



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۱

موعد تحویل: چهارشنبه ۱۴۰۱/۰۸/۱۸

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال اول ۰۲ - ۰۱

۱۱ آبان ۱۴۰۱

۱. منطق، استدلال، استقراء

۱.۱

با به کارگیری هم‌ارزی‌های منطقی^۱ و بدون استفاده از جدول درستی، درستی هر کدام از موارد زیر را نشان دهید:

a) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r$

b) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

۲.۱

با استفاده از برهان خلف و به کارگیری قواعد استنتاج^۲، گزاره‌های زیر را اثبات کنید.

a) $(p \rightarrow q) \implies (\neg q \rightarrow \neg p)$

b) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \implies \neg p$

c) $[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \implies (q \vee r)$

۳.۱

الف) نشان دهید که گزاره‌ی زیر، به ازای هر $n \geq 1$ صدق می‌کند:

$$p \rightarrow q \equiv (p \rightarrow r_1) \wedge (r_1 \rightarrow r_2) \wedge \cdots \wedge (r_n \rightarrow q)$$

ب) با فرض $p = r_1 \vee r_2 \vee \cdots \vee r_n$ ، به ازای هر $n \geq 1$ نشان دهید:

$$p \rightarrow q \equiv (r_1 \rightarrow q) \wedge (r_2 \rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (r_n \rightarrow q)$$

¹Logical Equivalences

²Rules of Inference

۲. خواص مجموعه‌ها، تعاریف بازگشتی، شمارش پذیری و شمارش ناپذیری

۱.۲

الفبای Σ را در نظر گرفته و فرض کنید که $L \subset \Sigma^*$ صدق کند. در رابطه‌ی R بر روی L داریم که xRy هر گاه دو رشته‌ی $u, v \in \Sigma^*$ وجود داشته باشند، به‌طوری که $x = uv$ و $y = vu$. آیا R یک رابطه هم‌ارزی^۳ است؟ بررسی کنید.

۲.۲

برای هر یک از مجموعه‌های زیر، ابتدا یک تعریف بازگشتی^۴ نوشته، و سپس به کمک تعریف مربوطه، عضویت رشته‌ی موردنظر در مجموعه‌ی مربوطه را نشان دهید.

الف) مجموعه‌ی عبارت‌های جبری خوش‌ترکیب^۵ با فرض الفبای حاصل از حرف a و عملگرهای جمع و ضرب و پرانتزهای راست و چپ. تعلق رشته‌ی $(a + a \times (a + a))$ را بررسی کنید.

ب) مجموعه‌ی عبارت‌های حاصل از ترکیب پرانتزهای راست و چپ، به نحوی که به ازای هر پرانتز چپ، در ادامه یک پرانتز راست آمده باشد. تعلق رشته‌ی $((()))$ را بررسی کنید.

۳.۲

فرض کنید که A مجموعه‌ای از دایره‌های توپر در فضای \mathbb{R}^2 باشد. نشان دهید که مجموعه‌ی A لزوماً شمارا^۶ است.

³Equivalence Relation

⁴Recursive Definition

⁵Well-formed

⁶Countable

۴.۲

سوال قبلی را در شرایطی در نظر بگیرید که دایره‌ها، توخالی باشند. اثبات کنید که مجموعه‌ی حاصل، ناشمارا^۷ است.

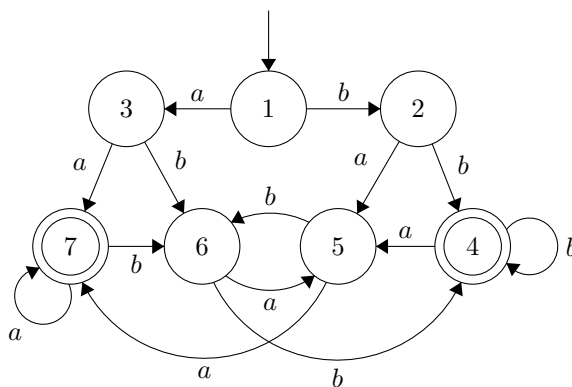
۳. مفاهیم اولیه و تعریف صوری ماشین‌ها

۱.۳

ماشین متناهی قطعی^۸ $\mathcal{A} = (Q, \Sigma = \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ماشین جدید $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ را به شیوه‌ی زیر تعریف کنیم:

$$Q' = Q \cup \{s\} \quad F' = \{s\} \quad \delta'(q, t) = \begin{cases} s & q \in F \text{ and } \exists p \in Q . \delta(p, t) = q \\ s & q \notin F \text{ and } \forall p \in Q . ((\exists r \in \Sigma . \delta(p, r) = q) \rightarrow \delta(p, \Sigma - \{t\}) = q) \\ \delta(q, t) & \text{Otherwise} \end{cases}$$

درخصوص تابع δ' توضیح دهید. اگر \mathcal{A} ماشین زیر باشد، دیاگرام مربوط به \mathcal{A}' را رسم نمایید.



⁷Uncountable

⁸Deterministic Finite Automaton