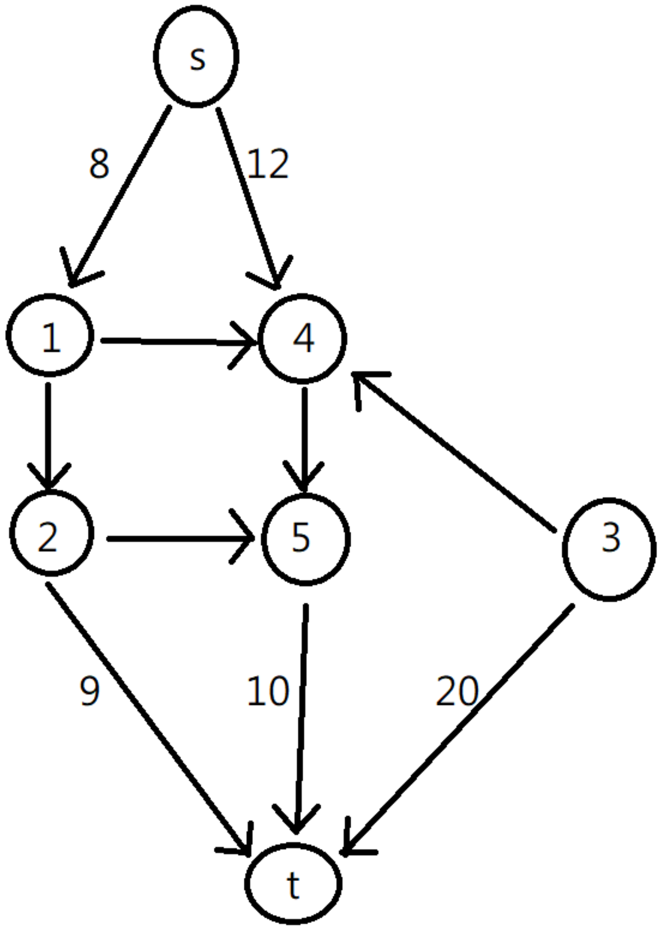
最大權閉合圖

定義閉合圖：在一個圖中，給定一個點的子集合，記為 V。 若集合中每一點的出邊也在 V 中，則我們稱 V 為閉合圖。

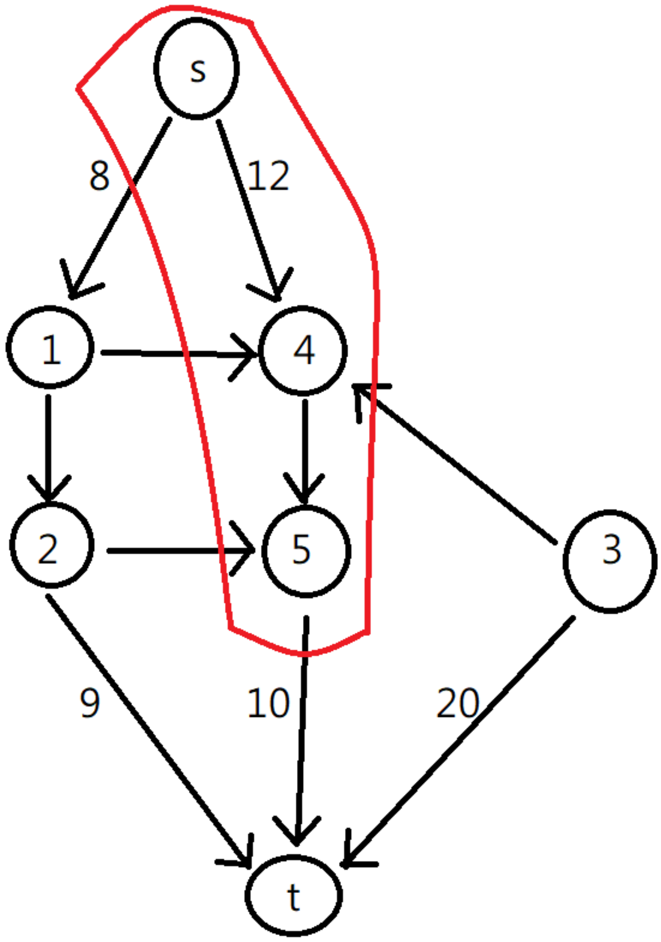
而最大權閉合圖即在所有閉合圖中，集合中的點的權值最大的 V，稱其為最大權閉合圖。

而最大權閉合圖和最大流最小分割的關係，將以這題的測資來解釋：

首先先建立兩個點 s & t，將點的權值為正的與 s 連接，邊的容量為該點的權值；將點的權值為負的與 t 連接，邊的容量為該點的權值的絕對值。其餘邊的容量為無限大：



先引入結論:最小割的 S 集合中,去除掉 S 所剩餘的點,即為最大權閉合圖。



證明：假設 W 為閉合圖的權值，則 W = S 集合中與 s 相連的邊的權值 – S 集合中與 t 相連的邊的權值(記為 x1 - y1)
再假設一個值 C，令 C 等於 S 集合的出邊的權值總和(也就是 T 集合中與 s 相連的邊的權值+S 集合中與 t 相連的邊的權值，記為 x2 + y1)
則 W + C = x1 + x2，即所有與 S 相連的邊的權值。移項得 W = x1 + x2 – C
其中 x1 + x2 為定值，我們希望 W 最大，則要求 C 最小。而 C 是 S 集合的出邊權值總和，即最小的 C = 最小分割的容量，因此可以轉化為最大流問題。而利用最大流求出的剩餘網路，可以求出 s-t 切割。從 s 開始對剩餘網路做 DFS，能觸及到的點，即為 S 集合中的點，扣掉 s 後即為最大權閉合圖集合。

至於題目中要求最小的最大權閉合圖集合，可以想成，從 s 出發，觸及的點數量最小。因為在最大流演算法中，已經不斷地把跟 s (直接或間接)連接的邊填滿，所以最大流求出的最小 s-t 切割的 S 集合，就會是最小的 S 集合。