Codificação de Church

Paradigmas - Aluno: Artur Barichello

A Codificação de Church é uma forma de adicionar operadores e dados ao cálculo lambda, sua forma mais conhecida são os numerais de Church, uma representação dos números naturais utilizando a notação lambda.
Seu nome é dado pelo seu inventor Alonzo Church que foi o primeiro a codificar o cálculo lambda desta forma.

Numerais de Church

São funções que tomam dois parâmetros:

Número	Expressão lambda
0	λ f. λ x. x
1	λ f. λ x. f x
2	λ f. λ x. f (f x)
3	λ f. λ x. f (f (f x))
4	λ f. λ x. f (f (f (f x)))
5	λ f. λ x. f (f (f (f (f x))))
6	λ f. λ x. f (f (f (f (f (f x)))))
7	λ f. λ x. f (f (f (f (f (f (f x))))))
8	λ f. λ x. f (f (f (f (f (f (f (f x)))))))
9	λ f. λ x. f (f (f (f (f (f (f (f (f x))))))))
10	λ f. λ x. f (f (f (f (f (f (f (f (f (f x)))))))))

Definição de Soma

$$\text{soma} = \lambda\, \text{m}.\ \lambda\, \text{n}.\ \lambda\, \text{s}.\ \lambda\, \text{z}.\ \text{m s (n s z)}$$

Definição de Subtração

$$\text{sub} = \lambda\, \text{m}.\ \lambda\, \text{n}.\ \text{(n predecessor) m}$$

Exemplo somando 0 e 1:

$$
\begin{aligned}
&\text{soma } 0\ 1 = (\lambda\ \text{m}.\ \lambda\ \text{n}.\ \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ \text{m s (n s z)})\ 0\ 1 \\
&\text{soma } 0\ 1 = (\lambda\ \text{n}.\ \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ 0\ \text{s (n s z)})\ 1 \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ 0\ \text{s}\ (1\ \text{s z}) \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ 0\ \text{s}\ ((\lambda\ \text{f}.\ \lambda\ \text{x}.\ \text{f x})\ \text{s z}) \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ 0\ \text{s}\ (\lambda\ \text{x}.\ \text{s x})\ \text{z}) \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ 0\ \text{s (s z)} \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ ((\lambda\ \text{f}.\ \lambda\ \text{x}.\ \text{x})\ \text{s (s z)}) \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ ((\lambda\ \text{x}.\ \text{x})\ \text{(s z)}) \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{s}.\ \lambda\ \text{z}.\ \text{(s z)} \\
&\text{soma } 0\ 1 = \lambda\ \text{f}.\ \lambda\ \text{x}.\ \text{(f x)} \\
&\text{soma } 0\ 1 = 1
\end{aligned}
$$

Exemplo subtraindo 2 e 1:

$$
\begin{aligned}
&\text{sub } 2\ 1 = (\lambda\ \text{m}.\ \lambda\ \text{n}.\ \text{(n predecessor) m})\ 2\ 1 \\
&\text{sub } 2\ 1 = (\lambda\ \text{n}.\ \text{(n predecessor)}\ 2)\ 1 \\
&\text{sub } 2\ 1 = (1\ \text{predecessor})\ 2 \\
&\text{sub } 2\ 1 = ((\lambda\ \text{f}.\ \lambda\ \text{x}.\ \text{f x})\ \text{predecessor})\ 2 \\
&\text{sub } 2\ 1 = ((\lambda\ \text{x}.\ \text{predecessor x})\ 2 \\
&\text{sub } 2\ 1 = (\text{predecessor}\ 2) \\
&\text{sub } 2\ 1 = 1
\end{aligned}
$$