离散数学

第一章: 命题逻辑

卢杨
厦门大学信息学院计算机科学系
luyang@xmu.edu.cn

讲师简介

- 讲师:
  - 卢杨, 香港浸会大学博士, 计算机系助理教授
  - 联系方式: luyang@xmu.edu.cn
- 助教:
  - 陈健, 19级计算机系研究生
  - 联系方式: 1511397550@qq.com

QQ群: 915783954

课程简介

- “离散数学”是数学与计算机及其他相关专业的专业基础课，为这些专业后续课程的先修课.
- 主要讲授数理逻辑，集合论，代数结构和图论的基本理论和方法，注重常用离散结构背景，算法和应用的讲述，引导学生应用离散数学的理论和方法解决实际问题.
- 课程目标:
  - 掌握离散数学的基本理论和方法;
  - 熟悉常用的离散结构，包括命题，二元关系，群，环，域，格，图等;
  - 能够应用离散数学的相关知识分析问题，并对问题进行建模并加以解决.

课程简介

- 现代科学技术(包括计算机科学与技术)的发展是与现代数学的发展密切相关，互相促进的.
- 计算机的高速发展与广泛应用，促进了信息数字化，符号化与离散化.
- 离散与连续是现实世界中物质运动的对立统一的两个方面.
- 离散数学与连续数学是描述，刻划和表达现实世界物质运动的两种重要工具.
- 离散数学的原理和方法已成为计算机科学与技术的重要理论基础之一.

教学大纲

离散数学分数理逻辑，集合论，代数结构和图论四个部分，各部分的要掌握的重点内容有：

- 第一部分（数理逻辑）：命题的符号化，公式的等值演算，公式的范式，推理理论.（16学时）
- 第二部分（集合论）：二元关系的定义，表示，运算和性质，等价关系，偏序关系，函数.（12学时）
- 第三部分（代数结构）：代数结构和子代数的定义，群，环，域，格的定义，性质和应用，特别是循环群，置换群和布尔代数.（16学时）
- 第四部分（图论）：图的定义，分类和矩阵表示，图的点，边连通性，树，图的匹配，图的着色，平面图，以及连通图的最短路，二部图的最大匹配和连通图的最小生成树算法.（16学时）

厦门大学信息学院 SCHOOL OF INFORMATICS XIAMEN UNIVERSITY 厦门大学计算机科学系 Computer Science Department of Xiamen University

考核方式

- 成绩构成:
  - 期末50%
  - 作业30%
  - 出勤20%
- 旷课1次扣4分. 迟到或早退超过15分钟视为旷课.
- 每次作业按完成质量评定给予1-3分; 迟交扣1分; 未交1次扣3分.

教材

- 主要教材
  - 耿素云, 屈婉玲编:《离散数学 (第2版) 》, 北京大学出版社, 2019年9月
- 主要参考书
  - 耿素云, 屈婉玲, 王捍贫编:《离散数学教程》, 北京大学出版社, 2004年2月
  - Richard Johnsonbaugh编, 石纯一等译:《离散数学》, 人民邮电出版社, 2003年
- 课件: http: //course.xmu.edu.cn/

1.1 命题与联结词

命题与真值

- 数理逻辑研究的中心问题是推理,即研究推理中前提和结论之间的形式关系,而不涉及前提和结论的具体内容.
- 推理的基本单位是命题.

定义

能判定真假但不能既真又假的陈述句(包括符号化的等式和不等式)称作命题.

命题与真值

- 作为命题的陈述句所表达的判断只有两种结果: 真或假, 称为命题的真值.
  - 凡与事实相符的命题为真命题, 其真值为真;
  - 否则称为假命题, 其真值为假.
- 判断给定的句子是否为命题的标准:
  - 首先判断它是否为陈述句;
  - 再判断它是否有惟一的真值.
- 若它是具有惟一真值的陈述句, 它就是命题.

命题与真值

例1.1

(1) 海洋的面积比陆地的面积大.

解 是真命题.

(2) 2是素数.

解 是真命题.

(3) 太阳从西方升起.

解 是假命题.

(4) $\sqrt{3}$是有理数.

解 是假命题.

(5) 火星上有生命.

解 是命题, 在人类历史发展的长河中能够判断它的真假性. 由于人们当前的认识水平, 尚未知其真假 (待定) .

(6) $11+1=100$.

解 是命题, 其真假取决于采用哪一种进制. 若是二进制, 则是真的, 否则就是假的.

命题与真值

(7) $x + y > 10$.

解 不是命题，是命题变元. 由于x与y的不确定性，使得该陈述句的真值不惟一.

当$x = 5, y = 8, 5 + 8 > 10$为真.

而当$x = 5, y = 4, 5 + 4 > 10$为假.

(8) 明年中秋节的晚上是晴天.

解 是命题. 其真值虽然现在还不知道，但是到明年中秋节就知道了，所以是具有惟一真值的陈述句. 真值未知不影响其惟一性.

(9) 本命题是假的.

解 不是命题. 本陈述句是悖论(真假共存) .

(10) 今晚打王者不?

解 是疑问句，不是命题.

(11)让我们今晚一起上王者.

解 是祈使句，不是命题.

(12)上王者真难啊!

解 是感叹句，不是命题.

命题与真值

- 在语法上,命题一定是陈述句,但陈述句不一定是命题.疑问句,祈使句和感叹句等,它们无所谓真假,所以不是命题.
- 命题具有唯一的真值,真或假,这与我们是否知道它的真假(待定)是两回事.
- 为了能用数学方法来研究命题之间的逻辑关系和推理,需要将命题和真值符号化.
  - 使用$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$表示命题.例如:

    p: $\sqrt{3}$是有理数

    q: 火星上有生命.
  - 使用1 (或T) 表示"真"; 用0 (或F) 表示"假".

命题与真值

- 在数理逻辑中,将不能再分解为更简单的命题称为简单命题或原子命题.
- 下列命题都不是简单命题:

例1.2

(1) 10不是素数.

(2) 2和3都是素数.

(3) 2或4是素数.

(4) 若数a是4的倍数,则它一定是2的倍数.

(5) 数a是偶数当且仅当它能被2整除.

命题联结词

定义

若干简单命题通过命题联结词联结而成的新命题称作是复合命题.

- 命题联结词是自然语言中有关联结词的逻辑抽象.
- 它作用于命题时,和数学运算符号相当,所以又称逻辑运算符.
- 它反映了复合命题和部分命题之间的真假关系,这种关系是命题联结词的逻辑内容.
- 自然语言中,人们常常使用"或","并","与","且","但是"等一些联结词,对它们的使用,一般没有很严格的定义,因而有时显得很不确切.
- 逻辑语言是人工语言,它们已用真值表严格定义并符号化,其含义清晰准确,避免了自然语言中常见的歧义.

命题联结词

例1.2

(1) 10不是素数. 使用了联结词“非”.

(2) 2和3都是素数. 使用了联结词“和”.

(3) 2或4是素数. 使用了联结词“或”.

(4) 若数a是4的倍数, 则它一定是2的倍数. 使用了联结词“如果, 则”.

(5) 数a是偶数当且仅当它能被2整除. 使用了联结词“当且仅当”.

否定联结词

定义1.1

设p为任一命题，复合命题"非p"(或p的否定)称为p的否定式，记作"$\neg p$"。$\neg$称为否定联结词。

- $\neg p$的逻辑关系为p不成立，于是$\neg p$取值为真当且仅当p取值为假。
- $\neg$是一个一元运算，它的意义是"否定"被否定命题的全部，而不是一部分。
- 例如:
  - p: 10是素数. (真值为0) $\neg p$: 10不是素数. (真值为1)
  - q: 5是素数. (真值为1) $\neg q$: 5不是素数. (真值为0)

p	$\neg p$
0	1
1	0

$\neg p$的真值表

合取联结词

定义1.2

设p,q为二命题，复合命题"p并且q"(或"p与q") 称作p和q的合取式，记作"$p \wedge q$". "$\wedge$"称为合取联结词.

- $p \wedge q$的逻辑关系为p与q同时成立，因而$p \wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.
- 例如:
  - p: 2是素数，（真值为1） q: 3是素数 (真值为1），$p \wedge q$: 2和3都是素数 (真值为1)．
  - p: 2是素数，(真值为1） r: 4是素数 (真值为0），$p \wedge r$: 2和4都是素数 (真值为0)．

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \wedge q$的真值表

合取联结词

例 将下列命题符号化　　　p: 我变秃了, q: 我变强了

(1)　我变秃了, 也变强了.　　解 $p \wedge q$

(2)　我不仅变秃了, 而且还变强了.　　解 $p \wedge q$

(3)　我虽然没变秃, 但是我也没变强.　　解 $\neg p \wedge \neg q$

(4)　我不是没变强, 而是没变秃.　　解 $\neg(\neg q) \wedge \neg p$

(5)　我和邻居老王都变秃了.　　解 $p \wedge q$

(6)　我和邻居老王是秃头兄弟.　　解 虽然有关键词"和", 但不是复合命题, 只是简单命题.

命题联结词

- 但在数理逻辑中，我们关心的是复合命题与构成复合命题的各原子命题之间的真值关系，即抽象的逻辑关系，并不关心各语句的具体语义.
- 例如:
  - p: $3+3=6$, (真值为1) q: 地球是静止不动的 (真值为0) ，$p \wedge q$: $3+3=6$且地球是静止不动的 (真值为0) .
- 在自然语言中，上述命题是没有意义的，因为p和q毫无内在联系.
- 因此，内容上毫无联系的两个命题也能组成具有确定真值的命题.

合取联结词

定义1.3

设p, q为任意二命题，复合命题"p或q"称作p和q的析取式，记作"$p \vee q$"．"$\vee$"称为析取联结词．

- $p \vee q$的逻辑关系为p与q中至少一个成立，因而$p \vee q$为真当且仅当p与q中至少一个为真．
- 例如:
  - p: 2是素数，（真值为1） q: 3是素数（真值为1），$p \vee q$: 2或3是素数（真值为1）．
  - r: 6是素数，（真值为0） r: 4是素数（真值为0），$r \vee s$: 6或4是素数（真值为0）．

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$p \vee q$的真值表

析取联结词

- 析取联结词∨的逻辑关系是明确的，但自然语言中的“或”有时具有相容性，有时又具有排斥性，因而在使用联结词∨时要注意区分. 绝大多数时候自然语言中的"或"具有排斥性.

例 将下列命题符号化

(1) 今年总冠军是湖人或火箭.

解 这个“或”是互斥的. p: 今年总冠军是湖人, q: 今年总冠军是火箭, 由于总冠军只能有一个, p和q本身就是互斥的, 即p和q不会同时为真, 因而可以符号化为$p \vee q$.

(2) 他学过德语或法语.

解 这个“或”是相容的. r: 他学过德语, s: 他学过法语, 他也有可能同时学过德语和法语, 与命题不冲突, 因而可以符号化为$r \vee s$.

(3) 老王或老李中的一人去出差了.

解 这个“或”是互斥的. t: 老王去出差了, u: 老李去出差了. 但是t和u本身并不互斥, 然而命题表达的意思是互斥的, 因为不能符号化为$t \vee u$, 可以使用多个联结词, 符号化为$(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

蕴含联结词

定义1.4

设p, q为任意二命题，复合命题“如果p，则q”称作p与q的**蕴涵式**，记作$p \rightarrow q$。称p是蕴涵式的前件，q是蕴涵式的后件。$\rightarrow$称作**蕴涵联结词**。

- $p \rightarrow q$的逻辑关系是，q是p的必要条件，p是q的充分条件。$p \rightarrow q$为假当且仅当p为真且q为假。
- 在自然语言里，特别是在数学中，**q是p的必要条件有不同的叙述方式**，“只要p就q”，“p仅当q”，“只有q才p”等都可以符号化为“$p \rightarrow q$”的形式。
- 在数学和其他自然科学中，“如果p，则q”往往表示的是前件为真，后件为真的推理关系。但在数理逻辑中，当p为假时，$p \rightarrow q$也为真。

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \rightarrow q$的真值表

蕴含联结词

例 我朋友跟我说: “如果我这赛季上了王者, 下赛季我就带你飞”. 试问: 在什么情况下, 我朋友才算失信 (命题真值为假) ?

解 我朋友的可能情况有四种:

(1) 我朋友这赛季上了王者, 下赛季带我飞了.

(2) 我朋友这赛季上了王者, 下赛季却没带我飞.

(3) 我朋友这赛季没上王者, 下赛季却带我飞了.

(4) 我朋友这赛季没上王者, 下赛季也没带我飞.

- 显然, (1)(4)两种情况我朋友都没有失信 (真值为真) .
- (3) 的情况与我朋友之前说的话也不冲突, 当然也不算失信 (真值为真) .
- 只有情况(2) , 答应的事却没有做到, 算失信了 (真值为假) . 该情况正好对应定义中“当前件p为真, 后件q为假时, 命题$p \to q$取值为假”.

蕴含联结词

- 有时候自然语言一句话中没有出现"若…则…","如果…就…"之类的关键词,但是却表达了蕴含联结词含义,例如"你行你上,不行别bb".
- 在自然语言里,"如果p,则q"中的p和q往往有某种内在联系,而数理逻辑里p和q不一定有什么内在联系.

例1.5 将下列命题符号化

(1) 若$3+3=6$,则地球是运动的.

(2) 若$3+3\neq 6$,则地球是运动的.

(3) 若$3+3=6$,则地球是静止不动的.

(4) 若$3+3\neq 6$,则地球是静止不动的.

解 p: $3+3=6$, q: 地球是运动的,在这里,p与q显然没有什么内在联系,但仍可以组成蕴涵式,分别为: $p\to q$, $\neg p\to q$, $p\to \neg q$, $\neg p\to \neg q$,真值分别为$1,1,0,1$.

等价联结词

定义1.5

设p, q为任意二命题，复合命题"p当且仅当q"称作p与q的等价式，记作$p \leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$称作等价联结词.

- $p \leftrightarrow q$的逻辑关系是，p和q互为充分必要条件.
  $p \leftrightarrow q$为真当且仅当p和q的真值相同.
- 汉语和英语的日常语言中没有等价词，中文的"当且仅当"以及英文的"iff (if and only if)"都是现代逻辑中创造的联结词.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \leftrightarrow q$的真值表

等价联结词

例1.6 将下列命题符号化，并求其真值.

(1) O_1, O_2两圆的面积相等当且仅当它们的半径相等.

解 p: O_1, O_2两圆的面积相等，q: O_1, O_2两圆的半径相等. 命题符号化为$p \leftrightarrow q$，p与q的真值相同（永远同真或同假），因而$p \leftrightarrow q$的真值为真.

(2) A, B两角相等当且仅当它们是同位角.

解 p: A, B两角相等，q: A, B两角是同位角. 命题也符号化为$p \leftrightarrow q$. 但是p和q的真值可以不同，因为$p \leftrightarrow q$的真值要由p和q的具体情况而定. 再次强调，在数理逻辑中，我们只关心p和q各自的真值以及其联结词.

语句形式化

- 通常对一些推理问题的描述是用自然语言来表示的，所以我们首先需要**把自然语句形式化为逻辑语言**，即以符号表示逻辑公式，然后**根据逻辑演算规律进行推理运算**.
- 自然语句形式化的过程主要包括两个步骤:

(1) 分析出各**简单命题**，将它们符号化;

(2) 根据自然语句中的逻辑关系，使用恰当的命题联结词，把简单命题逐个联结起来，构成复合命题的符号化表示.

语句形式化

- 在命题形式化时,若命题包含有多个联结词时,**必须注意逻辑联结词(运算符)优先次序的规定**.
  - 逻辑联结词(或运算符)的优先级由强到弱依次是:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

  - 按优先级书写,命题中可以省略一些不必要的括号.为了确保命题的清晰性,提高可读性,应适当加上括号以避免混淆,括号中的运算为最优先级.
  - 同级的联结词,按从左往右的次序运算.
- 例如:
  - $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$与$(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow s$表达相同的逻辑关系;
  - $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow s$, $(p \rightarrow q) \wedge r \rightarrow s$, $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$表达的是互不相同的逻辑关系.

语句形式化

- 语句形式化要注意以下几点:
  - 要善于确定简单命题, 不要把一个概念硬拆成几个概念.

    例 我和他是同学

    解 这是一个简单命题. 然而"我和他都是学生"是一个复合命题.
  - 要善于识别自然语言中的联结词 (有时它们被省略) .

    例 狗急跳墙

    解 应理解" (若) 狗急 (了, 则) 跳墙", p: 狗急了, q: 狗跳墙. 上述语句形式化成$p \to q$.
  - 否定词的位置要放准确.

    例 如果你和他不都是傻子, 那么你们俩都不会去自讨没趣.

    解 p: 你是傻子, q: 他是傻子, r: 你会去自讨没趣, s: 他会去自讨没趣. 上述语句形式化为$\neg(p \wedge q) \to (\neg r \wedge \neg s)$.

课堂练习

将下列命题符号化并求真值:

- 如果今年湖人夺冠, 那么不是詹姆斯牛, 就是别的队太菜.
- 若4是质数, 则3是偶数且4不是质数.
- 下午如果没课, 我们就去看电影, 否则就不去.

课堂练习

将下列命题符号化并求真值:

- 如果今年湖人夺冠, 那么不是詹姆斯牛, 就是别的队太菜.

解 p: 湖人夺冠; q: 詹姆斯牛; r: 别的队菜.

上述语句形式化为: $p \rightarrow (q \vee r)$, 真值未知.

- 若4是质数, 则3是偶数且4不是质数.

解 p: 4是质数; q: 3是偶数.

上述语句形式化为: $p \rightarrow (q \wedge \neg p)$, p为假, 所以可直接判定蕴涵式为真.

- 下午如果没课, 我们就去看电影, 否则就不去.

解 p: 下午有课; q: 我们去看电影.

上述语句形式化为: $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$, 真值未知.

1.2 命题公式与赋值

命题公式与赋值

- 例 p: "雪是黑的".

  q: "厦门是个美丽的海滨城市".

  r: "$x+2>8$".
- 这里的简单命题p和q称为命题常项或命题常元,表示具体确定内容的命题,有确定的真值.
- r是真值可以变化的简单陈述句,称为命题变项或命题变元,表示任意的,没有赋予具体内容的命题的抽象. 命题变元不能确定真值,不是命题.
- 用数学来类比的话,x就是自变量,r就是函数. 不过r的取值只有真假,而数学中自变量和函数的取值分别是定义域和值域.
  - 命题变元在未赋值之前并不能确定真假,就好像在没给定x之前不知道$y=f(x)$等于多少一样.

命题公式与赋值

- 真值函数中往往不止一个命题变元, 就好像多元函数 $f(x,y,z)$.
- 在逻辑演算中, 命题常元和命题变元都使用小写字母$p, q, r, \ldots$ 表示. 其表示的是命题常元或是命题变元, 一般可由上下文确定, 不会发生混淆.
- 在数理逻辑里, 我们所关心的仅仅是命题可以被赋予真或假的可能性, 以及规定了真值后, 怎样与其他命题发生联系的问题.

命题公式

将命题常元和命题变元用联结词和圆括号按一定逻辑关系联结起来的符号串成为合式公式或命题公式, 简称公式.

定义1.6 命题公式的递归定义

(1) 单个的命题变元 (或常元) 是合式公式;

(2) 若A是的合式公式, 则$(\neg A)$也是合式公式;

(3) 若A, B是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$也是合式公式;

(4) 只有有限次地利用上述(1)-(3)形成的符号串才是合式公式.

- (1)是递归定义的基础; (2), (3)是递归定义的归纳 (构造形式) ; (4) 是递归定义的极小性 (界限) .
- 使用大写字母符号A, B代表公式.
- 在没有产生歧义的情况下, 外层括号可以省去.

命题公式

所有命题公式都是符号串，反之，不是所有的符号串都是命题公式.

例 以下符号串都是命题公式:

(1) $(p \wedge q) \rightarrow \big(\neg(q \vee r)\big)$;

(2) $\big((r \vee q) \wedge p\big) \leftrightarrow (q \wedge p)$.

例 以下符号串都不是命题公式:

(1) $p \wedge q \wedge r) \rightarrow q$

(2) $(r \rightarrow p) \vee$

(3) $p \wedge qr \rightarrow s$

命题公式

为了讨论公式的真值变化情况,先给出公式层次的定义.

定义1.7

(1) 若A是单个的命题变元或常元, 则称A为0层公式;

(2) 称A是$n+1(n \geq 0)$层公式是指下列诸情况之一:

① $A = \neg B$, B是n层公式;

② $A = B \wedge C$, 其中B, C分别为i层和j层公式, $n = \max(i, j)$;

③ $A = B \vee C$, 其中B, C的层次同②;

④ $A = B \rightarrow C$, 其中B, C的层次同②;

⑤ $A = B \leftrightarrow C$, 其中B, C的层次同②.

例 $\big((\neg p \rightarrow q) \wedge r\big) \vee s$为4层公式; $\big((p \wedge \neg q \wedge r) \vee s\big) \rightarrow (p \vee q \vee r)$为5层公式.

赋值

命题公式不是命题, 其真值是不确定的. 仅当将公式中的所有命题变元用确定的命题代入时, 才得到一个命题. 这个命题的真值, 取决于代入变元的那些命题的真值.

定义 1.8

设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变元, 给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值, 称为对公式A的一个赋值或解释. 若指定的一组值使A的值为1, 则称这组值为A的成真赋值. 若使A的值为0, 则称这组值为A的成假赋值.

赋值

含n个命题变元的命题公式的赋值形式有如下规定:

(1)设A中含的命题变元为$p_1, p_2, \dots, p_n$, 赋值$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ (α_i为0或1) 是指$p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, \dots, p_n = \alpha_n$, 即按下标顺序赋值.

(2) 若出现在A中含的命题变元为$p, q, r \dots$, 赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots$是指$p = \alpha_1, q = \alpha_2, r = \alpha_3 \dots$, 即按字典顺序赋值.

例

- 在公式 $(\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$中, 011 ($p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 1$) , 101 ($p_1 = 1$, $p_2 = 0, p_3 = 1$) 都是成真赋值, 其余的赋值都是成假赋值.
- 在公式 $(p \vee \neg q) \to r$ 中, 011 ($p = 0, q = 1, r = 1$) 为成真赋值, 100 ($p = 1, q = 0, r = 0$) 为成假赋值.

真值表

- 含$n(n \geq 1)$个命题变元的公式共有2^n个赋值. 将公式A在所有赋值之下取值情况列成表, 称为A的真值表.
- 命题公式真值表的构造步骤如下:

(1) 找出公式中所含命题变元, 列出所有可能的赋值 (2^n个) .

(2) 按从低到高的顺序写出公式A的各层次列, A在最后一列.

(3) 对应各赋值, 计算公式各层次的值, 直到最后计算出公式的值.

真值表

例 构造命题公式$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$的真值表.

$p\ q\ r$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \wedge q$	$\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0
1 0 0	0	1	0	0
1 0 1	0	1	0	0
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	0	0	0

真值表

根据公式在各种赋值下的取值情况, 可将命题公式分为3类, 定义如下:

定义 设A为一命题公式,

(1) 若A在它的各种赋值下取值均为真, 则称A为重 (chóng) 言式或永真式;

(2) 若A在它的各种赋值下取值均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A为可满足式.

- 重言式是可满足式, 但反之不真.
- 用真值表可以判断公式的类型:
  - 若最后一列全为1, 则公式为重言式, 同时也是可满足式.
  - 若最后一列全为0, 则公式为矛盾式.
  - 若最后一列既有1又有0, 则公式为非重言式的可满足式.

课堂练习

求下列命题公式的真值表, 并判断是哪一类公式.

- $p \to q \leftrightarrow \neg p \lor q$
- $\neg q \to \neg p \lor \neg q \to \neg p$

课堂练习

求下列命题公式的真值表, 并判断是哪一类公式.

- $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$

解 根据以下真值表可知, 该公式是重言式.

$p\ \ q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$
0 0	1	1	1	1
0 1	1	1	1	1
1 0	0	0	0	1
1 1	0	1	1	1

课堂练习

求下列命题公式的真值表, 并判断是哪一类公式.

- $\neg q \to \neg p \vee \neg q \to \neg p$

解 根据以下真值表可知, 该公式是可满足式.

p q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg q \to \neg p \vee \neg q$	$\neg q \to \neg p \vee \neg q \to \neg p$
0 0	1	1	1	1	1
0 1	1	0	1	0	1
1 0	0	1	1	1	0
1 1	0	0	0	1	0

1.3 等值演算

等值演算

- 给定n个命题变元, 由递归定义可形成的命题公式**是无穷多的**.

例 $n=2$时, $p \rightarrow q$, $(\neg p \vee q)$, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$, ...

- 但在这些无穷的公式中, 真值不同的命题公式却**是有限的**.

例 $p \leftrightarrow q$和$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$虽然"形式"不同, 但它们是真值相同的命题公式.

- 一般地, 含有n个命题变元的公式有2^n组不同的赋值. 对于每一组赋值, 公式都有一个确定的真值.

例 $n=2$时, 共有00, 01, 10, 11四种赋值.

- 由于每个赋值有真, 假两种可能, n个命题变元只能生成2^{2^n}个真值不同的公式.
- 每个这样的公式对应一个定义域为$\{0,1\}^n$, 值域为$\{0,1\}$的函数, 称这样的函数为n元真值函数.

等值演算

$p\ \ q$	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
	0	$p\wedge q$	$\neg(p\to q)$	p	$\neg(q\to p)$	q	$p\oplus q$	$p\vee q$
	矛盾式	合取式	-	投影式	-	投影式	异或式	析取式
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
$p\ \ q$	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
	$p\downarrow q$	$p\leftrightarrow q$	$\neg q$	$q\to p$	$\neg p$	$p\to q$	$p\uparrow q$	1
	或非式	等价式	否定式	蕴涵式	否定式	蕴涵式	与非式	重言式
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

当$n=2$时, 2个命题变元只能生成$2^{2^2}=16$个真值不同的公式, 即16个真值函数$F_i(0\le i\le 15)$.

等值演算

定义1.10

设A，B为二命题公式，若等价式$A \leftrightarrow B$为重言式，则称公式A和B是等值的，记为$A \Leftrightarrow B$.

- 用真值表法总可以判定A，B是否等值．A和B是等值的公式当且仅当A和B真值表完全相同时.
- 等值符号“$\Leftrightarrow$”与等价联结词“$\leftrightarrow$”是不同的, 区别是:
  - 符号“$\Leftrightarrow$”不是命题联结词而是公式间的关系符号．$A \Leftrightarrow B$是命题，但不是公式，而是表示公式A和公式B有逻辑等价关系. $A \Leftrightarrow B$的充要条件是$A \leftrightarrow B$为重言式.
  - 计算机无法判断$A \Leftrightarrow B$, 然而计算机却可“计算”公式$A \leftrightarrow B$是否为重言式.
- 命题逻辑所研究的思维规律，很多是以等价式给出的．下面给出一些最基本和最重要的等值式 (全文背诵) , 它们的正确性均可由真值表验证.

等值演算

1. 双重否定律　$A \Leftrightarrow \neg\neg A$
2. 等幂律　$A \Leftrightarrow A \vee A$
   $A \Leftrightarrow A \wedge A$
3. 交换律　$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
   $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4. 结合律　$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
   $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
5. 分配律　$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. 德・摩根律　$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
   $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
7. 吸收律　$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
   $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
8. 零律　$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
   $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
9. 同一律　$A \vee 0 \Leftrightarrow A$
   $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
10. 排中律　$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
11. 矛盾律　$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
12. 蕴含等值式　$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
13. 等价等值式　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
14. 假言易位　$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
15. 等价否定等值式　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
16. 归谬论　$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

等值演算

- 置换规则: 设$\Phi(A)$是含公式A的命题公式, $B \Leftrightarrow A$, 若用B置换$\Phi(A)$中的A, 得$\Phi(B)$, 则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$.
- 引入置换规则, 我们可将公式变形, 扩大重言式和等值式的作用.

例 在演算中出现$p \to (q \to r)$, 则可用 $\neg q \vee r$ 置换$q \to r$, 保证$p \to (q \to r) \Leftrightarrow p \to (\neg q \vee r)$.

例 验证该等值式: $(p \to q) \to r \Leftrightarrow (\neg q \wedge p) \vee r$.

解

$$
\begin{aligned}
& (p \to q) \to r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \to r && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg p \vee q) \vee r && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{(德・摩根律)} \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \neg q) \vee r && \text{(双重否定律)} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg q \wedge p) \vee r && \text{(交换律)}
\end{aligned}
$$

等值演算

- 每一个命题公式的表达式是不唯一的, 这种不唯一性使得人们在进行逻辑推理时可以有千变万化的方式.
- 即对于任何一个公式A, 可根据基本等价公式及置换规则, 在等值的意义下, 对其进行推演, 从而得到A的各种等值形式.
- 熟悉这些规律可以使人们的思维正确而敏锐.
- 此外, 正是表达式的不唯一, 才使得命题演算在简化电子线路和程序设计中成为必不可少的武器.

等值演算

例 化简程序: if P then if Q then X else Y else if Q then X else Y.

解 按程序设计的良好风格惯例, 将例子重写成

if P then if Q then X else Y

else if Q then X else Y

稍做分析后可看出, 执行X的条件为

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge Q \Leftrightarrow Q$$

执行Y的条件为:

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg Q$$

经等值转换后化简为: If Q then X else Y.

等值演算

例 证明第二吸收律:

$$A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$$

证明

$$A \vee (\neg A \wedge B)$$

$$\Leftrightarrow (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow 1 \wedge (A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow A \vee B$$

例 证明第三吸收律:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$$

证明

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee ((A \vee \neg A) \wedge (B \wedge C))$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C \wedge B)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge C \wedge B)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \quad \text{(吸收律)}$$

课堂练习

用等值演算法证明下列公式等值:

- $p \wedge q \wedge r$
- $(\neg(q \rightarrow p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$

课堂练习

用等值演算法证明下列公式等值:

- $p \wedge q \wedge r$
- $(\neg(q \to p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r)$

证明

$$
\begin{aligned}
& (\neg(q \to p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r) & \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg q \vee p) \wedge p) \vee (p \wedge q \wedge r) & \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \big((q \wedge \neg p) \wedge p\big) \vee (p \wedge q \wedge r) & \text{(德·摩根律)} \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge (\neg p \wedge p)) \vee (p \wedge q \wedge r) & \text{(结合律)} \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge 0) \vee (p \wedge q \wedge r) & \text{(矛盾律)} \\
\Leftrightarrow\ & 0 \vee (p \wedge q \wedge r) & \text{(零律)} \\
\Leftrightarrow\ & p \wedge q \wedge r & \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

1.4 联结词完备集

联结词完备集

- 我们现在只使用了一个一元 (否定) 联结词和四个二元联结词{¬, ∧, ∨, →, ↔}.
- 我们可以将现有的联结词扩充得更多, 但如果不增加变元个数, **所有可能的扩充都不会带来实质性的进展, 因为它们都可以用现有的五个联结词来表示**.
- 同一个命题公式可用各种联结词构成无数种不同形式的等值公式.
- 这五个联结词是必要的吗? 仅仅用其中一部分是否足以表示出所有的真值函数?

联结词完备集

定义

若任一真值函数都可以用仅含某个联结词集中的联结词的公式表示，则称该联结词集为联结词完备集. 对于一个联结词集来说，如果集合中的某一联结词可用集合中的其他联结词所定义，则称该联结词为冗余的联结词.

定义

若一个联结词完备集中不含冗余的联结词，则称它是极小的联结词完备集.

联结词完备集

用等值演算法可消去连结词集中冗余联结词, 从而产生新的联结词集.

例 在第一节中, 给出的联结词集为$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, 由于

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

从而$\leftrightarrow$是冗余联结词, 得新的联结词集为$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. 又由于

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

于是$\rightarrow$是冗余联结词, 得不同的联结词集为$\{\neg, \wedge, \vee\}$. 又有

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

这就导致$\wedge$是$\{\neg, \wedge, \vee\}$冗余联结词, 又得联结词集为$\{\neg, \vee\}$. 而

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

这又得出$\vee$是$\{\neg, \wedge, \vee\}$冗余联结词, 又得联结词集为$\{\neg, \wedge\}$.

可以证明$\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$中不含冗余联结词了. 它们都是极小的联结词完备集.

联结词完备集

例 已知$\{\neg, \wedge\}$是联结词完备集, 证明$\{\neg, \rightarrow\}$是联结词完备集.

证明

由于$\{\neg, \wedge\}$是联结词完备集, 因而任一真值函数均可仅由含$\{\neg, \wedge\}$中的联结词的命题公式表示. 而对于任意公式A, B, 有

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$$

于是, 任一真值函数均可仅由含$\{\neg, \rightarrow\}$中的联结词的命题公式表示, 所以$\{\neg, \rightarrow\}$也是联结词完备集.

课堂练习

将公式$\neg(p \vee q) \leftrightarrow r$化成下列各联结词完备集中的公式:

(1) $\{\neg, \vee\}$

(2) $\{\neg, \wedge\}$

(3) $\{\neg, \rightarrow\}$

课堂练习

将公式$\neg(p \vee q) \leftrightarrow r$化成下列各联结词完备集中的公式:

(1) $\{\neg, \vee\}$

解

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \vee q) \leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(p \vee q) \rightarrow r) \wedge \big(r \rightarrow \neg(p \vee q)\big) && \text{(等价等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q \vee r) \wedge \big(\neg r \vee \neg(p \vee q)\big) && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg\Big(\neg(p \vee q \vee r) \vee \neg\big(\neg r \vee \neg(p \vee q)\big)\Big) && \text{(德・摩根律)}
\end{aligned}
$$

课堂练习

将公式$\neg(p \vee q) \leftrightarrow r$化成下列各联结词完备集中的公式:

(2) $\{\neg, \wedge\}$

解

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \vee q) \leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(p \vee q) \to r) \wedge \big(r \to \neg(p \vee q)\big) && \text{(等价等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & (p \vee q \vee r) \wedge \big(\neg r \vee \neg(p \vee q)\big) && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge \big(\neg r \vee (\neg p \wedge \neg q)\big) && \text{(德·摩根律)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg\big((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r\big) \wedge \neg\big(r \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)\big) && \text{(德·摩根律)}
\end{aligned}
$$

课堂练习

将公式$\neg(p \vee q) \leftrightarrow r$化成下列各联结词完备集中的公式:

(3) $\{\neg, \rightarrow\}$

解

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \vee q) \leftrightarrow r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(p \vee q) \rightarrow r) \wedge \big(r \rightarrow \neg(p \vee q)\big) && \text{(等价等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & (\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \wedge \big(r \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)\big) && \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg\Big(\neg(\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \vee \neg\big(r \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)\big)\Big) && \text{(德 · 摩根律)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg\Big((\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow \neg\big(r \rightarrow \neg(\neg p \rightarrow q)\big)\Big) && \text{(蕴含等值式)}
\end{aligned}
$$

1.5 范式

范式

- 给定两个命题公式判断它们是否等值的**判定问题总是可解的**, 我们已有两种判定方法: 真值表法和等价演算法.
- 但当命题变元n的数目较大时, 上述两种方法都不太方便.
  - 真值表法耗时;
  - 等价演算法耗脑.
- 那么有没有一种方法, 能够把所有命题公式都规范化为一种统一的格式, 然后再进行比较呢? 这样既不耗时, 又不耗脑.

范式

- 为了解决上述问题, 我们引入范式的概念, 把命题公式规范(标准)化.
- 根据标准化, 同一真值函数对应的所有命题公式具有相同的标准形式. 这样, 根据命题的形式结构就能判断两命题公式是否等价以及判断公式的类型.
- 范式的思想和解方程的思想是类似的. 例如, 解一元二次方程之前都会将方程规范化为统一的格式: $ax^2+bx+c=0$, 然后再套用公式.
  - $(5+x)^2+6x=7$与$x(x+16)=-18$是不同的一元二次方程表达方式, 然而在规范化后通过比较a,b,c的值易知它们是等价的.
- 范式在线路设计方面, 自动机器理论和人工智能方面也有极其重要的作用.

析取式和合取式

定义 1.11

将命题变元及其否定统称为文字. 仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式. 仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式.

例 $p, \neg p, p \wedge q, \neg p \wedge q \wedge p$等都是简单合取式.

$p, \neg p, p \vee q, \neg p \vee q \vee p$等都是简单析取式.

- 1个文字的$p, \neg p$既是简单合取式, 又是简单析取式.
- 为方便起见, 有时用$A_1, A_2, \ldots, A_s$表示s个简单析取式或s个简单合取式.

析取式和合取式

- 一个简单合取式为矛盾式当且仅当它同时包含某个命题变元p及其否定式$\neg p$.

例 $\neg p \wedge q \wedge p \wedge \neg r$

- 一个简单析取式为重言式当且仅当它同时包含某个命题变元p及其否定式$\neg p$.

例 $\neg p \vee q \vee p \vee \neg r$

析取范式和合取范式

定义 1.12

(1) 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式. 具有形式$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n \, (n \geq 1)$, 其中$A_i (1 \leq i \leq n)$都是简单合取式.

(2) 由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式. 具有形式$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \, (n \geq 1)$, 其中$A_i (1 \leq i \leq n)$都是简单析取式.

例 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$, $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee p$都是析取范式.

例 $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge p$都是合取范式.

析取范式和合取范式

- 任意简单合取式既是析取范式又是合取范式.

例 $A = p \wedge q \wedge \neg r$既是析取范式 (仅含一个简单合取式$p \wedge q \wedge \neg r$) , 又是合取范式 (含3个简单析取式$p, q, \neg r$) .

- 同理, 任意简单析取式既是析取范式又是合取范式.
- 一个析取范式为矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式.

例 $A = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge \neg q)$

- 一个合取范式为重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

例 $A = (\neg p \vee p) \wedge (p \vee q \vee \neg q)$

析取范式和合取范式

定理 1.2（范式存在定理）

任一命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式.

将任意命题公式转化为析取范式或合取范式可分为以下3步:

(1) 消除公式中对$\{\neg,\wedge,\vee\}$来说冗余的联结词“$\rightarrow$”和“$\leftrightarrow$”.

例 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ (蕴含等值式)

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ (等价等值式&蕴含等值式)

(2) 将“$\neg$”向内深入到变元前面并消去多余的“$\neg$”.

例 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ (双重否定律)

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (德·摩根律)

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (德·摩根律)

析取范式和合取范式

(3) 使用分配律将公式变为所需的范式.

例 用“∧”对“∨”的分配律

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

例 用“∨”对“∧”的分配律

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee p \Leftrightarrow (p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (r \vee p)$$

- 利用以上3个步骤, 一定能求出公式的析取范式或合取范式, 但形式可能是多样的, 即公式的析取范式或合取范式是不惟一的.

析取范式和合取范式

例 求$(\neg p \to q) \land (p \to r)$的析取范式.

解 $(\neg p \to q) \land (p \to r)$

$\Leftrightarrow (\neg\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r)$ (蕴含等值式)

$\Leftrightarrow (p \lor q) \land (\neg p \lor r)$ (双重否定律)

$\Leftrightarrow (p \land \neg p) \lor (q \land \neg p) \lor (p \land r) \lor (q \land r)$ (分配律)

$\Leftrightarrow (q \land \neg p) \lor (p \land r) \lor (q \land r)$ (矛盾律)

- 最后两行都是原式的析取范式，可见公式的析取范式的不惟一性.

课堂练习

求下列公式的合取范式和析取范式.

(1) $\big((p \vee q) \to r\big) \to p$

(2) $q \to (p \to r)$

课堂练习

求下列公式的合取范式和析取范式.

(1) $\big((p \vee q) \rightarrow r\big) \rightarrow p$

解 合取范式:

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$ (蕴含等值式x2)

$\Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge \neg r\big) \vee p$ (德 · 摩根律)

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$ (分配律)

析取范式:

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$ (蕴含等值式x2)

$\Leftrightarrow \big((p \vee q) \wedge \neg r\big) \vee p$ (德 · 摩根律)

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \ \vee p$ (分配律)

课堂练习

求下列公式的合取范式和析取范式.

(2) $q \to (p \to r)$

解

$$\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee r) \quad \text{(蕴含等值式x2)}$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee r \quad \text{(交换律)}$$

最终得到了一个简单合取式, 其又是合取范式, 又是析取范式.

极小项与主析取范式

- 我们最终目的是寻找相互等值的命题公式的标准形式. 然而, 范式的不唯一不能帮助我们达到目的, 为此进一步介绍主范式的概念.
- 首先将简单合取式标准化, 称之为极小项.
- 再求公式的以极小项为简单合取式的析取范式, 称之为主析取范式.

极小项

定义 1.13

在含有n个文字的简单合取式中, 若每个命题变元和其否定式不同时存在, 而二者必有且仅有一个出现, 且第i个文字 (按字典序或下标序) 出现在从左算起的第i位上, 这样的简单合取式称为极小项.

- 极小项是含有n个文字的特殊简单合取式. 每个命题变元或以原形或以否定形式出现且仅出现一次, 因而n个命题变元共可产生2^n个不同的极小项.
- 将命题变元的原形对应1, 否定形对应0, 则每个极小项对应一个二进制数, 同时也对应一个十进制数.
- 这2^n个极小项分别记作$m_0, m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_{2^n-1} (0 \le i \le 2^n - 1)$. m_i的角标i的二进制表示为m_i的成真赋值.

极小项

- p,q,r三个命题变元生成8个极小项:

极小项	二进制数	十进制数	对应符号
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	000	0	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	001	1	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	010	2	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	011	3	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	100	4	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	101	5	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	110	6	m_6
$p \wedge q \wedge r$	111	7	m_7

主析取范式

定义1.14

设命题公式A中含有n个命题变元, 若A的析取范式中的简单合取式全是极小项, 则称该析取范式为A的主析取范式.

- 由定理1.2 (范式存在定理) 可知, 任何命题公式的主析取范式都是存在的, 只要将析取范式中不是极小项的简单合取式化成极小项就可以得到主析取范式.

主析取范式

定理1.3（主析取范式存在惟一定理）

任何命题公式的主析取范式都是**存在的**, 并且是**惟一的**.

证明

首先证明存在性, 设A为任一命题公式.

(1) **转化**: 由定理1.2可知, 存在与A等值的析取范式A'.

(2) **展开**: 若A'的某个简单合取式A_i中既不含命题变元p_j, 又不含其否定式$\neg p_j$, 则将A_i展开成如何形式:

两边用合取式分别插入p_j与$\neg p_j$

$$A_i \Leftrightarrow A_i \wedge 1 \Leftrightarrow A_i \wedge (p_j \vee \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \wedge p_j) \vee (A_i \wedge \neg p_j)$$

(3) **消去**: 将重复出现的命题变元, 矛盾式及重复出现的最小项都"消去".

(4) **排序**: 将极小项按下标由小到大的顺序排列得主析取范式A'', 于是$A \Leftrightarrow A''$.

主析取范式

然后证明唯一性.

- 若命题公式A存在两个不同的主析取范式B和C, 则 $B \Leftrightarrow A$, $C \Leftrightarrow A$. 由传递性, $B \Leftrightarrow C$.
- 由于B和C是A的不同的主析取范式, 必存在某一极小项m_i只出现在B中或只出现在C中.
- 不妨设它只出现在C中, 而不出现在B中.
- m_i在C中, 所以i的二进制表示是C的成真赋值. m_i不在B中, 所以i的二进制表示是B的成假赋值, 这与$B \Leftrightarrow C$矛盾.
- 因此, A的主析取范式是惟一的.

主析取范式

例 求$(\neg p \to q) \wedge (p \to r)$的主析取范式.

解 由上例可知, $(q \wedge \neg p) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$为该公式的一个析取范式, 它含3个简单合取式, 每个简单合取式都不是极小项, 因而都应化成极小项:

- $q \wedge \neg p \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
- $p \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
- $q \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

将以上结果代入析取范式中就可得到主析取范式:

$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \vee m_3 \vee m_7 \Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(2,3,5,7)$ (简单记法)

主析取范式与真值表

若公式A中含$n(n \geq 1)$个命题变元, A的主析取范式中含$s(0 \leq s \leq 2^n)$个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是所含极小项的角标的二进制表示. 其余$2^n - s$个真值赋值都是成假赋值.

例 $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow m_3 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(3,5,7)$

$p\ \ q\ \ r$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	成真极小项
0 0 0	0	0	
0 0 1	0	0	
0 1 0	1	0	
0 1 1	1	1	m_3
1 0 0	1	0	
1 0 1	1	1	m_5
1 1 0	1	0	
1 1 1	1	1	m_7

主析取范式

- 我们最初的目标终于通过主析取范式达到了, 可以形式化地判断两个命题公式是否等值.
- $A \Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式.

例 判断下列公式是否等值

(1) $(p \to q) \to r$

(2) $(p \land q) \to r$

(3) $p \to (q \to r)$

解 $(p \to q) \to r \Leftrightarrow \sum(1,3,4,5,7)$

$(p \land q) \to r \Leftrightarrow \sum(0,1,2,3,4,5,7)$

$p \to (q \to r) \Leftrightarrow \sum(0,1,2,3,4,5,7)$

由此可知, (2)与(3)等值, 而(1)与它们不等值.

主析取范式

主析取范式可以用于判断公式的类型. 设A是含n个命题变元的公式:

- A为重言式当且仅当A的主析取范式中应含全部2^n个极小项.
- A为矛盾式当且仅当A的主析取范式中不含任何极小项, 此时记A的主析取范式为0.
- A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项.

主析取范式

例　求下列各命题公式的主析取范式, 并判断其类型.

(1) $\neg(q \to p) \land p \land r$

解 $\Leftrightarrow \neg(\neg q \lor p) \land p \land r$

$\Leftrightarrow q \land \neg p \land p \land r$

$\Leftrightarrow 0$

所以它为矛盾式.

(2) $\neg(\neg p \to q) \leftrightarrow \neg p \land \neg q$

解 $\Leftrightarrow \neg\ (p \lor q)\ \leftrightarrow \neg p \land \neg q$

$\Leftrightarrow \neg p \land \neg q \leftrightarrow \neg p \land \neg q$

$\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \to (\neg p \land \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg q)$

$\Leftrightarrow p \lor q \lor (\neg p \land \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor (p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$

$\Leftrightarrow m_2 \lor m_3 \lor m_1 \lor m_3 \lor m_0 \Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \Leftrightarrow \sum(0,1,2,3)$

此公式的主析取范式包含全部$2^2 = 4$个极小项, 所以是重言式.

主析取范式

例 某科研所有3名青年高级工程师A, B, C. 所里要选派它他们中的1到2人出国进修, 由于所里工作的需要选派时必须满足以下条件:

(1) 若A去, 则C也可以去. (2) 若B去, 则C不能去. (3) 若C不去, 则A或B可以去.

问所里应如何选派他们?

解 p: 派A去, q: 派B去, r: 派C去.

根据所要满足的条件, 得命题公式, 我们想求其的成真赋值. 因此, 先求其主析取范式:

$$(p \to r) \land (q \to \neg r) \land (\neg r \to (p \lor q))$$

$$\Leftrightarrow \ (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg r) \land (r \lor p \lor q)$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow m_{001} \lor m_{010} \lor m_{101} \Leftrightarrow m_1 \lor m_2 \lor m_5 \Leftrightarrow \sum(1,2,5)$$

因而有3种选派方案: (1) 001: C去, 而A, B都不去; (2) 010: B去, A, C都不去; (3) 101: A, C都去, 而B不去.

课堂练习

求下列公式的主析取范式.

(1) $\big((p \vee q) \wedge \neg r\big) \rightarrow p$

(2) $q \vee (\neg p \rightarrow r)$

课堂练习

求下列公式的主析取范式.

(1) $\big((p \vee q) \wedge \neg r\big) \to p$

解 从上例可知其析取范式为:

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$\vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$\vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_{110} \vee m_{100} \vee m_{110} \vee m_{010} \vee m_{111} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{100}$$

$$\Leftrightarrow m_6 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_2 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_4$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(2,4,5,6,7)$$

课堂练习

求下列公式的主析取范式.

(2) $q \vee (\neg p \to r)$

解 从上例可知其析取范式为:

唯一的成假赋值就是110,
其他所有都是成真赋值

$\Leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
$\vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_{101} \vee m_{100} \vee m_{001} \vee m_{000} \vee m_{011} \vee m_{001}$
$\vee m_{010} \vee m_{000} \vee m_{111} \vee m_{011} \vee m_{101} \vee m_{001}$

$\Leftrightarrow m_5 \vee m_4 \vee m_1 \vee m_0 \vee m_3 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_0 \vee m_7 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_1$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(0,1,2,3,4,5,7)$

主合取范式

有析取式与合取式,所以有析取范式,就有合取范式,所以有主析取范式,就有主合取范式.

定义 1.15

在含有n个文字的简单析取式中,若每个命题变元和其否定式不同时存在,而二者必有且仅有一个出现,且第i个文字 (按字典序或下标序) 出现在从左算起的第i位上,这样的简单合取式称为极大项.

- 与极小项的区别为: 极小项是简单合取式,而极大项是简单析取式.
- 将命题变元的原形对应0,否定形对应1,则每个极大项对应一个二进制数,同时也对应一个十进制数. (与极小项的对应相反)
- 这2^n个极大项分别记作$M_0, M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_{2^n-1} (0 \le i \le 2^n - 1)$. M_i的角标i的二进制表示为M_i的成假赋值. (极小项是成真赋值)

极小项

- p,q,r三个命题变元生成8个极小项和8个极大项:

极小项	极大项	二进制数	十进制数	极小项对应符号	极大项对应符号
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$p \vee q \vee r$	000	0	m_0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	$p \vee q \vee \neg r$	001	1	m_1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	$p \vee \neg q \vee r$	010	2	m_2	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	$p \vee \neg q \vee \neg r$	011	3	m_3	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$\neg p \vee q \vee r$	100	4	m_4	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg p \vee q \vee \neg r$	101	5	m_5	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg p \vee \neg q \vee r$	110	6	m_6	M_6
$p \wedge q \wedge r$	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	111	7	m_7	M_7

主合取范式

定义1.16

设命题公式A中含有n个命题变元, 若A的合取范式中的简单析取式全是极大项, 则称该析取范式为A的主合取范式.

- 与主析取范式一样, 任何命题公式的主合取范式都是存在的, 并且是惟一的.
- 计算主合取范式的步骤也与主析取范式类似:

(1) 转化: 由定理1.2可知, 存在与A等值的合取范式A'.

(2) 展开: 若A'的某个简单析取式A_i中既不含命题变元p_j, 又不含其否定式$\neg p_j$, 则将A_i展开成如何形式:

$$A_i \Leftrightarrow A_i \vee 0 \Leftrightarrow A_i \vee (p_j \wedge \neg p_j) \Leftrightarrow (A_i \vee p_j) \wedge (A_i \vee \neg p_j)$$

两边用析取式分别插入p_j与$\neg p_j$

(3) 消去: 将重复出现的命题变元, 矛盾式及重复出现的最小项都"消去".

(4) 排序: 将极大项按下标由小到大的顺序排列得主析取范式A'', 于是$A \Leftrightarrow A''$.

主合取范式

例 求$\neg(p \wedge q) \rightarrow r$的主合取范式.

解 先转化为合取范式:

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

再将每个简单析取式化成极大项:

$$p \vee r \Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

$$q \vee r \Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

代入合取范式得到主合取范式:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_0 \wedge M_4 \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod(0,2,4)$$ (简单记法)

主析取范式与主合取范式

- 当你求出了命题公式A的主析取范式, 也就求出了命题公式A的主合取范式, 反之亦然.
- 设公式A含有n个命题变元, A的主析取范式中含s个极小项, 则A有s个成真赋值, 有$2^n - s$个成假赋值, 它们对应A的$2^n - s$个极大项.
- 若A的主析取范式中有最小项m_i, 则A的主合取范式中一定不含有最大项M_i, 反之亦然.

例 已知A中含3个命题变元p, q, r, 且它的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(0,3,6,7)$$

则A的成真赋值为000, 011, 110, 111, 易知成假赋值为001, 010, 100, 101, 对应的极大项为M_1, M_2, M_4, M_5. 于是, A的主合取范式为

$$A \Leftrightarrow M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \Leftrightarrow \prod(1,2,4,5)$$

主析取范式与主合取范式

例 $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow m_3 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(3,5,7)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6 \Leftrightarrow \prod(0,1,2,3,6)$

p q r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	成真极小项	成假极大项
0 0 0	0	0		M_0
0 0 1	0	0		M_1
0 1 0	1	0		M_2
0 1 1	1	1	m_3	
1 0 0	1	0		M_4
1 0 1	1	1	m_5	
1 1 0	1	0		M_6
1 1 1	1	1	m_7	

课堂练习

求下列公式的主合取范式.

(1) $r \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)$

(2) $q \wedge \neg r \rightarrow (p \rightarrow r)$

课堂练习

求下列公式的主合取范式.

(1) $r \wedge ((p \vee q) \to r)$

解 求合取范式过程略.

$\Leftrightarrow r \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{100} \wedge M_{010} \wedge M_{110} \wedge M_{100} \wedge M_{110} \wedge M_{010} \wedge M_{110}$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_2 \wedge M_6 \wedge M_4 \wedge M_6 \wedge M_2 \wedge M_6$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6 \Leftrightarrow \prod(0,2,4,6)$

课堂练习

求下列公式的主合取范式.

(2) $q \wedge \neg r \rightarrow (p \rightarrow r)$

解 求合取范式过程略.

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

发现其形式为只有一个极小项的主析取范式，可通过其主析取范式来得到主合取范式.

$$\Leftrightarrow m_{001} \Leftrightarrow m_1 \Leftrightarrow \sum(1)$$

$$\Leftrightarrow \prod(0,2,3,4,5,67)$$

1.6 命题逻辑的推理理论

推理理论

- 数理逻辑的主要任务是借助数学方法来研究推理的逻辑.
- 推理是由前提推出结论的思维过程.
  - 前提就是推理所根据的已知的命题公式;
  - 结论则是从前提通过推理而得到的新命题公式;
  - 任何一个推理都由前提和结论组成.
- 在任何推理中, 如果所用到的前提都是真命题, 而且从前提出发推出结论的推理过程是严格遵守推理规则进行的, 则推出的结论也是真的, 称这样的结论为合法的结论. 数学中所证定理的结论都是合法的结论.
- 但在数理逻辑中, 主要着重于推理规则的研究, 不要求前提和结论一定是真命题, 称这样的结论为有效的结论.

推理理论

在数理逻辑中, 从前提$A_1, A_2, \dots, A_k$推出结论B的严格定义如下:

定义 1.20

称蕴涵式$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$为推理的形式结构, $A_1, A_2, \dots, A_k$为推理的前提, B为推理的结论. 若$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$为重言式, 则称从前提$A_1, A_2, \dots, A_k$推出结论$B$的推理正确, B是$A_1, A_2, \dots, A_k$的逻辑结论或有效的结论. 否则称推理不正确.

- 与用“$A \Leftrightarrow B$”表示“$A \leftrightarrow B$”重言式类似, 用“$A \Rightarrow B$”表示“$A \rightarrow B$”是重言式. “$\Rightarrow$ ”和“$\Leftrightarrow$ ”一样也不是连结词符, 只是用来表示重言蕴涵式的一种方法.
- 因而, 若从前提$A_1, A_2, \dots, A_k$推出结论B的推理正确, 也记作$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B$.

推理理论

- 由定义可知, 在数理逻辑中, 判断推理是否正确的方法就是判断重言蕴涵式的方法.
- 由以上各节可知, 判断推理是否正确的方法可用以下3种:

(1) 真值表示法;

(2) 等值演算法;

(3) 主范式法.

推理理论

例 判断该推理是否正确.

若$3+3\neq 6$, 则地球是静止不动的. $3+3\neq 6$. 所以地球是静止不动的.

解 设p: $3+3\neq 6$; q: 地球是静止不动的.

前提: $p\rightarrow q, p$.

结论: q.

推理的形式结构:

$$(p\rightarrow q)\land p\rightarrow q$$

使用等值演算法 (过程略) :

$$\Leftrightarrow \neg q\lor\neg p\lor q\Leftrightarrow 1$$

可见其为重言式, 因此推理正确. 此例中p, q的真值都是假, 但是推理是正确的. 数理逻辑只关心推理的规则.

推理理论

例　判断该推理是否正确.

若下午没课, 他则必打王者荣耀. 若他打王者荣耀, 则他就不陪女朋友了. 所以, 若下午没课, 他就不陪女朋友了.

解　设p: 下午没课; q: 他打王者; r: 他陪女朋友.

前提: $p \to q, q \to \neg r$.

结论: $p \to \neg r$.

推理的形式结构:

$$(p \to q) \wedge (q \to \neg r) \to (p \to \neg r)$$

使用主析取范式法 (过程略) :

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

可见其为重言式, 因此推理正确.

推理理论

例 判断该推理是否正确.

若下午没课,他则必打王者荣耀.若他打王者荣耀,则他就不陪女朋友了.所以,若他不陪女朋友,则下午没课.

解 设p: 下午没课; q: 他打王者; r: 他陪女朋友.

前提: $p \to q, q \to \neg r$.

结论: $\neg r \to p$.

推理的形式结构:

$$(p \to q) \land (q \to \neg r) \to (\neg r \to p)$$

使用主析取范式法(过程略):

$$\Leftrightarrow m_1 \lor m_3 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$$

可见其只是可满足式,不是重言式,因此推理不正确.

课堂练习

构造该推理的形式结构:

如果只有钢铁侠在地球,美国队长不在,那么就打不赢灭霸.结局是打赢灭霸或者灭霸杀死宇宙一半的生命.钢铁侠在地球.结局灭霸没有杀死宇宙一半的生命.因此美国队长在地球.

课堂练习

构造该推理的形式结构:

如果只有钢铁侠在地球,美国队长不在,那么就打不赢灭霸.结局是打赢灭霸或者灭霸杀死宇宙一半的生命.钢铁侠在地球.结局灭霸没有杀死宇宙一半的生命.因此美国队长在地球.

解 p: 钢铁侠在地球, q: 美国队长在地球, r: 打赢灭霸, s: 灭霸杀死宇宙一半的生命.

前提: $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$, $r \vee s$, p, $\neg s$.

结论: q.

推理的形式结构:

$$\big((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge (r \vee s\big) \wedge p \wedge \neg s \rightarrow q$$

构造证明

- 当前提和结论都是比较复杂的命题公式或者所包含的命题变元很多时, 直接按定义进行推导的真值表法, 等值演算法, 主范式法将是很困难的, 需要寻求更有效的推理方法.

> 定义
>
> 一个描述推理过程的命题公式序列, 其中每个命题公式或者是已知的前提, 或者是由某些前提应用推理规则得到的结论, 序列中最后一个命题就是所要求的结论, 这样的命题序列称为形式证明.

- 有些推理规则是建立在某些推理定律基础上的, 所谓推理定律就是重言蕴涵式.

推理定律

重要的推理定律有以下8条 (全文背诵) :

(1) $A \Rightarrow (A \vee B), B \Rightarrow (A \vee B)$ 附加

(2) $A \wedge B \Rightarrow A,\ A \wedge B \Rightarrow B$ 化简

(3) $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理

(4) $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

(5) $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

(6) $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$ 假言三段论

(7) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$ 等价三段论

(8) $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

除以上8条之外, 16条等值式的每个均产生两个推理定律 (“左⇔右”可得“左⇒右”和“右⇒左”)

推理规则

证明中常用的11条推理规则:

(1) 前提引入规则: 在证明的任何步骤上都可以引用前提.

(2) 结论引用规则: 在证明的任何步骤上所得到的结论都可以在后续的证明中引用.

(3) 置换规则: 在证明的任何步骤上, 命题公式的子公式都可以用与之等价的其它命题公式置换.

由8条推理规律和推理规则(2), 可导出以下推理规则:

(4) 假言推理规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \rightarrow B$和A, 由假言推理定律可知, B是$A \rightarrow B$和A的逻辑结论, 由推理规则(2), 可引入B.

(5) 附加规则: 若证明的公式序列中已出现过A, 由附加律可知, $A \vee B$是A的逻辑结论, 由推理规则2, 可引入$A \vee B$.

推理规则

(6) 化简规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \wedge B$, 由化简律可知, A, B都是$A \wedge B$的逻辑结论, 可引入A或B.

(7) 拒取式规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \rightarrow B$ 和$\neg B$, 则可引入$\neg A$.

(8) 假言三段论规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \rightarrow B$和$B \rightarrow C$, 则可引入$A \rightarrow C$.

(9) 析取三段论规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \vee B$和$\neg B$, 则可引入A.

(10) 构造性二难规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \rightarrow B$, $C \rightarrow D$, $A \vee C$, 则可引入$B \vee D$.

(11)合取引入规则: 若证明的公式序列中已出现过A和B, 则可引入$A \wedge B$.

- 推理的形式结构中$A_1, A_2, \ldots, A_k$为前提, 结论为B. 若能用以上推理规则, 构造出证明序列, 序列的最后公式为B , 则说明此推理正确, B是$A_1, A_2, \ldots, A_k$的逻辑结论.

推理规则

例 构造下面推理的证明.

前提: $p \to r, q \to s, p \vee q$. 结论: $r \vee s$.

证明

(1) $p \to r$	前提引入
(2) $\neg r \to \neg p$	(1), 假言易位
(3) $p \vee q$	前提引入
(4) $\neg p \to q$	(3), 蕴含等值式
(5) $\neg r \to q$	(2), (4), 假言三段论
(6) $q \to s$	前提引入
(7) $\neg r \to s$	(5), (6), 假言三段论
(8) $r \vee s$	(7), 蕴含等值式

推理规则

例 若水系克火系或者电系克水系,则水箭龟可以击败喷火龙.若水箭龟可以击败喷火龙,则皮卡丘可以击败水箭龟.皮卡丘不能击败水箭龟.所以电系不克水系.

解 首先找出简单命题并符号化:

p: 水系克火系; q: 电系克水系;

r: 水箭龟可以击败喷火龙, s: 皮卡丘可以击败水箭龟.

前提: $p \vee q \to r, r \to s, \neg s$; 结论: $\neg q$.

(1) $\neg s$	前提引入	(6) $\neg p \wedge \neg q$	(5)德·摩根律
(2) $r \to s$	前提引入	(7) $\neg q$	(6)化简
(3) $\neg r$	(1), (2) 拒取式		
(4) $p \vee q \to r$	前提引入		
(5) $\neg (p \vee q)$	(3), (4)拒取式		

结论是有效结论.

推理规则

例 若我这赛季是王者，则我是真的很牛. 若我没有女朋友，则我是真的很菜. 我上赛季是白银，我没有女朋友. 试给出结论.

解 首先找出简单命题并符号化:

p: 我这赛季是王者; q: 我很牛;

r: 我有女朋友, s: 我上赛季是白银.

前提: $p \to q, \neg r \to \neg q, s \wedge \neg r$.

(1) $s \wedge \neg r$	前提引入	(6) $\neg q \to \neg p$	(3)假言易位
(2) $\neg r$	(1) 化简	(7) $\neg p$	(4), (6)假言推理.
(3) $\neg r \to \neg q$	前提引入		
(4) $\neg q$	(2), (3)假言推理		
(5) $p \to q$	前提引入		

结论: $\neg p$, 我这赛季不是王者.

课堂练习

构造该推理的证明

如果只有钢铁侠在地球，美国队长不在，那么就打不赢灭霸. 结局是打赢灭霸或者灭霸杀死宇宙一半的生命. 钢铁侠在地球. 结局灭霸没有杀死宇宙一半的生命. 因此美国队长在地球.

课堂练习

构造该推理的证明

如果只有钢铁侠在地球, 美国队长不在, 那么就打不赢灭霸. 结局是打赢灭霸或者灭霸杀死宇宙一半的生命. 钢铁侠在地球. 结局灭霸没有杀死宇宙一半的生命. 因此美国队长在地球.

解 前提: $(p \wedge \neg q) \to \neg r, r \vee s, p, \neg s$.

结论: q.

证明:

(1) $r \vee s$	前提引入	(6) $\neg p \vee q$	(5)德・摩根律
(2) $\neg s$	前提引入	(7) p	前提引入
(3) r	(1), (2) 析取三段论	(8) q	(6), (7)析取三段论
(4) $(p \wedge \neg q) \to \neg r$	前提引入		
(5) $\neg(p \wedge \neg q)$	(3), (4)拒取式		

结论是有效结论.

附加前提规则

附加前提规则: 如果一个推理的结论是蕴涵式, 可将该蕴涵式的前件作为一个新的前提, 称为附加前提, 后件作为新的结论.

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to (A \to B)$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge A) \to B$$

证明

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to (A \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee (\neg A \vee B) \qquad \text{(蕴涵等值式)}$$

$$\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee \neg A) \vee B \qquad \text{(结合律)}$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge A) \vee B \qquad \text{(德·摩根律)}$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge A) \to B \qquad \text{(蕴涵等值式)}$$

附加前提规则

例 如果小A打王者, 则当小B打王者时, 小C也打. 小D不打王者或小A打王者. 小B打王者. 所以当小D打王者时, 小C也打.

解 首先找出简单命题并符号化:

p: 小A打王者; q: 小B打王者;

r: 小C打王者, s: 小D打王者.

前提: $p \to (q \to r), \neg s \vee p, q$; 结论: $s \to r$.

(1)	$\neg s \vee p$	前提引入	(5)	$q \to r$	(3), (4)假言推理
(2)	s	附加前提引入	(6)	q	前提引入
(3)	p	(1), (2) 析取三段论	(7)	r	(5), (6)假言推理
(4)	$p \to (q \to r)$	前提引入			

于是$p \to (q \to r) \wedge (\neg s \vee p) \wedge q \wedge s \Rightarrow r$

当且仅当$p \to (q \to r) \wedge (\neg s \vee p) \wedge q \Rightarrow (s \to r)$.

归谬法

定义

设$A_1, A_2, \dots, A_k$是k个命题公式, 若它们的合取式$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$是可满足式, 则称$A_1, A_2, \dots, A_k$是相容的. 否则, 若$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$是矛盾式, 则称$A_1, A_2, \dots, A_k$是不相容的.

例 试判断下列3组公式序列, 哪几个是相容的?

(1) $\neg(p \to q), q, r \to s$;

(2) $p \to q, p, r \to s$;

(3) $(p \to q) \wedge p \to q, p \wedge q \to p, p \leftrightarrow \neg\neg p$.

解 容易判断$\neg(p \to q) \wedge q \wedge (r \to s)$为矛盾式，而$(p \to q) \wedge p \wedge (r \to s)$为可满足式，$\big((p \to q) \wedge p \to q\big) \wedge (p \wedge q \to p) \wedge (p \leftrightarrow \neg\neg p)$为重言式，所以(1)中的公式不相容, 而(2), (3)中的公式分别是相容的.

归谬法

归谬法: 给定一个推理的形式结构$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$, 把结论$B$的否定式$\neg B$添加到前提集合$A_1, A_2, \ldots, A_k$中, 构成一组新的前提集合$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$. 若这组新的前提不相容, 则推理正确.

证明

$$
\begin{aligned}
& (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B \qquad \text{(蕴含等值式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B) \qquad \text{(德·摩根律)}
\end{aligned}
$$

若$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$不相容, 则$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B$为矛盾式, 则$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$为重言式, 即$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$ 也为重言式, 从而推理正确.

归谬法

例1.27 用归谬法构造下面推理的证明.

解 前提: $(p \wedge \neg(r \wedge s)) \rightarrow \neg q, p, \neg s$. 结论: $\neg q$.

(1)$(p \wedge \neg(r \wedge s)) \rightarrow \neg q$ 前提引入

(2)q	否定结论引入	(6)$r \wedge s$	(4), (5)析取三段论
(3)$\neg(p \wedge \neg(r \wedge s))$	(1), (2)拒取式	(7)s	(6)化简
(4)$\neg p \vee (r \wedge s)$	德・摩根律	(8)$\neg s$	前提引入
(5)p	前提引入	(9)$s \wedge \neg s$	(7), (8)合取引入

(9) 为矛盾式, 于是证明了推理的正确性.

推理方法小结

要证明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$是重言式, 判断推理正确的方法有:

(1)真值表法

- 这是最基本的, 也是完全无脑的.
- 当一个公式有n个命题变元和k个联结词时，真值表的大小上限为$2^n \times (k+n)$.
- 当n和k较大时，把真值表输入计算机时，要占有相当大的存储空间，搜索与访问真值表的穷举法的运算步骤，会导致运算次数的"组合爆炸".

(2)等值演算法

- 用等值式，但每一步引用哪一条，得靠熟记和灵活应用公式，需要技巧和经验, 而且每步都要写出所有各项, 也不经济.

推理方法小结

(3) 主析 (合) 取范式法

- 只需要运用简单的蕴含等值式和分配率, 剩下求极小 (大) 项的步骤几乎是无脑的.
- 当命题变元太多时, 这种方法也还是很繁琐的, 尤其是给极小 (大) 项填补缺失命题变元的时候.

(4)构造证明法 (直接, 附加前提证明法, 归谬法)

- 这方法很简练, 但每步引用哪一种规则或逻辑关系式, 得靠熟记和灵活应用公式, 需要技巧和经验, 有时还要构造尚未介绍过的规则.

然而, 等值演算法和构造证明法的缺点在于, 当所给的公式并非重言式时, 不但白做无效劳动, 还不易发现问题所在.

推理方法小结

例 如果我趴着, 敌人就看不到我. 如果我站着, 敌人就能看到我. 因此, 如果我站着, 我就不是趴着.

解 设 p: 我趴着; q: 我站着; r: 敌人能看到我,

推理的形式结构为

$$((p \to \neg r) \land (q \to r)) \to (q \to \neg p)$$

(1) 真值表法 (略)

推理方法小结

(2)　等值演算法

$$((p \to \neg r) \land (q \to r)) \to (q \to \neg p)$$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \lor \neg r) \land (\neg q \lor r)) \lor (\neg q \lor \neg p)$　(蕴含等值式)

$\Leftrightarrow (p \land r) \lor (q \land \neg r) \lor \neg q \lor \neg p$　(德・摩根律)

$\Leftrightarrow (p \land r) \lor \neg p \lor (q \land \neg r) \lor \neg q$　(交换律)

$\Leftrightarrow (\neg p \lor r) \lor (\neg q \lor \neg r)$　(第二吸收律)

$\Leftrightarrow 1$　(排中律)

所以原公式为重言式, 即结论是有效结论.

推理方法小结

(3) 主析取范式

$$\left((p \to \neg r) \land (q \to r)\right) \to (q \to \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \cdots$$

$$\Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_6 \lor m_7$$

所以原公式为重言式, 即结论是有效结论.

推理方法小结

(4) 构造证明

前提: $p \to \neg r, q \to r$; 结论: $q \to \neg p$.

(1)	$p \to \neg r$	前提引入
(2)	$r \to \neg p$	(1)假言易位
(3)	$q \to r$	前提引入
(4)	$q \to \neg p$	(2), (3)假言三段论

结论是有效结论.

课堂练习

用附加前提证明法和不用附加前提证明法证明下面推理:

前提: $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s$;

结论: $\neg s \rightarrow r$.

课堂练习

用附加前提证明法和不用附加前提证明法证明下面推理:

前提: $p \lor q, p \to r, q \to s$;

结论: $\neg s \to r$.

解 使用附加前提证明法.

(1) $q \to s$	前提引入	(5)$\neg p \to q$	(4)蕴含等值式
(2) $\neg s$	附加前提引入	(6)p	(3), (5)拒取式
(3) $\neg q$	(1) , (2) 拒取式	(7) $p \to r$	前提引入
(4)$p \lor q$	前提引入	(8) r	(6), (7)假言推理

结论是有效结论.

课堂练习

用附加前提证明法和不用附加前提证明法证明下面推理:

前提: $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s$;

结论: $\neg s \rightarrow r$.

解 不使用附加前提证明法.

(1) $p \vee q$ 前提引入

(2) $p \rightarrow r$ 前提引入

(3) $q \rightarrow s$ 前提引入

(4) $r \vee s$ (1), (2), (3)构造性二难

(5) $\neg s \rightarrow r$ (4)蕴含等值式

结论是有效结论.

本章小结

- 能判定真假的陈述句称作命题．要善于将自然语言表达的问题符号化为命题, 使推理过程简捷, 正确.
- 命题联结词作用于命题时和数学运算符相当，所以又称逻辑运算符. 联结词反映了复合命题和部分命题之间的真假关系, 这种关系是命题联结词的逻辑内容.
- 命题公式是由命题常元，命题变元，命题联结词和圆括号等所组成的满足定义1.6的字符串. 命题公式不是命题.
- 了解三种特殊公式之间的关系: 重言式的否定是矛盾式; 矛盾式的否定是重言式; 重言式一定是可满足式.

本章小结

- 真值表法是最基本和机械的命题演算方法，当公式很复杂所含命题变元很多时，真值表法的工作量太大.
- 利用等值式进行等值演算和推理是切实可行的，但技巧性较高.
- 主范式把命题公式标准化，同一真值函数对应的所有命题公式具有相同主范式，从而易判断两个命题公式是否等价以及判断公式的类型.
- 等值式是掌握命题演算，推理过程，求主合取范式和主析取范式的基础.
- 引入置换规则，可将公式变形，扩大重言式和逻辑等价公式的作用.
- 正确灵活地使用推理规则.

作业

p34:

1 (12)，(16)，(18)

4

5 (1)，(3)，(6)，(8)

6

7 (2)

9 (2)

10 (3)

11 (1)，(3)

13 (2)

17 (3)

19 (1)

23

24 (3)

26

27

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论