



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

درس نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

تمرین شماره‌ی ۲

موعد تحویل: چهارشنبه ۱۴۰۱/۰۹/۲۳

استاد: دکتر علی موقر

تیم دستیاران درس - نیم‌سال اول ۰۲ - ۰۱

۹ آذر ۱۴۰۱

۱. توصیف ماشین‌ها و مفاهیم زبان‌های منظم

۱.۱

برای هر یک زبان‌های توصیف شده‌ی زیر، ماشین متناهی قطعی^۱ طراحی کنید.

الف) مجموعه رشته‌های قابل تعریف بر روی $\{0, 1\}$ که اگر معادل دودویی آن‌ها را در نظر بگیریم، باقی مانده آن‌ها به پیمانه‌ی ۵ برابر با ۲ باشد.

ب) همه رشته‌های قابل تعریف بر روی $\{a, b\}$ با طول ۴ یا بیشتر که در آن‌ها دومین حرف از راست با اولین حرف از چپ متفاوت است.

۲.۱

عملیات Op بر روی زبان L را مطابق با تعریف زیر در نظر می‌گیریم:

$Op(L)$ شامل همه‌ی رشته‌های w از L است، به گونه‌ای که هیچ رشته‌ی غیرتهی $x \in \Sigma$ وجود نداشته باشد که wx عضوی از L باشد.

فرض کنید ماشین متناهی قطعی D زبان L را می‌پذیرد، ماشین قطعی D' را به گونه‌ای تعریف کنید که زبان $Op(L)$ را بپذیرد. (به شیوه‌ی صوری تعریف و درخصوص آن توضیح دهید).

۳.۱

فرض کنید D_1 و D_2 دو ماشین متناهی قطعی باشند. تابع $h : Q_1 \rightarrow Q_2$ را یک تابع ریختار^۲ می‌گویند، هرگاه برای هر $a \in \Sigma$ و هر $q \in Q_1$ این دو ویژگی برقرار باشد ($q_{0,1}$ و $q_{0,2}$ حالت‌های اولیه در D_1 و D_2 هستند):

$$h(\delta_1(q, a)) = \delta_2(h(q), a)$$

$$h(q_{0,1}) = q_{0,2}$$

الف) ثابت کنید اگر f یک ریختار از D_1 به D_2 و g یک ریختار از D_2 به D_3 باشد، آنگاه $g \circ f$ یک ریختار از D_1 به D_3 خواهد بود.

ب) به ازای هر $w \in \Sigma^*$ و $q \in Q_1$ ، ثابت کنید:

$$h(\delta_1^*(q, w)) = \delta_2^*(h(q), w)$$

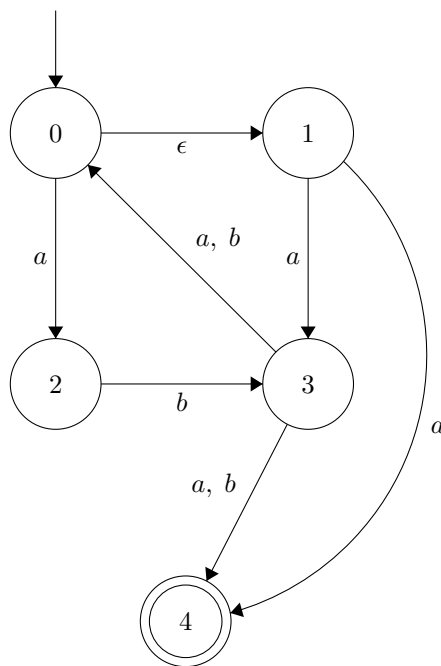
¹Deterministic Finite Automaton (DFA)

²Morphism

۲. هم‌ارزی و کمینه‌سازی

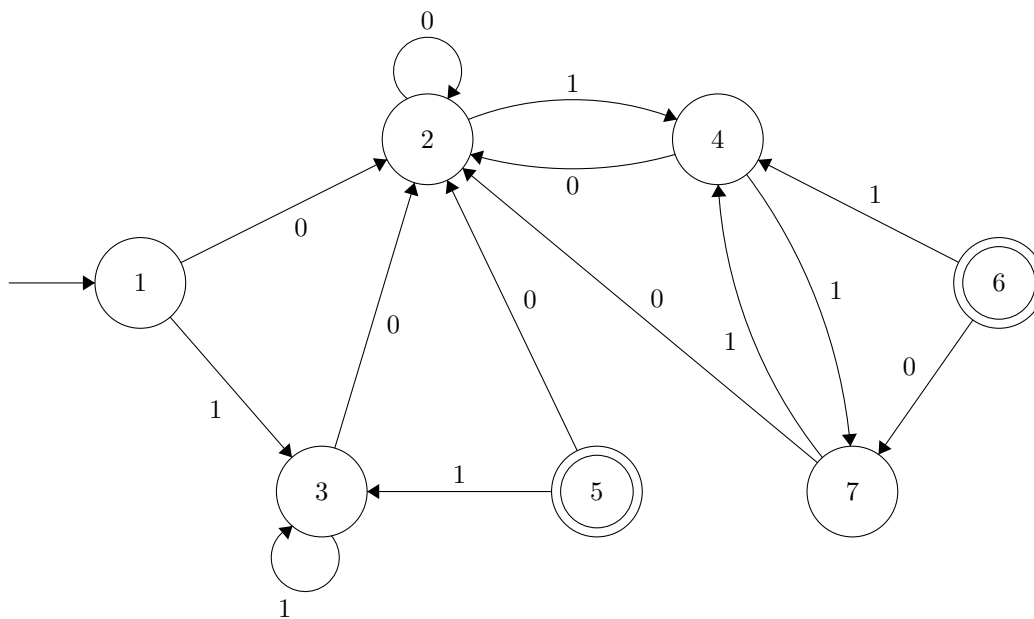
برای NFA زیر، یک DFA معادل رسم کنید.

۱.۲



۲.۲

برای ماشین زیر، DFA معادل با تعداد حالت‌های کمینه را رسم کنید.



۳. عبارت‌ها و گرامرهای منظم

۱.۳

برای هر عبارت منظم زیر با استفاده از قوانین ترکیب ماشین‌های متناهی با عملیات مختلف بر روی آن‌ها^۲، یک ماشین متناهی طراحی کنید که زبان مربوط به عبارت مربوطه را توصیف کند.

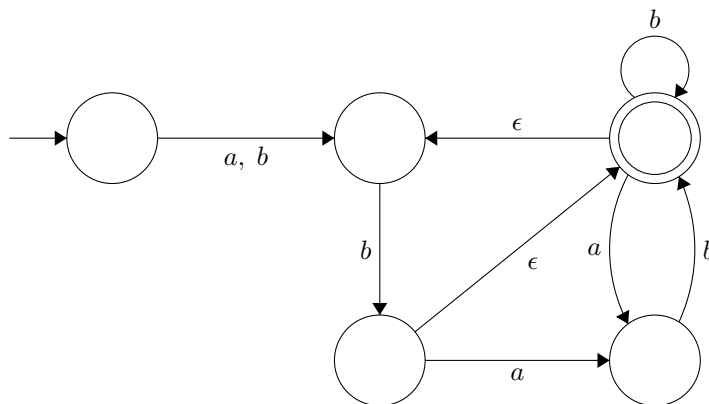
a) $(a \cup b)^*((a \cup ba)^*a(b \cup ab)^*)$

b) $(ab \cup ba^*b^*)^*(b^*abb)^*$

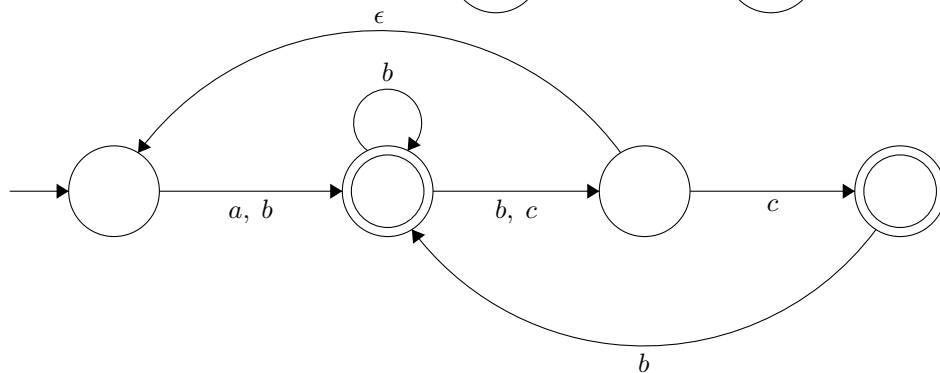
۲.۳

برای هر مورد یک عبارت منظم بنویسید که توصیف‌کننده زبان منظمی باشد که ماشین مربوطه آن را می‌پذیرد.

(الف)



(ب)



³Concat, Intersection, Union, etc.

۳.۳

به کمک همانی‌های پایه که لیست آن‌ها در صفحه‌ی درس قرار گرفته است، در هر مورد اثبات کنید که همانی مربوطه برقرار است.

$$a) (x \cup y)^* = (x^* \cup yx^*)^*$$

$$b) (x \cup y)^* = (y^*(x \cup \epsilon)y^*)^*$$

۴.۳

برای هر یک از گرامرهای زیر که یک زبان منظم را توصیف می‌کنند، ابتدا زبان تولید شده توسط گرامر مربوطه را بیان کنید، سپس برای آن یک گرامر منظم راست گرد یا چپ گرد خطی^۴ بنویسید.

a)

$$S \rightarrow Bb$$

$$B \rightarrow BA b A b \mid A \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow aA \mid \epsilon$$

b)

$$S \rightarrow AA \mid B$$

$$A \rightarrow AAA \mid Ab \mid bA \mid a$$

$$B \rightarrow bB \mid \epsilon$$

۴. خواص بستاری زبان‌های منظم

۱.۴

زبان دلخواه L روی الفبای Σ و همچنین رشته‌ی $x \in \Sigma^*$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $put(L, x)$ مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌هایی مانند ω' باشد که به نحوی از درج رشته‌ی x در $\omega \in L$ به دست آمده باشند. به طور دقیق‌تر داریم:

$$put(L, x) = \{uxv : uv \in L \text{ and } u, v \in \Sigma^*\}$$

اگر L یک زبان منظم باشد، به طور کامل و به روش صوری اثبات کنید که در این صورت زبان $put(L, x)$ نیز منظم خواهد بود.

^۴Left-linear or Right-linear

۲.۴

الف) اگر A و B دو زبان منظم باشند. نشان دهید زبان زیر نیز منظم است (امتیازی).

$$C(A, B) = \{x \in A \mid (\exists y) [|y| = |x|^2, y \in B]\}$$

ب) به کمک قسمت قبل نشان دهید که اگر L یک زبان منظم باشد، آنگاه زبان زیر نیز منظم است (امتیازی).

$$SQRT(L) = \{x \mid (\exists y) [|y| = |x|^2, xy \in L]\}$$

۵. اثبات نامنظم بودن زبان‌ها

۱.۵

به کمک لم تزریق و ویژگی‌های بستاری زبان‌های منظم، نامنظم بودن زبان‌های زیر را ثابت کنید.

$$L_1 = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 0, n \neq m \text{ or } m \neq k \text{ or } k \neq n\}$$

$$L_2 = \{a^{pq} \mid p, q \text{ are prime numbers}\}$$

۲.۵

عملیات \times روی الفبای $\{a, b, c\}$ را به شیوه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

\times	a	b	c
a	a	a	c
b	c	a	b
c	b	c	a

برای هر رشته‌ی $x \in \{a, b, c\}^+$ ، مقدار $value(x)$ را برابر با ضرب هر حرف از x در حرف بعدی (از چپ به راست) تعریف می‌کنیم. نشان

دهید زبان زیر منظم نیست.

$$L = \{xy \mid x, y \in \{a, b, c\}^*, |x| = |y|, value(x) = value(y)\}$$