离散数学

第四章:二元关系和函数

卢杨
厦门大学信息学院计算机科学系
luyang@xmu.edu.cn

关系

宇宙间存在着形形色色的联系, 这些联系正是各门学科所要研究的主要问题.

例 数的>, =,< 关系; 变量的函数关系; 程序的输入与输出联系; 程序间的调用关系; 数据库的数据特性联系等.

集合论为刻划这种联系提供了一种数学模型:关系.

关系是一个集合, 以具有该种联系的事物对为其成员.因而在关系的研究中可方便地使用集合论的概念,方法和成果.

4.1 集合的笛卡尔积和二元关系

有序对

定义4.1

由两个元素x,y(允许$x = y$)按一定顺序排列成的二元组叫做一个有序对,记作$\langle x, y\rangle$, 其中x是它的第一元素, y是它的第二元素.

例 二维直角坐标系中点的坐标就是有序对.

- 一般说来, 有序对具有以下性质:

  (1) 当$x \neq y$时,$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$.

  (2) $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$充要条件是$x = u$,$y = v$.

- 有序对$\langle x, y\rangle$与集合$\{x, y\}$的区别在于**有序对中的元素是有序的,而集合中的元素是无序的**. 例如在集合$\{x, y\}$中, $x \neq y$且$\{x, y\} = \{y, x\}$.

笛卡尔积

定义4.2

设A,B为二集合, 用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对, 所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的笛卡尔积, 记作$A\times B$(读作A叉乘B).

符号化表示为$A\times B=\{\langle x,y\rangle|x\in A\wedge y\in B\}$.

例 设$A=\{a,b\}$, $B=\{0,1,2\}$,则

$$A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$$

$$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

$$A\times A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$$

$$B\times B=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

笛卡尔积

- 由排列组合的基本常识能证明, 如果A中有m个元素, B中有n个元素, 则$A \times B$有mn个元素.
- 笛卡尔积运算有以下性质:

性质1 对任意集合A, 由定义有

$$A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$$

所以$A \times B = \emptyset$当且仅当$A = \emptyset$或$B = \emptyset$.

性质2 一般地说, 笛卡尔积不满足交换律, 即

$$A \times B \neq B \times A$$

(除非$A = \emptyset$或$B = \emptyset$或$A = B$)

笛卡尔积

性质3 一般地说, 笛卡尔积不满足结合律, 即

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$$

(除非$A=\emptyset$或$B=\emptyset$或$A=B$)

例 设$A=\{a,b\}$, $B=\{0,1\}$, $C=\{u,v\}$,则

$$\begin{aligned}(A\times B)\times C &= \{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle\}\times\{u,v\}\\ &= \{\langle\langle a,0\rangle,u\rangle,\langle\langle a,0\rangle,v\rangle,\langle\langle a,1\rangle,u\rangle,\langle\langle a,1\rangle,v\rangle,\\ &\quad \langle\langle b,0\rangle,u\rangle,\langle\langle b,0\rangle,v\rangle,\langle\langle b,1\rangle,u\rangle,\langle\langle b,1\rangle,v\rangle\}\\ A\times(B\times C) &= \{a,b\}\times\{\langle 0,u\rangle,\langle 0,v\rangle,\langle 1,u\rangle,\langle 1,v\rangle\}\\ &= \{\langle a,\langle 0,u\rangle\rangle,\langle a,\langle 0,v\rangle\rangle,\langle a,\langle 1,u\rangle\rangle,\langle a,\langle 1,v\rangle\rangle,\\ &\quad \langle b,\langle 0,u\rangle\rangle,\langle b,\langle 0,v\rangle\rangle,\langle b,\langle 1,u\rangle\rangle,\langle b,\langle 1,v\rangle\rangle\}\end{aligned}$$

笛卡尔积

性质4 笛卡尔积对集合运算∗满足分配律, ∗代表∪, ∩, −, ⊕运算, 即

$$A\times(B * C) = (A\times B) * (A\times C)$$

$$(B * C)\times A = (B\times A) * (C\times A)$$

例 证明$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

证明 对于任意x,y: $\langle x, y\rangle \in A\times(B\cap C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A\times B \wedge \langle x, y\rangle \in A\times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A\times B)\cap(A\times C)$$

笛卡尔积

例 假设已知∪和−的分配律，证明$A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$

证明

$$
\begin{aligned}
& A\times(B\oplus C)\\
&=A\times[(B-C)\cup(C-B)]\\
&=[A\times(B-C)]\cup[A\times(C-B)]\\
&=[(A\times B)-(A\times C)]\cup[(A\times C)-(A\times B)]\\
&=(A\times B)\oplus(A\times C)
\end{aligned}
$$

- 另外6个分配律公式可类似地证明.

笛卡尔积

性质5 设A, B, C, D为4个集合, 则有

$$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$$

- 注意, 性质5的逆命题不为真. 换句话说, 当$A \times B \subseteq C \times D$时不一定有$A \subseteq C, B \subseteq D$.

例 $A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{3\}, D = \{4\}$, 这时有

$$A \times B = \emptyset, C \times D = \{\langle 3,4 \rangle\}, A \times B \subseteq C \times D$$

但是$B \nsubseteq D$.

- 然而, 如果设A, B, C, D为4个非空集合, 则有

$$A \subseteq C, B \subseteq D \Leftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$$

笛卡尔积

例4.3 设A, B, C, D为任意集合, 判断以下命题是否为真, 并说明理由:

(1) $A\times B = A\times C \Rightarrow B = C$.

(2) $A-(B\times C) = (A-B)\times(A-C)$.

(3) $A = B \wedge C = D \Rightarrow A\times C = B\times D$.

(4) 存在集合A, 使得$A \subseteq A\times A$.

解

(1) 不一定为真. 当$A=\emptyset$时$A\times B = A\times C = \emptyset$, 此时可能$B \neq C$.

(2) 不一定为真. 当$A = B = \{1\}$,$C = \{2\}$时, $A-(B\times C) = \{1\}$, $(A-B)\times(A-C) = \emptyset$.

(3) 为真. 直接进行代换即可.

(4) 为真. 当$A=\emptyset$时$A \subseteq A\times A$成立.

二元关系

定义4.3

如果一个集合满足以下条件之一:

(1) 集合非空,且它的元素都是有序对;

(2) 集合是空集.

则称该集合为一个二元关系,记作R. 二元关系也可简称为关系. 对于二元关系R, 如果$\langle x,y\rangle \in R$, 可记作xRy; 如果$\langle x,y\rangle \notin R$, 则记作$x\not R y$.

例 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle,\langle$老张,老王$\rangle\}$为二元关系. $A=\{\langle a,b\rangle,\langle 1,2\rangle,a,b,1\}$是集合, 不是关系. 根据定义可以写$1R2$, aRb, 老张R老王, $a\not R c$.

二元关系

定义4.4

设A, B为集合, $A\times B$的**任何子集**所定义的二元关系叫作从A到B的二元关系, 特别当$A = B$时则叫作A上的二元关系.

例 $A = \{0,1\}, B = \{1,2,3\}$, 那么

$$R_1 = \{\langle 0,2\rangle\}, R_2 = A\times B, R_3 = \emptyset, R_4 = \{\langle 0,1\rangle\}$$

等都是从A到B的二元关系, 而R_3和R_4同时也是A上的二元关系.

- 二元关系主要是描述两个集合之间元素与元素的关系或者是一个集合内部元素之间的关系.
- 集合A上的二元关系的数目依赖于A中的元素数. 如果$|A| = n$,那么$|A\times A| = n^2$, $A\times A$的子集就有2^{n^2}个. 每一个子集代表一个A上的二元关系, 所以A上有2^{n^2}个不同的二元关系.

例 $|A| = 3$, 则A上有$2^{3^2} = 512$个不同的二元关系.

二元关系

定义 4.5

对任意集合A, 空集$\emptyset$是A上的关系, 称作空关系. 此外, 定义

$$E_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A\} = A\times A\text{为}A\text{上的全域关系}.$$

$$I_A = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\}\text{为}A\text{上的恒等关系}.$$

除了以上三种特殊的关系以外, 还有一些常用的关系:

- 小于等于关系: $L_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x \le y\}$, 这里$A \subseteq \mathbf{R}$.
- 整除关系: $D_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x|y\}$, 这里$A \subseteq \mathbf{Z}^*$.
- 包含关系: $R_\subseteq = \{\langle x,y\rangle | x,y \in \mathcal{A} \wedge x \subseteq y\}$, $\mathcal{A}$是集合族.

二元关系

例 设$A=\{1,2,3\}$, 则

$L_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$D_A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

若令$A=\{a,b\}$,$\mathcal{A}=P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则

$$R_{\subseteq}=\{\langle\emptyset,\emptyset\rangle,\langle\emptyset,\{a\}\rangle,\langle\emptyset,\{b\}\rangle,\langle\emptyset,\{a,b\}\rangle,\langle\{a\},\{a\}\rangle,$$
$$\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,\langle\{b\},\{b\}\rangle,\langle\{b\},\{a,b\}\rangle,\langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle\}$$

二元关系

例4.4 设$A=\{1,2,3,4\}$, 下面各式定义的R都是A上的关系, 分别列出R的元素:

(1) $R=\{\langle x,y\rangle|x是y的倍数\}$.

(2) $R=\{\langle x,y\rangle|(x-y)^2\in A\}$.

(3) $R=\{\langle x,y\rangle|x/y是素数\}$.

(4) $R=\{\langle x,y\rangle|x\neq y\}$.

解

(1) $R=\{\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$.

(2) $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$.

(3) $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle$.

(4) $R=E_A-I_A=$
$\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$.

课堂练习

设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$, 下面各式定义的R都是A上的关系, 分别列出R的元素:

(1) $R=\{\langle x,y\rangle|x整除y且x\neq y\}$.

(2) $R=\{\langle x,y\rangle|3整除x-y\}$.

课堂练习

设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$, 下面各式定义的R都是A上的关系, 分别列出R的元素:

(1) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x$整除$y$且$x\neq y\}$.

(2) $R=\{\langle x,y\rangle \mid 3$整除$x-y\}$.

解

(1) $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle\}$.

(2) $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,3\rangle\}\cup E_I$.

4.2 关系的运算

关系的运算

- 关系是以有序对为元素的集合, 故可对关系进行集合的运算以产生新的关系.
- 关系的运算有5种, 其中三种是一元运算, 分别定义如下:

定义 4.6

关系R的定义域dom R, 值域ran R和域fld R是

$$\mathrm{dom}\, R = \{x \mid \exists y(xRy)\},$$

$$\mathrm{ran}\, R = \{y \mid \exists x(xRy)\},$$

$$\mathrm{fld}\, R = \mathrm{dom}\, R \cup \mathrm{ran}\, R.$$

- 不难看出, dom R就是R中所有有序对的第一元素构成的集合, ran R就是R中所有有序对的第二元素构成的集合, fld R就是R的定义域与值域的并集.

关系的运算

例 设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{a,b,c,d\}$,

$R=\{\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,d\rangle,\langle 6,d\rangle\}$,

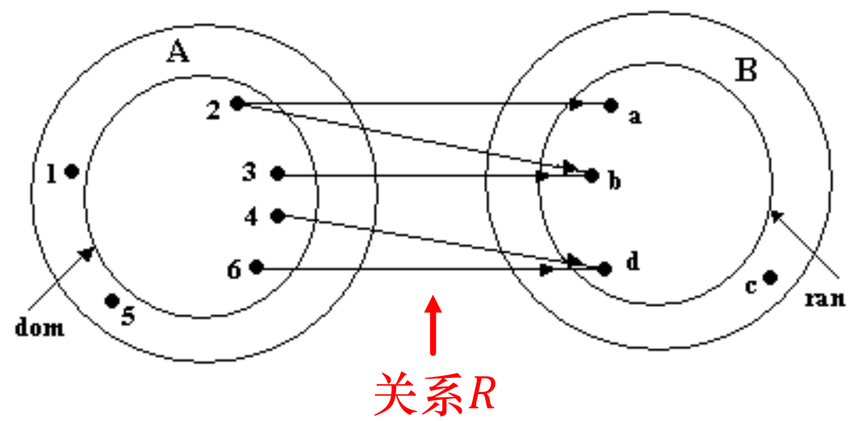
则 $\mathrm{dom}\,R=\{2,3,4,6\}$,

$\mathrm{ran}\,R=\{a,b,d\}$,

$\mathrm{fld}\,R=\mathrm{dom}\,R\cup\mathrm{ran}\,R$

$=\{2,3,4,6,a,b,d\}$.

右图描绘了集合A, B以及关系R的定义域和值域.



关系的运算

定义4.7

设R为二元关系,R的逆关系,简称R的逆, 记作R^{-1}:

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid yRx\}$$

定义4.8

设F, G为二元关系, G对F的右复合记为$F \circ G$,

$$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t(xFt \wedge tGy)\}$$

例 设$F = \{\langle 3,3\rangle, \langle 6,2\rangle\}$, $G = \{\langle 2,3\rangle\}$,

则$F^{-1} = \{\langle 3,3\rangle, \langle 2,6\rangle\}$; $F \circ G = \{\langle 6,3\rangle\}$; $G \circ F = \{\langle 2,3\rangle\}$.

关系的运算

- 逆关系的分配律

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

证明 对于任意$\langle x, y \rangle$,

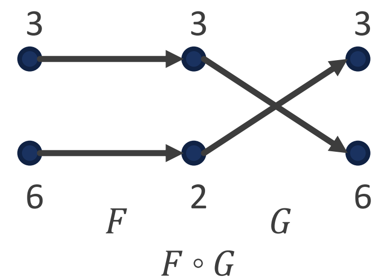
$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in (R \cup S)^{-1} \\ \Leftrightarrow & \langle y, x \rangle \in (R \cup S) \\ \Leftrightarrow & \langle y, x \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in S \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in R^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in S^{-1} \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in R^{-1} \cup S^{-1} \end{aligned}$$

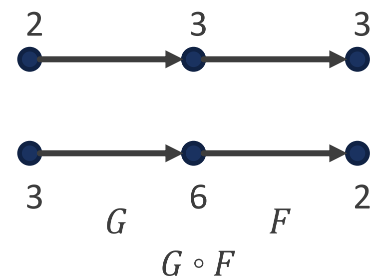
所以$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$, 同理可证$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

关系的运算

- 由定义, 只要将R的每一个有序对中元素次序加以颠倒,就得到逆关系R^{-1}的所有有序对 ,算是比较好求的.
- 但是右复合运算没有这么简单, 可以使用一种图解的方法来做, 例如对于$F \circ G$:
  - 画三列点, 第一列是$\text{dom}\, F$, 第二列是$\text{ran}\, F$, 第三列是$\text{ran}\, G$.
  - 把所有xFy的点在第一列和第二列之间连起来.
  - 把所有xGy的点在第二列和第三列之间连起来.
  - 所有第一列与第三列连同的点就构成了$F \circ G$.

例 $F = \{\langle 3,3\rangle, \langle 6,2\rangle\}$, $G = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,6\rangle\}$





关系的运算

- 右复合的代码实现如下:

```
for i=1 to |G|
    for j=1 to |F|
        if F[j]的第二元素 == G[i]的第一元素
            print(⟨F[j]的第一元素,G[i]的第二元素⟩)
```

关系的运算

定义4.8

给出了两个关系的右复合,同样也可以定义两个关系的左复合$F \circ G$:

$$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t(xGt \land tFy)\}$$

- 如果把二元关系看做一种作用, $\langle x, y\rangle \in R$可以解释, 为$x$通过$R$作用变到$y$, 那么右复合$F \circ G$与左复合$F \circ G$都是两个作用的连续发生.
- 所不同的是: 右复合$F \circ G$表示在右边的G是复合到F上的第二步作用;而左复合恰好相反, $F \circ G$表示左边的F是复合到G上的第二步作用. 这两种规定都是合理的.
- 本书采用右复合的定义, 其他书可能采用左复合的定义.请注意两者的区别.

关系的运算

例4.7 P是所有人的集合,令

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的父亲}\},$$

$$S = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的母亲}\}.$$

(1) 说明$R \circ R$, $R^{-1} \circ S^{-1}$, $R^{-1} \circ S$各关系的含义.

(2) 用R, S及其逆和右复合表示以下关系:

$$\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge y\text{是}x\text{的外婆}\},$$

$$\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的奶奶}\}.$$

解 (1) $R \circ R$表示关系$\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的爷爷}\}$;

$R^{-1} \circ S^{-1}$表示关系$\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge y\text{是}x\text{的奶奶}\}$;

$R^{-1} \circ S$表示空关系$\emptyset$.

(2) $\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge y\text{是}x\text{的外婆}\}$的表达式是$S^{-1} \circ S^{-1}$;

$\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的奶奶}\}$的表达式是$S \circ R$.

课堂练习

已知$R=\{\langle\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\rangle,\langle\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\rangle,\langle\emptyset,\{\emptyset\}\rangle\}$, $S=\{\langle\{\emptyset\},\emptyset\rangle\}$, 求$R\circ R, R\circ S, S\circ R, \operatorname{dom} R, \operatorname{ran} S$和$R^{-1}$.

课堂练习

已知$R=\{\langle\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\rangle,\langle\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\rangle,\langle\emptyset,\{\emptyset\}\rangle\}$, $S=\{\langle\{\emptyset\},\emptyset\rangle\}$,求$R^2$, $R\circ S$, $S\circ R$, $\mathrm{dom}\,R$, $\mathrm{ran}\,S$和R^{-1}.

解

$$R\circ R=\{\langle\{\emptyset\},\{\emptyset\}\rangle,\langle\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset\}\}\rangle,\langle\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\rangle\},$$

$$R\circ S=\{\langle\{\{\emptyset\}\},\emptyset\rangle,\langle\emptyset,\emptyset\rangle\},$$

$$S\circ R=\{\langle\{\emptyset\},\{\emptyset\}\rangle\}\ ,$$

$$\mathrm{dom}\,R=\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\emptyset\}\ ,$$

$$\mathrm{ran}\,S=\{\emptyset\}\ ,$$

$$R^{-1}=\{\langle\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\rangle,\langle\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\rangle,\langle\{\emptyset\},\emptyset\rangle\}.$$

关系的运算

定理 4.1

设F, G, H是任意的关系, 则有

(1) $(F^{-1})^{-1} = F$,

(2) $\mathrm{dom}\, F^{-1} = \mathrm{ran}\, F$, $\mathrm{ran}\, F^{-1} = \mathrm{dom}\, F$,

(3) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$,

(4) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$,

(5) $(\sim R)^{-1} = \sim(R^{-1})$.

关系的运算

(1) $(F^{-1})^{-1} = F$.

证明 对于任意$\langle x,y\rangle$,

$$\langle x,y\rangle \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F,$$

所以$(F^{-1})^{-1} = F$.

(5) $(\sim R)^{-1} = \sim(R^{-1})$.

证明 对于任意 $\langle x,y\rangle$,

$$\begin{aligned} & \langle x,y\rangle \in (\sim R)^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & \langle y,x\rangle \in \sim R \\ \Leftrightarrow\ & \langle y,x\rangle \notin R \\ \Leftrightarrow\ & \langle x,y\rangle \notin R^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & \langle x,y\rangle \in \sim(R^{-1}) \end{aligned}$$

所以$(\sim R)^{-1} = \sim(R^{-1})$.

关系的运算

(2) $\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F$,$\operatorname{ran} F^{-1} = \operatorname{dom} F$.

证明 对于任意x

$$
\begin{aligned}
& x \in \operatorname{dom} F^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \exists y(\langle x, y\rangle \in F^{-1}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists y(\langle y, x\rangle \in F) \\
\Leftrightarrow\ & x \in \operatorname{ran} F
\end{aligned}
$$

所以$\operatorname{dom} F^{-1} = \operatorname{ran} F$,同理可证$\operatorname{ran} F^{-1} = \operatorname{dom} F$.

关系的运算

(3) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

证明 对于任意$\langle x,y \rangle$,

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in (F \circ G) \circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t(\langle x, t\rangle \in F \circ G \wedge \langle t, y\rangle \in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t(\exists s\,(\langle x, s\rangle \in F \wedge \langle s, t\rangle \in G) \wedge \langle t, y\rangle \in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t \exists s(\langle x, s\rangle \in F \wedge \langle s, t\rangle \in G \wedge \langle t, y\rangle \in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\big(\langle x, s\rangle \in F \wedge \exists t\,(\langle s, t\rangle \in G \wedge \langle t, y\rangle \in H)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s(\langle x, s\rangle \in F \wedge \langle s, y\rangle \in G \circ H) \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in F \circ (G \circ H)
\end{aligned}
$$

所以$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

关系的运算

- 我们常删去结合律中的括号, 将它们写成$F \circ G \circ H$.
- 由归纳法易证, 任意n个关系的复合也是可结合的. 即在$R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$中, 只要不改变它们的次序, 不论在它们之间怎样加括号, 其结果是一样的.
- 关系的运算的优先级有如下规定:
  - 逆运算优先于复合运算, 优先于求定义域, 值域和域的运算.
  - 以上的各种关系的运算都优先于集合的并, 交, 相对补, 对称差等运算.

关系的运算

(4) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

证明 对于任意$\langle x,y \rangle$,

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in (F \circ G)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \langle y, x\rangle \in F \circ G \\
\Leftrightarrow\ & \exists t(\langle y, t\rangle \in F \wedge \langle t, x\rangle \in G) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t(\langle x, t\rangle \in G^{-1} \wedge \langle t, y\rangle \in F^{-1}) \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}
\end{aligned}
$$

所以$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$.

关系的运算

定理 4.2

设R为A上的关系, 则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

证明 首先证明$R \circ I_A = R$. 对于任意$\langle x, y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \circ I_A \Leftrightarrow \exists t(\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t \rangle \in R \wedge t = y) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

即$R \circ I_A \subseteq R$. 又对于任意$\langle x,y \rangle$,

$$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge y \in A$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, y \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \circ I_A$$

即$R \subseteq R \circ I_A$, 所以$R \circ I_A = R$, 同理可证$I_A \circ R = R$.

关系的运算

定义4.9

设R为A上的关系, n为自然数, 则R的n次幂是

(1) $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\} = I_A$,

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$, $n \geq 0$.

- 由定义4.9可知, 对于A上的任何关系R_1和R_2, 都有

$$R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A.$$

即A上任何关系的0次幂都相等, 都对于A上的恒等关系I_A.

- 此外, 对于A上的任何关系R都有$R^1 = R$, 因为

$$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R.$$

关系的运算

定理 4.3

设A为n元集，R是A上的关系，则$\exists s,t \in \mathbf{N}$，使$R^s = R^t$.

证明

对于任何自然数k，由于R是A上的关系，易知R^k都是$A\times A$的子集.

又$|A\times A| = n^2$，$|P(A\times A)| = 2^{n^2}$，即$A\times A$的不同子集只有个2^{n^2} .

当$k > 2^{n^2}$时，由抽屉原理可知$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^k$中必存在$s,t \in \mathbf{N}$，使$R^s = R^t$.

- 该定理说明有穷集上只有有穷多个不同的二元关系. 当t足够大时，R^t必与之前的某个$R^s(s < t)$相等.

关系的运算

定理 4.4

设R为A上的关系, 对于任意的$m, n \in N$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;　　(2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明 (1) 任给定m后, 对n进行归纳证明.

- 若$n = 0$时,

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0};$$

- 假设当$n = k$时, 有$R^m \circ R^k = R^{m+k}$成立,

  则当$n = k + 1$时, 通过结合律有

$$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ \left(R^k \circ R\right) = \left(R^m \circ R^k\right) \circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}.$$

关系的运算

定理 4.4

设R为A上的关系, 对于任意的$m, n \in N$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;　　(2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明 (2) 任给定m后, 对n进行归纳证明.

- 若$n = 0$时,

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \cdot 0};$$

- 假设当$n = k$时, $(R^m)^k = R^{mk}$成立,

则当$n = k + 1$时有

$$(R^m)^{k+1} = (R^m)^k \circ R^m = R^{mk} \circ R^m = R^{mk+m} = R^{m(k+1)}.$$

关系的运算

例 设$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$, 求$R^n(n = 1,2,3,4, \ldots)$.

解 $R^1 = R$;

$R^2 = R \circ R = \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$;

$R^3 = R^2 \circ R = \{\langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$;

$R^4 = R^3 \circ R = \{\langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$;

$R^5 = R^4 \circ R = \{\langle a, f\rangle\}$;

$R^6 = R^5 \circ R = \emptyset$;

$R^7 = \emptyset$;

…

$R^n = \emptyset (n \geq 6)$.

关系矩阵

- 当A, B是有穷集时，二元关系$R \subseteq A \times B$的表示法除用外延方法列举R所有元素外，还可方便地用一个$|A| \times |B|$矩阵来表示.

定义

设$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$是两个有限集，$R$是从$A$到$B$的二元关系，则称$n$行$m$列矩阵$M_R = (r_{ij})$为$R$的关系矩阵，其分量

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & 若 a_i R b_j \\ 0, & 否则 \end{cases} \qquad (i, j = 1,2, \dots, n)$$

则关系矩阵为:

$$M_R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

关系矩阵

例 $A=\{1,2,3,4\}$, R为A上的关系, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$, 则$R$的关系矩阵为

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

- 在讨论复合关系矩阵前, 我们先定义布尔运算, 它只涉及数字0和1.
  - 布尔加法(逻辑析取)

    $0+0=0, 0+1=1+0=1+1=1.$
  - 布尔乘法(逻辑合取)

    $1\cdot 1=1, 0\cdot 1=1\cdot 0=0\cdot 0=0.$

关系矩阵

- 关系矩阵性质:

(1) 关系R的集合表达式, 关系矩阵M_R, 关系图G_R, 三者均可以唯一相互确定.

(2) $M_{R^{-1}} = {M_R}^T$.

(3) $M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} M_{R_2}$.

例 上例中的逆关系R^{-1}的关系矩阵为:

$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关系矩阵

例 上例中的关系R的次幂的关系矩阵为:

$$M_{R^2}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{R^3}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

关系矩阵

- 关系矩阵乘法背后的逻辑如下:

$M_{R_1}M_{R_2}$中的第i行第j列的元素$M_{R_1}M_{R_2}[i,j]=1$等价于

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow M_{R_1}[i,:]M_{R_2}[:,j]=1\\
&\Leftrightarrow M_{R_1}[i,1]M_{R_2}[1,j]+\cdots+M_{R_1}[i,n]M_{R_2}[n,j]=1\\
&\Leftrightarrow \left(M_{R_1}[i,1]\wedge M_{R_2}[1,j]\right)\vee\cdots\vee\left(M_{R_1}[i,n]\wedge M_{R_2}[n,j]\right)\\
&\Leftrightarrow \exists t\left(M_{R_1}[i,t]\wedge M_{R_2}[t,j]\right)\\
&\Leftrightarrow \exists t(iR_1t\wedge tR_2j)\\
&\Leftrightarrow \langle i,j\rangle\in R_1\circ R_2\\
&\Leftrightarrow M_{R_1\circ R_2}[i,j]=1
\end{aligned}
$$

其中$A[i,:]$和$A[j,:]$分别代表矩阵A的第i行和第j列.

关系矩阵

用矩阵表示关系,便于在计算机中对关系进行存储和运算,并可**充分利用线性代数中矩阵的结论**.

- 例如, 由线性代数知:

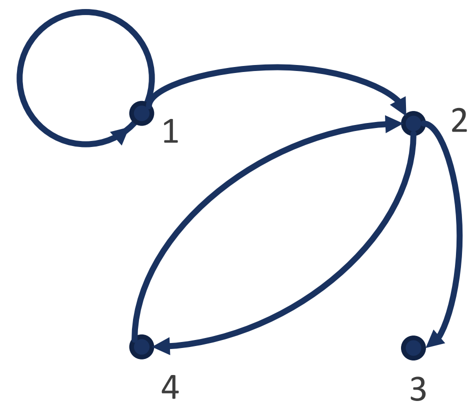
$$(M_R^T)^T = M_R, \qquad (M_1 M_2)^T = M_2^T M_1^T$$

- 关系并, 交, 差, 补的矩阵可如下求取:
  - $M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$ (矩阵对应分量作逻辑析取运算)
  - $M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$ (矩阵对应分量作逻辑合取运算)
  - $M_{R-S} = M_{R\cap \sim S} = M_R \wedge M_{\sim S}$
  - $M_{\sim S} = \neg M_S$ (矩阵对应分量作逻辑非运算)

关系图

- 一个有限集合A上的关系R还可以用一个称为R的关系图来表示, 其优点是直观清晰. 关系图是分析关系性质的方便形式, 但不便于进行运算.
- 设$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R是A上的关系, V是顶点集合, E是有向边的集合, 令$V = A$, 且x_i到x_j的有向边$\langle x_i, x_j \rangle \in E \Leftrightarrow x_i R x_j$,则$G_R$就是$R$的关系图.

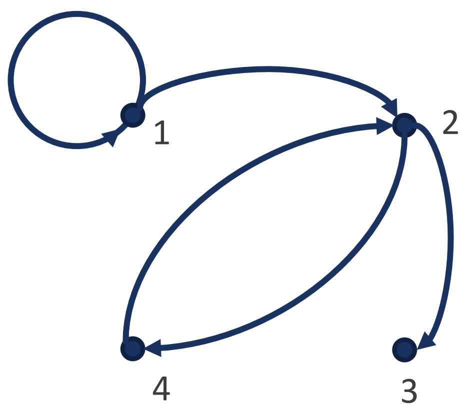
例 $A = \{1,2,3,4\}$, R为A上的关系, $R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}$, 则$R$的关系图$G_R$可表示为:



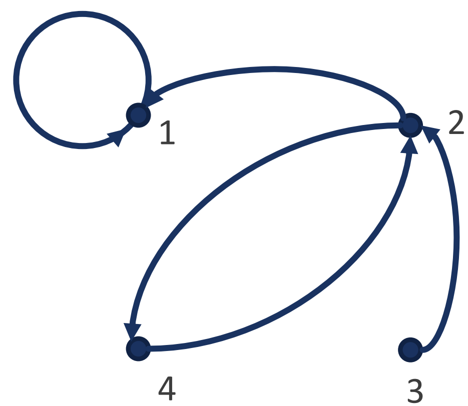
G_R

关系图

- 逆关系图: 把R的关系图中有向边的箭头方向颠倒即得R^{-1}的关系图. 例如, 该图给出上例中A上R的逆关系图.



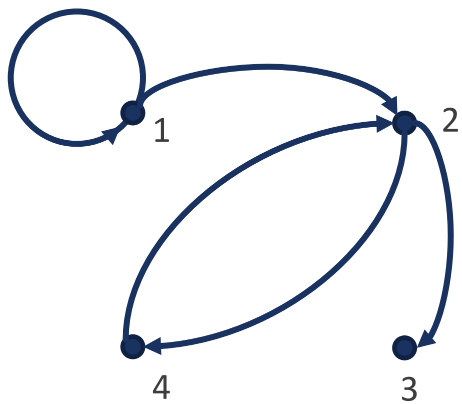
G_R



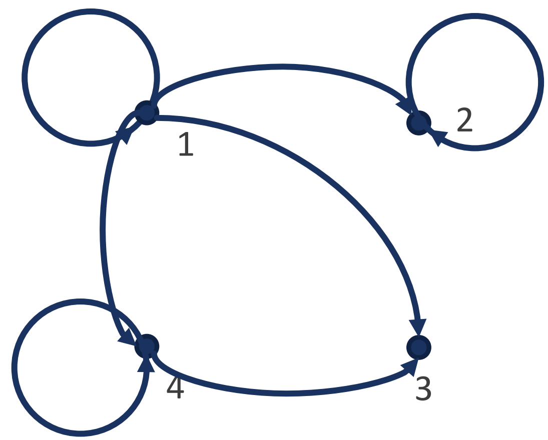
$G_{R^{-1}}$

关系图

- 复合关系图: 构造R的关系图, 从图中每个顶点x出发, 找出经过长度为2的路能够到达的所有顶点$y_1, y_2, \dots, y_k$,在R^2的关系图画出对应的k条边.



G_R



G_{R^2}

课堂练习

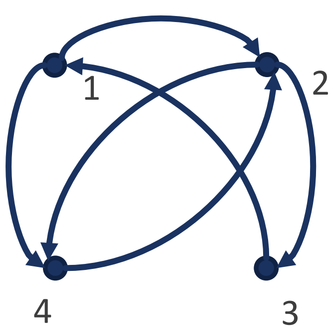
$A=\{1,2,3,4\}$, R为A上的关系, $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$, 求$R$, R^{-1}和R^2的关系矩阵和关系图.

课堂练习

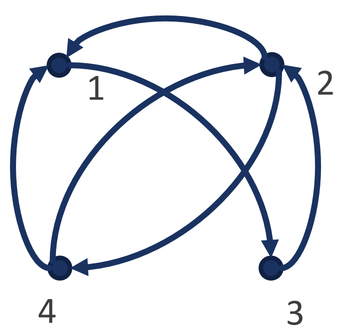
$A=\{1,2,3,4\}$, R为A上的关系, $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$, 求$R$, R^{-1}和R^2的关系矩阵和关系图.

解

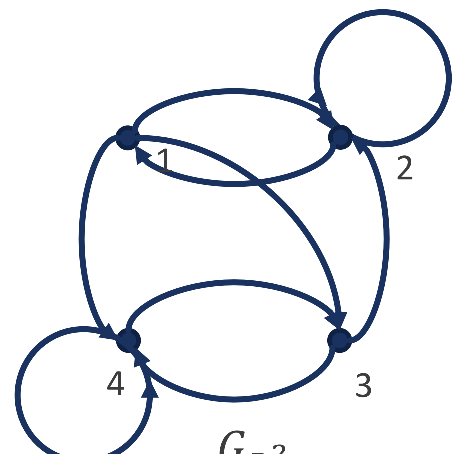
$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}, M_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}, M_{R^2}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$



G_R



$G_{R^{-1}}$



G_{R^2}

4.3 关系的性质

自反性

设A为一集合, 本节讨论R在A上的关系, 即$R \subseteq A \times A$的一些基本性质 (不涉及$R \subseteq A \times B$).

定义4.10

R在A上是**自反的**$\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \to xRx)$, 即$\forall x \in A$,均有$xRx$, 则称$R$是$A$上自反的.

- 也就是说, 恒等元素$\langle x, x\rangle$一个也不能少.
- A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系, 整除关系, 包含关系, 都是自反的. 但小于关系, 真包含关系不是自反的.
- R是A上自反的关系$\Leftrightarrow I_A \subseteq R \subseteq E_A$.
- I_A是A上最小的自反关系; E_A是A上最大的自反关系.

反自反性

定义4.11

R在A上是反自反的$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \not R x)$. 即$\forall x \in A$, 都有$x \not R x$, 则称$R$是反自反的.

- 也就是说, 恒等元素$\langle x, x\rangle$一个也不能要.
- A上的空关系$\emptyset$, 小于关系, 真包含关系都是反自反的.
- R是A上反自反的关系$\Leftrightarrow I_A \cap R = \emptyset$.
- $\emptyset$是A上最小的反自反关系; $E_A - I_A$是A上最大的反自反关系.

定义4.11.2

R在A上是非自反的, 即$\exists x(x \in A \wedge x \not R x)$.

- 恒等元素$\langle x, x\rangle$可以存在, 但是不全在.

自反性与反自反性

- 自反性与反自反性是两个独立的概念, 它们不是互为否定的.
- 自反性与非自反性才是互为否定的. 不是自反的, 即是非自反的.
- 设集合A非空, A上的关系可以分类为: 是否是自反的, 以及是否是反自反的.

例 $A=\{a,b,c\}$, A上的关系

$$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

解 R_1是自反的, 不是反自反的;

R_2不是自反的 (非自反的), 是反自反的;

R_3不是自反的 (非自反的), 也不是反自反的.

对称性

定义4.12

R在A上是对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$, 即对于任意的$x, y \in A$, 若$xRy$, 则$yRx$, 称$R$在$A$上对称的二元关系.

- 矩阵对称元素xRy与yRx要么都没, 要么都有, 不能只有一个.
- R是A上对称的关系$\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

例 A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A, 空关系$\emptyset$都是对称的.

对称性与反对称性

定义4.13

R是反对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$, 即对于任意的$x, y \in A$, 若每当有 xRy和yRx就必有$x = y$, 则称R是反对称的.

- 等价定义: $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \wedge x \neq y \rightarrow y \not{R} x)$.
- 即xRy和yRx要么都没, 要么只出现一个.
- R是A上反对称的关系$\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

例 A上的恒等关系I_A, 空关系$\emptyset$都是反对称的.

定义4.13.2

R是非对称的, 即$\exists x \exists y(x, y \in A \wedge xRy \wedge y \not{R} x)$.

- 即xRy和yRx可以同时存在, 但是至少有一个xRy没有相应的yRx.

对称性与反对称性

- 关系的对称性与反对称关系也是两个截然不同的概念,它们之间没有必然的联系.
- 所以A上的关系可分成四类: 对称的, 反对称的, 既是对称关系又是反对称关系 (如恒等关系及其子集), 既不是对称关系又不是反对称关系.

例 $A=\{a,b,c\}$, A上的关系

$$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

- 关系R_1在A上是对称的, 不是反对称的.
- 关系R_2在A上不是对称的 (非对称的), 是反对称的.
- 关系R_3在A上不是对称的 (非对称的), 也不是反对称的.

传递性

定义4.14

R在A上是传递的$\Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

即对于任意的$x, y, z \in A$, 若xRy且yRz, 就有xRz, 则称R是可传递的.

- xRy和yRz要不就不同时存在, 要同时存在就一定得有xRz.
- R是A上传递的关系$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.

例 A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A, 空关系$\emptyset$, 整除关系, 小于等于关系, 包含关系, 都是传递的关系.

传递性与反传递性

定义4.14.2

R是反传递的$\Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y \forall z\ (x, y, z \in A \land xRy \land yRz \rightarrow x\not{R}z)$$

即对于任意的$x, y, z \in A$, 若xRy且yRz, 则$x\not{R}z$, 则称R是反传递的.

- xRy和yRz要不就不同时存在,要同时存在就一定没有xRz.

定义4.14.3

R是不可传递的, 即$\exists x \exists y \exists z(x, y, z \in A, xRy \land yRz \land x\not{R}z)$.

- xRy,yRz和xRz可以同时存在, 但是至少有一个xRy和yRz没有xRz.

传递性与反传递性

例 $A=\{a,b,c,d\}$,A上的关系

$$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,b\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

$$R_4=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

- R_1和R_2是传递的.
- R_3不是传递的 (非传递的), 是反传递的.
- R_4不是传递的 (非传递的), 也不是反传递的.
- 在关系的传递定义中, 若不存在桥y能够首尾相邻的两个有序对, 即找不到这样的有序对$\langle x,y\rangle$与$\langle y,z\rangle$, 我们也称关系满足传递性, 例如R_2.

关系的性质

- 以上3个基本性质和他们的反性质, 它们都是以**蕴含式**的形式出现的.
- 若条件式的前提为假, 则蕴涵式必取真.
- 这是在判别关系的类型时值得注意的一个地方.

例 空关系既是反自反, 对称, 反对称, 传递的, 反传递的, **唯独不是自反的**.

例 实数集**R**上的关系"≤"是自反, 反对称和传递的. 关系"<"是反自反, 反对称和传递的.

厦门大学信息学院 SCHOOL OF INFORMATICS XIAMEN UNIVERSITY 厦门大学计算机科学系 Computer Science Department of Xiamen University

关系的性质

例 在集合$S = \{a, b, c, d\}$上的关系$R = \{\langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$, 判断$R$的性质.

解

- $a \in S$, 但$a \not R a$, 所以R是非自反的;
- 但cRc, 所以R不是反自反的;
- bRc, 但$c \not R b$, 所以是非对称的;
- $c \neq d$, 但cRd且dRc, 所以R不是反对称的;
- bRc, cRd, 但$b \not R d$, 所以R是不可传递的.
- 存在$\langle b, c\rangle$,$\langle c, c\rangle$,所以R不是反传递的.

例 在集合$S = \{a, b, c\}$上的关系$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, a\rangle\}$既不是自反的, 对称的, 传递的, 也不是反自反的, 反对称的, 反传递的.

关系的性质

表4.1 设$R \subseteq A\times A$, 则下面命题是等价的

(1) R是自反的;

(2) $I_A \subseteq R$;

(3) R^{-1}是自反的;

(4) M_R主对角线上元素全是1;

(5) G_R的每个顶点都有环.

关系的性质

表4.1 设$R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的

(1) R是反自反的;

(2) $I_A \cap R = \emptyset$;

(3) R^{-1}是反自反的;

(4) M_R主对角线上的元素全为0;

(5) G_R的每个结点处均无环.

关系的性质

表4.1 设$R \subseteq A\times A$, 则下面的命题是等价的

(1) R是对称的;

(2) $R^{-1} = R$;

(3) M_R是对称的;

(4) G_R中任何二个结点之间若有有向边, 必有两条方向相反的有向边.

关系的性质

表4.1 设$R \subseteq A\times A$, 则下面的命题是等价的

(1) R是反对称的;

(2) $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(3) 在M_R中, 若任意的$r_{ij} = 1\ (i \neq j)$,则必有$r_{ji} = 0$;

(反之未必对, 即对称的元素至多一个为1);

(4) 在G_R中, 对于任何二个结点$x, y\ (x \neq y)$, 若有有向边$\langle x, y\rangle$, 则必没有$\langle y, x\rangle$.

关系的性质

表4.1 设$R \subseteq A\times A$, 则下面的命题是等价的

(1) R是传递的;

(2) $R \circ R \subseteq R$;

(3) 对称矩阵M_R中,若$r_{ij} = r_{jk} = 1$, 则$r_{ik} = 1$;

(4) 在$M_{R\circ R}$中, 若任意的$r'_{ij} = 1$, 则M_R中相应的元素$r_{ij} = 1$;

(5) 在G_R中, 对于任何顶点x_i,x_j,x_k, 若有有向边$\langle x_i, x_j\rangle$,$\langle x_j , x_k\rangle$ 则必有有向边$\langle x_i, x_k\rangle$.

(即若从x_i到x_k有长为2的有向通路, 则从x_i到x_k有长为1的有向通路).

关系的性质

定理

若R在A上是反自反和可传递的, 则R必是反对称的.

证明 归谬法.

假设R不是反对称的, 则

$$\neg\forall x\forall y(x,y\in A\land xRy\land yRx\to x=y)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(x,y\in A\land xRy\land yRx\land x\neq y)$$

因为R是可传递的, 所以有$\exists x(xRx)$, 这与已知R是反自反矛盾.

由x,y的任意性, 所以R必是反对称的.

- 关系是集合, 关系之间可以进行并, 交, 相对补, 求逆, 复合等运算, 经过上述运算后所得到的新关系是否仍保持有原来的性质呢?
- 这与关系原来的性质和运算种类有关.

关系的性质

我们将有关结果给出在关系运算表, 保持原来的性质的, 在对应的格内划 "√", 否则划 "×".

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

关系的性质

定理

设R和S为A上的对称关系, 则$R \cup S$也是A上的对称关系.

证明 对于任意x, y:

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in R \cup S \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in S \\
\Leftrightarrow\ & \langle y, x\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in S \\
\Leftrightarrow\ & \langle y, x\rangle \in R \cup S
\end{aligned}
$$

所以$R \cup S$是对称的.

- 同理可证$R \cap S$也是A上的对称关系.

关系的性质

定理

设R和S为A上的对称关系, 则$R-S$也是A上的对称关系.

证明 对于任意x,y:

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle \in R - S\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \notin S\\
\Leftrightarrow\ &\langle y,x\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \notin S\\
\Leftrightarrow\ &\langle y,x\rangle \in R - S
\end{aligned}
$$

所以$R-S$是对称的.

关系的性质

- 传递性和反对称性对并运算不一定保持.

例 设$A=\{1,2,3\}$,

A上的关系$R=\{\langle 1,2\rangle\}$和$S=\{\langle 2,3\rangle\}$都是A上的传递关系, 但$R\cup S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$却不是$A$上的传递关系.

A上的关系$R=\{\langle 1,2\rangle\}$和$S=\{\langle 2,1\rangle\}$都是A上的反对称关系, 但$R\cup S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$却不是$A$上的反对称关系.

关系的性质

- 自反性和传递性对差运算不一定保持.

例 设 $A=\{1,2,3\}$,

A上的关系$R=S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$都是$A$上的自反关系,但$R-S=\emptyset$却不是$A$上的自反关系.

A上的关系$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$和$S=\{\langle 1,3\rangle\}$都是$A$上的传递关系,但$R-S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$却不是$A$上的传递关系.

关系的性质

- 反自反性, 对称性, 反对称性和传递性复合运算不一定保持.

例 设$A=\{1,2,3,4\}$,

A上的关系$R=\{\langle 1,2\rangle\}$和$S=\{\langle 2,1\rangle\}$都是A上的反自反关系, 但$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle\}$却不是$A$上的反自反关系.

A上的关系$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$和$S=\{\langle 2,2\rangle\}$都是$A$上的对称关系, 但$R\circ S=\{\langle 1,2\rangle\}$却不是$A$上的对称关系.

A上的关系$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$和$S=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$都是$A$上的反对称关系, 但$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$却不是$A$上的反对称关系.

A上的关系$R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$和$S=\{\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$都是$A$上的传递关系, 但$R\circ S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle\}$却不是$A$上的传递关系.

课堂练习

设$S = \{1,2,3, \dots, 10\}$, S上的关系$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x + y = 10\}$, 判断$R$的性质.

课堂练习

设$S = \{1,2,3, \dots, 10\}$, S上的关系$R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x + y = 10\}$, 判断$R$的性质.

解

- $1 \in S$, 但$1 \not R 1$, 所以R是非自反的;
- 但$5R5$, 所以R不是反自反的;
- 对于任意$x + y = 10$, 即xRy, 都有$y + x = 10$, 即yRx, 所以R是对称的;
- 同上, 所以R不是反对称的;
- $3R7$, $7R3$, 但$3 \not R 3$, 所以R是不可传递的.
- 存在$5R5$, 所以R不是反传递的.

4.4 关系的闭包

闭包

- 非空集合A上的关系R不一定具有4.3中定义的5种性质中的某些性质，如自反性.
- 如果R不具有自反性，例如仅仅缺了某个x使得xRx，那么我们就可以添加$\langle x, x\rangle$得到R'使其具有自反性. 但是又不希望R和R'差太多.
- 本节讨论构造**最小的包含**R的关系R', 使之具有所要求的性质，这就是关系的闭包.

定义4.15

设R是非空集合A上的关系, 则R的自反 (对称，传递)闭包是一个满足下列条件的关系R' :

(1) R'是自反 (对称或传递)的;

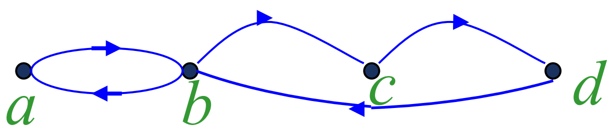
(2) $R \subseteq R'$;

(3) 对A上任何包含R的自反 (对称或传递)关系R'', 即$R \subseteq R''$, 都有$R' \subseteq R''$.

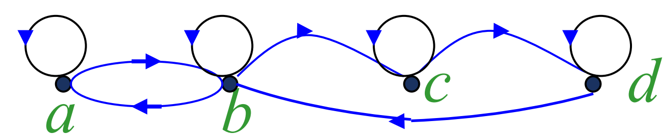
- R的自反 (对称或传递)闭包分别记作$r(R)$, $s(R)$和$t(R)$.

闭包

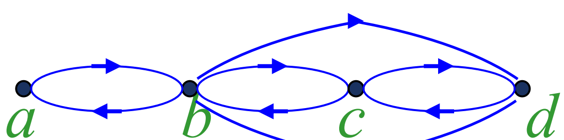
例4.15 设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$.



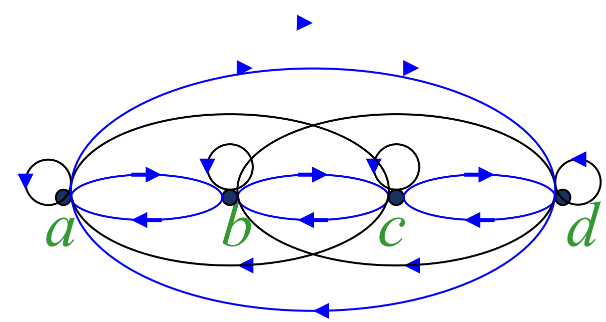
R



$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

闭包

定理 2.19

设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \emptyset$, R是自反 (对称, 传递)的充分必要条件是$R = r(R)$ $(s(R), t(R))$.

证明 (以下以自反为例, 对称和传递也适用)

- 必要性: R是自反的且包含R自身,

  由定义4.15(3)最小性$r(R) \subseteq R$.

  又由定义4.15(2)的$R \subseteq r(R)$, 所以$R = r(R)$.

- 充分性: 若$R = r(R)$,

  由定义4.15(1)得$r(R)$是自反的, 所以R是自反的.

自反闭包的构造

定理 4.5(1)

设$R \subseteq A\times A$且$A \neq \emptyset$, 则有$r(R) = R \cup I_A$.

证明 (1) $I_A \subseteq R \cup I_A$, 所以$R \cup I_A$自反;

(2) $R \subseteq R \cup I_A$;

(3) 设R^p是A上任意包含R的自反关系, 对于任意$\langle a,b\rangle$, $\langle a,b\rangle \in R \cup I_A$

若$\langle a,b\rangle \in R$, 由$R \subseteq R^p$, 可得$\langle a,b\rangle \in R^p$;

若$\langle a,b\rangle \in I_A$, 因为$R^p$是自反的, 可得$\langle a,b\rangle \in R^p$.

从而$R \cup I_A \subseteq R^p$.

由定义4.15知, $r(R) = R \cup I_A$.

- 本定理给出了构造$r(R)$的方法: 依次检查A中各元素a, 若$\langle a,a\rangle \notin R$, 就把它加入到$R$中去, 由此即得$r(R)$.

对称闭包的构造

定理 4.5(2)

设$R \subseteq A \times A$, 则有$s(R) = R \cup R^{-1}$.

证明 (1) 对于任意$\langle a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle \in R \cup R^{-1}$, 则有$\langle a, b\rangle \in R$或$\langle a, b\rangle \in R^{-1}$. 由逆关系定义可得$\langle b, a\rangle \in R^{-1}$或$\langle b, a\rangle \in R$, 即$\langle b, a\rangle \in R \cup R^{-1}$, 所以$R \cup R^{-1}$是对称的.

(2) $R \subseteq R \cup R^{-1}$.

(3) 设R^p是A上任意包含R的对称关系, 对于任意$\langle a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle \in R \cup R^{-1}$,

若$\langle a, b\rangle \in R$, 由$R \subseteq R^p$, 可得 $\langle a, b\rangle \in R^p$;

若$\langle a, b\rangle \in R^{-1}$, 则 $\langle b, a\rangle \in R \subseteq R^p$, 因为$R^p$是对称的, 可得 $\langle a, b\rangle \in R^p$,

从而 $R \cup R^{-1} \subseteq R^p$, 由定义4.15知 $s(R) = R \cup R^{-1}$.

- 本定理给出了构造$s(R)$的方法: 依次检查R中各元素$\langle a, b\rangle$, 若$a \neq b$且$\langle b, a\rangle \notin R$, 就把$\langle b, a\rangle$加入到$R$中去, 由此即得$s(R)$.

传递闭包的构造

定理 4.5(3)

设$R \subseteq A \times A$, 则有$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

证明 令 $R' = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

(1) 若$\langle a,b\rangle \in R'$, $\langle b,c\rangle \in R'$, 由$R'$的定义, 存在正整数$h,k$, 使得 $\langle a,b\rangle \in R^h$, $\langle b,c\rangle \in R^k$.

可得$\langle a,c\rangle \in R^h \circ R^k = R^{h+k}$, 即$\langle a,c\rangle \in R'$, 由此得证$R'$是传递的.

(2) $R \subseteq R'$.

(3) 设R^p是A上任意包含R的传递关系, $\forall \langle a,b\rangle \in R'$, 则必存在正整数$k$, 使得$\langle a,b\rangle \in R^k$,

即存在$k-1$个元素$c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$, 使得$\langle a,c_1\rangle \in R, \langle c_1,c_2\rangle \in R, \dots, \langle c_{k-2},c_{k-1}\rangle \in R$, $\langle c_{k-1},b\rangle \in R$;

由$R \subseteq R^p$, 有$\langle a,c_1\rangle \in R^p, \langle c_1,c_2\rangle \in R^p, \dots, \langle c_{k-2},c_{k-1}\rangle \in R^p, \langle c_{k-1},b\rangle \in R^p$;

再由R^p的传递性, 得$\langle a,b\rangle \in R^p$.

由此得证$R' \subseteq R^p$.

闭包的矩阵构造

根据定理4.5, 我们可以通过A上R的关系矩阵M求$r(R)$, $s(R)$和$t(R)$的关系矩阵M_r, M_s和M_t, 即:

$$M_r = M + I_M$$

$$M_s = M + M^T$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$$

- 其中$I_M = M^0$是和M同阶的单位矩阵, M^T是M的转置矩阵.
- 在矩阵对应的元素相加和相乘使用逻辑加和逻辑乘.

闭包的图构造

同样, 我们也可以通过A上R的关系图G, 求$r(R)$, $s(R)$和$t(R)$的关系图G_{r}, G_s和G_t, 见图4.5.

- 考查G的每个结点, 如果没有自环就加上一个自环, 最终得到的是G_{r}.
- 考查G的每一条边, 如果有一条x_i到x_j的单向边, 则在G中加一条x_j到x_i的反方向边, 最终得到的是G_s.
- 从G的每个结点x_i出发, 找出从x_i出发的所有2步, 3步, …, n步长的路径(n为G的结点数). 设路径的终点为x_{j1}, x_{j2}, …, x_{jk}, 从x_i依次连边到$x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$. 当检查完所有的结点时就得到最终得到的是$G_t$.

闭包

例 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$, 求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

解

$r(R)=R\cup I_A=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle\}$;

$R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$,

$R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,d\rangle\}$,

$R^4=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle\}=R^2$, 发现循环;

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,$
$\langle b,d\rangle\}$.

闭包的特性

定理

设$R_1, R_2 \subseteq A\times A$且$A \neq \emptyset$, 且$R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

证明

(1) $R_1 \subseteq R_2$, $r(R_1) = R_1 \cup I_A \subseteq R_2 \cup I_A = r(R_2)$, 所以$r(R_1) \subseteq r(R_2)$.

(2) 因为$R_1 \subseteq R_2$, 且$R_2 \subseteq s(R_2)$, 因此$R_1 \subseteq s(R_2)$.

由$s(R_1)$是包含R_1的最小对称关系, 所以$s(R_1) \subseteq s(R_2)$.

(3) 因为$R_1 \subseteq R_2$, 且$R_2 \subseteq t(R_2)$, 因此$R_1 \subseteq t(R_2)$.

由$t(R_1)$是包含R_1的最小传递关系, 所以$t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

闭包的特性

定理

设$R_1, R_2 \subseteq A \times A$, 则

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$;

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

证明(1) 由闭包的定义可得$R_1 \subseteq r(R_1)$且$R_2 \subseteq r(R_2)$, 从而$R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$, 由于$r(R_1) \cup r(R_2)$自反和闭包的最小性, 可得$r(R_1 \cup R_2) \subseteq r(R_1) \cup r(R_2)$.

由$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2 \subseteq r(R_1 \cup R_2)$, 以及$r(R_1)$的最小性和$r(R_1 \cup R_2)$的自反性, 可得$r(R_1) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$, 同理可得$r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$. 从而可得$r(R_1) \cup r(R_2) \subseteq r(R_1 \cup R_2)$.

因此, $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$. 同理可证(2).

闭包的特性

证明(3)

易证$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$.

但是反之不然. 例如:

$A = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$, $R_2 = \{\langle c, a\rangle\}$.

则有$t(R_1) \cup t(R_2) = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$.

而 $t(R_1 \cup R_2) = E_A$, 即A上的全关系.

显然, $E_A \not\subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.

闭包的特性

定理 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \emptyset$, 则

(1) 若R是自反的, 则$s(R)$和$t(R)$也是自反的;

(2) 若R是对称的, 则$r(R)$和$t(R)$也是对称的;

(3) 若R是传递的, 则$r(R)$也是传递的, 但是$s(R)$不一定传递.

定理 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \emptyset$, 则

(1) $r\big(s(R)\big) = s\big(r(R)\big)$;

(2) $r\big(t(R)\big) = t\big(r(R)\big)$;

(3) $s\big(t(R)\big) \subseteq t\big(s(R)\big)$.

- (1)(2)可总结为"有r就可相等".
- (3)可记为st(students)≤ ts(teachers).

厦门大学信息学院 SCHOOL OF INFORMATICS XIAMEN UNIVERSITY 厦门大学计算机科学系 Computer Science Department of Xiamen University

课堂练习

设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle\}$, 求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

课堂练习

设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle\}$, 求$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$.

解

$r(R)=R\cup I_A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,d\rangle\}$;

$R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,c\rangle\}$,

$R^3=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle\}$,

$R^4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,c\rangle\}=R^2$, 发现循环;

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=$
$\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,c\rangle\}$.

4.5 等价关系和偏序关系

划分块

- "物以类聚, 人以群分". 分类是计算机的重要处理之一, 分类的依据是什么呢? 正是事物之间的关系.
- 引进等价关系就是为了对集合中的元素进行分类.

定义4.19

设$A \neq \emptyset$, 若存在A的一个子集族π满足:

(1) $\emptyset \notin \pi$;

(2) π中任何两个子集都不交;

(3) π中所有子集的并集就是A.

则称π为A的一个划分, π中元素称为划分块.

- 划分块也就是所谓的MECE (Mutually Exclusive and Collectively Exhaustive) 原则, 即所谓"不重不漏".

划分块

例 高级程序设计语言Java的字符Character表

$\sum = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z, 0, 1, 2, \ldots, 8, 9, +, -, *, /, =, !, ?, \ldots, \#, \$\}.$

字母集合$\alpha = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$,

数字集合$\beta = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$,

特殊符号集合$\gamma = \{+, -, *, /, =, !, ?, \ldots, \#, \$\}$,

则子集族$\pi = \{\alpha, \beta, \gamma\}$是$\sum$的一个划分.

划分块

例4.17 设$A=\{a,b,c,d\}$,

$$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\},$$
$$\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\},$$
$$\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\},$$
$$\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\},$$
$$\pi_5=\{\emptyset,\{a,b\},\{c,d\}\},$$
$$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\},$$

则π_1和π_2是A的划分，其他都不是A的划分. 因为π_3中的两个子集不是不交的，π_4的中子集的并集少了元素d，π_5中含有$\emptyset$，π_6不是A的子集族.

等价关系

定义4.16

设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \emptyset$, 若R是自反的,对称的和传递的, 则称R是A上的等价关系. 此时, 若$\langle x, y\rangle \in R$ (即xRy), 称x等价于y, 记作$x \sim y$.

例 设A为某班学生的集合,

$R_1 = \{\langle x, y\rangle |\ x, y \in A \wedge x$与$y$同年生$\}$;

$R_2 = \{\langle x, y\rangle |\ x, y \in A \wedge x$与$y$同姓$\}$;

$R_3 = \{\langle x, y\rangle |\ x, y \in A \wedge x$的年龄不比$y$小$\}$;

$R_4 = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x$与$y$有相同的选修课$\}$;

$R_5 = \{\langle x, y\rangle |\ x, y \in A \wedge x$的体重比$y$重$\}$;

只有R_1和R_2是A上的等价关系, R_3不是对称的, R_4不是传递的, R_5不是自反的和对称的.

- 直线间的平行关系, 三角形的相似关系都是等价关系.

等价关系

例 设$A \subseteq N \land A \neq \emptyset$, 令

$$R_n = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \land x \equiv y \pmod n\}, n \geq 2$$

其中$x \equiv y \pmod n$叫作x与y模n相等，即x除以n的余数与y除以n的余数相等. 证明R_n是集合A上的等价关系.

证明

自反性: $x \equiv x\ (mod\ n)$;

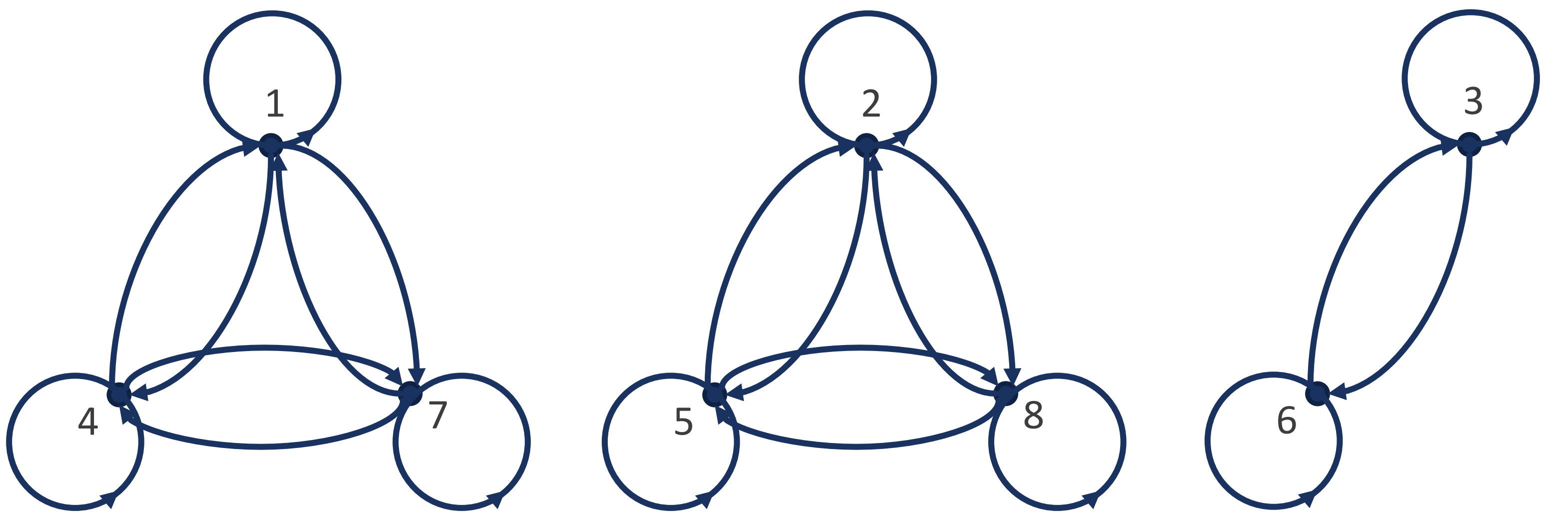
对称性: $x \equiv y \pmod n$, $y \equiv x \pmod n$;

传递性: $x \equiv y \pmod n$, $y \equiv z \pmod n$, $x \equiv z \pmod n$;

所以R_n是集合A上的等价关系.

等价关系

例4.16 设$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 求$R_3=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y \pmod 3\}$的关系图.



等价类

定义4.17

R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A\text{且}xRy\}.$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 当所关于的关系确定时, 可简称为x的等价类, 简记作$[x]$.

- 等价类$[x]_R$是A中关于R与x等价的全体元素所组成的集合.

例4.16中的等价类是:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\},$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\},$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}.$$

- 可以看出, 彼此等价的元素的等价类是相同的. 所以不同的等价类仅有3个, 它们是[1], [2]和[3].

等价类

定理 4.6(1)

设R是非空集合A上的等价关系, 则$\forall x \in A$, $[x]_R$是A的非空子集.

证明

由R的自反性得xRx, 所以$x \in [x]_R$, 即$[x]_R \neq \emptyset$, 再由等价类定义:

$$[x]_R = \{y|y \in A \wedge xRy\},$$

显然有$[x]_R \subseteq A$.

- 这说明: A中每个元素所生成的等价类是非空的, 里面至少有自己.

等价类

定理 4.6(2)

设R是非空集合A上的等价关系, 则$\forall x, y \in A, xRy$当且仅当$[x]_R = [y]_R$.

证明

充分性: 若$[x]_R = [y]_R$, 由$x \in [x]_R$得$x \in [y]_R$, 于是xRy.

必要性: 已知xRy, 对于任意$z \in [x]_R$,

$$z \in [x]_R \wedge xRy \Rightarrow zRx \wedge xRy \Rightarrow zRy \Rightarrow z \in [y]_R.$$

因此$[x]_R \subseteq [y]_R$. 类似地可证$[y]_R \subseteq [x]_R$, 所以$[x]_R = [y]_R$.

- 这说明: 彼此等价的元素属于同一个等价类.

等价类

定理 4.6(3)

设R是非空集合A上的等价关系, 则$\forall x, y \in A$, 如果$x \not R y$, 则$[x]_R$与$[y]_R$不交.

证明

反证法. 如果有元素$z \in [x]_R \cap [y]_R$,

则xRz且yRz, 由R的对称性和传递性可得xRy,

与题设$x \not R y$矛盾. 故$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

- 这说明: 彼此不等价的元素是属于不同的等价类, 且这些等价类之间无公共元素.

等价类

定理 4.6(4)

设R是非空集合A上的等价关系, 则所有等价类的并集就是A.

证明 对于任意y,

$$y \in \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} \Rightarrow \exists z\,(z \in A \wedge y \in [z]_R).$$

由于$[z]_R \subseteq A$, 可得$y \in A$, 即$\bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$.

另一方面, 对于任意y,

$$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \subseteq \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\},$$

可得$y \in \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\}$, 即$A \subseteq \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\}$.

所以$A = \bigcup\{[x]_R \mid x \in A\}$.

商集

定义4.18

设R是非空集合A上的等价关系, 以R的所有不同的等价类为元素的集合称为A关于R的**商集**, 记作

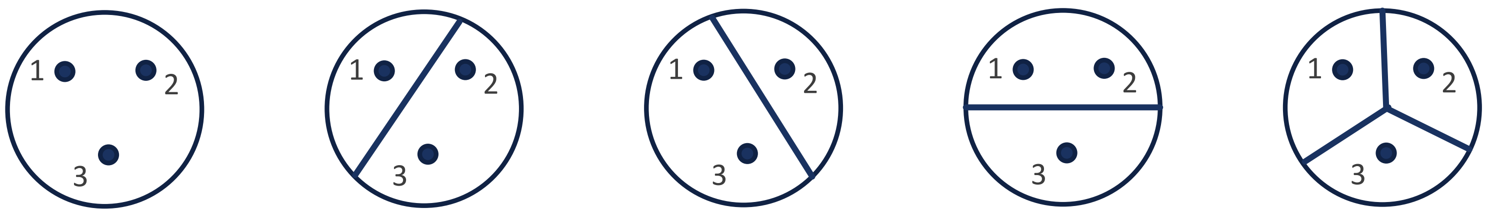
$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}.$$

- 商集A/R就是A上关于R的其中一个划分, 其元素$[a]$即划分块.
  - 划分与R无关, 商集与R相关.
- 集合A上的划分集与等价关系集构成一一对应, 这表明“划分”和“等价关系”的概念, 在本质上是相同的.
- 在例4.16中商集$A/R_3 = \{[1],[2],[3]\} = \{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\} = \pi$.

划分,等价关系与商集

例4.18　设$A=\{1,2,3\}$, 试求A上的全体划分, 全体等价关系及其对应的商集.

解　$A=\{1,2,3\}$上有$C_3^1+C_3^2+C_3^3=5$种不同的划分和等价关系.



E_A, 其商集为$A/E_A=\{\{1,2,3\}\}$;

I_A, 其商集为$A/I_A=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$;

$R_{12}=I_A\cup\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$, 商集$A/R_{12}=\{\{1,2\},\{3\}\}$;

$R_{13}=I_A\cup\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$, 商集$A/R_{13}=\{\{1,3\},\{2\}\}$;

$R_{23}=I_A\cup\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$, 商集$A/R_{23}=\{\{2,3\},\{1\}\}$.

划分,等价关系与商集

例 设$A=\{1,2,3,4\}$, 考虑A的划分$\pi=\big\{\{1,2,3\},\{4\}\big\}$, 求由$\pi$决定的$A$上的等价关系$R$.

解 显然, 一个块中每一个元素与且只与相同块的元素有关系. $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$.

- 有等价关系的元素在同一划分块中.
- A上等价关系对应A上元素某排列的划分块全关系1矩阵.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \\ & [1] \end{bmatrix}$$

课堂练习

设$A=\{1,2,3,4\}$. 在$A\times A$上定义等价关系R, $\forall\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\in A\times A$有

$$\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle\Leftrightarrow u+y=x+v$$

求商集A/R.

课堂练习

设$A=\{1,2,3,4\}$. 在$A\times A$上定义等价关系R, $\forall\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\in A\times A$有

$$\langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle \Leftrightarrow u+y=x+v$$

求商集A/R.

解

$A\times A$中等价的元素是:

$$\langle 1,2\rangle\sim\langle 2,3\rangle\sim\langle 3,4\rangle,\qquad \langle 2,1\rangle\sim\langle 3,2\rangle\sim\langle 4,3\rangle$$

$$\langle 1,3\rangle\sim\langle 2,4\rangle,\qquad \langle 3,1\rangle\sim\langle 4,2\rangle$$

$$\langle 1,4\rangle,\qquad \langle 4,1\rangle$$

$$\langle 1,1\rangle\sim\langle 2,2\rangle\sim\langle 3,3\rangle\sim\langle 4,4\rangle$$

所以, $A/R=\{\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\},\{\langle 1,4\rangle\},\{\langle 4,1\rangle\},\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\},$
$\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\},\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\},\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}\}$

偏序关系

- 事物之间的次序经常是事物群体之间的重要特征, 决定事物之间的次序也是通过事物间的关系来确定的.

定义4.20

设$R \subseteq A \times A$, 如果R是自反, 反对称和传递的, 则称R为A上的偏序关系, 记作"$\preccurlyeq$". 如果$\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$, 则记作$x \preccurlyeq y$, 读作$x$"小于等于"$y$.

- 这里的"小于等于"不是指元素的大小, 而是指在偏序关系中的顺序. x"小于等于"y的含义是x在顺序上排在y前面或者x就是y.
- $\preccurlyeq$虽然看起来像是一个运算符, 但是事实上是一个表示关系的符号, 好比R. 所以只有$\preccurlyeq$, 没有$\succcurlyeq$.

偏序关系

例 (1)A是实数集的非空子集, 大于等于关系$\preccurlyeq = \{\langle x, y\rangle | x, y \in A \wedge x \geq y\}$是$A$上的一个偏序关系. $5 \preccurlyeq 4$, $2 \preccurlyeq 2$, 但是$2 \not\preccurlyeq 3$.

(2) 设A为正整数集Z_+的非空子集, 整除关系$\preccurlyeq = \{\langle x, y\rangle | x$整除$y\}$ 是A上的一个偏序关系. $1 \preccurlyeq 3$, $2 \preccurlyeq 4$, 但是$2 \not\preccurlyeq 3$.

偏序关系

例 设A为一集合, $\mathcal{A}$为A的子集族, $\mathcal{A}$上的包含关系$\preccurlyeq = \{\langle x, y\rangle | x, y \in \mathcal{A} \wedge x \subseteq y\}$是偏序关系.

设$A = \{a, b\}$, 考虑A的下面3个子集族:

$$\mathcal{A}_1 = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\big\}, \qquad \mathcal{A}_2 = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}, \qquad \mathcal{A}_3 = P(A),$$

它们对应的包含关系分别为偏序关系:

$$\preccurlyeq_{\subseteq_1} = I_{\mathcal{A}_1} \cup \{\langle \emptyset, \{a\}\rangle, \langle \emptyset, \{b\}\rangle\}; \text{ (没有}\langle\{a\}, \{b\}\rangle)$$

$$\preccurlyeq_{\subseteq_2} = I_{\mathcal{A}_2} \cup \{\langle \{a\}, \{a, b\}\rangle\};$$

$$\preccurlyeq_{\subseteq_3} = I_{\mathcal{A}_3} \cup \{\langle \emptyset, \{a\}\rangle, \langle \emptyset, \{b\}\rangle, \langle \emptyset, \{a, b\}\rangle, \langle \{a\}, \{a, b\}\rangle, \langle \{b\}, \{a, b\}\rangle\}.$$

可比与不可比

定义 4.21

设R为非空集合A上的偏序关系, 定义

(1) $x, y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$,

(2) $x, y \in A, x$与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

- "偏"字意味着某些元素**是不可比的**.
- $\forall x, y \in A$, 则有下述几种情况可能发生:

$$x \prec y, y \prec x, x = y, x\text{与}y\text{不是可比的}.$$

例 $A = \{1,2,3\}$上的整除关系$\preccurlyeq = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$中, $1 \prec 2$, $1 \prec 3$, $1 \preccurlyeq 1$且$1 = 1$, 2和3不可比.

覆盖

定义4.23

集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集, 记作$\langle A,\preccurlyeq\rangle$.

- 偏序集和有序对都使用$\langle,\rangle$, 注意区分.

例 整数集合Z和数的小于等于关系$\preccurlyeq_{\leq}$构成偏序集$\langle Z,\preccurlyeq_{\leq}\rangle$, 集合$A$的幂集$P(A)$和包含关系$\preccurlyeq_{\subseteq}$构成偏序集$\langle P(A),\preccurlyeq_{\subseteq}\rangle$.

定义4.24

$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集, $\forall x,y\in A$, 如果$x\prec y$且不存在$z\in A$, 使得$x\prec z\prec y$, 则称y覆盖x.

例 集合$A=\{1,2,4,6\}$上的整除关系, 有2覆盖1, 4和6覆盖2, 但4不覆盖1, 因为有$1\prec 2\prec 4$. 6也不覆盖4, 因为$4\not\prec 6$.

哈斯图

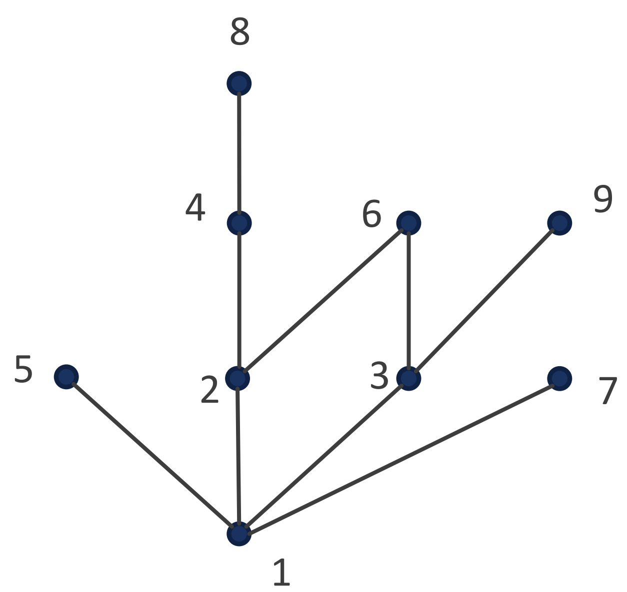
- 覆盖关系的关系图称哈斯图, 它实际上是偏序关系经过简化的关系图, 更清楚,更有效地描述元素间的层次关系.
- 在画偏序集$\langle A, \preccurlyeq \rangle$的哈斯图的步骤如下:

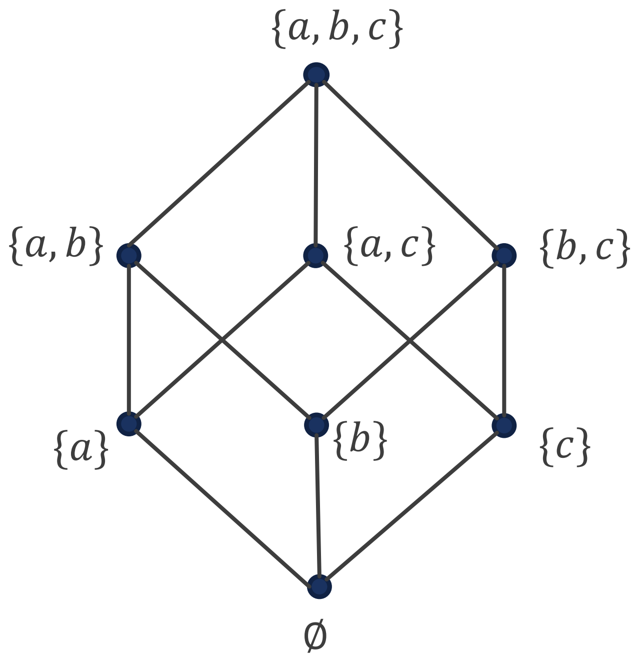
  1. 适当排列结点的顺序使得$\forall x, y \in A$, 若$x \prec y$, 则将x画在y的下方.
  2. 如果y覆盖x, 就在图中连接x和y. 若$x \prec y$, 但y不覆盖x, 则x与y之间不需要连线.

- 要特别注意, 哈斯图因为有上下位置关系, 所以不能旋转!
- 哈斯图中没有平行线.

哈斯图

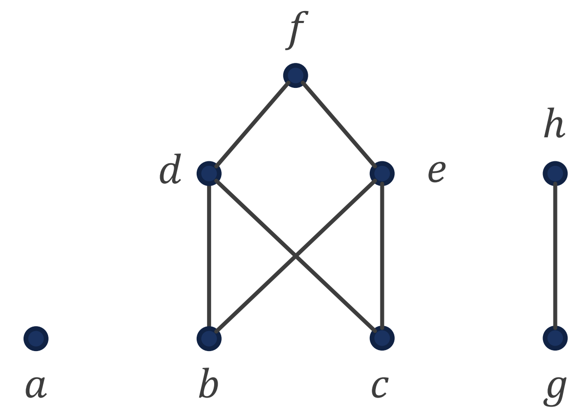
例4.20 画出$\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\preccurlyeq_{|}\rangle$和$\langle P(\{a,b,c\}),\preccurlyeq_{\subseteq}\rangle$的哈斯图:





哈斯图

例4.21 已知偏序集$\langle A, R\rangle$的哈斯图，求集合A和关系R的表达式.



解

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

$$R = \{\langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle b, f\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle c, f\rangle, \langle d, f\rangle, \langle e, f\rangle, \langle g, h\rangle\} \cup I_A.$$

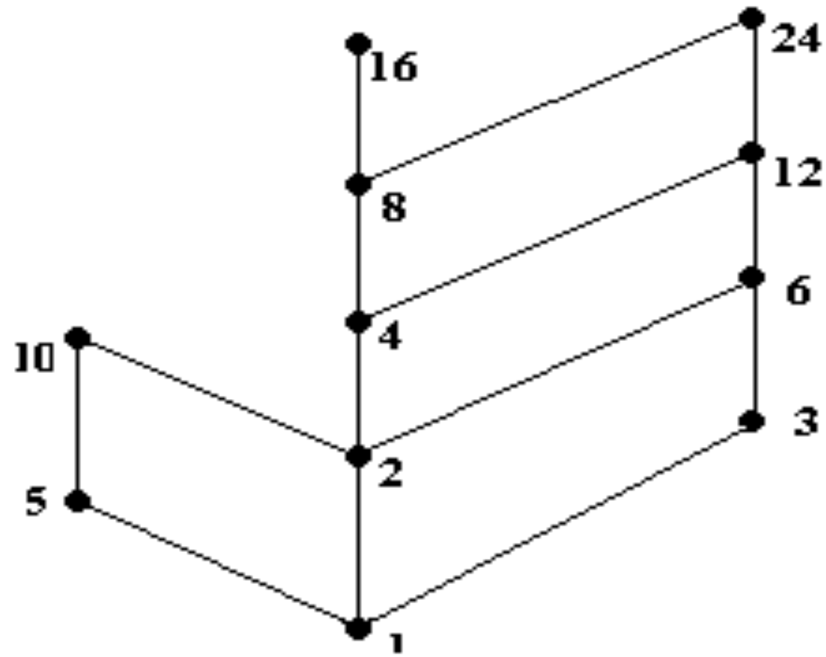
课堂练习

画出$\langle\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,16,24\},\preccurlyeq_{|}\rangle$的哈斯图.

课堂练习

画出$\langle\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,16,24\},\preccurlyeq_{|}\rangle$的哈斯图.

解



全序关系

定义4.22

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为偏序集, 若$\forall x, y \in A$, x与y均可比($a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$), 则称$\preccurlyeq$为$A$上的一个全序关系或线序关系, 此时称$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为全序集.

- 全序集的充要条件是其哈斯图是一条直线段. 只要有分叉, 就有不可比.

例 设A为实数集的非空子集, 则$\le$和$\ge$是全序关系.

例 给定$P = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$上的包含关系$\preccurlyeq_{\subseteq}$, $(P, \preccurlyeq_{\subseteq})$构成全序集. 因为$\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$, 即$P$上任意两个元素都有包含关系.

但是$P' = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$上的包含关系$\preccurlyeq_{\subseteq}$, $(P', \preccurlyeq_{\subseteq})$不构成全续集, 因为存在$\{1,2\} \not\subseteq \{2,3\}$.

最元与极元

某些哈斯图有惟一处于各点之上 (或下) 的点, 有的却不是如此. 为了区别它们, 考虑偏序集中的一些特殊元素:

定义4.25

$\langle A, \preccurlyeq\rangle$是偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$.

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x\}$成立, 则称$y$为$B$的最小元.

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y\}$成立, 则称$y$为$B$的最大元.

(3) 若$\forall x(x \in B \land x \preccurlyeq y \ \rightarrow \ x = y\}$成立, 则称$y$为$B$的极小元.

(4) 若$\forall x(x \in B \land y \preccurlyeq x \ \rightarrow \ x = y\}$成立, 则称$y$为$B$的极大元.

- 最小元: y比谁都小, 哈斯图中惟一最低点.
- 最大元: y比谁都大, 哈斯图中惟一最高点.
- 极小元: 没有比y小的元素, 不可比的不用管.
- 极大元: 没有比y大的元素, 不可比的不用管.

最元与极元

- 最小(大)元与极小(大)元都是就集合A的某子集B而言.
- 最小(大)元是B中最小(大)的元素，它与B中其他元素都可比；而极小(大)元不一定与B中元素都可比，只要没有比它小(大)的元素，它就是极小(大)元.
- 不同的极小(大)元是不可比的. 因为如果可比，那么其中之一就不是极小(大)元了.
- B的最小(大)元一定是B的极小(大)元.
- 若B中只有一个极小(大)元，则它一定是B的最小(大)元.
- 在偏序集$\langle A, \preccurlyeq \rangle$中，极大元和极小元一定存在，但是不一定存在着最小(大)元.
- 但若存在最小(大)元，一定是惟一的.

最元与极元

定理

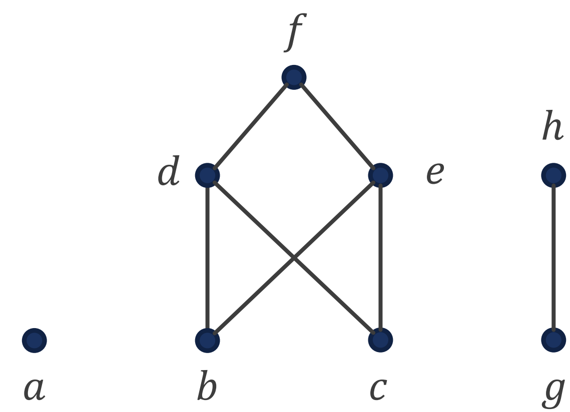
设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$是偏序集, $B\subseteq A$, 若B有最小元, 则必是唯一的.

证明

假定a和b都是B的最小元, 则$a\preccurlyeq b$和$b\preccurlyeq a$, 由偏序的反对称性, 得$a=b$.

同理可证B的最大元必唯一.

例 设偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$如图所示, 求$A$的极小元, 最小元, 极大元, 最大元.

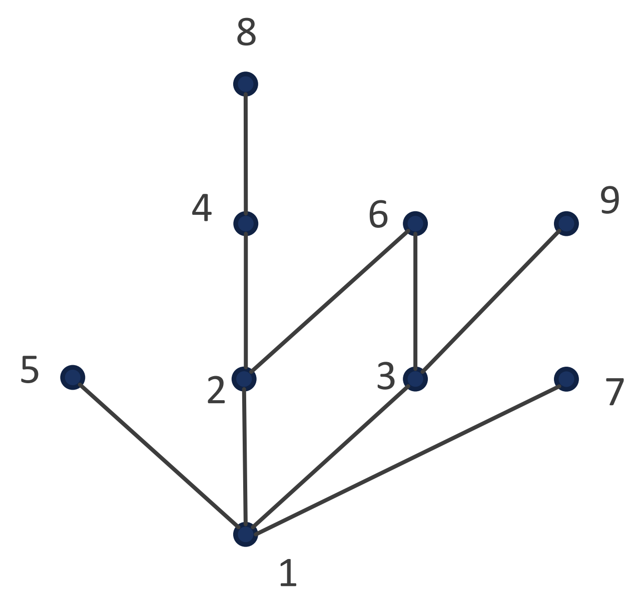


解 极小元是a,b,c,g, 极大元是f,h,a, 没有最小元和最大元.

- 由该例可知, 孤立的结点既是极小元, 又是极大元.

最元与极元

例 若$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, 偏序关系是整除关系. 求A和B的最小元, 极小元, 最大元, 极大元.



解 5, 6, 7, 8, 9是A的极大元, 1既是A的最小元又是极小元, A没有最大元.

6和8是B的极大元, 2和3是B的极小元, B没有最大元和最小元.

上界与下界

定义4.26

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若$\forall x(x \in B \to x \preccurlyeq y\}$成立, 则称$y$为$B$的上界.

(2) 若$\forall x(x \in B \to y \preccurlyeq x\}$成立, 则称$y$为$B$的下界.

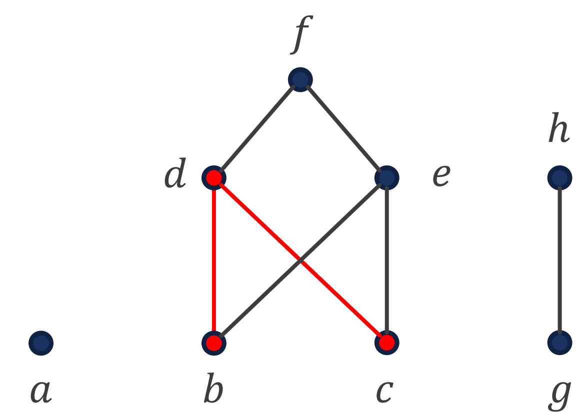
(3) 令$C = \{y |\ y$是B的上界$\}$, 则称C的最小元为B的最小上界或上确界.

(4) 令$C = \{y |\ y$是B的下界$\}$, 则称C的最大元为B的最大下界或下确界.

- 上(下)界,上(下)确界都是超集A中的元素, 有可能不属于B.
- B的上界和下界不一定存在, 存在时, 上确界和下确界也不一定存在.
- 上(下)确界未必存在. 若存在, 上(下)确界是惟一的.
- 对于同一集合B而言, 最小(大)元一定是下(上)确界和下(上)界. 但下(上)界却未必是最小(大)元, 因为有可能下(上)界不属于B.

上界与下界

例 设偏序集$\langle A, \preccurlyeq \rangle$如图所示，令$B = \{b, c, d\}$，求$B$的上界，下界，上确界，下确界.



解

d和f是B的上界，d是上确界.

B的下界和下确界都不存在.

课堂练习

若$A=\{1,2,3,4,6,8,16,48,72\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, 偏序关系$\preccurlyeq_{|}$是整除关系. 求B的上界, 下界, 上确界, 下确界.

课堂练习

若$A = \{1,2,3,4,6,8,16,48,72\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, 偏序关系$\preccurlyeq_{|}$是整除关系. 求B的上界, 下界, 上确界, 下确界.

解

48, 72是B的上界, 但是没有上确界, 因为$48 \not\preccurlyeq_{|} 72$.

1和2是B的下界, 2是B的下确界.

- 由此可见, A中所有B的公倍数都是上界, 公约数都是下界.

4.6 函数的定义和性质

函数

- 高等数学中，函数的定义域和值域都是在数集上讨论，这种函数一般是连续或分段连续的.
- 集合论将函数的概念推广到对离散量的讨论，将函数看作是一种特殊的二元关系，其定义域和值域可以是各类集合.
- 两个集合上的二元关系是一个意义相当广泛的概念，没有对两个集合的元素作任何特殊的限制.
- 函数作为特殊的二元关系，函数概念表明了两个集合元素之间的多对一关系.

函数

定义 4.27

设F为二元关系，若$\forall x \in \operatorname{dom} F$都存在唯一的$y \in \operatorname{ran} F$使$xFy$成立，则称$F$为函数. 对于函数$F$，如果有$xFy$，则记作$y = F(x)$，并称$y$为$F$在$x$点的值.

例4.24 设$F_1 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_2\rangle\}$，$F_2 = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_1, y_2\rangle\}$，判断它们是否为函数.

解 F_1是函数，F_2不是函数. 因为对应于x_1存在y_1和y_2，有$x_1F_2y_1$和$x_1F_2y_2$，与函数定义矛盾，故F_2不是函数.

函数

定义4.28

设F, G为函数, 则

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F.$$

- 函数是特殊的二元关系, 二元关系是特殊的集合, 所以函数也是特殊的集合, 集合相等的定义同样适用于函数.
- 由此可见, 两个函数相等, 它们的定义域一定相等. 若定义域不相等, 则必然$F \nsubseteq G \vee G \nsubseteq F$.

例 $F(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, G(x) = x - 1$, 则$F \neq G$, 因为

$$\operatorname{dom} F = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x \neq -1\} \neq \operatorname{dom} G = \mathbf{R}.$$

函数

定义 4.29

设A, B为集合, 如果f为函数, 且$\operatorname{dom} f = A$, $\operatorname{ran} f \subseteq B$, 则称$f$为从$A$到$B$的函数, 记作$f: A \to B$.

例 函数$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x$是从$\mathbf{N}$到$\mathbf{N}$的函数.

函数$g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g(x) = 2$也是从$\mathbf{N}$到$\mathbf{N}$的函数.

函数

定义4.30

所有从A到B的函数的集合记作B^A或$A \to B$, 读作“B 上A”, 即

$$B^A = \{f \mid f\colon A \to B\}.$$

- 设集合$A = |n| \geq 1$, 集合$B = |m| \geq 1$, 从A到B共有$2^{n \times m}$个不同的二元关系，但并非每个关系都是函数.
- 那么究竟有多少个关系是函数呢?

函数

定理

设A, B均为有限集合, 则从A到B共有$|B|^{|A|}$个不同的函数.

证明 设 $|A| = n, |B| = m$. 因为任一函数f是由A中n个元素的取值所唯一确定的, A中的任一元素a, f在a处的取值都有m种可能，所以A到B可以定义$\underbrace{m \cdot m \dots m}_{n} = m^n = |B|^{|A|}$个不同的函数.

厦门大学信息学院 SCHOOL OF INFORMATICS XIAMEN UNIVERSITY 厦门大学计算机科学系 Computer Science Department of Xiamen University

函数

例　设$A=\{a,b,c\}$, $B=\{0,1\}$, $|A|=3$, $|B|=2$, 从A到B共有$2^{3\times 2}=2^6=64$个不同的二元关系.

但仅有$|B|^{|A|}=2^3=8$个不同的函数, 它们是:

$$f_0=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\};f_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\};$$
$$f_2=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\};f_3=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\};$$
$$f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\};f_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\};$$
$$f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\};f_7=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}.$$

- 一般地, A到B的一个函数决定A到B的一个关系, 反之却不一定正确.

函数与关系

设A和B是集合，函数与关系之间的区别和联系是：

- 包含关系
  - A到B函数首先是一种关系，但它是一种特殊的关系，而任一从A到B的关系未必是函数.
  - 从A到B的关系是指$A \times B$的子集，它只要求有序对中第一元素属于A，第二元素属于B.
- 定义域
  - 函数的定义域是A，它必须对A中每个元素都有定义，即其中有序对的第一元素取遍了A中所有元素.
  - 关系中有序对第一元素可能只对A的某个真子集有定义.
- 值域
  - 函数要求A中一个元素只对应一个象，单值.
  - 关系中一个元素可以对应多个象，多值.

函数的像

定义4.31

设 $f: A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, 则称

$$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$$

为A_1在f下的**像**, 特别地, 称$f(A)$为函数的像.

例 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x$, 则$A_1 = \{1,2,3\}$和$A_2 = \mathbf{N}$在f下的像分别为$f(A_1) = \{2,4,6\}$, $f(A_2) = \{y|y = 2x \wedge x \in \mathbf{N}\}$.

例 设f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 且$f(x) = x^2$,

取$A_1 = [0, +\infty)$, $A_2 = [1, 3)$, $A_3 = \mathbf{R}$,

则$f(A_1) = [0, +\infty)$, $f(A_2) = [1, 9)$, $f(A_3) = [0, +\infty)$.

满射与单射

定义4.32 设$f: A \to B$

(1) 若$\mathrm{ran}\, f = B$, 则称f是满射的, 或(到上的).

(2) 若$\forall y \in \mathrm{ran}\, f$都存在惟一的$x \in \mathrm{dom}\, f = A$, 使得 $f(x) = y$, 则称f是单射的(或一一的).

(3) 若f既是满射又是单射的, 则称f为双射的(或一一到上的).

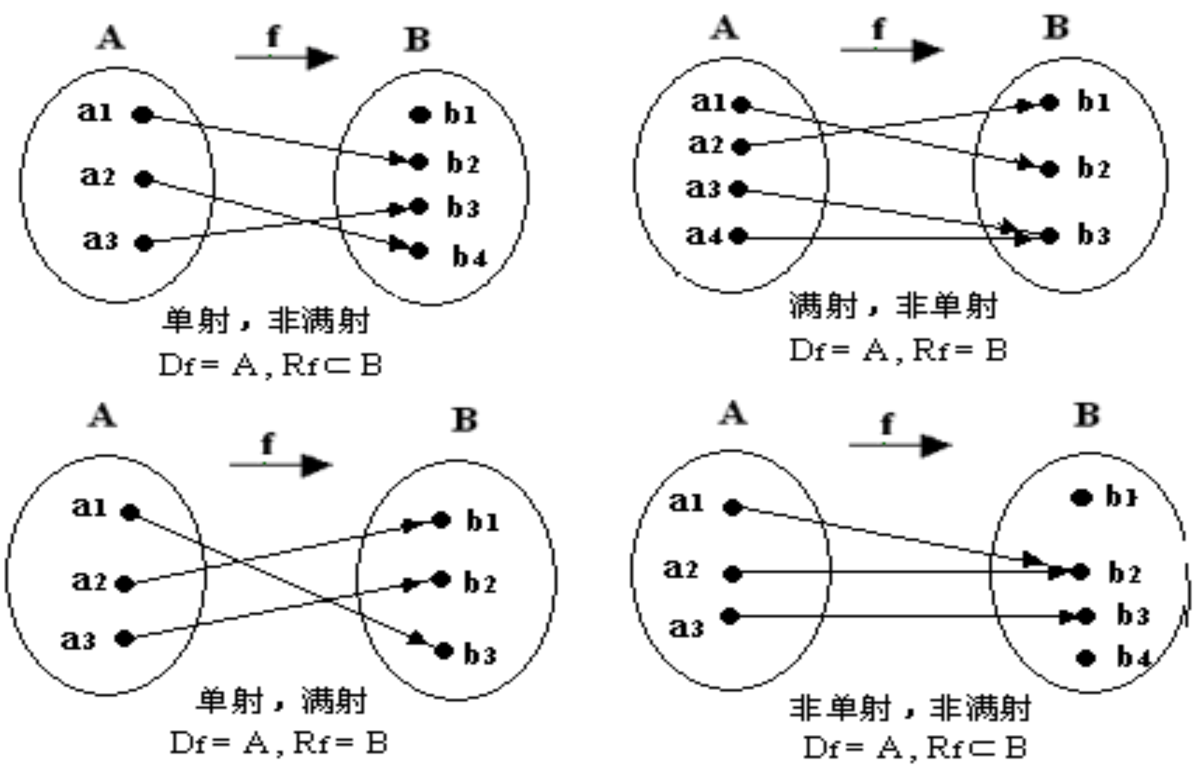
- f满射的等价定义为$\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得$f(x) = y$.
- f单射的等价定义为$\forall x_i, x_j \in A$且$x_i \neq x_j$, 必有$f(x_i) \neq f(x_j)$ 或其逆否等价定义: $\forall x_i, x_j \in A$, 若$f(x_i) = f(x_j)$时, 必有$x_i = x_j$.

满射与单射

- 要证明某个映射是单射时，通常使用它的等价定义.
- 要证明某个映射是满射时，可以直接按定义来求，或者通过集合的运算得到.
- 要说明一个映射不是单射，只需找到两个不同的点有相同的象即可.
- 要说明一个映射不是满射，则需只需在B中找到某个点y，说明不存在$f(x) = y$.

满射与单射

- 下图可加深对这三种函数区别的理解:



满射与单射

例4.26 判断下列函数是否为单射, 满射, 双射的:

(1) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

(2) $f: \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}, f(x) = \ln x$, $\mathbf{Z}^+$为正整数集.

解 (1) $f(x)$是开口向下的抛物线, 除了$x = 1$以外的$f(x)$均可由2个不同的x得到, 因此不是单射的. $f(x)$的最大值是0, 因此不是满射的.

(2) $f(x)$在$\mathbf{Z}^+$上单调递增, 因此是单射的. 由于dom f不是连续的, ran $f \neq R$, 所以不是满射的. 若改为$f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, f就是双射的.

厦门大学信息学院 SCHOOL OF INFORMATICS XIAMEN UNIVERSITY 厦门大学计算机科学系 Computer Science Department of Xiamen University

满射与单射

例4.26 判断下列函数是否为单射，满射，双射的：

(3) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$表示不大于x的最大整数.

(4) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$.

(5) $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+, f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

解 (3) $f(x)$是满射的. 但是不是单射的，例如$\lfloor 1.5 \rfloor = \lfloor 1.2 \rfloor = 1$.

(4) $f(x)$是双射的. 因为它单调递增，且$\mathrm{ran}\, f = \mathbf{R}$.

(5) $f'(x) = 1 - 1/x^2$，由于$\mathrm{dom}\, f = \mathbf{R}^+$，当$x = 1$时取得最小值 $f(1) = 2$，所以不是满射的. $x < 1$时 $f'(x) < 0$, $x > 1$时 $f'(x) > 0$，即f在$(0,1)$上递减，$(1, \infty]$上递增，所以不是单射的.

满射与单射

- 设 $|A| = n, |B| = m, f: A \to B$,

(1) f为单射的必要条件是$|A| \leq |B|$;

(2) f为满射的必要条件是$|A| \geq |B|$;

(3) f为双射的必要条件是$|A| = |B|$.

- 我们可以通过排列组合的知识讨论这三种情况不同函数的个数:

(1) 当$n < m, A \to B$中共含$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$个不同的单射函数.

(2) 当$n = m, A \to B$中共含$n!$个双射函数.

(3) 当$n > m, A \to B$中不含单射函数和双射函数. 不同的满射相当于先把n个不同的球放入m个相同的盒中 (分成m堆) 去($n \geq m$), 且不允许有空盒的方案数$\left\{ {m \atop n} \right\}$. 再对这$m$个盒子进行不同的排列 (盒子有区别) $m!\left\{ {m \atop n} \right\}$.

函数

定义 4.33 (1) 设$f: A \to B$, 如果存在$b \in B$, 使得$\forall x \in A$, 均有$f(x) = b$, 则称f是A到B的常函数.

(2) A上的恒等关系I_A就是A上的恒等函数. $\forall x \in A$都有$I_A(x) = x$.

(3) $f: R \to R$, 对于任意$x_1, x_2 \in R$,

若$x_1 < x_2$, 则$f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称f是单调递增的;

若$x_1 < x_2$, 则$f(x_1) < f(x_2)$, 称f是严格单调递增的;

若$x_1 < x_2$, 则$f(x_2) \leq f(x_1)$, 则称f是单调递减的;

若$x_1 < x_2$, 则$f(x_2) < f(x_1)$, 称f是严格单调递减的;

- 严格单调递增和严格单调递减都是单射.

函数

定义 4.33 (4) 设A为集合, 对于任意的$A' \subseteq A$, A'的特征函数$\mathcal{X}_{A'}(a): A \to \{0,1\}$定义为

$$\mathcal{X}_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A'; \\ 0, & a \in A - A'. \end{cases}$$

(5) 设R是A上的等价关系, 定义函数g: $A \to A/R$(商集), 使得 $g(a) = [a]_R$, g把元素a映射到a的等价类, 称g是从A到商集A/R的自然映射.

例 $A = \{a, b, c\}$, $A' = \{a\}$, 则有$\mathcal{X}_{A'}(a) = 1$, $\mathcal{X}_{A'}(b) = 0$, $\mathcal{X}_{A'}(c) = 0$.

例 $A = \{1,2,3\}$, $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} \cup I_A$, $A/R = \big\{\{1,2\}, \{3\}\big\}$, 则$g$为自然映射:

$$g(1) = g(2) = \{1,2\}, g(3) = 3.$$

课堂练习

设

$$A_1 = \{a, b\}, B_1 = \{1, 2, 3\};$$

$$A_2 = \{a, b, c\}, B_2 = \{1, 2\};$$

$$A_3 = \{a, b, c\}, B_3 = \{1, 2, 3\};$$

分别写出$A_1 \to B_1, A_2 \to B_2, A_3 \to B_3$中的满射, 单射和双射.

课堂练习

设

$$A_1 = \{a, b\}, B_1 = \{1, 2, 3\};$$

$$A_2 = \{a, b, c\}, B_2 = \{1, 2\};$$

$$A_3 = \{a, b, c\}, B_3 = \{1, 2, 3\};$$

分别写出$A_1 \to B_1, A_2 \to B_2, A_3 \to B_3$中的满射, 单射和双射.

解 当$|A_1| = n = 2 < 3 = m = |B_1|$, $A_1 \to B_1$无满射和双射函数, 单射函数共有6个:

$$f_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}, \qquad f_2 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle\},$$

$$f_3 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}, \qquad f_4 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\},$$

$$f_5 = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle\}, \qquad f_6 = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle\},$$

课堂练习

- $A_2 = \{a, b, c\}$, $B_2 = \{1, 2\}$, $|A| = n = 3 > 2 = m = |B|$, $A_2 \to B_2$无单射和双射函数，满射函数共有6个:

$$g_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,2\rangle\}, \qquad g_2 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle\},$$
$$g_3 = \{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}, \qquad g_4 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,2\rangle\},$$
$$g_5 = \{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,2\rangle\}, \qquad g_6 = \{\langle a,2\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle\}.$$

- $A_3 = \{a, b, c\}$, $B_3 = \{1, 2, 3\}$; $|A| = n = 3 = m = |B|$, $A_3 \to B_3$共有6个双射函数.

$$h_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,3\rangle\}, \qquad h_2 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,2\rangle\},$$
$$h_3 = \{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,3\rangle\}, \qquad h_4 = \{\langle a,2\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,1\rangle\},$$
$$h_5 = \{\langle a,3\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,2\rangle\}, \qquad h_6 = \{\langle a,3\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle\}.$$

4.7 函数的复合和反函数

函数的复合

- 函数是一种特殊的关系, 函数的复合本质上就是关系右复合, 有关关系复合的所有定理都适合于函数的复合.
- 下面着重考虑函数在右复合中的特有性质:

定理 4.7

设F, G是函数, 则$F \circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}\,(F \circ G) = \{x \mid x \in \mathrm{dom}\, F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}\, G\}$,

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = G\big(F(x)\big)$.

函数的复合

证明 因为F, G是关系, 所以$F\circ G$也是关系.

(0) 若对某个$x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$有 $x(F\circ G)y_1$和$x(F\circ G)y_2$, 则

$$\begin{aligned}
& x(F\circ G)y_1 \wedge x(F\circ G)y_2 \\
\Rightarrow\ & \exists t_1(xFt_1\wedge t_1Gy_1)\wedge \exists t_2(xFt_2\wedge t_2Gy_2) \\
\Rightarrow\ & \exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge t_1Gy_1\wedge t_2Gy_2) \quad (F\text{为函数}) \\
\Rightarrow\ & y_1=y_2 \ (G\text{为函数}).
\end{aligned}$$

所以$F\circ G$是函数.

(1) 对于任意x,

$$\begin{aligned}
& x\in \mathrm{dom}\,(F\circ G) \\
\Rightarrow\ & x\in\{x \mid \exists t\exists y(xFt\wedge tGy)\} \qquad (\mathrm{dom}\text{的定义}+\text{复合的定义}) \\
\Rightarrow\ & x\in\{x \mid \exists t(x\in \mathrm{dom}\,F\wedge t=F(x)\ \wedge t\in \mathrm{dom}\,G)\} \\
\Rightarrow\ & x\in\{x \mid x\in \mathrm{dom}\,F\ \wedge F(x)\in \mathrm{dom}\,G).
\end{aligned}$$

函数的复合

(2) 对于任意x,
$$x \in \operatorname{dom} F \land F(x) \in \operatorname{dom} G$$
$$\Rightarrow \langle x, F(x)\rangle \in F \land \big\langle F(x), G\big(F(x)\big)\big\rangle \in G$$
$$\Rightarrow \big\langle x, G\big(F(x)\big)\big\rangle \in F \circ G$$
$$\Rightarrow x \in \operatorname{dom}(F \circ G) \ \land F \circ G(x) = G\big(F(x)\big)$$

所以(1)和(2)得证.

推论1 设$F: A \to B, G: B \to C$, 则$F \circ G: A \to C$, 且$\forall x \in A$有
$$F \circ G(x) = G\big(F(x)\big).$$

推论2 设F, G, H为函数, 则$(F \circ G) \circ H$和$F \circ (G \circ H)$都是函数, 且
$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H).$$

函数的复合

- 特别地, 当$f: A \to A$, 则f可与自身合成任意次. 归纳定义为:

(1) $f^0(a) = a$, $f^0 = I_A$;

(2) $f^n(a) = f\left(f^{n-1}(a)\right) = f^{n-1}\left(f(a)\right)$.

例 设$f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = 2 + x$, 则

$f \circ g(x) = f(2 + x) = 1 + (2 + x)2 = 5 + 4x + x^2$.

$g \circ f(x) = g(1 + x^2) = 2 + 1 + x^2 = 3 + x^2$.

$f \circ g \neq g \circ f$, 可见函数复合"$\circ$"不满足交换律.

函数的复合

定理 4.8(1)

设有函数$f: A \to B$和$g: B \to C$, 如果f和g都是满射的, 则$f \circ g: A \to C$也是满射的.

证明

$\forall c \in C$, 因为$g: B \to C$是满射的, 所以$\exists b \in B$, 使$g(b) = c$.

对于这个b, 由于$f: A \to B$也是满射的, 所以$\exists a \in A$, 使$f(a) = b$.

由定理4.7有$f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. 所以, $f \circ g: A \to C$是满射的.

函数的复合

定理4.8(2) 设有函数$f: A \to B$和$g: B \to C$, 如果f和g都是单射的, 则$f \circ g: A \to C$也是单射的.

证明 假设存在$z \in C, \exists x_1, x_2 \in A$使得$f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$由定理4.7有$g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$.

因为$g: B \to C$是单射的, 故$f(x_1) = f(x_2)$.

又由于$f: A \to B$是单射的, 所以$x_1 = x_2$.

所以$f \circ g: A \to C$是单射的.

定理4.8(3) 设有函数$f: A \to B$和$g: B \to C$,如果f和g都是双射的, 则$f \circ g: A \to C$也是双射的.

证明 由(1)和(2)得证.

函数的复合

- 定理4.8说明函数的复合运算能够保持函数单射, 满射, 双射的性质. 但逆不真, 但有如下"部分可逆"的结论.

定理4.8.2(1) 设有函数$f: A \to B$和$g: B \to C$, 那么如果$f \circ g$是满射, 则f是满射.

证明

$$\forall z \in C,$$

$$\Rightarrow \exists x\,(x \in A \land x(f \circ g)z)$$

$$\Rightarrow \exists x \exists y\,(x \in A \land y \in \operatorname{ran} g \subseteq B \land xgy \land yfz)$$

$$\Rightarrow \exists x \exists y\,\big(x \in A \land y \in B \land y = g(x) \land z = f(y)\big)$$

$$\Rightarrow \exists y\,\big(y \in B \land z = f(y)\big)$$

所以f是满射的.

函数的复合

定理4.8.2(2) 设有函数$f\colon A \to B$和$g\colon B \to C$, 如果$f \circ g$是单射, 则g是单射.

证明 若存在$y \in \operatorname{ran} g \subseteq B$, 又存在$x_1, x_2 \in A$, 使得$x_1 g y \wedge x_2 g y$

$$\Rightarrow \exists z\,(z \in \operatorname{ran} f \subseteq C \wedge yfz \wedge x_1 g y \wedge x_2 g y)$$

$$\Rightarrow \exists z\,(z \in C \wedge x_1(f \circ g)z \wedge x_2(f \circ g)z)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2,$$

所以g是单射的.

定理4.8.2(3) 设有函数$f\colon A \to B$和$g\colon B \to C$,如果$f \circ g$是双射, 则g是单射而f是满射.

证明 由(1)和(2)立即可得.

函数的复合

定理4.9 设$f: A \to B$，则$f = f\circ I_B = I_A\circ f$. 其中$I_A, I_B$分别为$A$上和$B$上的恒等函数.

证明 由定理4.7推论1知，$f\circ I_B: A\to B, I_A\circ f: A\to B$. $\forall\langle x,y\rangle\in f$,

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f \wedge y\in B$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f \wedge \langle y,y\rangle\in I_B$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f\circ I_B,$$

所以$f\subseteq f\circ I_B$. 反之，$\forall\langle x,y\rangle\in f\circ I_B$,

$$\Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in f \wedge \langle t,y\rangle\in I_B)$$

$$\Rightarrow \langle x,t\rangle\in f \wedge t=y$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in f,$$

所以$f\circ I_B\subseteq f$，即$f = f\circ I_B$. 同理可证$I_A\circ f = f$. 因而$f = f\circ I_A = I_B\circ f$.

反函数

- 任给二元关系R均存在逆关系R^{-1}, 只要颠倒R的所有有序对就得到R^{-1}.
- 任给一个函数F, F的逆F^{-1}不一定是函数.

例 $F=\{\langle x,z\rangle,\langle y,z\rangle\}$, 则有$F^{-1}=\{\langle z,x\rangle,\langle z,y\rangle\}$非函数.

- 任给一个单射函数$f\colon A\to B$, 则f^{-1}是函数, 且满足$f^{-1}\colon \operatorname{ran} f\to A$, 它是单射和满射, 因此是双射. 然而$f^{-1}$不一定是从$B$到$A$的.
- 对于什么样的函数$f\colon A\to B$, 它的逆f^{-1}是从B到A的函数$f^{-1}\colon B\to A$呢?

反函数

- 在数学分析中，当函数在区间可求导，判别严格单调性很简便，从而可判别反函数.
- 离散数学处理的是一般函数，定义域是一般集合，不考虑元素的次序. 即使可按线性排列，它们如果是离散型的，则谈不上有导函数.
- 关于反函数的定义，就只能根据双射作出.

反函数

定理4.10 设$f: A \to B$是双射的, 则$f^{-1}: B \to A$也是双射的.

证明 因为f是函数, 所以f^{-1}是关系, 且由定理4.1有

$$\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{ran} f = B, \operatorname{ran} f^{-1} = \operatorname{dom} f = A.$$

- 对于任意的$y \in B$, 假设有$x_1, x_2 \in A$使得$y f^{-1} x_1 \wedge y f^{-1} x_2$成立,

  则由逆的定义有$x_1 f y \wedge x_2 f y$成立.

  由f的单射性可得$x_1 = x_2$. f^{-1}满足单值性.

  综上所述有$f^{-1}: B \to A$是满射的.

- 假设对某$x_1, x_2 \in B$, 有$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$, 即存在$y \in A$, 有$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$. 根据逆的定义有$y f x_1$和$y f x_2$.

  因f为函数, 所以$x_1 = x_2$. 这就证明$f^{-1}: B \to A$是单射的.

反函数

定义

对于双射函数$f: A \to B$, 称$f^{-1}: B \to A$是它的反函数.

- 对于满射非单射函数$f: A \to B$, f^{-1}不是函数.
- 对于单射非满射函数$f: A \to B$, f^{-1}是函数然而不是反函数.
- 可以证明对任何的双射函数$f: A \to B$和它的反函数$f^{-1}: B \to A$, 它们的复合函数都是恒等函数, 且满足:

$$f^{-1} \circ f = I_B, f \circ f^{-1} = I_A.$$

反函数

例 下列函数中, 哪些具有反函数? 有反函数的, 请写出反函数.

(1) 设f_1: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$,$\mathbf{Z}^+ = \{x | x \in \mathbf{Z} \land x > 0\}$, 且$f_1(x) = x + 1$. 该函数单射, 非满射, 非双射.

(2) 设f_2: $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^+$同(1), 且

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

该函数满射, 非单射, 非双射.

(3) 设f_3: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 且$f_3(x) = x^3$. 该函数双射, 存在反函数$f_3^{-1}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 且$f_3^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

课堂练习

下列函数中, 哪些具有反函数? 有反函数的, 请写出反函数.

(1) 设f_1: $\mathbf{R} \to B$, 且$f_1(x) = e^x$, $B = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x > 0\}$.

(2) 设f_2: $A \to \mathbf{R}$, 且$f_2(x) = \sqrt{x}$, $A = \{x | x \in \mathbf{R} \wedge x \geq 1\}$.

课堂练习

下列函数中，哪些具有反函数？有反函数的，请写出反函数.

(1) 设f_1: $\mathbf{R} \to B$, 且$f_1(x) = e^x, B = \{x | x \in \mathbf{R} \land x > 0\}$.

解 该函数双射，存在反函数f_1^{-1}: $B \to R$, 且$f_1^{-1}(x) = \ln x$.

(2) 设f_2: $A \to \mathbf{R}$, 且$f_2(x) = \sqrt{x}, A = \{x | x \in \mathbf{R} \land x \geq 1\}$.

解 该函数单射，非满射，非双射.

作业

p97

- 4
- 6(2)
- 9
- 11
- 12
- 16
- 18(1)
- 20(2)
- 22(1)
- 23
- 28 (3)(5)(7)
- 34

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论

厦门大学信息学院
SCHOOL OF INFORMATICS XIAMEN UNIVERSITY
厦门大学计算机科学系
Computer Science Department of Xiamen University