

# 离散数学

## 第七章: 图的基本概念

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学系

[luyang@xmu.edu.cn](mailto:luyang@xmu.edu.cn)

# 图的基本概念

- 现实世界中许多关系是由图形来形象而直观地描绘出来, 人们常用点表示事物, 用点之间是否有连线表示事物之间是否有某种关系, 于是点以及点之间的若干条连线就构成了图模型.
- 当研究的对象能够被抽象为离散的元素集合和集合上的二元关系时, 用关系图进行表示和处理是很方便.
- 图论研究的图是不同于几何图形、机械图形的另一种数学结构, 不关心图中顶点的位置, 边的长短和曲直形状, 只关心有多少顶点, 哪些顶点之间有边.



# 图的基本概念

- 称两个元素构成的集合为 $\{a, b\}$ 无序对. 设 $A, B$ 为任意的两个集合, 称 $\{\{a, b\} \mid a \in A \wedge b \in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的无序积, 记作 $A \& B$ .
- 为方便起见, 将无序积中的无序对 $\{a, b\}$ 记为 $(a, b)$ , 并且允许 $a = b$ , 需要注意的是, 无论 $a, b$ 是否相等, 均有 $(a, b) = (b, a)$ .

例  $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ , 则

$$A \& B = B \& A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\};$$

$$A \& A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\};$$

$$B \& B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$



# 无向图和有向图

## 定义 7.1

无向图 $G$ 是一个二元组 $\langle V, E \rangle$ , 其中 $V \neq \emptyset$ 称为 $G$ 的**顶点集**,  $V$ 中元素称为 $G$ 的**顶点**或**结点**;  $E$ 是**无序积** $V \times V$ 的多重子集, 称 $E$ 为 $G$ 的**边集**, 其元素称**无向边**, 简称**边**.

## 定义 7.2

有向图 $G$ 是一个二元组 $\langle V, E \rangle$ , 其中顶点集 $V$ 同无向图中的顶点集;  $E$ 是**笛卡尔积** $V \times V$ 的多重子集, 称 $E$ 为 $G$ 的边集, 其元素称**有向边**, 简称**边**.

- 元素可重复出现的集合成为**多重集合**.  $E$ 中的元素可重复出现.
- 常将 $V$ 记成 $V(G)$ ,  $E$ 记成 $E(G)$ .
- 顶点通常用 $v_1, v_2, \dots, v_i$ 来表示. 像这样给顶点标定记号的图称为**标定图**, 不标定几号的图称为**非标定图**.
- 在标定图中, 无向图的边通常用 $(v_i, v_j)$ 来表示.



# 无向图和有向图

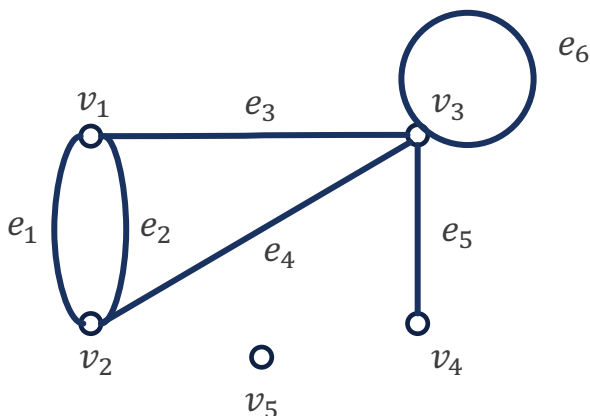
例

(1) 无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,

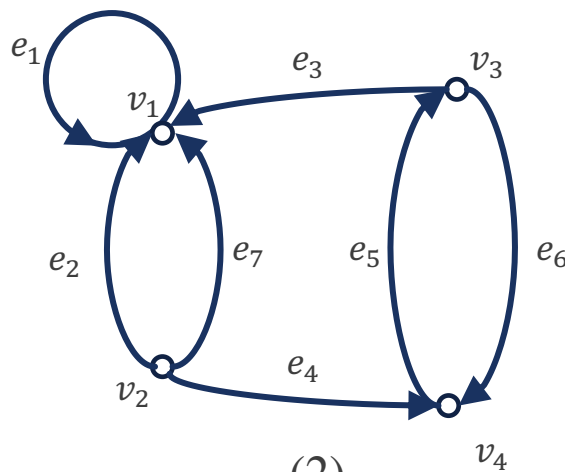
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_3, v_4)\}$ .

(2) 有向图  $D = \langle V, E \rangle$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,

$E = \{\langle v_1, v_1 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle\}$ .



(1)



(2)



# 图的基本概念

关于无向图和有向图说明如下:

- (1) 在无向图中, 无向边 $(a, b)$ 是顶点 $a$ 与 $b$ 之间的线段, 无方向. 在有向图中 $\langle a, b \rangle$ 是有方向的,  $a$ 称为**起始顶点**,  $b$ 称为**终止顶点**. 用从 $a$ 指向 $b$ 的箭头表示.
- (2) 无论是在无向图还是有向图中, 常用字母 $e_i$ 表示表示边. 例如无向图的 $e_k = (v_i, v_j)$ , 以及有向图中的 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ .
- (3) 无向图和有向图统称为图. 但也常**把无向图简称为图**. 通常用 $G$ 表示无向图,  $D$ 表示有向图. 但有时用 $G$ 泛指一个图 (无向的或有向的), 可是 **$D$ 只能表示有向图**.
- (4) 本课程只讨论有限图, 即顶点集和边集都是有穷集的图. 如果图 $G$ 中既有无向边, 又有有向边, 则称 $G$ 为**混合图**. 本课程不讨论混合图.
- (5) 若 $G$ 的顶点集 $V$ 的元素个数 $|V| = n$ , 则称 $G$ 是 **$n$ 阶图**.



# 图的基本概念

(6) 若边集  $E = \emptyset$ , 即没有边, 则称  $G$  为**零图**. 此时, 若  $|V| = n$ , 则称  $G$  为 **$n$ 阶零图**; 若  $|V| = 1$ , 则称  $G$  为**平凡图**.

(7) 设  $e_k = (v_i, v_j)$  为无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中的一条边, 称  $v_i, v_j$  为  $e_k$  的**端点**,  $e_k$  与  $v_i, v_j$  是彼此相**关联**的. 无边关联的顶点称为**孤立点**. 若一条边所关联的两个顶点重合, 则称此边为**环**.

- a. 若  $v_i \neq v_j$ , 则称  $e_k$  与  $v_i$  或  $v_j$  的**关联次数**为1;
- b. 若  $v_i = v_j$ , 则称  $e_k$  与  $v_i$  的**关联次数**为2;
- c. 若  $v_l$  不是  $e_k$  的端点, 则称  $e_k$  与  $v_l$  的**关联次数**为0;

(8) 设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 若存在一条边  $e_k = (v_i, v_j)$ , 则称  $v_i$  与  $v_j$  **彼此相邻**的, 简称**相邻**的. 若  $e_k$  与  $e_l$  至少有一个公共端点, 则称  $e_k$  与  $e_l$  **彼此相邻**的, 简称**相邻**的.

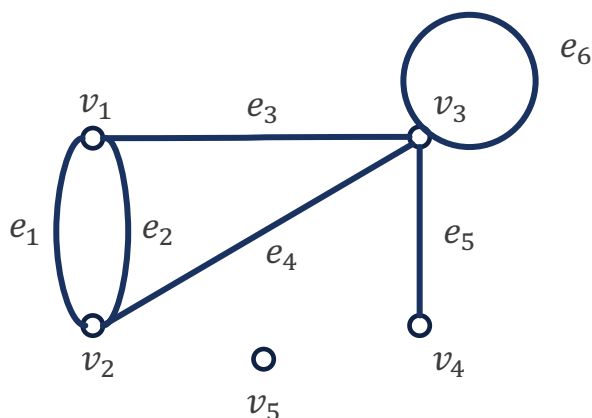
(9) 设  $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$  为有向图  $D = \langle V, E \rangle$  中的一条边, 除称  $v_i, v_j$  为  $e_k$  的端点外, 还称是  $v_i$  的  $e_k$  **始点**,  $v_j$  是  $e_k$  的**终点**,  $v_i$  **邻接到**  $v_j$ ,  $v_j$  **邻接于**  $v_i$ .



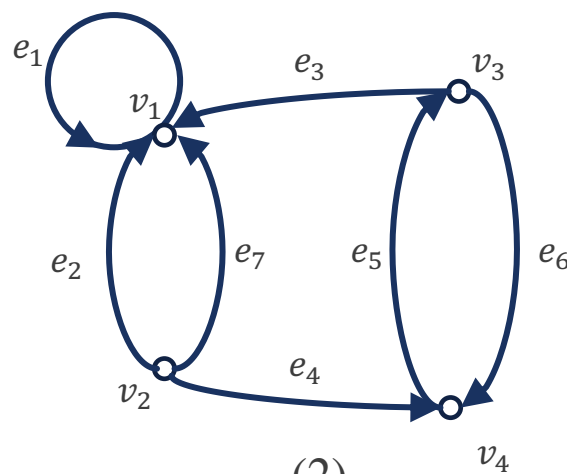
# 图的基本概念

## 例

- 图(1)中,  $v_5$  是孤立点,  $e_6$  是环,  $e_1, e_2, e_3$  与  $v_1$  的关联次数均为1, 而  $e_6$  与  $v_3$  的关联次数为2.
- 图(1)中,  $v_1$  与  $v_4, v_5$  不相邻,  $v_1$  与其他顶点都是相邻的.  $e_5$  与  $e_1, e_2$  不相邻, 与其他边均是相邻的.
- 图(2)中,  $e_4 = \langle v_2, v_4 \rangle$ ,  $v_2$  是  $e_4$  的始点,  $v_4$  是  $e_4$  的终点.  $v_2$  邻接到  $v_4$ ,  $v_4$  邻接于  $v_2$ .



(1)



(2)





# 图的基本概念

- 由于图的顶点位置和边的长度的**任意性**，一个图的图形表示**并不是唯一的**。
- 图论只关心图有多少个顶点，哪些顶点之间有边连接。
- 顶点的标号和位置，边的长短和曲直都**不改变图连接的本质**。从连接的意义，它们本质上都是一样的，可以把它们看成是同一个图的不同表现形式。

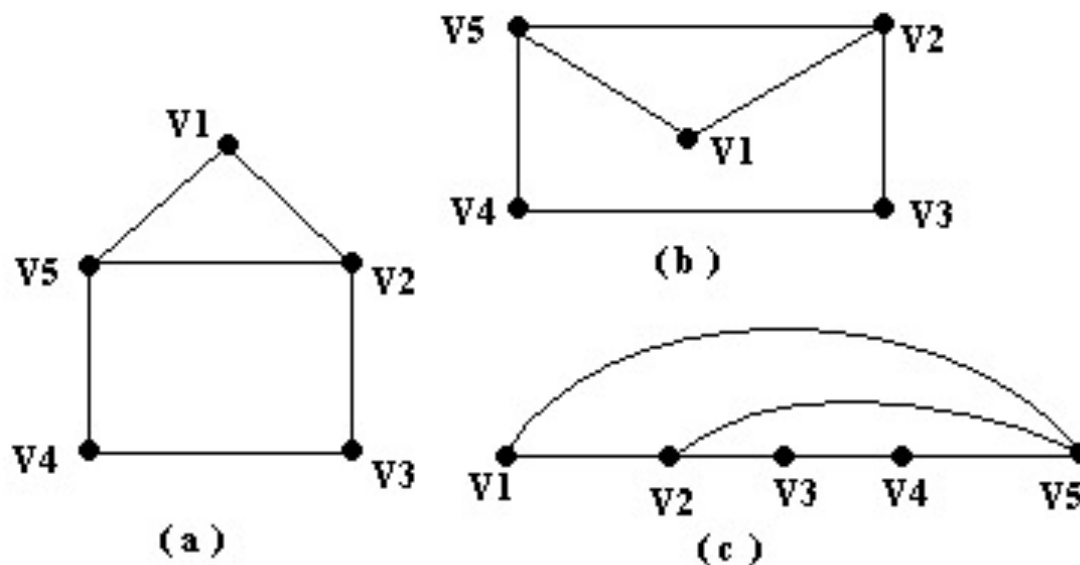


# 图的基本概念

例 无向图 $G$ 中,  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ;

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\},$$

$G$ 的图可分别画成下图的(a), (b)和(c)



# 多重图与简单图

## 定义 7.4

在无向图中, 关联一对顶点的无向边如果多余1条, 称这些边为**平行边**, 平行边的条数为**重数**.

在有向图中, 关联一对顶点的有向边如果多余1条**并且它们的方向相同**, 则称这些边为**有向平行边**, 简称平行边.

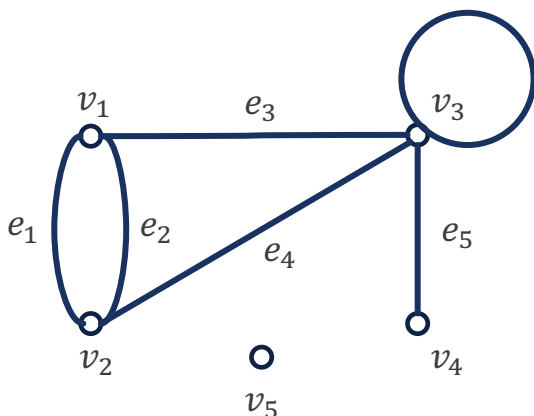
含平行边的图称为**多重图**. **既不含平行边也不含环**的图称为**简单图**.



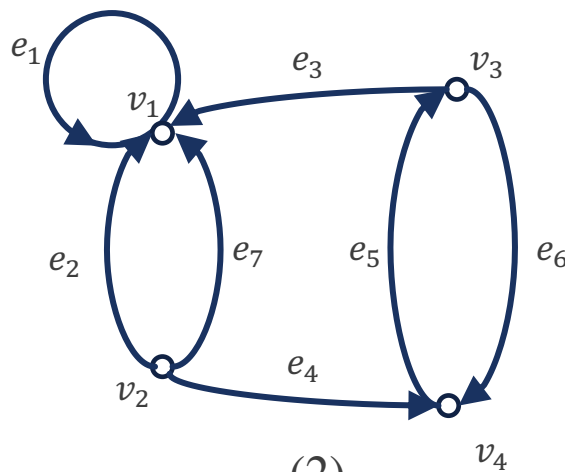
# 多重图与简单图

## 例

- 图(1)中,  $e_1$ 与 $e_2$ 是平行边. 该图既有平行边, 又有环, 是多重图, 不是简单图.
- 图(2)中,  $e_2$ 与 $e_7$ 是平行边, 但 $e_5$ 与 $e_6$ 不是平行边 (方向不同).



(1)



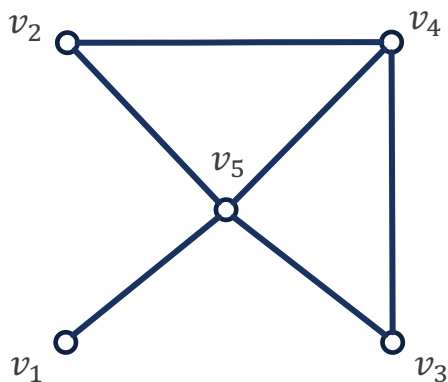
(2)



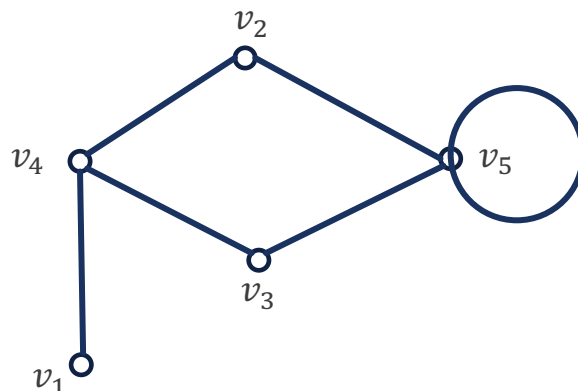
# 多重图与简单图

## 例

- 图(1)既无平行线, 又无环, 因而是简单图.
- 图(2)无平行线, 但是含环, 因而不是简单图.



(1)



(2)



# 度

## 定义 7.3

设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 对于任意的  $v \in V$ , 与  $v$  关联的边数之和称为  $v$  的 **度数**, 简称为 **度**, 记作  $d_G(v)$ , 或简记为  $d(v)$ .

- 每个环提供给它的端点2度.

## 定义 7.3.1

设有向图  $D = \langle V, E \rangle$ , 对于任意的  $v \in V$ , 以  $v$  为始点的边数之和称  $v$  的 **出度**, 记作  $d_D^+(v)$ ; 以  $v$  为终点的边数之和称  $v$  的 **入度**, 记作  $d_D^-(v)$ .

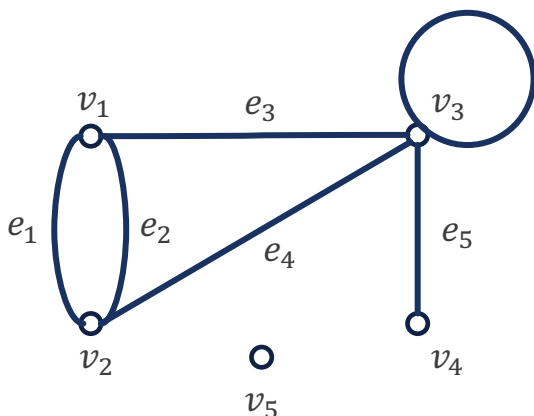
- 显然,  $d_D^+(v) + d_D^-(v) = d_D(v)$
- 称度数为1的顶点为 **悬挂顶点**, 与它关联的边为 **悬挂边**.



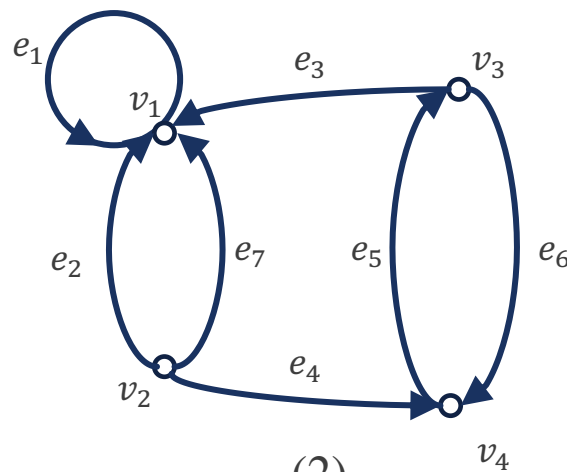
# 度

## 例

- 图(1)中,  $d(v_1) = d(v_2) = 3$ ,  $d(v_3) = 5$ ,  $d(v_4) = 1$ ,  $d(v_5) = 0$ .  $v_4$  是悬挂顶点,  $e_5$  是悬挂边.
- 图(2)中,  $d^+(v_1) = 1$ ,  $d^-(v_1) = 4$ ,  $d(v_1) = 5$ ,  $d^+(v_2) = 3$ ,  $d^-(v_2) = 0$ ,  $d(v_2) = 3$ , ....



(1)



(2)



# 度

- 设 $G$ 为无向图, 令

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

称 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别为 $G$ 的**最大度数**和**最小度数**.

- 一个顶点的度是一个**局部的**性质, 而 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 是**全局的**.
- 若 $G$ 为 $n$ 阶**无向简单图**, 则对于 $\forall v \in V$ , 有

$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$





# 度

- 设 $D$ 为有向图, 类似可定义 $\Delta(D)$ 和 $\delta(D)$ 为 $D$ 的最大度和最小度,

$$\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) \mid v \in V(D)\},$$

$$\delta^+(D) = \min\{d^+(v) \mid v \in V(D)\},$$

$$\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) \mid v \in V(D)\},$$

$$\delta^-(D) = \min\{d^-(v) \mid v \in V(D)\},$$

依次称为 $D$ 的**最大出度**、**最小出度**、**最大入度**、**最小入度**.

- 若 $D$ 为 $n$ 阶有向简单图, 则对于 $\forall v \in V$ , 有

$$0 \leq \delta(D) \leq d(v) \leq \Delta(D) \leq 2(n-1).$$



# 图的基本定理

## 定理 7.1 (握手定理)

设  $G = \langle V, E \rangle$  为任意一图 (有向的或无向的),  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边的条数  $|E| = m$ , 则

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

**证明** 在  $G$  中的每一条边 (包括环) 均有两个端点, 所以在计算  $G$  中各顶点度数之和时, 均提供 2 度, 因而  $m$  条边共提供  $2m$  度.

## 定理 7.2

设  $D = \langle V, E \rangle$  为一有向图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边的条数  $|E| = m$ , 则

$$\sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m.$$



# 图的基本定理

## 推论

任何图 (有向的或无向的) 中, 度数为奇数的顶点个数是偶数.

**证明** 设 $V_o$ 为度数为奇数的顶点集合,  $V_e$ 为度数为偶数的顶点集合. 根据握手定理, 则有

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_o} d(v) + \sum_{v \in V_e} d(v) = 2m.$$

对于 $\forall v \in V_e$ ,  $d(v)$ 都是偶数, 因此 $\sum_{v \in V_e} d(v)$ 是偶数. 由于 $2m$ 是偶数, 因此 $\sum_{v \in V_o} d(v)$ 是偶数. 由于 $\sum_{v \in V_o} d(v)$ 中的 $d(v)$ 都是奇数, 且偶数个奇数之和才能是偶数, 因此 $|V_o|$ 是偶数.



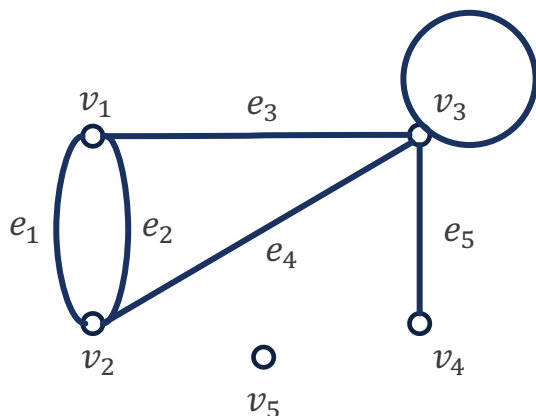
# 度数列

## 定义

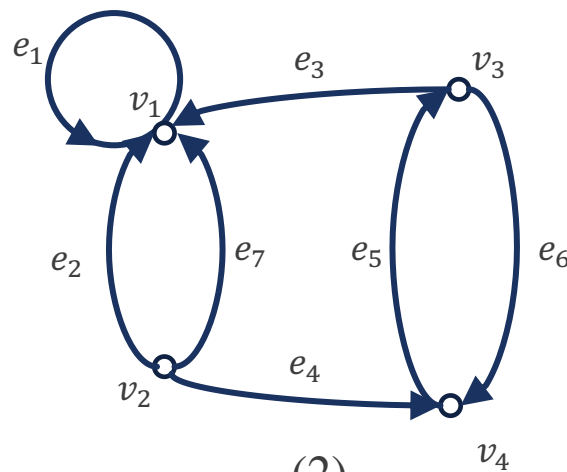
设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一无向图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 称 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 为 $G$ 的**度数列**. 对于有向图, 还可以分出**出度列**和**入度列**.

**例** 图(1)的度数列为3, 3, 5, 1, 0.

图(2)的度数列为5, 3, 3, 3; 其中出度列为1, 3, 2, 1; 入度列为4, 0, 1, 2.



(1)



(2)



# 度数列

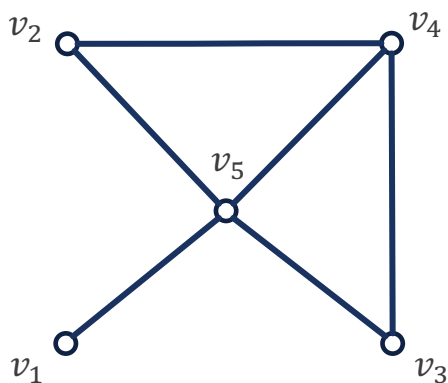
例 7.1 (1) 下面整数列能构成无向图的度数列吗？

(a) 2, 3, 4, 5, 6, 7.

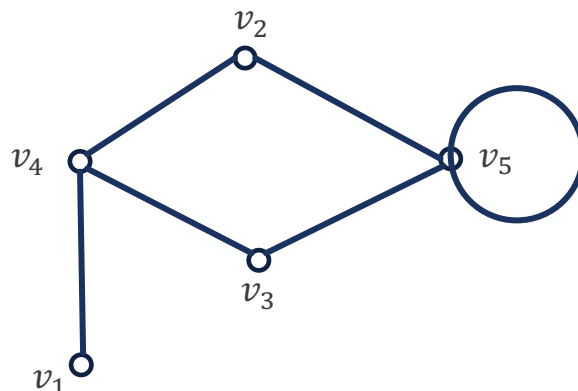
(b) 1, 2, 2, 3, 4.

解 (a)中有3个顶点的度数是奇数, 所以不能构成图的度数列, 否则与握手定理的推论矛盾.

(b) 可以构成多个无向图, 如下所示.



(1)



(2)



# 度数列

**例 7.1 (2)** 已知图 $G$ 中有11条边, 1个4度顶点, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问 $G$ 中至少有几个顶点?

**解** 由握手定理,  $G$ 中各顶点度数之和为22. 1个4度顶点, 4个3度顶点共占去16度. 还剩下6度, 其余顶点的度数若全是2, 还需要3个顶点, 所以 $G$ 中至少有 $1+4+3=8$ 个顶点.



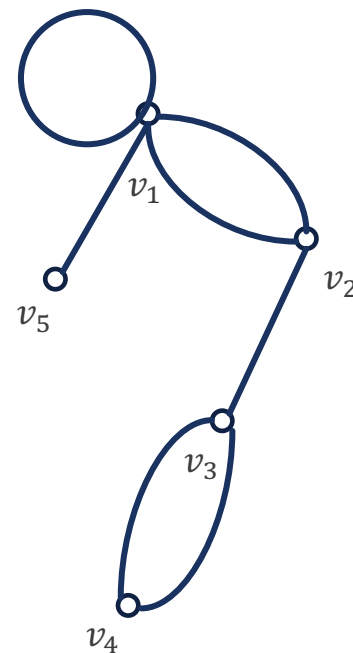
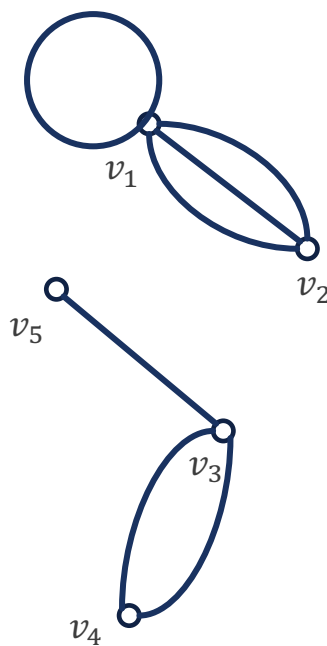
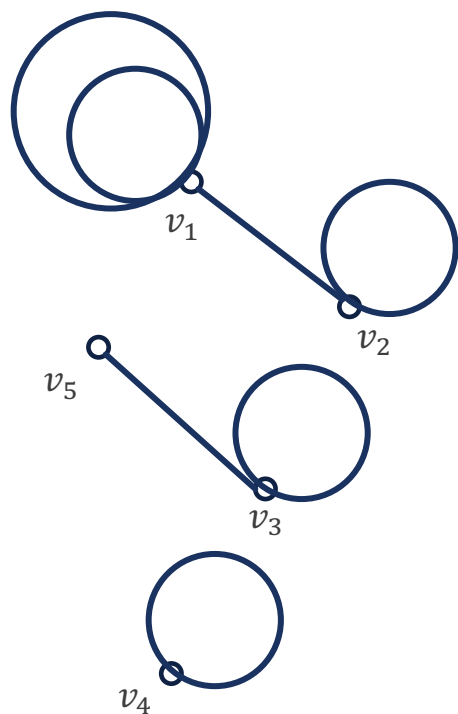
# 课堂练习

画出3个有度数列 5, 3, 3, 2, 1 的无向图.



# 课堂练习

画出3个有度数列 5, 3, 3, 2, 1 的无向图.





# 完全图

## 定义 7.5

设 $G$ 为 $n$ 阶无向简单图, 若 $G$ 中任意两个不同的顶点都是相邻的, 则称 $G$ 为 $n$ 阶无向完全图记作 $K_n$ .

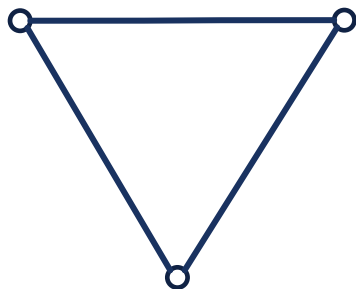
设 $D$ 为 $n$ 阶有向简单图, 若对于任意的 $u, v \in V(D)$  ( $u \neq v$ ), 均有 $\langle u, v \rangle \in E(D)$ ,  $\langle v, u \rangle \in E(D)$ , 则称 $D$ 是 $n$ 阶有向完全图.

- 在无向完全图 $K_n$ 中, 边数 $m = C_n^2 = n(n-1)/2$ .
- 在有向完全图中, 边数 $m = 2C_n^2 = n(n-1)$ .

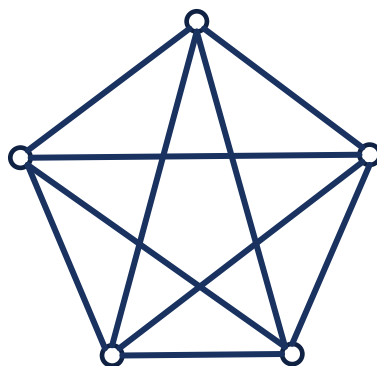


# 完全图

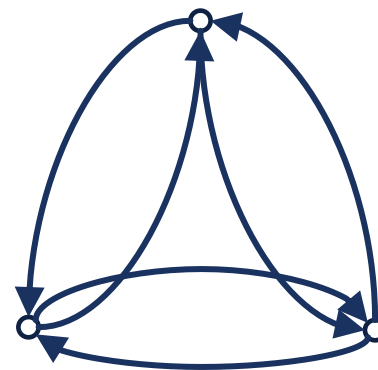
- 例 (1)和(2)分别是无向完全图 $K_3$ 和 $K_5$ , (3)是3阶有向完全图.



(1)



(2)



(3)

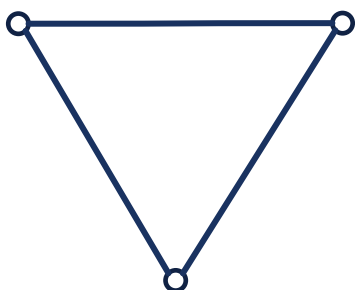


# 正则图

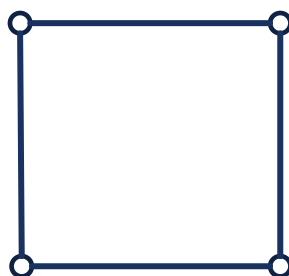
## 定义 7.6

设 $G = \langle V, E \rangle$ 无向简单图, 若 $\Delta(G) = \delta(G) = k$ , 即各顶点度数均等于 $k$ , 则称图 $G$ 为 $k$ -正则图.

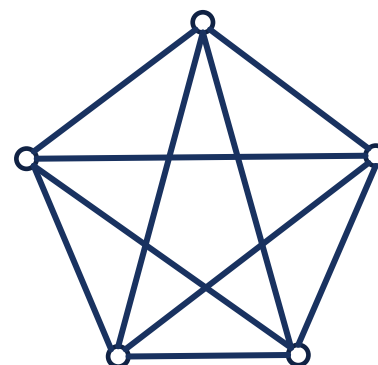
- 由握手定理可知,  $n$ 阶 $k$ -正则图的边数 $m = kn/2$ . 所以,  $k$ 和 $n$ 中至少必有一个为偶数.
- $K_n$ 都是 $(n - 1)$ -正则图.



2-正则图



2-正则图



4-正则图



# 子图

## 定义 7.7

设 $G = \langle V, E \rangle$ 和 $G' = \langle V', E' \rangle$ 是两个图 (两图同为无向的或有向的).

(1) 若 $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ , 则称 $G'$ 是 $G$ 的**子图**,  $G$ 是 $G'$ 的母图, 记作 $G' \subseteq G$ ;

(2) 若 $V' \subset V, E' \subset E$ , 称 $G'$ 是 $G$ 的**真子图**;

(3) 若 $G' \subseteq G$ 且 $V' = V$ , 称 $G'$ 是 $G$ 的**生成子图**;

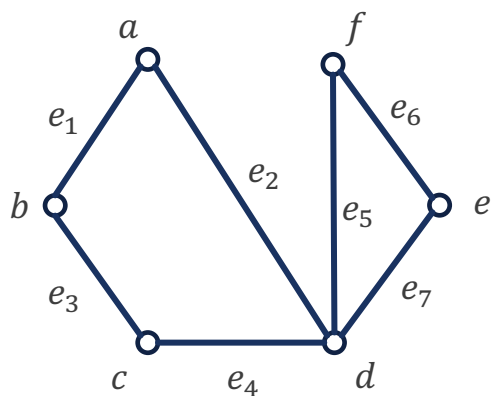
(4) 若 $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$ , 以 $V_1$ 为顶点集, 以**两个端点均在 $V_1$ 中的全体边**为边集的 $G$ 的子图, 称为 $V_1$ 导出的**导出子图**, 记作 $G[V_1]$ ;

若 $\emptyset \neq E_1 \subseteq E$ , 以 $E_1$ 为边集, 以 **$E_1$ 中的边关联的顶点全体**为顶点集的 $G$ 的子图, 称为 $E_1$ 导出的**导出子图**, 记作 $G[E_1]$ .

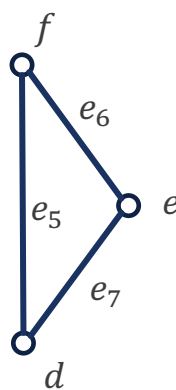


# 子图

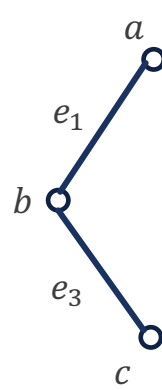
- 在下图中, (1), (2), (3)都是(1)的子图, 其中(2), (3)是真子图. (1), (3)是(1)的生成子图.
- (2)既可以看成 $V_1 = \{d, e, f\}$ 的导出子图 $G[V_1]$ , 也可以看成 $E_1 = \{e_5, e_6, e_7\}$ 的导出子图 $G[E_1]$ .
- (3)可以看成 $E_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ 导出的子图 $G[E_2]$ , 但是**不能**看成是 $V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ 的导出子图 $G[V_2]$ .



(1)



(2)



(3)

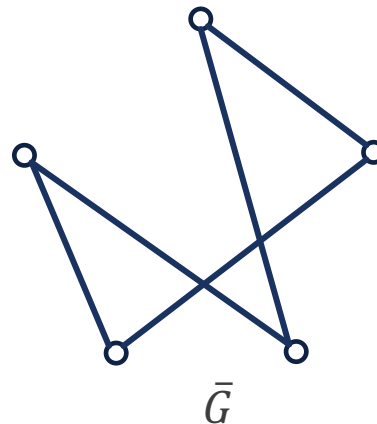
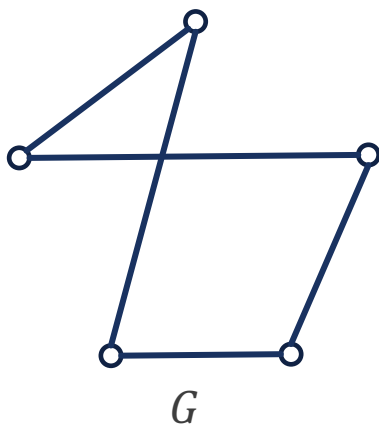


# 补图

## 定义 7.8

设  $G = \langle V, E \rangle$  为  $n$  阶无向简单图. 以  $V$  为顶点集, 以  $K_n$  中所有不在  $G$  中的边组成的集合为边集的图, 称为  $G$  相对于  $K_n$  的补图, 简称为  $G$  的补图, 记作  $\bar{G}$ .

- 补图都是针对完全图而言.
- $K_n$  的补图为  $n$  阶零图, 反之亦然.
- 在补图  $\bar{G}$  中两个顶点  $u$  与  $v$  相邻的充要条件是  $u$  与  $v$  在  $G$  中不相邻.



# 同构

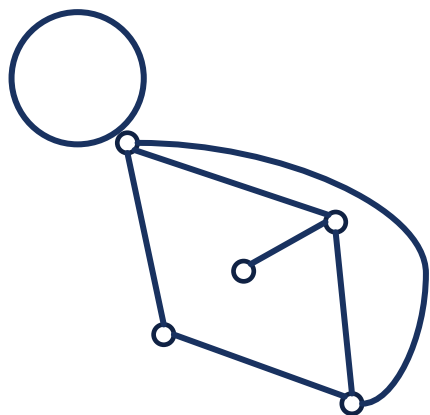
## 定义 7.9

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图. 若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$ , 对于任意的 $v_i, v_j \in V_1, e = (v_i, v_j) \in E_1$  当且仅当 $e' = (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ , 且 $e$ 与 $e'$ 重数相同, 则称 $G_1$ 和 $G_2$ 同构, 记为 $G_1 \cong G_2$ .

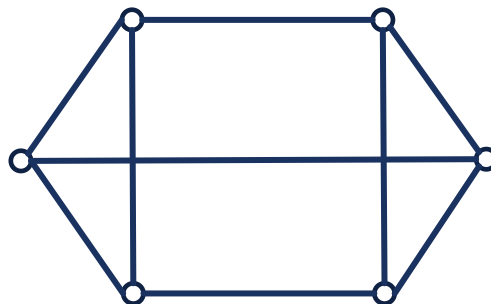
- 类似地可以定义两个有向图之间同构的概念, 只是应该注意方向.
- 图之间的同构关系是全体图集合上的等价关系.
- 同构的图本质上是同一图, 具有相同的结构和二元关系, 只是画法和标号不同而已.
- 到目前为止, 还没有找到判断两个图同构的简单有效的充分判别法.
- 若 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 同构, 则必有 $|V_1| = |V_2|$ ,  $|E_1| = |E_2|$ .



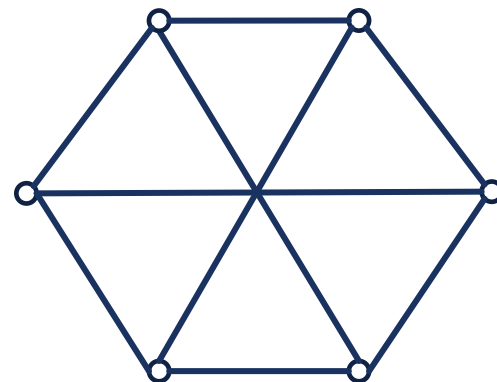
- (1)与(2)同构, (3)与(4)同构, (5)与(6)同构.



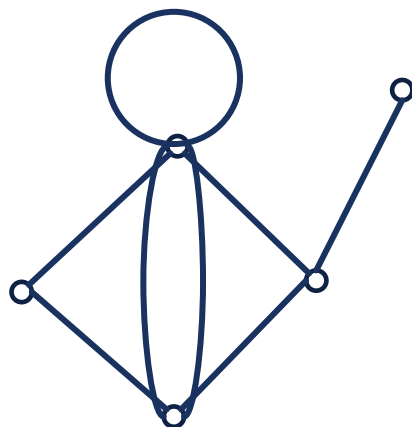
(1)



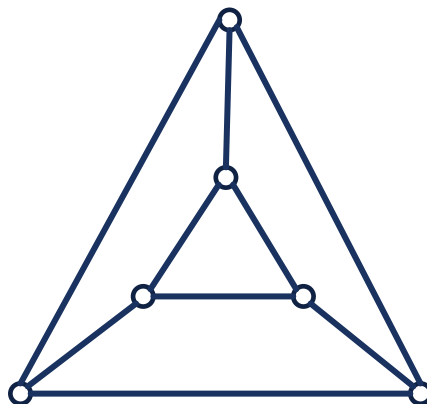
(3)



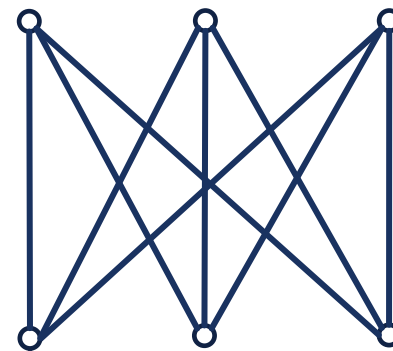
(5)



(2)



(4)



(6)



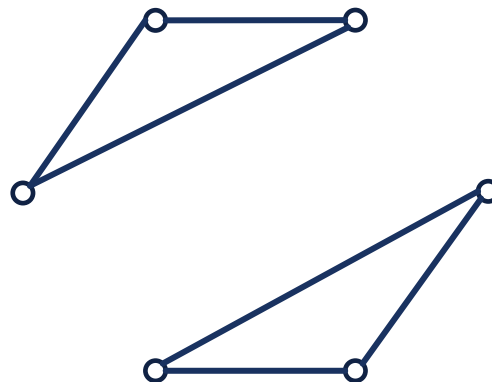
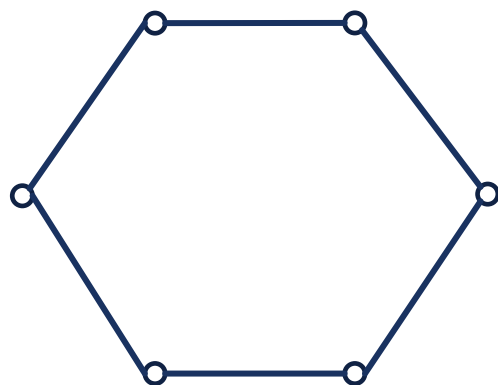
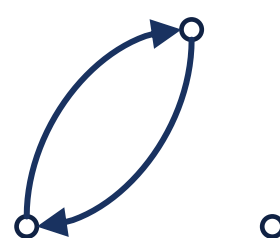
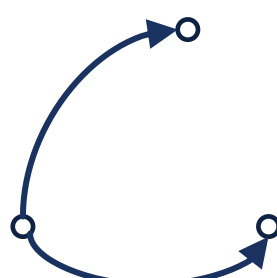
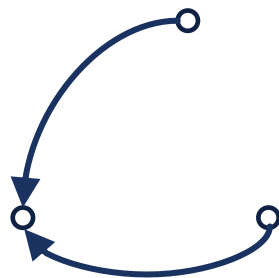
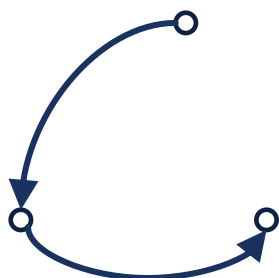
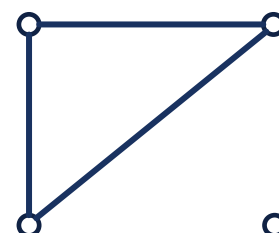
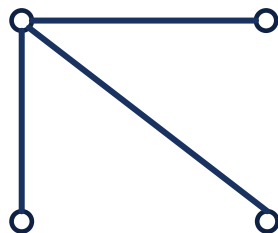
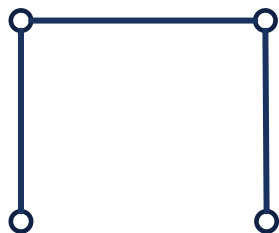
# 同构

- 对于给定的正整数 $n$ 和 $m$ , 构造出所有非同构的 $n$ 阶 $m$ 条边的无向简单图 (要求 $m \leq n(n-1)/2$ ), 或有向简单图 (要求 $m \leq n(n-1)$ ), 是一个比较困难的问题, 但对于较小的 $n, m$ , 还是容易构造出来的.

## 例 7.2

- (1) 画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图.
- (2) 画出3阶2条边的所有非同构的有向简单图.
- (3) 画出2个6阶非同构的2-正则图.





# 课堂练习

画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图.



# 课堂练习

画出5阶4条边的所有非同构的无向简单图.

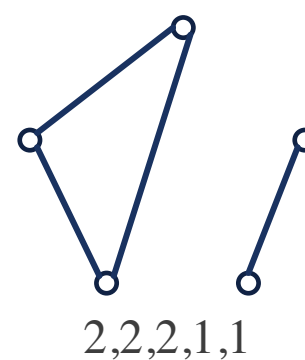
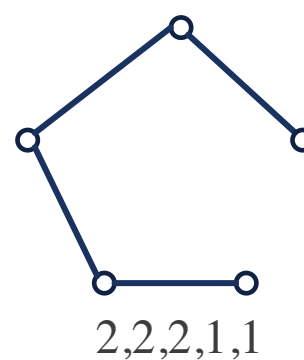
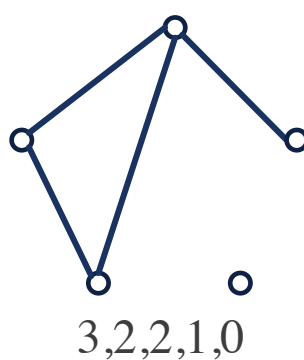
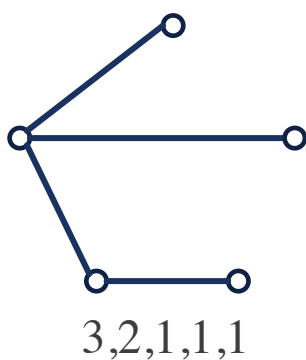
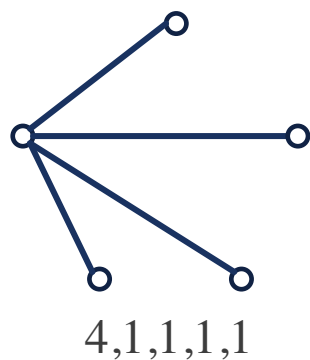
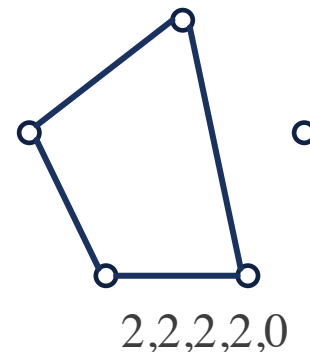
解

由握手定理可知, 所画的图各顶点的度数之和为8, 最大度 $\leq 4$ .

一共有五种度数列

$(4,1,1,1,1)$ ,  $(3,2,1,1,1)$ ,  $(3,2,2,1,0)$ ,  $(2,2,2,1,1)$ ,  $(2,2,2,2,0)$ .

其中度数列 $(2,2,2,1,1)$ 有两种非同构图.





## 7.2 图的连通性

# 通路和回路

- 图的最基本性质是它是否是连通的.

## 定义 7.10

给定图  $G = \langle V, E \rangle$ , 设  $G$  中 **顶点和边的交替序列** 为  $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$ . 其中  $v_{i-1}$  和  $v_i$  是  $e_i$  的端点 ( $G$  为有向图时, 要求  $v_{i-1}$  是  $e_i$  的始点,  $v_i$  是  $e_i$  的终点),  $i = 1, 2, \dots, l$ . 称  $\Gamma$  为  $v_0$  到  $v_l$  的 **通路**,  $v_0$  和  $v_l$  分别称为通路  $\Gamma$  的 **始点** 和 **终点**.  $\Gamma$  中所含边数  $l$  称为  $\Gamma$  的 **长度**. 若  $v_0 = v_l$ , 则称通路  $\Gamma$  为 **回路**.

若  $\Gamma$  中的所有边互不相同, 则称  $\Gamma$  为 **简单通路**; 此时, 又若  $v_0 = v_l$ , 则称  $\Gamma$  为 **简单回路**.

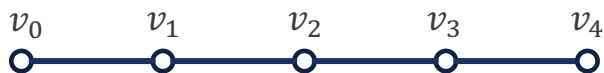
若  $\Gamma$  中除  $v_0$  与  $v_l$  的所有顶点互不相同 (从而所有边也互不相同), 则称  $\Gamma$  为 **初级通路** 或 **路径**. 此时, 又若  $v_0 = v_l$ , 则称  $\Gamma$  为 **初级回路** 或 **圈**.

若  $\Gamma$  中的有边重复, 则称  $\Gamma$  为 **复杂通路**; 有边重复出现的回路称为 **复杂回路**.

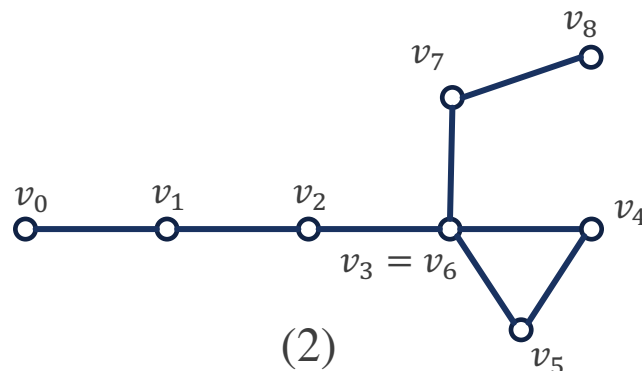


# 通路 & 回路

- (1)(3)为 $v_0$ 到 $v_4$ 的长度为4的初级通路,同时也是简单通路.
- (2)(4)为 $v_0$ 到 $v_8$ 的长度为8的简单通路,但是它不是初级的.



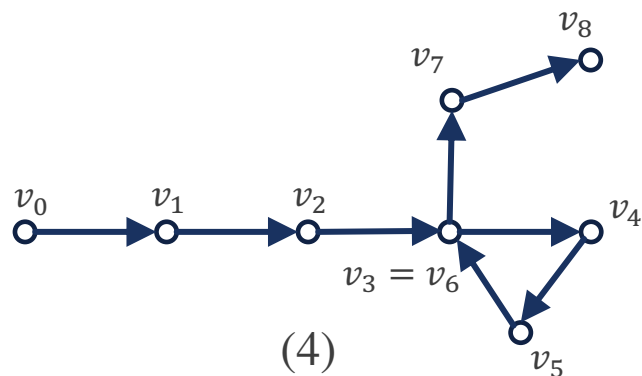
(1)



(2)



(3)

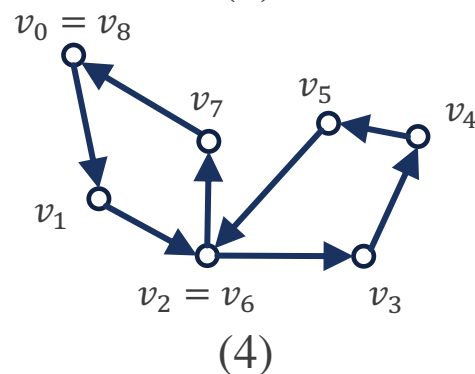
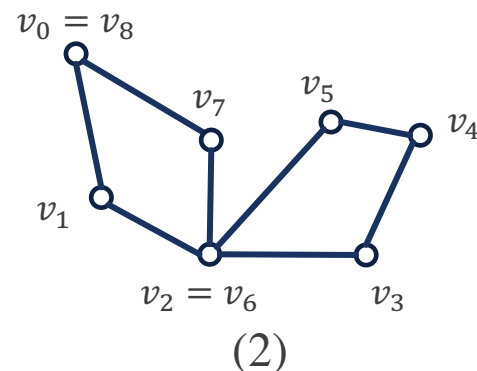
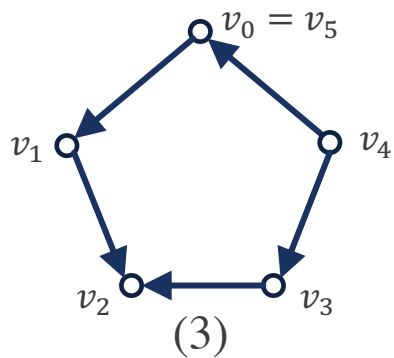
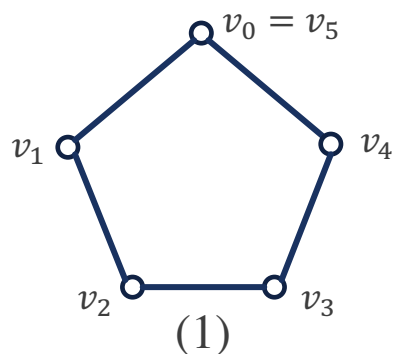


(4)



# 通路 & 回路

- (1)(3)为 $v_0$ 到 $v_5(=v_0)$ 的长度为5的初级回路,同时也是简单回路.
- (2)(4)为 $v_0$ 到 $v_8(=v_0)$ 的长度为8的简单回路,但是它不是初级的.





# 通路 & 回路

- 在无向图中, 长度为1和2的初级回路分别由环和两条平行边构成.
  - 一条边来回各走一次, 得到一条长度为2的复杂回路.
- 在无向简单图中, 若有初级回路, 则长度 $\geq 3$ .
- 在有向图中, 长度为1的初级回路由环构成.
- 在有向简单图中, 若有初级回路, 则长度 $\geq 2$ .
- 对于简单图来说, 也可以只用顶点的序列表示通路与回路, 将 $\Gamma$ 表示为 $v_0v_1 \dots v_l$ .



# 通路和回路

## 定理 7.3

在 $n$ 阶图中, 若从顶点 $u$ 到 $v$  ( $u \neq v$ ) 存在通路, 则从 $u$ 到 $v$ 存在长度小于等于 $n - 1$ 的初级通路.

**证明** 设 $\Gamma = v_0 e_1 v_1, e_2 \dots e_l v_l$  ( $v_0 = u, v_l = v$ ) 为 $u$ 到 $v$ 的通路. 我们可以通过构造性的方式生成一条从 $u$ 到 $v$ 的初级通路.

若不是初级通路, 则必存在 $t < s$  有 $v_t = v_s$ . 在 $\Gamma$ 中去掉 $v_t$ 到 $v_s$ 的这一段, 所得到的通路仍为 $u$ 到 $v$ 的通路. 若还有重复的点出现, 就做同样的处理, 直到无重复出现的顶点为止. 最后得到的通路就是 $u$ 到 $v$ 的初级通路.

由于通路中的顶点都不相同, 至多有 $n$ 个, 所以它的长度小于等于 $n - 1$ .



# 连通

## ■ 同理可证以下定理

### 定理 7.3

在 $n$ 阶图中, 如果存在 $v$ 到自身的回路, 则从 $v$ 到自身存在长度不超过 $n$ 的初级回路.

### 定义 7.11

在无向图 $G$ 中, 若顶点 $u, v$ 之间存在通路, 则称 $u, v$ 是**连通的**. 规定 $v$ 与自身是连通的.

若无向图 $G$ 是平凡图, 或 $G$ 中任意二顶点都是连通的, 则称 $G$ 是**连通图**, 否则称 $G$ 是**非连通图**.



# 连通

- 无向图  $G = \langle V, E \rangle$  顶点间的连通关系  $R$  是  $V$  上的一个等价关系,

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in G \text{ 且 } x \text{ 与 } y \text{ 连通} \},$$

它的所有等价类构成  $V$  的一个划分. 任意两个顶点  $v_i$  和  $v_j$  属于同一个等价类当且仅当它们有路相连通.

## 定义

设  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $R$  将  $V$  划分为等价类  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , 称它们的导出子图  $G[V_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 为  $G$  的**连通分支**, 连通分支数  $k$  记作  $p(G)$ .

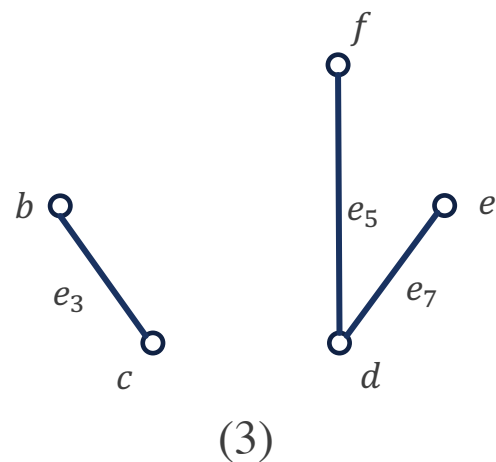
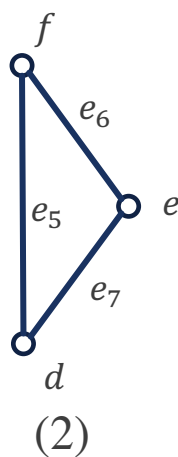
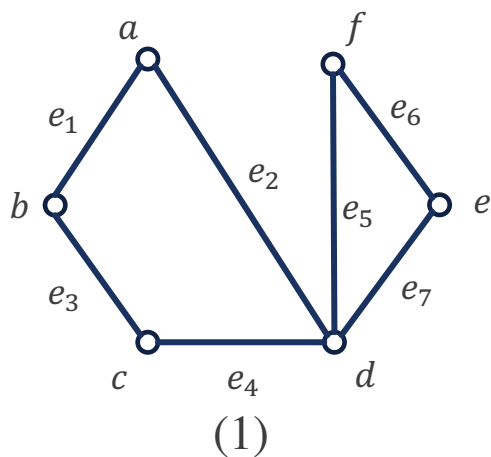
- $G$  是连通图  $\Leftrightarrow p(G) = 1$ .  $G$  是非连通图  $\Leftrightarrow p(G) \geq 2$ .



# 连通

例 (1), (2) 为连通图.

(3) 是具有两个连通分支的非连通图, 但是并不是(1)的连通分支.



# 距离

## 定义

设 $u, v$ 为无向图 $G$ 中任意两个顶点, 若 $u$ 与 $v$ 是连通的, 则称 $u$ 与 $v$ 之间长度最短的通路为 $u$ 与 $v$ 之间的短程线. 短程线的长度称为 $u$ 与 $v$ 之间的距离, 记作 $d(u, v)$ . 若 $u$ 与 $v$ 不连通时, 规定 $d(u, v) = \infty$ .

■ 无向图的距离定义满足欧式距离三条公理:

(1) 非负性:  $d(v_i, v_j) \geq 0$ , 并且当且仅当 $v_i = v_j$ 时, 等号成立.

(2) 三角不等式:  $\forall v_i, v_j, v_k \in V(G)$ , 有

$$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k).$$

(3) 对称性:  $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ .



# 距离

- 对无向连通图 $G$ 来说, 常由删除 $G$ 中的一些顶点或删除一些边, 而破坏其连通性. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为一无向图.
  - (1) 设 $e \in E$ , 用 $G - e$ 表示从 $G$ 中去掉边 $e$ , 称为删除 $e$ . 又设 $E' \subset E$ , 用 $G - E'$ 表示从 $G$ 中删除 $E'$ 中的所有边, 称为删除 $E'$ .
  - (2) 设 $v \in V$ , 用 $G - v$ 表示从 $G$ 中去掉 $v$ 及 $v$ 关联的一切边, 称为删除 $v$ . 又设 $V' \subset V$ , 用 $G - V'$ 表示从 $G$ 中删除 $V'$ 中的所有顶点, 称为删除 $V'$ .
- 没边, 顶点自己可以生存, 但是没了顶点, 边无法自己生存. 所以删顶点必须要删关联的边, 但是删边不需要删关联的顶点.



# 割集

- **连通性**是图的最为重要性质之一. 图的连通性在计算机网络、交通网和电力网等方面有着重要的应用.
- 实际问题中, 除了考察一个图是否连通外, 往往还要研究一个图**连通的程度**, 作为系统的可靠性度量.

## 定义 7.12

设 $G = \langle V, E \rangle$ , 若 $V' \subset V$ 使得 $p(G - V') > p(G)$ , 且对于 $\forall V'' \subset V'$ , 均有 $p(G - V'') = p(G)$ , 则称 $V'$ 是 $G$ 的**点割集**. 若点割集中只有一个顶点, 则称该顶点为**割点**.

类似地, 若 $E' \subset E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$ , 且对于 $\forall E'' \subset E'$ , 均有 $p(G - E'') = p(G)$ , 则称 $E'$ 是 $G$ 的**边割集**, 简称**割集**. 若边割集中只有一条边, 则称该边为**割边**或**桥**.

- 点 (边) 割集有着**最小**的概念, 不存在它的真子集是 $G$ 的点 (边) 割集.

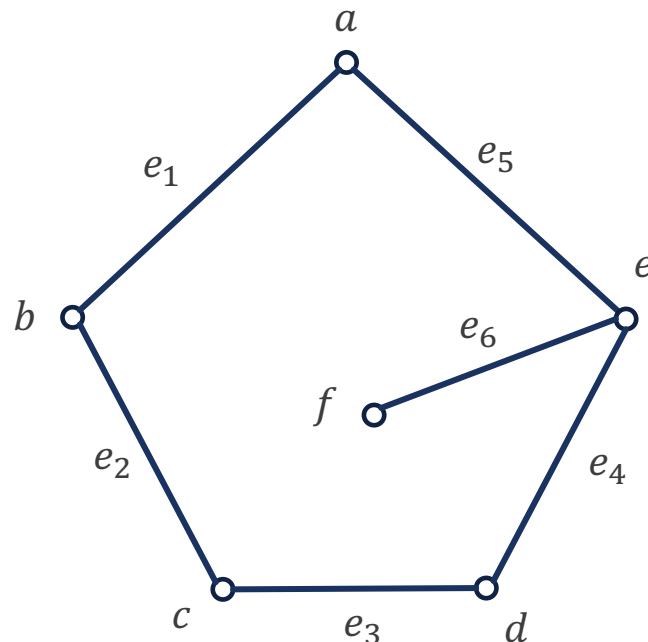




# 割集

## 例

- $\{e\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{a, d\}$ ,  $\{b, d\}$ 等都是点割集, 其中 $e$ 是割点.
- $\{a\}$ ,  $\{b, e\}$ ,  $\{a, c, d\}$ 等都不是点割集.
- $\{e_6\}$ ,  $\{e_1, e_5\}$ ,  $\{e_1, e_3\}$ 等都是边割集, 其中 $e_6$ 是桥.
- $\{e_1, e_6\}$ ,  $\{e_2, e_3, e_4\}$ 等都不是边割集.



# 割集

从定义可以看出以下几点:

1. 完全图 $K_n$ 无点割集, 因为从 $K_n$ 中删除 $k(k \leq n - 1)$ 个顶点后, 所得图仍然是连通的.
  - $K_n$ 删除任一顶点后, 变为 $K_{n-1}$ .
2.  $n$ 阶零图既无点割集, 也无边割集.
3. 若 $G$ 是连通图,  $E'$ 是 $G$ 的边割集, 则 $p(G - E') = 2$ .
4. 若 $G$ 是连通图,  $V'$ 是 $G$ 的点割集, 则 $p(G - V') \geq 2$ .
5.  $G$ 存在点割集  $\Leftrightarrow G$ 不是完全图.
  - 若 $G$ 不是完全图, 那么 $G$ 包含两个不邻接的顶点, 删除 $G$ 的除这两个顶点外的所有顶点, 即可得到一个不连通图. 即任意一个非完全图都存在点割集.



# 连通度

对一个连通图来说, 若它存在点割集和边割集, 就可以用含元素个数最少的点割集和边割集来**刻画它的连通程度**.

## 定义 7.13

设 $G$ 是一个无向**连通图**, 称

- (1)  $\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 为 } G \text{ 的点割集或 } V' \text{ 使 } G - V' \text{ 成为平凡图}\}$  为  $G$  的**点连通度**.
- (2)  $\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 是 } G \text{ 的边割集}\}$  为  $G$  的**边连通度**.

- 图 $G$ 的点连通度是为了使连通图 $G$ 成为一个非连通图或平凡图, **需要删除最少的点数**. 所以 $\kappa(G) \leq n - 1$ .
- 图 $G$ 的边连通度是为了使连通图 $G$ 成为一个非连通图, **需要删除最少的边数**.
- 规定无向非连通图的点连通度和边连通度都为0.



# 连通度

从定义可以看出以下几点:

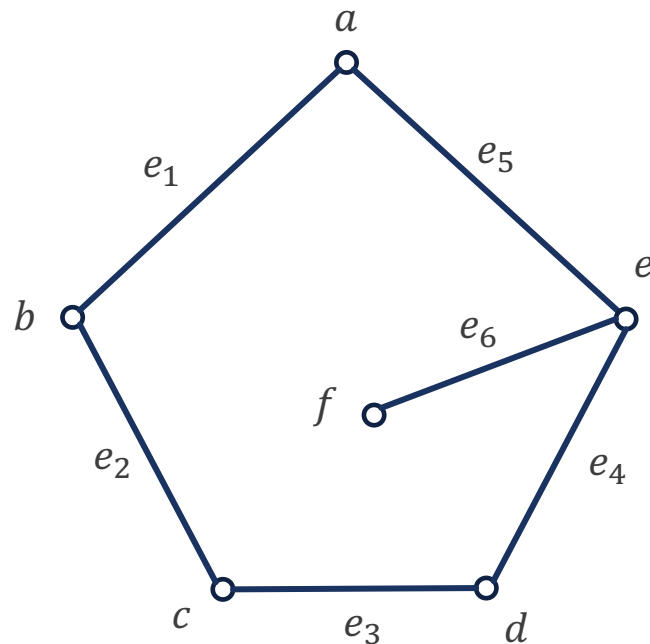
1. 若 $G$ 是平凡图, 它既没有点割集, 也没有边割集, 所以 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ .
2. 若 $G$ 是完全图 $K_n$ , 由于 $G$ 没有点割集, 当删除 $n - 1$ 个顶点后,  $G$ 成为平凡图, 所以 $\kappa(G) = n - 1$ .
3. 若 $G$ 中存在割点, 则 $\kappa(G) = 1$ ; 若 $G$ 中存在割边, 则 $\lambda(G) = 1$ .

**例** 该图既有割点又有桥, 因而 $\kappa(G) = \lambda(G) = 1$ .

## 定理 7.5

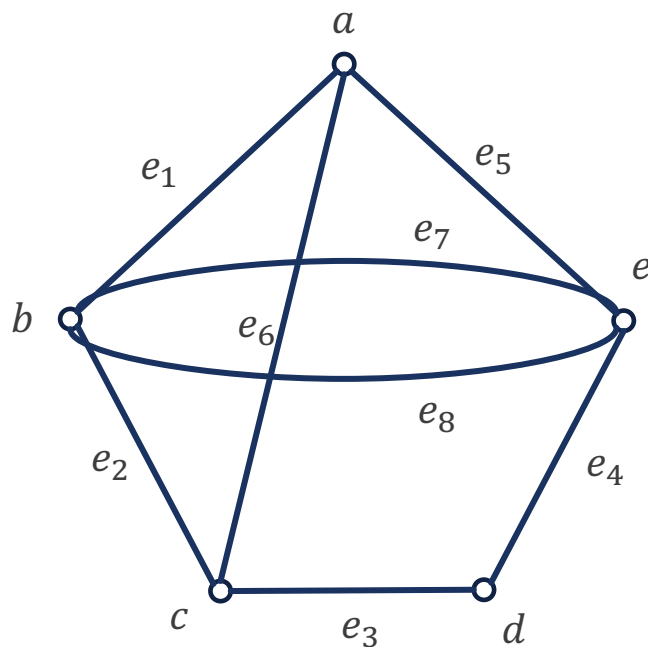
对于任何无向图 $G$ , 有

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$



# 课堂练习

判断该无向图的点连通度和边连通度.



# 课堂练习

判断该无向图的点连通度和边连通度.

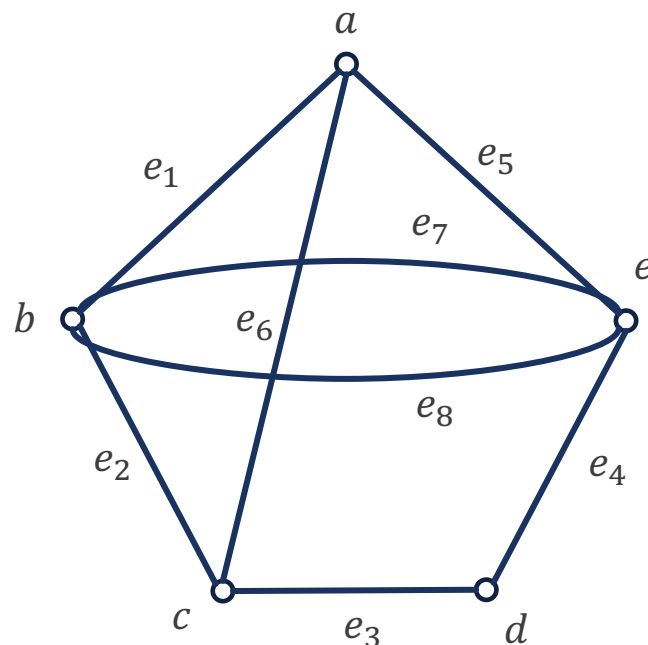
解

删除该图中任意一个顶点都无法破坏其连通性, 因此  $\kappa(G) > 1$ .

可以找到点割集  $\{c, e\}$  使该图成为非连通图, 因此  $\kappa(G) = 2$ .

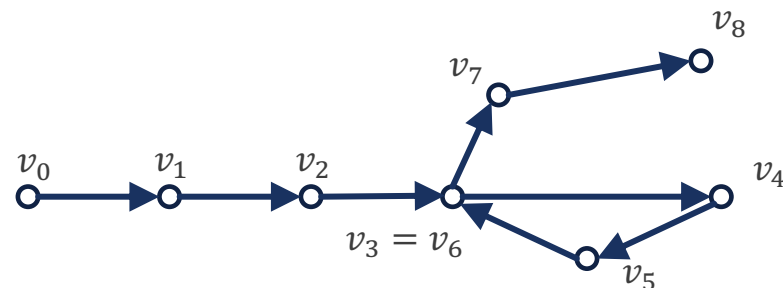
删除该图中任意一条边都无法破坏其连通性, 因此  $\lambda(G) > 1$ .

可以找到边割集  $\{e_3, e_4\}$  使该图成为非连通图, 因此  $\lambda(G) = 2$ .



# 有向图的连通性

- 以上讨论的都是无向图连通的概念和连通度, 下面介绍有向图连通性的概念.



## 定义 7.14

设  $D = \langle V, E \rangle$  为一有向图, 若从顶点  $v_i$  到  $v_j$  有通路, 则称  $v_i$  **可达**  $v_j$ . 规定  $v_i$  到自身总是可达的. 若  $v_i$  可达  $v_j$ ,  $v_j$  也可达  $v_i$ , 则称  $v_i$  与  $v_j$  是 **相互可达的**.  $v_i$  与自身是相互可达的.

若  $v_i$  可达  $v_j$ , 则称  $v_i$  到  $v_j$  长度最短的通路为  $v_i$  到  $v_j$  的 **短程线**, 短程线的长度称为  $v_i$  到  $v_j$  的 **距离**, 记作  $d\langle v_i, v_j \rangle$ . 若  $v_i$  不可达  $v_j$ , 规定  $d\langle v_i, v_j \rangle = \infty$ .

**例** 在该图中,  $d\langle v_0, v_7 \rangle = 4$ ,  $d\langle v_7, v_0 \rangle = \infty$ .

注意, 无向图顶点间的距离用圆括号:  $d(v_i, v_j)$ .



# 有向图的连通性

- 与无向图中顶点 $v_i$ 与 $v_j$ 之间的距离 $d(v_i, v_j)$ 相比,  $d\langle v_i, v_j \rangle$ 除无对称性外, 具有 $d(v_i, v_j)$ 的一切性质:
  - (1) 非负性:  $d\langle v_i, v_j \rangle \geq 0$ , 并且当且仅当 $v_i = v_j$ 时, 等号成立.
  - (2) 三角不等式:  $\forall v_i, v_j, v_k \in V(G)$ , 有
$$d\langle v_i, v_j \rangle + d\langle v_j, v_k \rangle \geq d\langle v_i, v_k \rangle.$$
- 有向图 $D$ 两点间的距离一般不满足对称性, 即使 $d\langle v_i, v_j \rangle$ 和 $d\langle v_j, v_i \rangle$ 都不是 $\infty$ , 它们也可能不相等.
  - 所以, 连通性不是有向图的顶点集上的等价关系.





# 有向图的连通性

## 定义 7.15

设 $D$ 为一有向图,

- (1) 若略去 $D$ 中各边的方向所得无向图 (称为**基图**) 是**连通图**, 则称 $D$ 是**弱连通图**或**连通图**.
- (2) 若 $D$ 中任意2个顶点至少一个可达另一个, 则称 $D$ 是**单向连通图**.
- (3) 若 $D$ 中任意2个顶点都是相互可达的, 则称 $D$ 是**强连通图**.

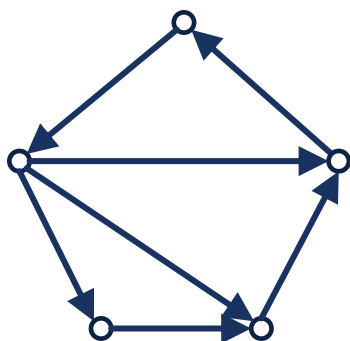
- 若图 $D$ 是强连通的, 则它必是单向连通的; 若图 $D$ 是单向连通的, 则它必是弱连通的.
  - 但这两个命题, 其逆不成立.



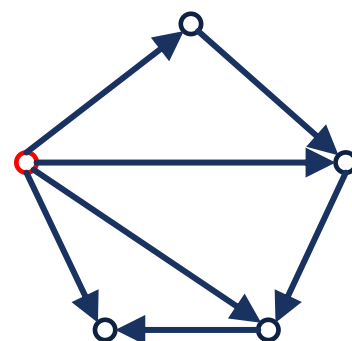
# 有向图的连通性

## 例

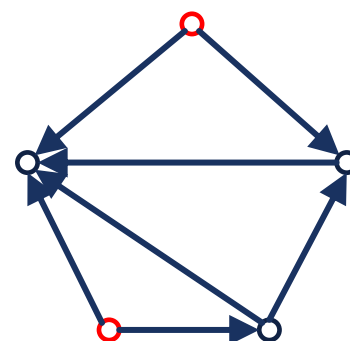
- (1)是强连通的,当然也是单向连通的和弱连通的.
- (2)是单向连通的,也是弱连通的,但不是强连通的.
- (3)是弱连通的,不是单向连通的,更不是强连通的.



(1)



(2)



(3)



# 有向图连通性的判别方法

## 有向图连通性的判别定理1

有向图 $D$ 是强连通的当且仅当 $D$ 中存在经过每个顶点至少一次的回路.

**证明** 充分性 如果 $D$ 中有一个回路, 它至少包含每个顶点一次, 则在该回路上 $D$ 中任何两个顶点都是相互可达的, 即 $D$ 是强连通图.

必要性 设 $D$ 中的顶点为 $v_1, v_2, \dots, v_n$ . 由 $D$ 的强连通性质可知,  $v_i$ 可达 $v_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 设 $\Gamma_i$ 为 $v_i$ 到 $v_{i+1}$ 的通路, 又有 $v_n$ 可达 $v_1$ , 设 $\Gamma_n$ 为 $v_n$ 到 $v_1$ 的通路. 于是,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ 所围回路经过 $D$ 中每个顶点至少一次.

## 有向图连通性的判别定理2

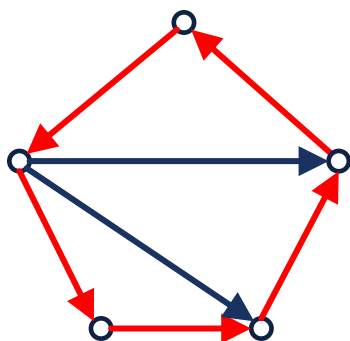
设 $D$ 为 $n$ 阶有向图,  $D$ 是单向连通图当且仅当 $D$ 中存在经过每个顶点至少一次的通路.



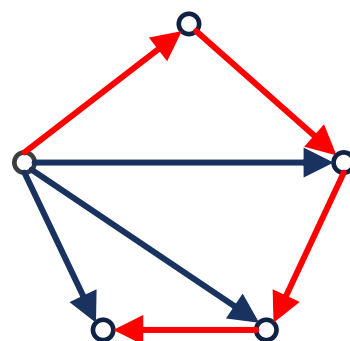
# 有向图连通性的判别方法

## 例

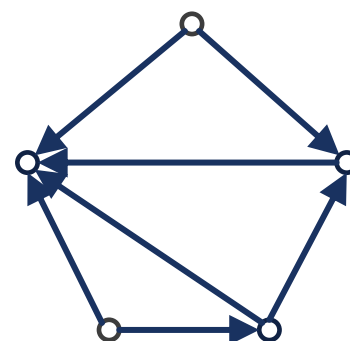
- (1)的外圈是一条回路,它经过所有的顶点,故(1)是强连通的.
- (2)有一个入度为0的顶点和一个出度为0的顶点,不存在经过这两个顶点的回路,所以它不是强连通的.
- (2)的外圈除去左下角的一条边后是一条经过所有顶点的通路,故(2)是单向连通的.
- (3)中有2个入度为0的顶点,不存在经过所有顶点的通路,故不是单向连通的.



(1)



(2)

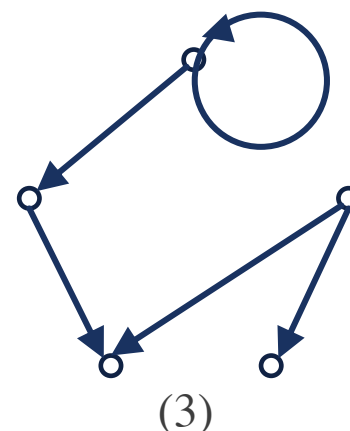
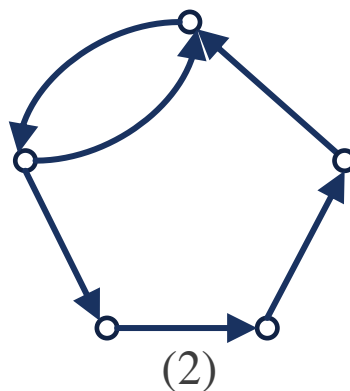
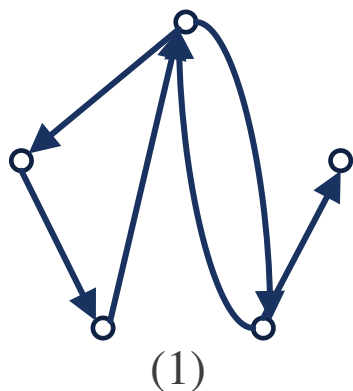


(3)



# 课堂练习

以下图中哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是弱连通图？



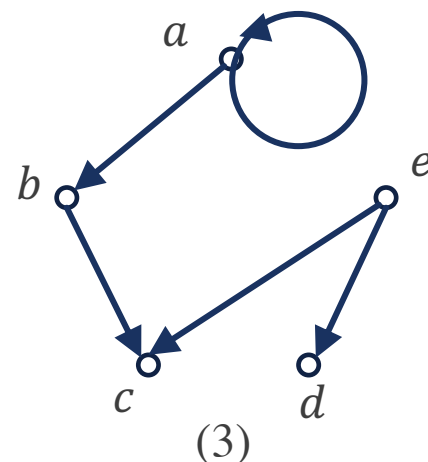
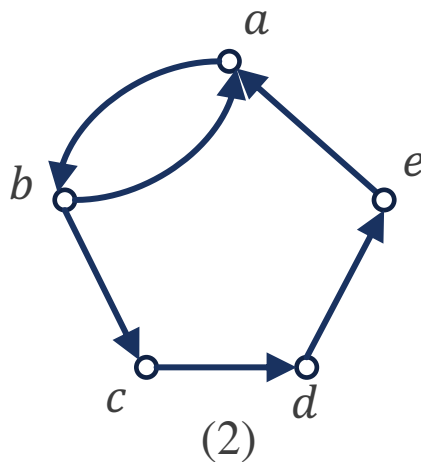
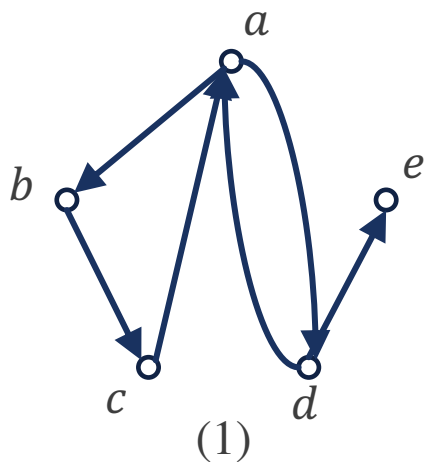
# 课堂练习

以下图中哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是弱连通图？

**解** (1) 中存在经过每个顶点的通路  $abcade$ ，但是无回路，因此是单向连通图，自然也是弱连通图。

(2) 中存在经过每个顶点的回路  $abcdea$ ，所以是强连通图，自然也是单向连通图和弱连通图。

(3) 没有经过每个顶点的通路或回路，但是其基图是连通的，因此是弱连通图。



## 7.3 图的矩阵表示

# 图的矩阵表示

- 二元关系, 关系图, 关系矩阵是一一对应的.
- 但是任意图 $G$ 却无法和二元关系一一对应, 因为图是多重集合, 而二元关系是集合.
- 为了方便计算机来处理图, 我们可以用矩阵来表示图, 但是需要注意区分这一节中的矩阵和关系矩阵.

## 定义

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令 $m_{ij}$ 为顶点 $v_i$ 与边 $e_j$ 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 $G$ 的关联矩阵, 记作 $M(G)$ .

- 在图的矩阵表示中, 要求图必须是标定图.





# 无向图的关联矩阵

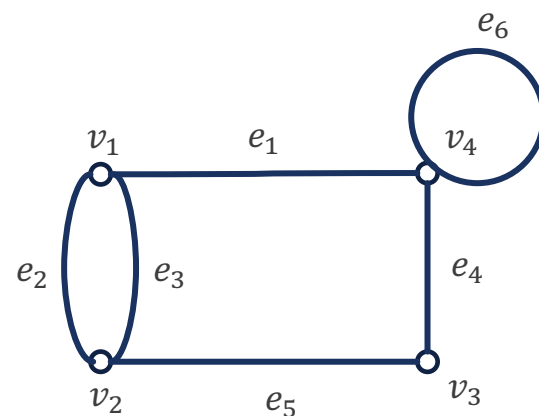
■  $m_{ij}$  的可能取值有3种:

- 0:  $v_i$  与  $e_j$  不关联;
- 1:  $v_i$  与  $e_j$  关联次数为1;
- 2:  $v_i$  与  $e_j$  关联次数为2, 即  $e_j$  是以  $v_i$  为端点的环.

例 7.3 求该图所示无向图的关联矩阵.

解

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



# 无向图的关联矩阵

## ■ $M(G)$ 有如下性质:

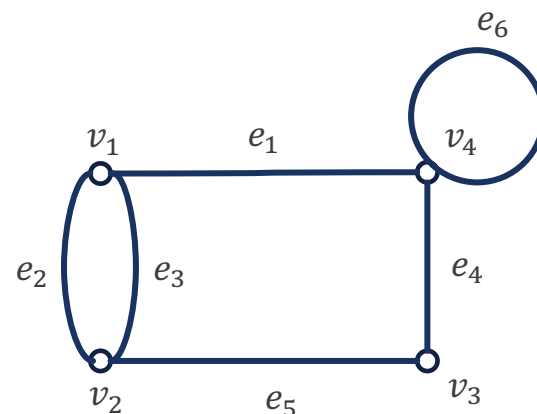
(1)  $M(G)$ 每列元素之和为2, 即 $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2$ , 这是因为每条边一定关联两个顶点 (环关联的两个顶点重合).

(2)  $M(G)$ 中第 $i$ 行元素之和为 $v_i$ 的度数, 即 $\sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i)$ .

(3) 根据握手定理, 关联矩阵中所有元素之和=各顶点之和=边数的2倍, 即 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$ .

(4) 第 $i$ 列与第 $j$ 列相同, 当且仅当 $e_i$ 与 $e_j$ 是平行边.

(5) 第 $i$ 行中元素全为0, 即 $\sum_{j=1}^m m_{ij} = 0$ , 当且仅当 $v_i$ 为孤立点.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



# 有向无环图的关联矩阵

## 定义

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向无环图,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的起点,} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联,} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点,} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 $D$ 的关联矩阵, 记作 $M(D)$ .

- 有向有环图没有关联矩阵, 因为若 $e_j$ 是 $v_i$ 上的环, 则 $v_i$ 既是 $e_j$ 的起点, 又是其终点, 在 $m_{ij}$ 的取值中没有定义.

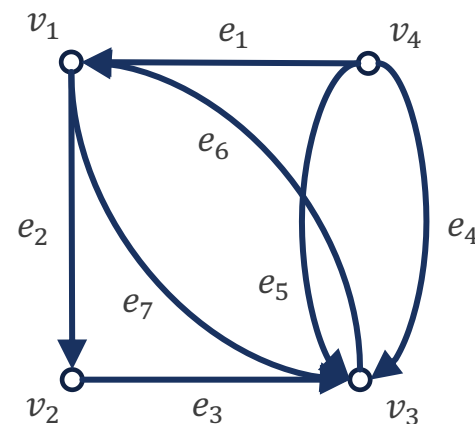


# 有向无环图的关联矩阵

例 7.4 求该有向无环图的关联矩阵.

解

$$M(D) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# 有向无环图的关联矩阵

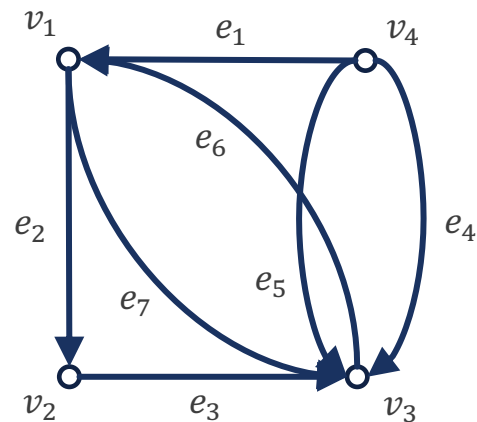
■ 容易看出 $M(D)$ 有如下性质:

(1)  $D$ 每列元素之和为0, 即 $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ , 这是因为 $D$ 中每条边关联两个顶点, 一个始点, 一个终点.

(2) 第 $i$ 行元素绝对值之和等于 $d(v_i)$ , 即 $\sum_{j=1}^m |m_{ij}| = d(v_i)$ , 而其中1的个数为出度 $d^+(v_i)$ ,  $-1$ 的个数入度 $d^-(v_i)$ .

(3) 矩阵中1的个数与 $-1$ 的个数相等, 都等于 $m$ , 这正说明 $D$ 中各顶点入度之和等于出度之和, 都等于 $m$ , 于是各顶点度数之和等于 $2m$ . 这是有向图 $D$ 的握手定理的全部内容.

(4) 若 $M(D)$ 中两列相同, 说明 $D$ 中这两列对应的边有相同的始点和终点, 即它们是平行边.



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# 有向图的邻接矩阵

- 以下讨论的有向图不加限制, 并且矩阵运算均为普通的乘法和加法.

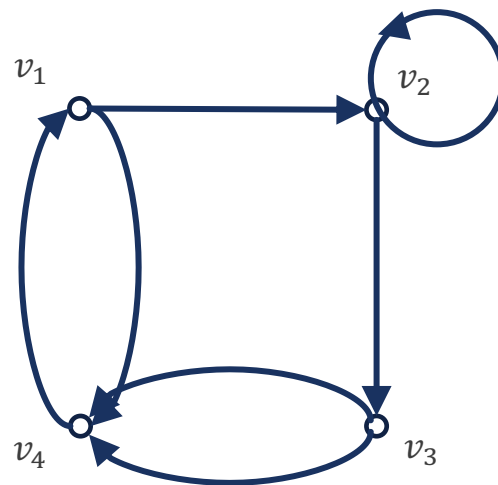
## 定义

设有向图  $D = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = |m|$ . 令  $a_{ij}^{(1)}$  为顶点  $v_i$  邻接到顶点  $v_j$  的长度为1的通路数, 即  $v_i$  与  $v_j$  相邻, 称  $(a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$  为  $D$  的邻接矩阵, 记作  $A(D)$ .

例 7.5 求该有向图  $D$  的邻接矩阵.

解

$$A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



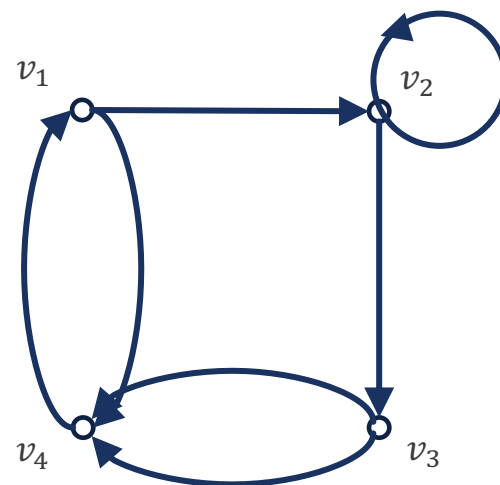
# 有向图的邻接矩阵

## ■ 邻接矩阵 $A(D)$ 有如下性质:

(1) 第 $i$ 行元素之和为 $v_i$ 的出度, 即 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i)$ .

(2) 第 $j$ 列元素之和为 $v_j$ 的入度, 即 $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j)$ .

(3)  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)}$  为 $D$ 中长度为1的通路数, 而 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)}$  为 $D$ 中长度为1的回路数, 即环的个数.

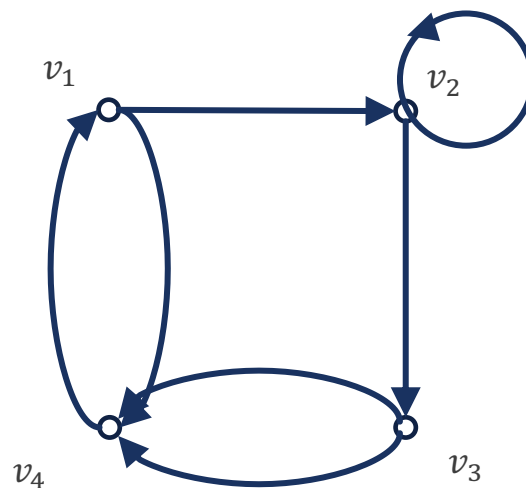


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# 课堂练习

假设从不同顶点出发的回路是不同的，  
那么该有向图中共有多少条长度为4的  
回路？





# 课堂练习

假设从不同顶点出发的回路是不同的，那么该有向图中共有多少条长度为4的回路？

解

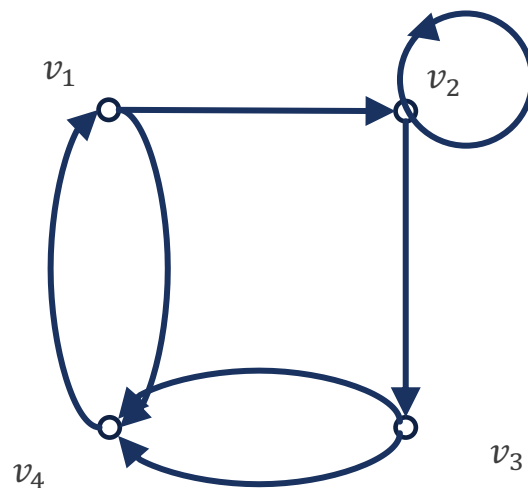
以 $v_1$ 为始点:  $v_1v_4v_1v_4v_1$ ,  $v_1v_2v_3v_4v_1 \times 2$ .

以 $v_2$ 为始点:  $v_2v_2v_2v_2v_2$ ,  $v_2v_3v_4v_1v_2 \times 2$ .

以 $v_3$ 为始点:  $v_3v_4v_1v_2v_3 \times 2$ .

以 $v_4$ 为始点:  $v_4v_1v_4v_1v_4$ ,  $v_4v_1v_2v_3v_4 \times 2$ .

共11种.



# 有向图的邻接矩阵

- 每条 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为2的通路, 中间必须经过一个顶点 $v_r$ .
- 如果图 $G$ 中有通路 $v_i v_r v_j$ 存在, 那么 $a_{ir}^{(1)} = a_{rj}^{(1)} = 1$ .
- 反之, 图 $G$ 中不存在通路 $v_i v_r v_j$ , 那么 $a_{ir}^{(1)} = 0$ 或 $a_{rj}^{(1)} = 0$ , 即 $a_{ir}^{(1)} a_{rj}^{(1)} = 0$ .
- 于是从 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为2的通路数等于

$$a_{i1} a_{1j} + a_{i2} a_{2j} + \cdots + a_{in} a_{nj} = \sum_{r=1}^n a_{ir} a_{rj},$$

这恰好等于矩阵乘法 $A \times A$ , 即 $A^2$ , 中的第 $i$ 行, 第 $j$ 列的元素 $a_{ij}^{(2)}$ .

- 所以,  $A^2$ 中元素 $a_{ij}^{(2)}$ 表示从 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为2的通路数.
- 注意区分邻接矩阵的次幂和关系矩阵的次幂.



# 有向图的邻接矩阵

- 继续推广, 则有以下定理及其推论:

## 定理 7.6

设 $A$ 是 $n$ 阶有向图的邻接矩阵,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为 $D$ 的顶点集, 则 $A^l (l \geq 1)$ 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为 $l$ 的通路数,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度为 $l$ 的通路总数, 其中 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度为 $l$ 的回路数.

## 推论

设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$ , 则 $B_l$ 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 为 $D$ 中 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度小于等于 $l$ 的通路数,  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度小于等于 $l$ 的通路总数, 其中 $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度小于等于 $l$ 的回路数.

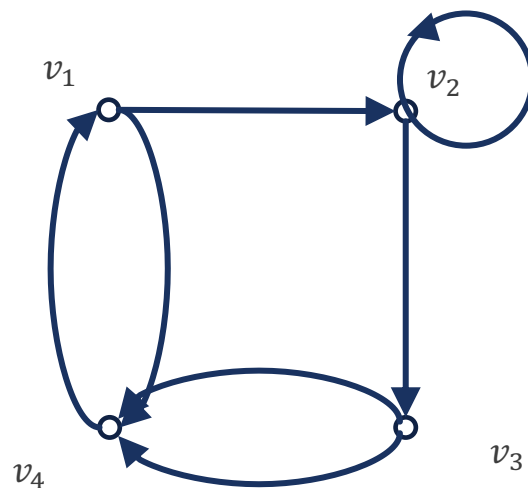
- 按照通路和回路的定义, 只要顶点或边的排列顺序不同就认为是**不同的通路和回路**.



# 有向图的邻接矩阵

例 计算该图的邻接矩阵的各次幂  
解

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$



- 通过邻接矩阵, 可以轻易计算得出, 图中长度为4的通路共有  $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij}^{(4)} = 31$  条, 其中有  $\sum_{i=1}^4 a_{ii}^{(4)} = 11$  条是回路.



# 可达矩阵

- 有时仅关心图中顶点之间是否连通,而**不关心**顶点之间存在多少条通路和它们的长度.

## 定义

设有向图 $D = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . 令

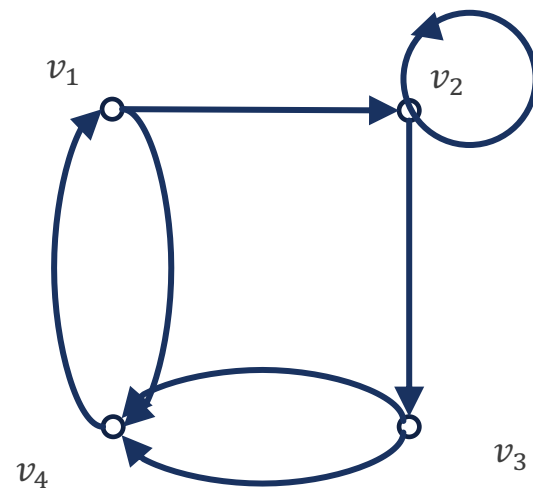
$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}, \quad i \neq j.$$

$$p_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 $D$ 的**可达矩阵**, 记作 $P(D)$ , 简记为 $P$ .

**例** 该有向图是强连通图, 因此可达矩阵 $P$ 中全体元素都是1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



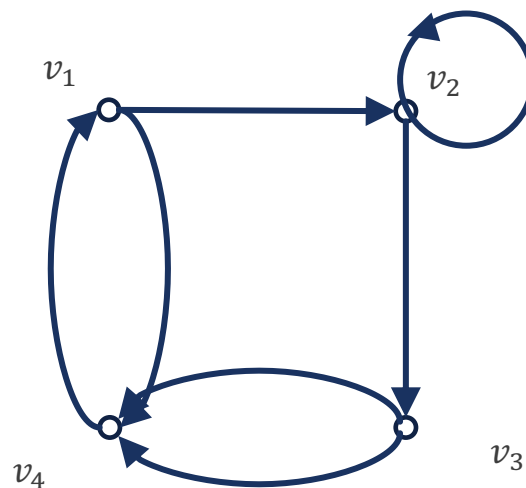
# 可达矩阵

## ■ 可达矩阵有下列性质:

- (1)  $\forall v_i \in V(D)$ ,  $v_i$ 可达 $v_i$ , 所以 $P$ 的主对角元素 $p_{ii}$ 全为1.
- (2) 若 $D$ 是强连通的, 则 $P$ 的全体元素均为1.
- (3) 由 $D$ 的邻接矩阵可求 $D$ 的可达矩阵,

$$P(D) = I + B_{n-1},$$

由于 $P$ 中的元素只有0或1, 此处加法为布尔加法.



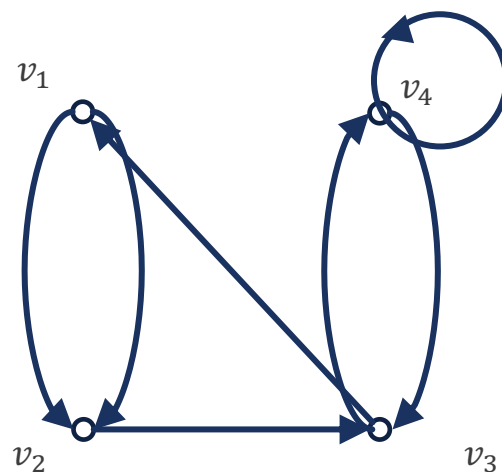
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



# 课堂练习

在右图所示的有向图中, 通过邻接矩阵求:

- (1)  $v_2$ 到 $v_4$ 长度为3的通路数;
- (2)  $v_2$ 到 $v_4$ 长度小于等于3的通路数;
- (3)  $v_4$ 到自身长度为3的回路数;
- (4)  $v_4$ 到自身长度小于等于3的回路数;
- (5)  $D$ 中长度为3的通路 (不含回路) 数;
- (6)  $D$ 中长度小于等于3的通路数, 其中有几条是回路?



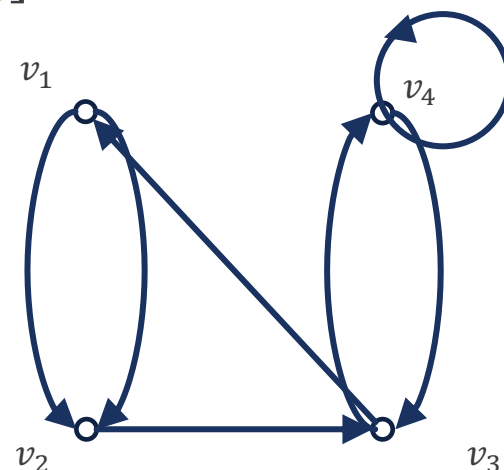
# 课堂练习

解 先求出 $D$ 的邻接矩阵 $A$ , 及它的前3次幂, 以及 $B_2, B_3$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

- (1)  $v_2$ 到 $v_4$ 长度为3的通路数: 1.
- (2)  $v_2$ 到 $v_4$ 长度小于等于3的通路数: 2.
- (3)  $v_4$ 到自身长度为3的回路数: 3.
- (4)  $v_4$ 到自身长度小于等于3的回路数: 6.
- (5)  $D$ 中长度为3的通路 (不含回路) 数:  $2+1+1+2+1+1+2+2=12$ .
- (6)  $D$ 中长度小于等于3的通路数, 其中有14条是回路.





# 作业

p162

1

2

4

7

9

11

12

15



# 谢谢

## 有问题欢迎随时跟我讨论



**厦门大学信息学院**  
SCHOOL OF INFORMATICS XIAMEN UNIVERSITY



**厦门大学 计算机科学系**  
Computer Science Department of Xiamen University