PM004 - Métodos Numéricos e Aplicações

`http://www.ime.unicamp.br/~campello/pm004`

Projeto 2

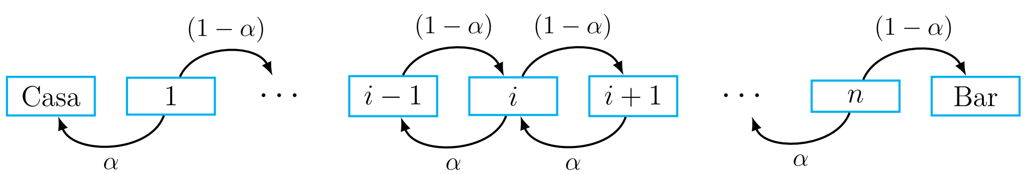
Data de Entrega: 03/10 /2014

(1) O projeto 2 consiste de 2 itens. A lista de exercícios e o projeto abaixo.

(2) Envie para campello@ime.unicamp.br, até a meia noite do dia 01/10/2014. O campo "assunto" deve constar PM004-PROJETO2. Apenas **um** arquivo .zip deve ser enviado. No caso do projeto "Passeio do Bêbado", um arquivo **.pdf** contendo as respostas e as discussões deve ser incluído, além dos programas.

O passeio do bêbado

(Adaptado de Burden & Faires) Um bêbado inicia uma arduosa caminhada até a sua casa, partindo de um ponto i. Em cada ponto, o bêbado tem probabilidade α de ir para esquerda e $(1-\alpha)$ de ir para a direita. O ponto 0 representa a sua casa e $(n+1)$ representa o bar, como na figura abaixo. Gostaríamos de saber qual a probabilidade P_i do bêbado chegar em casa antes de chegar no bar, supondo que ele está no ponto i.



O arquivo suporte.nb em `http://www.ime.unicamp.br/~campello/pm004/listas.html` contém alguns comandos que certamente serão úteis.

(i) Claramente $P_0 = 1$ e $P_{n+1} = 0$. No ponto i, $1 \le i \le n$, temos

$$P_i = \alpha P_{i-1} + (1-\alpha) P_{i+1} \text{ (por quê?) } .$$

Verifique que as equações acima são equivalentes a um sistema linear $Ax = b$, do tipo

$$
\begin{pmatrix}
1 & -(1-\alpha) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-\alpha & 1 & -(1-\alpha) & 0 & \dots & 0 \\
0 & -\alpha & 1 & -(1-\alpha) & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & \\
0 & 0 & \dots & -\alpha & 1 & -(1-\alpha) \\
0 & 0 & \dots & \dots & -\alpha & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

com as variáveis $(P_1, \dots, P_n)$. Veja que A pode ser escrita como

$$
A_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -(1-\alpha) & j = i+1 \\ -\alpha & i = j+1 \end{cases}
$$

e $A_{ij} = 0$ se $|i-j| > 2$. Dizemos, neste caso, que a matriz é *tridiagonal*.

(ii) Monte o sistema linear para $\alpha = 1/2$. Encontre a matriz de iteração M e o vetor g do método de Jacobi aplicado a este sistema.

$$
\boldsymbol{x}^{(k+1)} = M\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}.
$$

Quantas operações aritméticas seriam feitas em uma iteração do método, nessa matriz bastante especial? Pesquise maneiras de multiplicar uma matriz tridiagonal por um vetor, explicitando custos computacionais.

(iv) Considere o seguinte teorema

Teorema 1 (Burden & Faires, Teorema 7.19) *Um método iterativo do tipo* $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = M\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{g}$ *converge para a solução única se, e somente se, o maior autovalor, em módulo de* M *é menor que* 1.

É possível garantir que o método de Jacobi converge para a solução do sistema acima? Faça exemplos numéricos que apoiem a sua resposta.

(Bônus++: *Demonstre* isso.)

(iii) Resolva o sistema para $\alpha = 1/2$ e n ímpar $(n = 3, 5, 7, \dots, ..)$. Calcule, em cada caso, a probabilidade do bebado chegar em casa desde o ponto inicial $i = (n+1)/2$. Por exemplo, com 5 pontos, qual a probabilidade do bebado chegar em casa iniciando da posição 3 ? O que ocorre com essa probabilidade?

(iv) Repita o item (iii) com $\alpha = 0.6$ e note uma diferença drástica. O que você conclui?