# Алгоритмы компьютерной алгебры

Конспект лекций

2019

## Содержание

1	Лекция 1.	
	1.1 Основные факты из теории многочленов	•

### 1. Лекция 1.

Предмет изучения компьютерной алгебры - точные вычисления. Рассматриваются именно алгоритмы точного, а не приближенного вычисления, как в вычислительной математике. Эти алгоритмы лежат в основе математических пакетов MATLAB, Mathematica.

#### 1.1. Основные факты из теории многочленов

**Определение 1.** *Числовым полем* называется множество  $F \subset \mathbb{C}$ , если:

- 1.  $0, 1 \in F$
- 2.  $|F| \ge 2$
- 3.  $\forall a, b \in F : a \pm b, ab \in F; b \neq 0, \frac{a}{b} \in F$ .

Пример 1. Числовые поля -  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\{a+b\sqrt{2}, a,b\in\mathbb{Q}\}$ 

Множество многочленов над полем рациональных чисел обозначается как  $\mathbb{Q}[x]$ , над целыми —  $\mathbb{Z}[x]$ , над произвольным числовым полем F - F[x].

Определение 2. Многочлен  $f(x) \in F[x]$ , отличный от константы, называют приводимым над полем F, если он допускает представление вида  $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ , где  $\varphi(x), \psi(x) \in F[x]$  и  $\deg \varphi, \deg \psi < \deg f$ , и неприводимым, если он не допускает такого разложения (то есть один из многочленов  $\varphi, \psi$  является константой).

1. deg f=1. Пусть f допускает разложение:  $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ .

$$\deg_{=0} \varphi, \deg_{=0} \psi < \deg_{f} \Rightarrow \deg_{f} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает неприводимость любого многочлена первой степени.

2. Пусть deg f > 1 и  $f(\alpha) = 0, \alpha \in F$ .

$$(x - \alpha)|f(x) \Rightarrow \exists g(x) : f(x) = (x - \alpha)g(x).$$
$$\deg(x - \alpha) = 1 < \deg f.$$
$$\deg g = \deg f - 1 < \deg f.$$

Если многочлен f имеет корень в поле F, то f приводим над полем F.

**Обратное утверждение.** Если многочлен  $f \in F[x]$  степени 2 или 3 приводим над полем F, то он имеет в этом поле корень.

**Доказательство**. Допустим, многочлен приводим, следовательно,  $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ .

$$\deg \varphi, \deg \psi < \deg f \Rightarrow \deg \varphi = 1$$
или  $\deg \psi = 1.$ 

Допустим, 
$$\varphi(x) = ax + b, a \neq 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{a}, \alpha \in F.$$

#### Пример 2.

1.  $f(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ . Многочлен приводим над полями  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .