

一群人圍成一圈，從第一個人開始數，砍掉第二個人，然後再從第一個人開始，誰會活下來？
我們先考慮人數為偶數個的情況：1, 2, 3, 4, ..., 2n-1, 2n，每次砍第二個人，會剩下這些人：

1, 3, 5, 7, ..., 2n-3, 2n-1

然後又從第 1 個人開始數 1, 2, 砍, 1, 2, 砍, 1, 2, 砍..., 很快地我們會發現下面的對應關係：

1, 3, 5, 7, ..., 2n-3, 2n-1

1, 2, 3, 4, ..., n-1, n

換句話說，我們只要計算 n 個人，每次砍兩個，最後活下來的那個人的編號，然後把它乘以二再減一，就會是 2n 個人時，存活下來的那個人的編號。至於奇數個人的情況也不難推導，總之，我們可以得到下面的遞迴式：

$$F(1) = 1$$

$$F(2n) = 2F(n) - 1$$

$$F(2n+1) = 2F(n) + 1$$

有沒有好棒棒？還有更棒棒的。

將結果全部寫出來，會長這樣：

n 1 | 2 3 | 4 5 6 7 | 8 9 10 11 12 13 14 15 | 16

F(n) 1 | 1 3 | 1 3 5 7 | 1 3 5 7 9 11 13 15 | 1

根據上述的結果，我們可以寫出以下通解：

令 $n = 2^m + L$ ，其中 m 為最大但不超過 n 的 2^m 的 m，則：

$$F(n) = F(2^m + L) = 2L + 1$$

以上可用數學歸納法證明，這裡不再贅述。因為這裡的式子都跟 2 的次方有關係，所以我們就將所有的數字都寫成 2 的次方：

$$n = (b_m, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_2, b_1, b_0)$$

$$L = (0, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_2, b_1, b_0)$$

$$2L = (b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_2, b_1, b_0, 0)$$

$$2L + 1 = (b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_2, b_1, b_0, 1) = (b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_2, b_1, b_0, b_m) \text{ (因為 } b_m = 1 \text{)}$$

可以發現 F(n) 的結果，其實就是把 n 的二進位往左移一位，然後把最左邊 1 的移到第一位而已。

那如果每次不是砍第二個，而是三個、四個呢？一樣，我們只要找到兩組數字的對應關係，就可以用遞迴求解，因為求對應關係的過程，會有大量的取餘運算，所以編號從 0 開始會比較方便。以下僅舉十個人，每次砍第三個人時的例子。

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

砍完一輪後：0 1 3 4 6 7 9，然後從 9 重新開始數，所以問題變成求 7 個人時會活下來的編號，然後再轉成原來的編號，對應關係如下：

9 0 1 3 4 6 7

0 1 2 3 4 5 6

該怎麼找出對應關係？有沒有什麼數學公式或理論？答案是沒有，只能用硬湊的。我的湊法是，先全部加 9，然後對 10 取餘，結果會變成這樣：

9 0 1 3 4 6 7

9 0 1 2 3 4 5

可以發現，只要對 9 後面那些數字再加上該數字/2，就會得到我們想要的了。

那如果發生像是只有 N = 4 個人，每次砍 K = 6 個的情況呢？這樣又會變成另外一種計算方法：

0 1 2 3

砍完後：0 2 3 然後從 2 重新開始數，因為這次只砍一個人，對應關係比較單純，

因為每次砍的都是第 $K \% N$ 個人，所以只要將編號加上 $K \% N$ ，然後再對 N 取餘即可。

這種算法基本上都是硬湊的，不太建議浪費生命在這種東西上，沒什麼意思，有個印象就好。