



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۳

موعد تحویل: جمعه ۱۴۰۱/۱۰/۲۳

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال اول ۰۲ - ۰۱

۱۰ دی ۱۴۰۱

۱. گرامر زبان‌های مستقل از متن

۱.۱

برای هر یک از زبان‌های زیر یک گرامر مستقل از متن^۱ معادل بنویسید.

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ contains at least three 1s}\}$$

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \text{ is odd and the middle symbol is } 0\}$$

۲.۱

برای زبان زیر یک گرامر مستقل از متن معادل بنویسید. بررسی کنید که آیا این گرامر مبهم^۲ است.

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i = j \vee j = k\}$$

۳.۱

با توجه به گرامر داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$S \rightarrow ST \mid TS \mid a$$

$$T \rightarrow b$$

۱. یک اشتقاق از راست (به همراه درخت اشتقاق^۳) برای رشته $bbab$ بنویسید.

۲. یک اشتقاق از چپ (به همراه درخت اشتقاق) برای رشته $bbab$ بنویسید.

۳. علت وجود ابهام در گرامر را بیان کنید.

۴. یک گرامر غیرمبهم معادل برای آن بنویسید.

^۱Context-free grammar

^۲Ambiguous grammar

^۳Derivation tree

۴.۱

برای زبان معادل گرامر زیر، یک گرامر در فرم نرمال چامسکی^۴ ارائه دهید.

۱.

$$S \rightarrow ASB$$

$$A \rightarrow aASA|a|\epsilon$$

$$B \rightarrow SbS|A|bb$$

۵.۱

فرض کنید $G = (V, \Sigma, S, R)$ یک گرامر مستقل از متن در فرم نرمال چامسکی باشد. گراف جهت‌دار $G' = (V, E)$ را با راس‌های V و یال‌های E در نظر بگیرید.

$$E = \{(A, B) | A, B \in V \text{ and for some } C \in V, \text{ either } A \rightarrow BC \text{ or } A \rightarrow CB \text{ is in } R\}$$

نشان دهید اگر G' فاقد دور باشد، آنگاه G یک زبان منظم^۵ است.

۲. خواص بستاری زبان‌های مستقل از متن

۱.۲

نشان دهید که زبان‌های مستقل از متن تحت عملگر الحاق^۶ بسته هستند.

^۴Chomsky normal form

^۵Regular Language

^۶Concatenate

۲.۲

نشان دهید که زبان‌های مستقل از متن تحت عملگر $PREFIX$ به شرح زیر بسته هستند.

$$PREFIX(L) = \{w \mid \text{for some } x \in \Sigma^*, wx \in L\}$$

۳. ماشین‌های پشته‌ای

۱.۳

برای هر کدام از زبان‌های زیر یک ماشین پشته‌ای^۷ طراحی کنید.

$$L = \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\} \quad ۱.$$

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i + k = j\} \quad ۲.$$

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = 2n_b(w)\} \quad ۳.$$

۲.۳

برای گرامر داده شده یک ماشین پشته‌ای طراحی کنید که زبان معادل گرامر را به ازای خالی شدن پشته بپذیرد.

$$S \rightarrow 0S1 \mid A$$

$$A \rightarrow 1A0 \mid S \mid \epsilon$$

۳.۳

نشان دهید که کلاس زبان‌هایی که به ازای خالی شدن پشته‌ی یک ماشین پشته‌ای پذیرفته می‌شوند با کلاس زبان‌هایی که به ازای توقف در حالت نهایی یک ماشین پشته‌ای پذیرفته می‌شوند معادل هستند.

⁷Pushdown automaton

۴. لم تزریق برای زبان‌های مستقل از متن

۱.۴

۱. فرض کنید که L یک زبان مستقل از متن باشد. با یک مثال نشان دهید زبان $L_{1/2}$ لزوماً مستقل از متن نیست.

$$L_{1/2} = \{x \mid |x| = |y|, xy \in L\}$$

۲. نشان دهید که زبان‌های زیر مستقل از متن نیستند.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) < n_b(w) < n_c(w)\} \quad (\bar{a})$$

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R, n_a(w) = n_b(w)\} \quad (\text{ب})$$

$$L = \{a^i b^j \mid i = kj \text{ for some positive integer } k\} \quad (\text{ج})$$

۳. یک نسخه‌ی تغییر یافته از لم تزریق^۸ به شرح زیر را اثبات کنید.

اگر A یک زبان مستقل از متن باشد، آنگاه یک عدد مانند k وجود دارد که اگر s یک رشته در A به طول حداقل k باشد، آنگاه $s = uvxyz$ است که

$$(\bar{a}) \quad \forall i \geq 0, uv^i xy^i z \in A$$

$$(\text{ب}) \quad v \neq \epsilon \wedge y \neq \epsilon$$

$$(\text{ج}) \quad |vxy| \leq k$$

^۸Pumping lemma