленов с рациональными коэффициентами.*

Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$. Если мы умножим этот многочлен на подходящее число N (наименьшее общее кратное коэффициентов членов многочлена), то $Nf(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Таким образом, приводимость f равносильна приводимости Nf, следовательно, разложение многочлена с рациональными коэффициентами можно свести к разложению многочлена с целыми коэффициентами.

Теорема 2. *Если многочлен* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *допускает разложение в произведение многочленов с рациональными коэффициентами, то он допускает разложение в произведение многочленов тех же степеней с целыми коэффициентами.*

1.2.1. Алгоритм Кронекера

Задача. *Дан многочлен* $f \in \mathbb{Z}[x]$, $deg\ f > 1$. *Можно ли подобрать* $u(x), v(x)$, $u, v \in \mathbb{Z}[x]$ *и* $deg\ u$, $deg\ v < deg\ f$?

Предположение 1. *Все возникающие натуральные числа можно факторизовать.*

Предположение 2. *Многочлен формальной степени* n *можно найти с помощью интерполяционного многочлена по* $n+1$ *точке* $x_0, x_1, ..., x_n$ *и значениям многочлена в этих точках* $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$.

$$\begin{cases} f(x_0) = u(x_0)v(x_0), \\ f(x_1) = u(x_1)v(x_1), \\ \ldots \\ f(x_n) = u(x_n)v(x_n). \end{cases}$$

Рассмотрим точки $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}$.

$$\forall i \in [0, n] : f(x_i) \in \mathbb{Z} \Rightarrow u(x_i), v(x_i) \in \mathbb{Z},\ deg\ u = m.$$

Пусть все рассматриваемые точки - не корни многочлена f. Тогда $u(x_i) \mid f(x_i)$, $u(x_i)$ может принимать только конечное множество значений, состоящее из делителей $f(x_i)$. Коэффициенты многочлена u восстанавливаются по его значениям. Далее следует непосредственная проверка того, является ли u делителем f. Алгоритм Кронекера используется для сведения от выбора из бесконечного числа вариантов к выбору из конечного числа вариантов.

Теорема 3 (Признак Эйзенштейна). *Пусть многочлен*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x],\ n > 1,\ a_0 \neq 0.$$

Если существует простое число p такое, что $p \nmid a_0$, $p \mid a_1$, $p \mid a_2$, ..., $p \mid a_{n-1}$ и $p^2 \nmid a_n$, то f неприводим над $\mathbb{Q}$.

Пример 4. *Многочлен $f(x) = x^n - 2$ не приводим над $\mathbb{Q}$ для $\forall n \geqslant 1$. Таким образом, существуют неприводимые многочлены над $\mathbb{Q}$ любой степени.*

1.2.2. Алгоритм Евклида

Если многочлены $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$, то имеет место следующее представление: $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$, $h, r \in F[x]$ и $r = 0$ или $r \neq 0$, $deg\ r < deg\ g$. Если считать, что степень нулевого многочлена $r = 0$ равна $-\infty$, то можно рассматривать только вариант $deg\ r < deg\ g$.

Определение 4. *Если многочлены $f, g \in F[x]$, то многочлен $\varphi \in F[x]$ называют* ***наибольшим общим делителем (НОД)*** *f и g, если:*

1. $\varphi(x) \mid f(x)$, $\varphi(x) \mid g(x)$,
2. $\forall \psi \in F[x] : \psi(x) \mid f(x),\ \psi(x) \mid g(x) \Rightarrow \psi(x) \mid \varphi(x)$.

Можно доказать, что НОД всегда существует и находится с точностью до множителя.

Определение 5. *Если НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ - нормированный многочлен, то он обозначается как $(f(x), g(x))$.*

Алгоритм Евклида. Шаг 1.

$$f(x) = g(x)h_1(x) + r_1(x).$$

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r_1(x)),\ deg\ r_1 < deg\ g.$$

Алгоритм Евклида. Шаг 2.

$$g(x) = r_1(x)h_2(x) + r_2(x).$$

$$(g(x), r_1(x)) = (r_1(x), r_2(x)),\ deg\ r_2 < deg\ r_1.$$

Если степень многочлена f (делимого) меньше, чем степень многочлена g (делителя), то алгоритм сам поменяет их местами:

$$f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x)$$

$$g(x) = f(x)h_1(x) + r_1(x)$$

Поскольку остаток - неотрицательный, то процесс завершится.

Алгоритм Евклида. Заключительные шаги.

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)h_k(x) + r_k(x)$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)h_{k+1}(x)$$

$$(r_{k-2}(x), r_{k-1}(x)) = (r_{k-1}(x), r_k(x))$$

Строго говоря, $(r_{k-1}(x), r_k(x))$ необязательно равен $r_k(x)$. $r_k(x)$ является лишь одним из НОД.

1.2.3. Каноническое разложение

Определение 6. *Пусть для многочлена $f(x)$ существует разложение:*

$$f(x) = ap_1(x)p_2(x)...p_k(x),$$

*где все многочлены p_i - неприводимые и нормированные. Тогда такое разложение называют **разложением на неприводимые множители** или **факторизацией многочлена**.*

Определение 7. *Пусть для многочлена $f(x) \in F[x]$ существует разложение:*

$$f(x) = a_0(p_1(x))^{k_1}(p_2(x))^{k_2}...(p_r(x))^{k_r},$$

*где все многочлены p_i - неприводимые, нормированные и попарно различные. Тогда такое разложение называют **каноническим разложением над полем**, а значение k_i - **кратностью множителя** p_i. Если $k_i = 1$, то множитель p_i называется **простым**.*

Задача. *Дан многочлен f. Нужно найти вид $f(x) = a\varphi_1(x)(\varphi_2(x))^2...(\varphi_s(x))^s$, в котором φ_i - произведение всех множителей кратности i.*

Пример 5. *Получить каноническое разложение многочлена*

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^3-2)^3.$$

$$f(x) = \varphi_1(x)(\varphi_2(x))^2(\varphi_3(x))^3.$$

$$\varphi_1(x) = (x-1)(x-2).$$

$$\varphi_2(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

$$\varphi_3(x) = x^3 - 2.$$

2. Лекция 2.

2.1. Каноническое разложение

Рассмотрим каноническое разложение многочлена $f(x)$:

$$f(x) = a_0(p_1(x))^{k_1}(p_2(x))^{k_2}...(p_r(x))^{k_r}$$

Вынесем первый полином $p_1(x)$:

$$f(x) = a_0(p_1(x))^{k_1}(p_2(x))^{k_2}...(p_r(x))^{k_r} = (p_1(x))^{k_1}g(x),\ (g(x), p_1(x)) = 1.$$

$$f'(x) = k_1(p_1(x))^{k_1-1} \cdot (p_1(x))'g(x) + (p_1(x))^{k_1}g'(x) =$$
$$= (p_1(x))^{k_1-1} \cdot (k_1(p_1(x))'g(x) + p_1(x)g'(x)).$$

Докажем, что многочлен $k_1(p_1(x))'g(x) + p_1(x)g'(x)$ не делится на $p_1(x)$. Допустим, что он делится. Так как второе слагаемое $p_1(x)g'(x)$ делится на $p_1(x)$, то должно делиться и первое. Однако $(p_1(x))'$ не делится на $p_1(x)$, так как его степень меньше, чем у $p_1(x)$. Но и $(g(x), p_1(x)) = 1$, следовательно, первое слагаемое не делится на p_1, не делится и вся сумма. Полученное противоречие доказывает, что многочлен $k_1(p_1(x))'g(x)\ +\ p_1(x)g'(x)$ не делится на $p_1(x)$.

Таким образом, если неприводимый многочлен $p(x)$ входит в каноническое разложение $f(x)$ в степени k, то этот многочлен входит в каноническое разложение $f'(x)$ в степени $k-1$.

$$f'(x) = na_0(p_1(x))^{k_1-1}(p_2(x))^{k_2-1}\ ...\ (p_r(x))^{k_r-1}\underbrace{(p_{r+1}(x))^{k_{r+1}}(p_{r+2}(x))^{k_{r+2}}\ ...}_{\text{эти многочлены есть, но неинтересны}}$$

$$(f(x), f'(x)) = (p_1(x))^{k_1-1}(p_2(x))^{k_2-1}\ ...\ (p_r(x))^{k_r-1}.$$

Будем предполагать, что старший коэффициент равен 1.

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot (\varphi_2(x))^2 \cdot ... \cdot \varphi_k(x)^k.$$

$$(f(x), f'(x)) = \varphi_2(x) \cdot (\varphi_3(x))^2 \cdot ... \cdot \varphi_k(x)^{k-1}.$$

$$u_1(x) = f(x).$$
$$u_2(x) = (f(x), f'(x)) = (u_1(x), u_1'(x)).$$
$$u_3(x) = (u_3(x), u_3'(x)) = \varphi_3(x) \cdot (\varphi_4(x))^2 \cdot ... \cdot \varphi_k(x)^{k-2}.$$
$$u_4(x) = (u_4(x), u_4'(x)) = \varphi_4(x) \cdot (\varphi_5(x))^2 \cdot ... \cdot \varphi_k(x)^{k-3}.$$
$$...$$
$$u_{k-1}(x) = (u_{k-2}(x), u_{k-2}'(x)) = \varphi_k(x).$$
$$u_k(x) = (u_{k-1}(x), u_{k-1}'(x)) = 1.$$

$$v_1(x) = \frac{u_1(x)}{u_2(x)} = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot ... \cdot \varphi_k(x).$$

$$v_2(x) = \frac{u_2(x)}{u_3(x)} = \varphi_2(x) \cdot ... \cdot \varphi_k(x).$$

$$...$$

$$v_{k-1}(x) = \frac{u_{k-1}(x)}{u_k(x)} = \varphi_k(x).$$

$$\varphi_1(x) = \frac{v_1(x)}{v_2(x)},\ \varphi_2(x) = \frac{v_2(x)}{v_3(x)},\ ...$$

2.2. Уравнения третьей степени

2.2.1. Уравнения с комплексными коэффициентами

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, a_i \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0.$$

Шаг 1. Разделим обе части уравнения на a_0.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Шаг 2. Введем замену $x = y - \frac{a}{3}$.

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0.$$

$$y^3 - \cancel{ay^2} + ... + \cancel{ay^2} + ... = 0 \text{ (других квадратов нет).}$$

Получено уравнение вида $x^3 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbb{C}$. Рассмотрим простейшее уравнение третьей степени $x^3 = 1$:

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = cos\frac{2\pi k}{3} + i\ sin\frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

- $k = 0 \Rightarrow x = cos(0) + i \cdot sin(0) = 1 + 0 = 1.$
- $k = 1 \Rightarrow x = cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega.$
- $k = 2 \Rightarrow x = cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2.$

Рассмотрим общий случай: $x^3 = a,\ a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$, если есть корень x_0, то:

$$x_0 = x_0 \cdot 1,\ x_1 = x_0\omega,\ x_2 = x_0\omega^2.$$

Теперь переменную x рассмотрим как сумму переменных u и v: $x = u + v$.

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = 0.$$

$$(u^3+v^3+q)+(u+v)(3uv+p)=0.$$

Потребуем, чтобы $u^3+v^3+q=0$ и $3uv+p=0$.

$$\begin{cases} u^3+v^3+q=0, \\ 3uv+p=0. \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ uv=-\dfrac{p}{3}. \end{cases}$$

Выполним (неэквивалентный!) переход к u^3v^3.

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Так как переход к кубу неэквивалентен, то появятся лишние решения, поэтому нужно будет вернуться к уравнению: $uv=-\dfrac{p}{3}$.

Значения u^3 и v^3 можно рассматривать в качестве корней следующего квадратного уравнения:

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ \textbf{(Формула Кардано)}.$$

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}.$$

$$uv=-\frac{p}{3} \text{ или } -\frac{p}{3}\omega \text{ или } -\frac{p}{3}\omega^2.$$

Пусть найдены $u_0, v_0 \Rightarrow u_0v_0=-\dfrac{p}{3}$.

$$u_1=u_0\omega, v_1=v_0\omega^2$$

$$u_2=u_0\omega^2, v_2=v_0\omega$$

$$x_1=u_0+v_0$$

$$x_2=\omega u_0+\omega^2v_0$$

$$x_3=\omega^2u_0+\omega v_0$$

$$x_2=-\frac{u_0+v_0}{2}+i\sqrt{3}\ \frac{u_0-v_0}{2}$$

$$x_3=-\frac{u_0+v_0}{2}-i\sqrt{3}\ \frac{u_0-v_0}{2}$$

2.2.2. Уравнения с рациональными коэффициентами

Определение 8. *Рассмотрим следующее уравнение:*

$$x^3 + px + q = 0,\ \ p, q \in \mathbb{R},\ \ p \neq 0.$$

Дискриминантом *такого уравнения называют выражение D:*

$$D = -108(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}) = -27q^2 - 4p^3.$$

Определение 9. *Рассмотрим следующее уравнение:*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0,$$

у которого есть корни $x_1, x_2, ..., x_n$. ***Дискриминантом*** *такого уравнения называют выражение D:*

$$D = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2.$$

***D* > 0.**

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \Rightarrow p < 0, uv = -\frac{p}{3} > 0.$$

$$x = \sqrt[3]{A + Bi} + \sqrt[3]{A - Bi}.$$

$$|A + Bi| = |A - Bi|.$$

$$u = R \cdot (cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi)).$$

$$v = R \cdot (cos(\psi) + i \cdot sin(\psi)).$$

$$R = \sqrt[6]{A^2 + B^2}.$$

$$uv = R^2 \cdot (cos(\varphi + \psi) + i \cdot sin(\varphi + \psi)).$$

$$\varphi = -\psi \Rightarrow u + v = 2R \cdot cos(\varphi).$$

$$u - v = 2i \cdot sin(\varphi).$$

$$x_1 = u + v \in \mathbb{R}.$$

$$x_{2,3} = -\frac{u+v}{2} \pm i\sqrt{3} \cdot \frac{2i \cdot sin(\varphi)}{2} \in \mathbb{R}.$$

***D* < 0.**

$$x = \sqrt[3]{A + B} + \sqrt[3]{A - B}.$$

$$B \neq 0 \Rightarrow A + B \neq A - B \Rightarrow \sqrt[3]{A + B} \neq \sqrt[3]{A - B}.$$

$$u = \sqrt[3]{A + B} \in \mathbb{R}.$$

$$x_1 = u + v \in \mathbb{R}.$$

$$x_{2,3} = -\frac{u+v}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u - v) \in \mathbb{C}.$$

$\boldsymbol{D = 0}$.

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{A}.$$

u - вещественный кубический корень из A, $uv = -\dfrac{p}{3} \Rightarrow v \in \mathbb{R}$, но v - тоже вещественный кубический корень из A, следовательно, $u = v$.

$$\begin{cases} x_1 = u + v = 2u, \\ x_{2,3} = -\dfrac{u+v}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{3}}{2}(u - v) = -u. \end{cases}$$

3. Лекция 3.

3.1. Решение уравнений четвертой степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + y)^2 = x^4 + ax^3 + \frac{a^2}{4}x^2 + 2x^2y + axy + y^2$$

$$\cancel{x^4} + \cancel{ax^3} + bx^2 + cx + d = \cancel{x^4} + \cancel{ax^3} + \frac{a^2}{4}x^2 + 2x^2y + axy + y^2$$

$$(x^2 + \frac{a}{2}x + y)^2 = Ax^2 + Bx + C,\ A = \frac{a^2}{4} + 2y - b, B = ay - c, C = y^2 - d.$$

Необходимо подобрать y так, чтобы справа был полный квадрат. Для этого необходимо, чтобы **резольвента Феррари** $B^2 - 4AC$ была равна нулю.

$$(x^2 + \frac{a}{2}\,x + Y)^2 = (\sqrt{A}\,x + \sqrt{C})^2$$

$$x^2 + \frac{a}{2}\,x + Y = \pm(\sqrt{A}\,x + \sqrt{C})$$

Пример 6. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

$$(x^2 - x + y)^2 = x^4 - 2x^3 + 2x^2y + x^2 - 2xy + y^2$$

$$\cancel{x^4} - \cancel{2x^3} + 2x^2 + 4x - 8 + (x^2 - x + y)^2 = \cancel{x^4} - \cancel{2x^3} + 2x^2y + x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x^2 - x + y)^2 = (2y - 1)x^2 - (2y + 4)x + (y^2 + 8)$$

$$(2y + 4)^2 - 4(2y - 1)(y^2 + 8) = 0$$

$$4y^2 + 16y + 16 - 8y^3 - 64y + 4y^2 + 32 = 0$$

$$y^3 - y^2 + 6y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \text{ (найден с помощью подбора)}$$

$$(x^2 - x + 1)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(x^2 - x + 1)^2 = (x - 3)^2$$

$$x^2 - x + 1 = x - 3$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$x^2 - x + 1 = 3 - x$$
$$x^2 - 2 = 0$$
$$x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

3.2. Границы комплексных корней

Теорема 4 (Теорема о границах комплексных корней). *Рассмотрим полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Введем величину $A = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |a_n|$. Все комплексные корни этого многочлена удовлетворяют неравенству:*

$$|x| < 1 + \frac{A}{|a_0|}$$

.

Доказательство. Докажем, что если $|x| \geqslant 1 + \dfrac{A}{|a_0|}$, то $f(x) \neq 0$.

Воспользуемся стандартными неравенствами:

1. $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

2. $|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$

$$|f(x)| = |a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n| \geqslant |a_0x^n| - |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n|$$
$$|a_1x^{n-1}| = |a_1||x|^{n-1} \leqslant A|x|^{n-1}$$
$$|f(x)| \geqslant |a_0||x^n| - (|a_1x^{n-1}| + |a_2x^{n-2}| + ... + |a_n|)$$
$$|f(x)| \geqslant |a_0||x^n| - A(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + ... + 1) = |a_0||x^n| - A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} =$$
$$= |a_0||x^n| - A\frac{|x|^n}{|x| - 1} + \underbrace{A\frac{1}{|x| - 1}}_{>0} > |a_0||x^n| - A\frac{|x|^n}{|x| - 1} =$$
$$= \frac{|x|^n|a_0|}{|x| - 1}\underbrace{(|x| - 1 - \frac{A}{|a_0|})}_{\text{по условию } \geqslant 0} \geqslant 0.$$

Следовательно, $|f(x)| > 0$. □

3.3. Границы положительных корней

3.3.1. Метод Маклорена

Рассмотрим многочлен с коэффициентами из $\mathbb{R} : f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Предполагаем, что $a_0 > 0$. Если все числа больше нуля, то положительных корней нет. Поэтому считаем, что $\exists k : 1 \leqslant k \leqslant n, a_k < 0$.

Теорема 5 (Оценка по методу Маклорена). *Пусть k – номер первого отрицательного коэффициента многочлена, B – наибольший из модулей отрицательных коэффициентов. Тогда все положительные корни многочлена удовлетворяют неравенству:*

$$x < 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

Доказательство. Докажем, что если $x \geqslant 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$, то $f(x) > 0$.

$$f(x) = a_0x^n + \underbrace{a_1x^{n-1} + ... + a_{k-1}x^{n-k+1}}_{\geqslant 0} + a_kx^{n-k} + a_{k+1}x^{n-k-1} + ... + a_n$$

$$|a_k| \leqslant B \Rightarrow -B \leqslant a_k \leqslant B$$

Если $a_{k+1} \geqslant 0$, тогда $a_{k+1} > -B$, так как $-B$ отрицательное число.
Если $a_{k+1} < 0$, тогда $a_{k+1} \geqslant -B$.
В любом случае $a_{k+1} \geqslant -B$, аналогично для следующих коэффициентов.

$$f(x) \geqslant a_0x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + ... + 1) = a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1} =$$

$$= a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1} + \underbrace{B\frac{1}{x-1}}_{>0} > a_0x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1} = \frac{a_0x^{n-k+1}}{x-1}((x-1)x^{k-1} - \frac{B}{a_0})$$

$$x^{k-1} \geqslant (x-1)^{k-1}$$

$$x > 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \Rightarrow (x-1)^k \geqslant \frac{B}{a_0}$$

$$f(x) > \frac{a_0}{x-1}x^{n-k+1}\underbrace{((x-1)^k - \frac{B}{a_0})}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Следовательно, $|f(x)| > 0$. □

3.3.2. Метод Ньютона

Теорема 6 (Оценка по методу Ньютона). *Рассмотрим полином:*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n, a_i \in \mathbb{R}, a_0 > 0.$$

Предположим, что:

$$\exists c : f(c) > 0, f'(c) > 0, f''(c) > 0, ..., f^{(n)}(c) > 0.$$

Тогда все положительные корни многочлена удовлетворяют неравенству: $x < c$.

Доказательство.

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ (формула Тейлора)}$$

Если $x \geqslant c$, то справа будет стоять строго положительное число, то есть не может быть корнем для $f(x)$. □

3.3.3. Схема Горнера

$$f(x) = (x-\alpha)g(x) + r(x)$$

	a_0	a_1	a_2	...	a_n
α	a_0	$a_1 - \alpha a_0$	$a_2 - \alpha a_1$	...	$a_n - \alpha a_{n-1}$

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

$$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1})(x-\alpha) + r$$

$a_0 = b_0, a_1 = -b_0\alpha + b_1, a_2 = b_2 - \alpha b_1, ..., a_n = r - \alpha b_{n-1}$
$b_0 = a_0, b_1 = a_1 + \alpha b_0, b_2 = a_2 + \alpha b_1, ..., b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, r = a_n + \alpha b_{n-1}$

$$f(x) = g(x)(x-\alpha) + r$$

$$g(x) = h(x)(x-\alpha) + r_1$$

$$f(x) = h(x)(x-\alpha)^2 + r1(x-\alpha) + r$$

$$f(x) = \varphi(x)(x-\alpha)^3 + r_2(x-\alpha)^2 + r_1(x-\alpha) + r$$

Так как разложение единственное, то $r = f(a), r_1 = f'(a), r_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}, ...$

Если все остатки положительные, то α – верхняя граница по методу Ньютона.

Пример 7. $f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 14x^2 + 36x + 25$

$$a_0 = 3, B = 18, k = 1, 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = 1 + \frac{18}{3} = 7$$

Оценка по Маклорену: положительные корни меньше 7.

	3	-18	14	36	25
4	3	-6	-10	-4	***9***
4	3	6	14	***52***	

Далее вычисления можно не продолжать, так все коэффициенты положительные, а значит, значения всех далее взятых производных при положительных аргументах будут тоже положительными, то есть выполняется условие метода Ньютона. Это означает, что выше 4 положительные корни искать не нужно.

Нижняя граница отрицательных корней находится с помощью многочлена $g(x) = f(-x)$. Если для g выполняется $x \leqslant M$, то для f выполняется $x \geqslant -M$. Нижняя граница положительных корней находится с помощью $h(x) = x^n f(\dfrac{1}{x})$. Если для h выполняется $x \leqslant M$, то для f выполняется $x \geqslant \dfrac{1}{M}$.

4. Лекция 4.

4.1. Теорема Штурма

Определение 10. *Пусть $f(x)$ - многочлен с вещественными коэффициентами. Рассмотрим последовательность многочленов:*

$$f_0(x) = f(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x).$$

Многочлены $f_1, ..., f_{k-1}$ будем называть промежуточными. Данная последовательность многочленов называется ***рядом Штурма*** *для многочлена f на отрезке $[a, b]$, если числа a и b не являются корнями многочлена f и выполняются следующие условия:*

1. *Соседние многочлены ряда не имеют общих корней на $[a, b]$;*

2. *Последний многочлен ряда не имеет корней на $[a, b]$;*

3. *Если $\alpha \in [a, b]$ - корень промежуточного многочлена, то соседние с ним многочлены ряда Штурма имеют в этой точке значения разных знаков;*

4. *При прохождении корня $\alpha \in [a, b]$ многочлена f произведение $f_0 f_1$ меняет знак с минуса на плюс.*

Определение 11. *Пусть есть последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, \forall a_i \in \mathbb{R}$. Заменим плюсом, минусом или нулем элементы в зависимости от значения, затем удалим нули из последовательности. Любая пара плюса и минуса, находящихся рядом, называется* ***переменой знака*** *этой последовательности.*

Пример 8.

$$3, 6, -2, 0, 5, 4, -9, 3, 2$$

$$+, +, -, 0, +, +, -, +, +$$

$$+, (+, [-), +], (+, [-), +], +$$

(скобками выделены перемены знака)

Теорема 7. *Пусть $f_0, f_1, ..., f_k$ - ряд Штурма для многочлена f на $[a, b]$. Тогда обозначим через $W(x)$, где $x \in [a, b]$, число перемен знака в последовательности $f_0(a), f_1(a), ..., f_k(a)$. Тогда число корней многочлена f на $[a, b]$ равно: $W(a) - W(b)$.*

Доказательство. Многочлен является непрерывной функцией, поэтому пока мы не пройдем корень многочлена, то число перемен знака не поменяется. Покажем, что если пройден корень промежуточного многочлена, то число перемен знака остается прежним.

Пусть α - корень промежуточного многочлена f_r, всегда можно выбрать число ε, так, что в $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ у многочленов f_{r-1} и f_{r+1} не будет корней, то есть на этом участке они сохраняют свой знак. Тогда в соответствии с условиями ряда Штурма получаем:

	f_{r-1}	f_r	f_{r+1}	*ЧПЗ*
$x = \alpha - \varepsilon$	$-$	$\mp$	$+$	1
$x = \alpha$	$-$	0	$+$	1
$x = \alpha + \varepsilon$	$-$	$\pm$	$+$	1

	f_{r-1}	f_r	f_{r+1}	*ЧПЗ*
$x = \alpha - \varepsilon$	$+$	$\mp$	$-$	1
$x = \alpha$	$+$	0	$-$	1
$x = \alpha + \varepsilon$	$+$	$\pm$	$-$	1

Число перемен знака не изменилось. Многочлен $f_k(x)$ не имеет корней, осталось рассмотреть многочлен $f_0(x)$.

	f_0	f_1	*ЧПЗ*
$x = \alpha - \varepsilon$	$-$	$+$	1
$x = \alpha$	0	$+$	0
$x = \alpha + \varepsilon$	$+$	$+$	0

	f_0	f_1	*ЧПЗ*
$x = \alpha - \varepsilon$	$+$	$-$	1
$x = \alpha$	0	$-$	0
$x = \alpha + \varepsilon$	$-$	$-$	0

При прохождения корня многочлена f_0 число перемен знака уменьшается. Но корень f_0 является корнем многочлена f. □

4.2. Построение ряда Штурма

Пусть $f(x)$ не имеет кратных корней.

$$f_0(x) = f(x)$$

$$f_1(x) = f'(x)$$

$$f_{k+2} = \text{остаток от } \frac{f_k(x)}{f_{k+1}(x)}, \text{ взятый с противоположным знаком}$$

Если многочлены не имеют кратных корней, следовательно, они взаимно простые со своими производными.

$$f_0(x) = f_1(x)g_1(x) - f_2(x)$$

$$f_1(x) = f_2(x)g_2(x) - f_3(x)$$

$$\dots$$

Докажем, что это ряд Штурма.

1. Пусть $f_2(\alpha) = 0$ и $f_3(\alpha) = 0$. Тогда $f_1(\alpha) = 0$ и $f_0(\alpha) = 0$, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$. То есть α является кратным корнем многочлена. Полученное противоречие доказывает, что соседние многочлены не имеют общих корней.

2. Пусть $f_2(\alpha) = 0$. Тогда $f_1(\alpha) = -f_3(\alpha)$. Так соседние многочлены f_1, f_3 не равны в точке α нулю, то они имеют в этой точке значения разных знаков.

3. Последний многочлен не имеет корней, так как является константой.

4. Пусть $f_0(\alpha) = f(\alpha) = 0$. Тогда $f'(\alpha) \neq 0$. Если $f'(\alpha) > 0$, то f возрастает и $f(x)$ меняет знак с - на $+$, произведение $f_0 f_1$ меняет знак с - на $+$. Если $f'(\alpha) < 0$, то f убывает и $f(x)$ меняет знак с $+$ на -, произведение $f_0 f_1$ меняет знак с - на $+$.

Эти свойства выполняются для любых отрезков, кроме случаев, когда концы отрезков являются корнями многочлена.

Пример 9. *Построить ряд Штурма и отделить корни многочлена (найти промежутки, на которых многочлен имеет единственный корень).*

$$f_0(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$$

$$f_1(x) = 4x^3 - 24x - 16 = x^3 - 6x - 4$$

$$\begin{array}{l}
x^4 - 12x^2 - 16x - 4 = \left(x^3 - 6x - 4\right) x - 6x^2 - 12x - 4 \\
\underline{-x^4 \;\; + 6x^2 \;\; + 4x} \\
\qquad\quad - 6x^2 - 12x
\end{array}$$

$$f_2(x) = -(-6x^2 - 12x - 4) = 3x^2 + 6x + 2$$

$$\begin{array}{l}
3x^3 \qquad\quad - 18x - 12 = \left(3x^2 + 6x + 2\right)\left(x - 2\right) - 8x - 8 \\
\underline{-3x^3 - 6x^2 \;\; - 2x} \\
\qquad\quad - 6x^2 - 20x - 12 \\
\qquad\quad \underline{6x^2 + 12x \;\; + 4} \\
\qquad\qquad\qquad - 8x \;\; - 8
\end{array}$$

$$f_3(x) = x + 1$$

$$\begin{array}{l}
3x^2 + 6x + 2 = \left(x + 1\right)\left(3x + 3\right) - 1 \\
\underline{-3x^2 - 3x} \\
\qquad\quad 3x + 2 \\
\qquad\quad \underline{-3x - 3} \\
\qquad\qquad\quad - 1
\end{array}$$

$$f_4(x) = 1$$

	$-\infty$	∞
f_0	+	+
f_1	−	+
f_2	+	+
f_3	−	+
f_4	+	+
ЧПЗ	4	0

Таким образом, многочлен имеет 4 вещественных корня.

Отделим корни по методу Маклорена:

$$a_0 = 1, k = 2, B = 16, 1 + \sqrt{\frac{16}{1}} = 5.$$

$$g(x) = f(-x) = x^4 - 12x^2 + 16x - 4, a_0 = 1, k = 2, B = 12, 1 + \sqrt{\frac{12}{1}} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

Отрицательные корни больше $-1-2\sqrt{3}$ (то есть больше -5). Ищем корни в (-5; 5).

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f_0	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
f_1	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
f_2	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f_3	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f_4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
ЧПЗ	4	4	4	3	2	1	1	1	1	1	0

Ответ:

1) $f_0(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$

2) $f_1(x) = x^3 - 6x - 4$

3) $f_2(x) = 3x^2 + 6x + 2$

4) $f_3(x) = x + 1$

5) $f_4(x) = 1$

Многочлен f имеет по одному вещественному корню на промежутках (-3; -2), (-2; -1), (-1; 0) и (4; 5).

4.3. Примеры нестандартного построения ряда Штурма

$$f_0(x) = f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

$$f_1(x) = f_n'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x)$$

$$f_2(x) = -f_n(x) + f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}$$

Неотрицательных корней этот многочлен не имеет, поэтому ищем корни на $(-\infty; -\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ и малое.

1. Последний многочлен не имеет корней на $(-\infty; -\varepsilon)$, так как его единственный корень равен нулю.

2. Так как f_2 не имеет корней на $(-\infty; -\varepsilon)$, то и общих корней с f_0 на $(-\infty; -\varepsilon)$ нет.

3. Пусть $f_1(\alpha) = 0$. $f_0 - f_1 = -f_2, f_0(\alpha) = -f_2(\alpha)$, так как $f_2(\alpha) \neq 0$, то они имеют разный знак.

4. Пусть $f(\alpha) = 0$. Тогда $f'(\alpha) \neq 0$.
   Если $f'(\alpha) > 0$, то f возрастает и $f(x)$ меняет знак с - на $+$, произведение $f_0 f_1$ меняет знак с - на $+$.
   Если $f'(\alpha) < 0$, то f убывает и $f(x)$ меняет знак с $+$ на -, произведение $f_0 f_1$ меняет знак с - на $+$.

Условия выполнены, это ряд Штурма.

	f_0	f_1	f_2	*ЧПЗ*
$x=-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n+1}$	1
$x=-\varepsilon$	$+$	$+$	$(-1)^{n+1}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ - нечетное} \\ 1, & \text{если } n \text{ - четное} \end{cases}$

Если n - четное, то корней нет, если n - нечетное, то имеет 1 корень.

Проблема: если f имеет кратные корни?

$$f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Правая часть имеет среди делителей только степени x, но левая часть не делится на x, поэтому кратных корней нет.

Пример 10.

$$f(x) = f_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 11$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$$

$$f_1(x) = x^2 - x + 1 \textit{ не имеет корней в } \mathbb{R}.$$

Все условия выполняются, f_0, f_1 являются рядом Штурма.

	f_0	f_1	*ЧПЗ*
$x=-\infty$	$-$	$+$	1
$x=\infty$	$+$	$+$	0

Только один вещественный корень.

Ряд Штурма можно обрывать, если текущий многочлен не имеет вещественных корней.

Пример 11. *Выразить через элементарные симметрические многочлены многочлен* $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$.

Старший член - x_1^4.

k_1	k_2	k_3
4	0	0
3	1	0
2	2	0
2	1	1

$$f = \sigma_1^{4-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 + A\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 + B\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0 + C\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 =$$
$$= \sigma_1^4 + A\sigma_1^2\sigma_2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\sigma_3.$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 0,\ \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1,\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 0.$$

$$0 = 16 + 4A + B.$$

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 9,\ \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 0.$$
$$9 = 81 + 18A + 4B.$$

$$\begin{cases} 4A + B = -16 \\ 18A + 4B = -72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A + B = -16 \\ 9A + 2B = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8A + 2B = -32 \\ 9A + 2B = -36 \end{cases} \Rightarrow A = -4, B = 0.$$

$$f = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + C\sigma_1\sigma_3.$$
$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = -3, \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 1.$$
$$-3 = 81 - 4 \cdot 27 + 3C \Rightarrow C = 8.$$

Ответ: $f = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$.

5. Лекция 5.

5.1. Многочлены от нескольких переменных, определения

Будем рассматривать многочлены от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, где $n \geqslant 2$.

Определение 12. ***Одночленами (мономами)*** *называются выражения вида* $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$*, где все коэффициенты* k_i *- целые и неотрицательные.*

Определение 13. *Число* $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i$ *называют* ***полной степенью одночлена****.*

Определение 14. ***Многочленом*** *называют сумму конечного числа одночленов.*

5.2. Упорядочивание множества мономов

5.2.1. Отношение $\prec$

При упорядочивании не обращают внимание на коэффициент a, кроме случая, если $a = 0$.

Множество ненулевых мономов упорядочено с помощью отношения $\prec$, если:

- $\forall a, b, c : a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c.$
- $\forall a, b$ выполняется только одно из соотношений: $a \prec b, a = b, b \prec a$.

и

1. $a \prec b, \forall c : ac \prec bc.$
2. $a \neq 1 \Rightarrow 1 \prec a.$

2$'$. $b \neq 1, \forall a : a \prec ab.$

Условия $\mathbf{1, 2}$ равносильны условиям $\mathbf{1, 2'}$.

Доказательство. Пусть выполняется 1,2 и $b \neq 1$. Тогда $1 \prec b \Rightarrow a \prec ab$.

Пусть выполняется 1,2$'$ и $b \neq 1$. Тогда $1 \prec b$. □

5.2.2. Способы упорядочивания

1. **Лексикографическое**

$$x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \succ x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}, \text{ если } k_1 = l_1, ..., k_t = l_t, k_{t+1} > l_{t+1}, t \geqslant 0.$$

Вводится термин: один моном старше или выше другого.

2. **Степенно-лексикографическое**
Либо $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i > \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$, либо $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i$ и $\exists t \geqslant 0 : k_1 = l_1, ..., k_t = l_t, k_{t+1} > l_{t+1}$.

5.3. Старший член многочлена

Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ - ненулевой многочлен. Тогда существует член, который старше всех членов - старший или высший член.

$$x_1^2x_2x_3 \succ x_1x_2^3x_3^4$$

Лемма 1 (Лемма о старшем члене). *Старший член произведения многочленов равен произведению старших членов этих многочленов.*

Доказательство. Пусть f, g - рассматриваемые многочлены, A, B - их старшие члены соответственно, $a \neq A$ - член многочлена f, $b \neq B$ - член многочлена g.

Старшим членом может быть один из 4 вариантов: AB, Ab, aB, ab.

$$B \succ b \Rightarrow AB \succ Ab.$$

$$A \succ a \Rightarrow AB \succ aB.$$

$$B \succ b \Rightarrow aB \succ ab \Rightarrow AB \succ ab.$$

Таким образом, AB - старший из вариантов. □

5.4. Симметрические многочлены

Определение 15. *Многочлен называется* ***однородным****, если все его члены имеют одинаковую полную степень.*

Определение 16. *Многочлен называется* ***симметрическим****, если он не меняется при произвольной перестановке его переменных.*

$$f(x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, ..., x_{\varphi(n)}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \ \forall \varphi \in S_n$$

Следующие многочлены называются **элементарными симметрическими**:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + ...$$

$$...$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 ... x_n$$

Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - его корни. Тогда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$...$$

$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Под $S(x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n})$ понимают сумму всех различных членов, полученных всевозможными перестановками. Например, $\sigma_1 = S(x_1), \sigma_2 = S(x_1x_2), \sigma_3 = S(x_1x_2x_3)$.

$$S(x_1^2 x_2) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2.$$

Теорема 8. *Любой симметрический многочлен может быть представлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов, причем это представление единственное.*

Доказательство. Будем доказывать только существование.

Предполагаем, что члены лексикографически упорядочены. Пусть старшим членом является $ax_1^{k_1}...x_n^{k_n}$. Показатели при неизвестных в этом члене должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant ... \geqslant k_n$$

Допустим, что $k_1 < k_2$. Но тогда в многочлене существует член $ax_1^{k_2} x_2^{k_1} ... x_n^{k_n}$, который старше, чем $ax_1^{k_1}...x_n^{k_n}$. Получено противоречие.

$$\varphi_1(\sigma_1, ..., \sigma_n) = a\sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} ... \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n}$$

Старшим членом σ_1 является x_1, $\sigma_2 - x_1x_2$, $\sigma_3 - x_1x_2x_3$, ..., $\sigma_n - x_1x_2...x_n$. Тогда старшим членом φ_1 является:

$$ax_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}(x_1x_2x_3)^{k_3-k_4}...(x_1x_2...x_n)^{k_n} = ax_1^{k_1-k_2+k_2-k_3+...+k_n}... = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}.$$

Старшие члены f и φ_1 совпадают. Построим следующий многочлен:

$$f(x_1, ..., x_n) - \varphi_1(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \underbrace{bx_1^{l_1} x_2^{l_2} ... x_n^{l_n} + ...}_{\text{старший член, младше } ax_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}$$

Старшие члены многочленов уничтожились, $l_1 \geqslant l_2 \geqslant ... \geqslant l_n$. Проведем аналогичные действия:

$$\varphi_2(\sigma_1, ..., \sigma_n) = b\sigma_1^{l_1-l_2} \sigma_2^{l_2-l_3} ... \sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n} \sigma_n^{l_n}$$

Утверждается, что процесс непременно оборвется. Количество последовательностей, удовлетворяющих следующим условиям, конечно:

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant ... \geqslant k_n$$

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant ... \geqslant l_n$$

$$k_1 \geqslant l_1$$

Даже в случае, когда выполняются первое и третье условия, а также $\forall i \ l_i \leqslant k_1$, количество наборов чисел l_i ограничено числом $(k_1+1)^n$. $\square$

Пример 12. *Выразить через элементарные симметрические многочлены многочлен* $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$.

Старший член - x_1^4.

k_1	k_2	k_3
4	0	0
3	1	0
2	1	1
2	2	0

$$f = \sigma_1^{4-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 + A\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 + B\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 + C\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^4 + A\sigma_1^2\sigma_2 + B\sigma_1\sigma_3 + C\sigma_2^2$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = -3, \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 1.$$

$$-3 = 81 + 27A + 3B + 9C$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 0, \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 0.$$

$$0 = 16 + 4A + C$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 0, \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 0.$$

$$0 = C \Rightarrow A = -4, B = 8.$$

Ответ: $f = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$.

6. Лекция 6.

Пример 13. *Выразить через элементарные симметрические многочлены многочлен* $f = (2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$.

Старший член - $2x_1^3$.

k_1	k_2	k_3
3	0	0
2	1	0
1	1	1

$$f = 2\sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 0, \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 1.$$
$$0 = 54 + 9A + B \Rightarrow B = -9A - 54$$
$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = -2, \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = 0.$$
$$-2 = 16 + 2A \Rightarrow A = -9, B = 27$$

Ответ: $f = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1^2\sigma_2 + 27\sigma_3$.

6.1. Степенные суммы

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n.$$
$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2.$$
$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ... + x_n^3.$$
$$...$$

Удобно ввести $S_0 = n$ (сумма нулевых степеней, то есть единиц).

Выведем реккурентные соотношения для нахождения S_n. Рассмотрим многочлен:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

По формуле Виета:

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - ... + (-1)^n \sigma_n.$$
$$f'(x) = nx^{n-1} - (n-1)\sigma_1 x^{n-2} + (n-2)\sigma_2 x^{n-3} - ... \quad (1)$$

Найдем производную иначе:

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$
$$f'(x) = (x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)...(x - x_n) + ...$$
$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_i}$$

	1	$-\sigma_1$	σ_2	$-\sigma_3$	...	$(-1)^n$
x_i	1	$x_i - \sigma_1$	$x_i^2 - \sigma_1 x_i + \sigma_2$	$x_i^3 - \sigma_1 x_i^2 + \sigma_2 x_i - \sigma_3$		0

Коэффициент в i-ом слагаемом при x^{n-1-k}: $x_i^k - \sigma_1 x_i^{k-1} + \sigma_2 x_i^{k-2} - ... + (-1)^k \sigma_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Для того, чтобы получить коэффициент при x^{n-1-k} во всей $f'(x)$, необходимо просуммировать:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - ... + (-1)^k n\sigma_k \quad (2)$$

Приравняем коэффициенты из (1) и (2). Коэффициент при $k = 1$ в (1) равен $-(n-1)\sigma_1$, при $k = 2$ равен $(n-2)\sigma_2$, при $k = 3$ равен $-(n-3)\sigma_3$. Тогда получим формулу:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - ... + (-1)^k n\sigma_k = (-1)^k (n-k)\sigma_k$$

$$(-1)^k \sigma_k (n - (n-k)) = (-1)^k k\sigma_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - ... + (-1)^k k\sigma_k = 0,\ k = 1, 2, ..., n-1.$$

Но эта формула интересна только в случае $k > 1$.

Рассмотрим случай $k = n$.

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - ... + (-1)^n \sigma_n$$

$$f(x_i) = 0\ \forall i \Rightarrow x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \sigma_2 x_i^{n-2} - ... + (-1)^n \sigma_n = 0\ \forall i$$

Вновь просуммируем по i, тогда получим:

$$S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \sigma_2 S_{n-2} - ... + (-1)^n n\sigma_n = 0$$

Таким образом, формула для случая $k < n$ работает и для $k = n$.

Теперь рассмотрим случай $k > n$.

$$x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \sigma_2 x_i^{n-2} - ... + (-1)^n \sigma_n = 0 \ \ | \cdot x_i^{k-n}$$

$$x_i^k - \sigma_1 x_i^{k-1} + \sigma_2 x_i^{k-2} - ... + (-1)^n x_i^{k-n} \sigma_n = 0$$

После суммирования по i получим следующую формулу:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + ... + (-1)^n S_{k-n} \sigma_n = 0$$

Пример 14. *Найти формулы для S_2 и S_3.*

1) *Так как $k = 2, n \geqslant 2$, можно использовать первую формулу:*

$$S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 = 0$$

$$S_1 = \sigma_1 \Rightarrow S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

2.1) *$k = 3$, если $n \geqslant 3 \Rightarrow k \leqslant n$.*

$$S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3 = 0$$

$$S_3 = \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

2.2) *$k = 3$, если $n = 2$.*

$$S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_3 = 0 \Rightarrow S_3 = \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

На самом деле, случай 2.2 подпадает под 2.1, так как в 2.2 $\sigma_3 = 0$.