

Das Potential der Schwerkraft

Sei $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein integrierbares Dichtefeld.

Sei $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Feld, sodass

$$\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G \frac{\rho(y)}{(x-y)^2} \text{sign}(y-x) dy$$

gilt. γ wird „Beschleunigungsfeld“ genannt. Nun betrachten wir die Einheiten.

$$\rho(x) \in [kg \cdot m^{-3}]$$

$$\gamma(x) \in [m^3 m^3 kg^{-1} s^{-2} kg m^{-3} m^{-2}] = [ms^{-2}]$$

Das passt, weil γ ein Beschleunigungsfeld ist.

Wegen der Kontinuitätsgleichung muss die Beschleunigung über geschlossene Kurven verschwinden, also besitzt γ eine Stammfunktion. Es gibt also ein $\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sodass $\gamma(x) = \nabla \Gamma(x)$ ist.

Demnach muss die Einheit von $\Gamma(x) \in [m^2 s^{-2}]$ sein. Die Arbeit, die ein $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Masse m erfährt, ist

$$E_{kin} = \int_0^1 m \cdot \langle \gamma(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt = m \cdot (\Gamma(x(1)) - \Gamma(x(0))).$$

Die Masse bleibt gleich, es wurde also ein Teil der Materie in kinetische Energie umgewandelt.

Die kinetische Energie, die dabei freigesetzt wurde, ist

$$E_{kin} = m \cdot (\Gamma(x(1)) - \Gamma(x(0))),$$

und der Anteil der Masse, der in kinetische Energie umgewandelt wurde, ist

$$\frac{E_{kin}}{m} = (\Gamma(x(1)) - \Gamma(x(0))).$$

Treffenderweise hat $\Gamma(x)$ die Dimension $\Gamma(x) \in [m^2 s^{-2}]$, so wie das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit $c^2 \in [m^2 s^{-2}]$. Wenn man bedenkt, dass der maximal mögliche als Energie freisetzbare Anteil der Masse gerade durch c^2 beschränkt ist, denn es gilt: $E_{tot} = m \cdot c^2$, dann kann man $\Gamma(x)$ dazu in Verhältnis setzen. Wählt man als Konvention $\Gamma(\infty) = 0$, dann ist $\forall x \in \mathbb{R}^3 : \Gamma(x) \leq c^2$.

$\Gamma(x)$ gibt also gerade den als kinetische Energie freisetzbaren Anteil einer weit entfernten Masse an, wenn diese in das Schwerfeld hineinfällt. Das Schwerfeld brütet die Energie aus der Masse sozusagen heraus und setzt sie (als kinetische Energie und beim Einschlag schließlich als Wärme) frei.

Damit muss man das Schwerfeld bzw. dessen Stammfunktion Γ als Freisetzung von Ruheenergie verstehen. Die Qualität der einfallenden Materie verändert sich dabei nicht notwendig, im Gegensatz zu z.B. Urankernen, aber die Ruhemasse sinkt, weil ein Teil als kinetische Energie frei wurde und eben negative Potentielle Energie eingefügt werden muss, da das Teilchen nicht mehr frei ist, sondern in dem Schwerfeld gefangen (gebunden) ist. Diese Korrekturen müssen beachtet werden, denn es kann sein, dass die Masse eines Gegenstandes davon abhängt, in welchem Schwerfeld er sich befindet und wie der Betrachter dazu steht. Befindet sich dieser im gleichen Schwerfeld, wird er den Gegenstand als normal erkennen, befindet er sich dagegen weit weg, scheint die Masse vermindert.