

System of difference constraints 是線性規劃的一個特例，在這個特例中，我們並不關心目標函數，我們關心的是「可行解」的存在。我們稱它為“feasibility problem”。如果每個限制函數只有兩個係數為 1 或 -1 的未知數，例如 $x_2 - x_1 \leq 5$ ，那它就是 system of difference constraints。System of difference 之所有稱為「特例」，是因為這個問題可以用最短路徑演算法解決。

假設我們有 m 個不等式和 n 個未知數，則我們可以將其轉換成圖 $G = (V, E)$ ，其中點集合 $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ ，也就是說，有多少個未知數，就有多少個點，同時我們新增一個點 v_0 當做源點；邊集合 $E = \{(v_i, v_j) \text{ 屬於 } E \text{ 且 } (v_i, v_j) \text{ 的權重} = b, \text{ 如果有不等式 } x_j - x_i \leq b\}$ 聯集 $\{(v_0, v_1), (v_0, v_2), \dots, (v_0, v_n)\}$ ，也就是說，除了將不等式轉換成邊以外，我們還在 v_0 到各點之間加一條邊，且權重為 0。

以下給出一個定理：

給定一個 system of difference constraints，將其轉換成對應的圖 G ，如果 G 沒有負環的話，則解 $x = \{s(v_0, v_1), s(v_0, v_2), \dots, s(v_0, v_n)\}$ ， $s(v_0, v_i)$ 代表 v_0 到 v_i 的最短距離。

證明：

考慮一條邊 (v_i, v_j) ，根據三角不等式， $s(v_0, v_i) + w(v_i, v_j) \geq s(v_0, v_j)$ ，其中 $w(v_i, v_j)$ 為邊的權重。根據我們定理中的假設， $s(v_0, v_i) = x_i$ ， $s(v_0, v_j) = x_j$ ，則上述不等式可以轉換成 $x_i + b \geq x_j \implies x_j - x_i \leq b$ ，也就是說，透過最短路徑演算法解出來的值，都會滿足所有的不等式。

如果有負環的話，考慮一個負環 $c = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ，其中 $v_k = v_0$ 。將負環的每條邊轉換成原來的不等式，會變成：

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &\leq w(v_0, v_1) \\ x_2 - x_1 &\leq w(v_1, v_2) \end{aligned}$$

⋮

$$x_k - x_{k-1} \leq w(v_{k-1}, v_k)$$

假設 x 有可行解，則我們可以將這一連串的不等式相加，左邊會全部抵消掉，變成 0；右邊就等於負環上的所有邊的權重總和，因為它是負環，所以它的總和會小於 0。最後我們得到了個負數大於 0 的結論，結論有問題，就代表一開始的假設是錯的，也就是說， x 沒有可行解。

那可行解有幾組？答案是無限多組，以下給出一個定理：

對於一組可行解 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ， d 是一個任意常數，則 $x + d = \{x_1 + d, x_2 + d, \dots, x_n + d\}$ 也是可行解之一。

證明：

$$x_j + d - (x_i + d) = x_j - x_i \leq b$$

以上大致上是 system of difference constraints 的內容