



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۴

موعده تحویل: جمعه ۱۴۰۱/۱۱/۱۴

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال اول ۰۲ - ۰۱

۱۹ دی ۱۴۰۱

۱. ماشین‌های تورینگ و زبان‌های تورینگ-تشخیص پذیر (شمارش پذیر بازگشتی)

۱.۱

برای زبان‌های زیر، ماشین تورینگ پذیرنده‌ی آنها را طراحی کنید.

$$L_1 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m\}$$

$$L_2 = \{\omega \in \{0, 1\}^* \mid \omega = \omega^R\}$$

۲.۱

در لکچرهای گذشته با ماشین‌های پشته‌ای^۱ آشنا شدید و در ادامه آموختید که کلاس ماشین‌های تورینگ از ماشین‌های پشته‌ای قدرتمندتر هستند. حال موارد زیر را اثبات نمایید:

الف) اثبات کنید افزودن یک پشته دیگر به کلاس ماشین‌های پشته‌ای آن را معادل کلاس ماشین‌های تورینگ می‌کند.

ب) اثبات کنید افزودن یک یا چند پشته دیگر به ماشین ۲-پشته‌ای، تاثیری در افزایش قدرت محاسباتی آن ندارد و همچنان معادل کلاس ماشین تورینگ است.

۳.۱

در تعریف ماشین تورینگ، نشانگر پس از هر انتقال حالت یا باید به راست برود یا به چپ. حال فرض کنید این قابلیت را به ماشین تورینگ اضافه کنیم که مجاز باشد نشانگرش را لزوماً تکان ندهد. یعنی تابع انتقال حالت ماشین جدیدی که ارائه می‌دهیم به شکل زیر باشد:

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L, S\}$$

¹Pushdown Automata

که در آن S نماینده تکان ندادن نشانگر است. نشان دهید که برای هر ماشین مانند M که این قابلیت را دارد، یک ماشین تورینگ عادی مانند M' وجود دارد که $L(M) = L(M')$ روش ساخت را به شکل کامل و صوری بیان کنید.

۴.۱

همومورفیسم تبدیلی مانند H با دامنه Σ^* است (که Σ یک الفبای دلخواه است) که خاصیت الحاق را حفظ می کند یعنی:

$$H(uv) = H(u)H(v)$$

- الف) بررسی کنید که آیا کلاس زبان های تورینگ تشخیص پذیر تحت تبدیل همومورفیسم بسته هستند یا نه.
- ب) بررسی کنید که آیا کلاس زبان های تورینگ تصمیم پذیر تحت تبدیل همومورفیسم بسته هستند یا نه.

۲. ماشین های خطی کران دار و یک کلاس جدید از زبان ها

هر ماشین خطی کران دار^۲ را درست مانند یک ماشین تورینگ به شکل یک هفت تایی $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ تعریف می کنیم، با این تفاوت که دو نماد اضافی^۳ و [هم تعریف می شوند که عضو Γ نیستند. پیکربندی^۴ اولیه ی ماشین به صورت $q_0[x]$ است و در جریان محاسبه، هد روی نوار اجازه ندارد که براکت ها را با نماد دیگری جایگزین کرده یا از محدوده ی تعریف شده توسط آن ها عبور کند.

کلاس زبان هایی که برای آن ها ماشین خطی کران دار قابل تعریف است، تحت عنوان زبان های حساس به متن^۴ شناخته می شوند. این کلاس، زیرمجموعه ی محض کلاس زبان های تورینگ-تشخیص پذیر است و نیز کلاس زبان های مستقل از متن^۵ (منهای رشته ی تهی) زیرمجموعه ی محض آن است.

رابطه ی میان کلاس زبان هایی که تا به الان آموخته اید، به همراه اسامی ماشین های پذیرنده ی رشته های هر کدام و گرامرهای تولیدکننده ی آن ها در شکل صفحه ی بعدی آمده است.

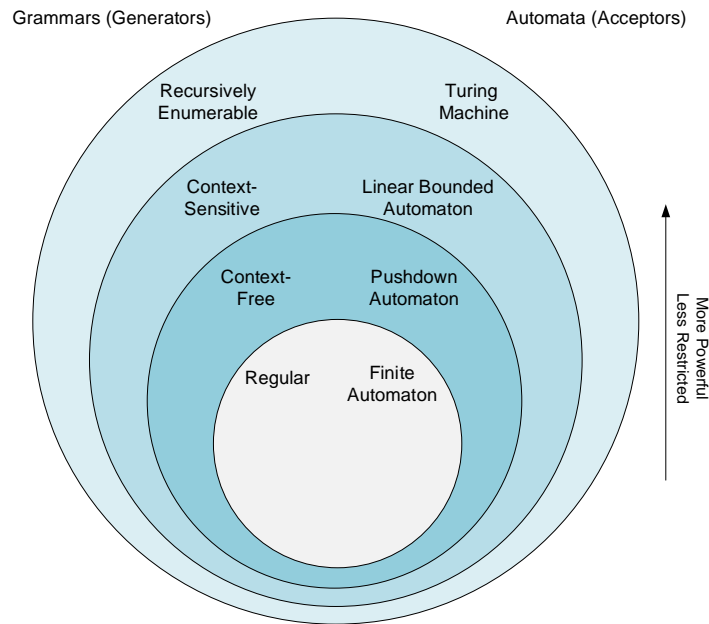
با توجه به توضیحات بالا به سوالاتی که در ادامه آمده اند، پاسخ دهید.

^۲Linear Bounded Automaton

^۳Configuration

^۴Context-sensitive Languages

^۵Context-free Languages



۱.۲

برای زبان زیر یک ماشین خطی کران دار ارائه دهید.

$$L = \{a^n b^n c^{2n} \mid n \geq 1\}$$

۲.۲

با ارائه اثبات بررسی کنید که زبان های حساس به متن نسبت به عملگرهای اجتماع، اشتراک و الحاق بسته هستند یا نه.

۳. تشخیص پذیری و تصمیم پذیری

۱.۳

تشخیص پذیری زبان زیر را بررسی کنید. اگر تشخیص پذیر است، یک ماشین تورینگ تشخیص دهنده ارائه کنید و اگر تشخیص پذیر نیست، برای ادعایتان برهان بیاورید.

$$L = \{\langle M, M' \rangle \mid |L(M) \cap L(M')| = 2, M \text{ and } M' \text{ are Turing Machines}\}$$

۲.۳

فرض کنید A و B دو زبان تورینگ-تصمیم پذیر باشند، نشان دهید:

الف) زبان $A \cup B$ تورینگ-تصمیم پذیر است.

ب) زبان A^* تورینگ-تصمیم پذیر است.

۳.۳

فرض کنید A و B دو زبان تورینگ-تشخیص پذیر باشند، نشان دهید:

الف) زبان AB تورینگ-تشخیص پذیر است.

ب) زبان A تورینگ-تصمیم پذیر است، اگر و تنها اگر هر دو زبان A و \bar{A} تورینگ-تشخیص پذیر باشند.

۴.۳

نشان دهید زبان‌های زیر تصمیم‌پذیر هستند.

a) $L = \{\langle D \rangle \mid D \text{ is a DFA and for every } \omega \in L(D) \text{ we have } n_a(\omega) \geq n_b(\omega)\}$

b) $\text{ALL_CFG} = \{\langle D, C \rangle \mid D \text{ is a DFA and } C \text{ is a CFG and } L(C) \subseteq L(D)\}$

۴. کاهش پذیری و دیگر روش‌های اثبات تصمیم‌ناپذیری

۱.۴

با استفاده از روش کاهش، نشان دهید مسائلی که در ادامه می‌آیند، تصمیم‌ناپذیر هستند:

الف) مسئله‌ی تعیین این که آیا زبان L نامتناهی است یا نه.

ب) مسئله‌ی تعیین این که آیا برای دو گرامر مستقل از متن G_1 و G_2 عبارت زیر صدق می‌کند:

$$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$$

ج) مسئله‌ی تعیین این که آیا برای یک گرامر مستقل از متن G ، در $L(G)$ عبارت پالیندروم^۶ وجود دارد.

۲.۴

نشان دهید زبان T که به صورت زیر تعریف میشود تصمیم‌پذیر نیست:

$$T = \{ \langle M, \omega \rangle \mid M \text{ is a Turing Machine that accepts } \omega^r \text{ whenever it accepts } \omega \}$$

۳.۴ (امتیازی)

قضیه‌ی رایش یک قضیه‌ی مهم در مبحث تصمیم‌پذیری است. ابتدا به تعاریف زیر دقت نمایید:

تعریف ۱: هر زیرمجموعه از مجموعه‌ی زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر را یک ویژگی نام‌گذاری می‌کنیم.

تعریف ۲: یک ویژگی ماشین‌های تورینگ غیربدهی است، اگر تهی نباشد و شامل همه‌ی زبان‌های تورینگ-تشخیص‌پذیر نباشد. به عبارت دیگر، حداقل یک ماشین تورینگ وجود داشته باشد که دارای این ویژگی نباشد و یک ماشین تورینگ باشد که این ویژگی را داشته باشد (زبان ماشین، عضو مجموعه‌ی مربوطه باشد).

قضیه رایش: اگر R یک ویژگی زبانی غیربدهی ماشین‌های تورینگ باشد، آن گاه مسئله PR به شرح زیر تصمیم‌ناپذیر است:

آیا ماشین تورینگ T ویژگی R را دارد؟

الف) قضیه‌ی رایش را اثبات کنید. (۵ نمره‌ی امتیازی)

ب) با توجه به قضیه‌ی رایش، نشان دهید مسئله‌ی «به ازای یک ماشین تورینگ T ، آیا $L(T)$ متناهی است؟» تصمیم‌ناپذیر است. (۵ نمره‌ی

امتیازی)

^۶Palindrome