# Particules dans un champ électromagnétique

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : lois de Newton, électrostatique, magnétostatique, nombre de Reynolds

## Introduction

Pour rappel, la force de Lorentz s'écrit : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$, on se place dans le cas non relativiste.

## I Particules dans un champ électrique uniforme

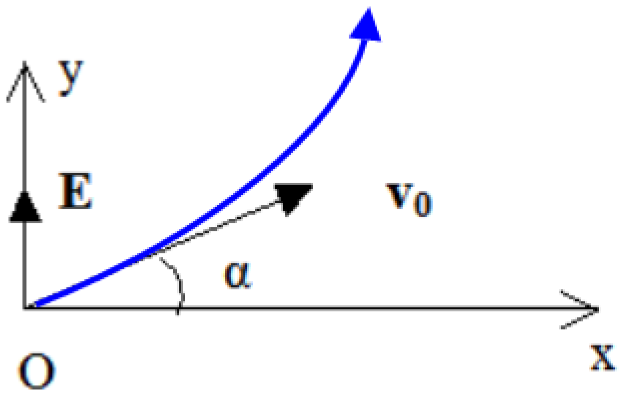
### 1) Accélération par un champ électrique

On considère une particule de masse m, de charge q et de vitesse $\vec{v}$ en un point M.

On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen et on utilise les coordonnées cartésiennes. Bilan des forces : la particule subit le poids et la force de Lorentz.

$|\vec{P}| = mg \sim 10^{-29} N$ pour un électron, alors que $|q\vec{E}| \sim 10^{-15} N$

On peut donc raisonnablement négliger le poids.




Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$

Ainsi, $\vec{v}(t) = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v_0}$ et $\overrightarrow{OM} = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v_0}t$ en considérant que la particule est en O à t = 0.

En projetant selon $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos(\alpha) \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\sin(\alpha) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Remarque : on obtient des équations similaires à la chute libre.

Pour trouver la trajectoire de la particule, on élimine t : $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

Ainsi, $y = \frac{qE}{2mv_0{}^2 cos^2(\alpha)} x^2 + x \tan(\alpha)$ (parabole)

Pour accélérer une particule sans la dévier, il faut que $\overrightarrow{v_0}$ soit parallèle à $\vec{E}$, soit α = 90° ou alors $\overrightarrow{v_0} = \vec{0}$

Ainsi, $y(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 t$ (mouvement rectiligne accéléré) ou $y(t) = \frac{qE}{2m} t^2$

## 2) Modèle de Drude

On considère maintenant les électrons dans un métal, de densité n. On modélise l'agitation thermique des électrons et leurs collisions entre eux et avec les cations par une force de frottements : $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$

On reprend le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron en ajoutant la force de frottements, on obtient :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

Soit : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

Donc $\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{e\tau}{m}\vec{E}$

Pour t >> τ, $\vec{v} \sim -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$

La densité volumique de courant s'écrit : $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$

On retrouve la loi d'Ohm locale, en posant $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$

Application numérique pour le cuivre : $\gamma = 6.10^7$ S.m$^{-1}$, M = 63,5 g.mol$^{-1}$, $\rho = 9.10^3$ kg.m$^{-3}$

m = $9,1.10^{-31}$ kg, e = $1,6.10^{-19}$ C

Donc τ = $2,5.10^{-14}$ s

La loi d'Ohm est applicable dans les métaux si la durée caractéristique d'évolution du champ électromagnétique est très supérieure à τ.

## 3) Expérience de Millikan

L'expérience de la goutte d'huile, réalisée par Millikan au début du XXe siècle, consiste à pulvériser de minuscules gouttes d'huiles électrisées entre les deux électrodes d'un condensateur plan chargé.

On considère une goutte d'huile, on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. La goutte est soumise au poids, à la poussée d'Archimède, à la force de Lorentz et à une force de Stokes.

Le PFD s'écrit : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \overrightarrow{F_L} + \vec{f}$

Ainsi, $m\frac{d\vec{v}}{dt} + 6\pi\eta R v = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_{air})g - qE$

Donc $v = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_{air})g - qE}{6\pi\eta R}\left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}\right)$

La vitesse limite s'écrit : $v_{lim} = v_0 - \frac{qE}{6\pi\pi R}$, $v_0$ est la vitesse en champ nul.

On peut alors mesurer la charge : on annule la tension aux bornes du condensateur et on mesure $v_0$, puis on fait varier le champ électrique de manière à immobiliser la goutte, on peut alors remonter à la charge q.

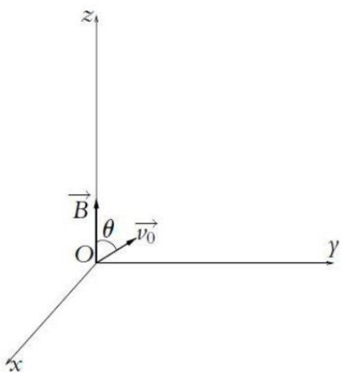
Millikan a observé expérimentalement, en irradiant les gouttes par rayons X, que les valeurs d'ionisation étaient toutes des multiples de la charge élémentaire.

# II Particules dans un champ magnétique uniforme

## 1) Champ magnétique seul

On considère une particule de masse m, de charge q et de vitesse $\vec{v}$. On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on utilise les coordonnées cartésiennes. On néglige le poids, la particule n'est donc soumise qu'à la force de Lorentz. Le PFD s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$$




Particule de masse m, charge q, vitesse initiale $\vec{v}_0$ ,
non relativiste

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_z$$

$$\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

Donc $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{q}{m}\vec{B}\wedge\vec{v} = \vec{\Omega}\wedge\vec{v}$, $\Omega_c = \frac{|q|B}{m}$ est la pulsation cyclotron

Pour rappel, la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas, l'énergie cinétique d'une particule dans un champ magnétique est donc constante. On ne peut pas accélérer une particule avec un champ magnétique mais simplement dévier sa trajectoire.

En projetant le PFD, on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Donc : $v_z$ = cste

On pose u = x + iy

Ainsi, $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \frac{qB}{m}(\dot{y} - i\dot{x}) = -i\frac{qB}{m}\dot{u}$

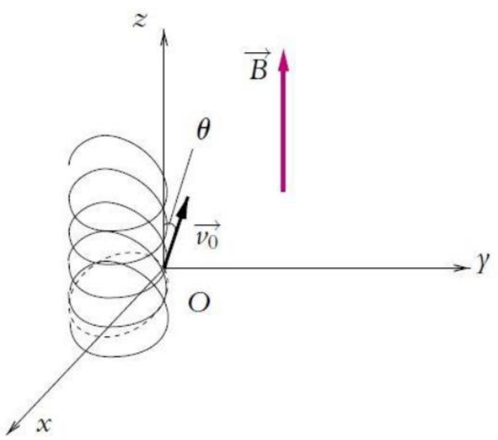
Donc $\dot{u} = \dot{u}(0)e^{-i\Omega_c t} = iv_0 \sin(\theta)e^{-i\Omega_c t}$

$u = \frac{-v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}e^{-i\Omega_c t} + K$, or u(0) = 0, donc $u = \frac{-v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}(1 - e^{-i\Omega_c t})$

Par identification, $x(t) = \frac{-v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}(1 - \cos(\Omega_c t))$ et $y(t) = \frac{v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t)$

On a dans ce plan un cercle de rayon $R = \frac{v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}$ de centre ($\frac{v_0 \sin(\theta)}{\Omega_c}$, 0)

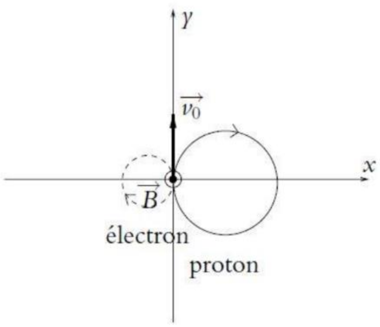
La trajectoire globale est donc une hélice : mouvement circulaire translaté selon z, avec un pas de $v_0 \cos(\theta)\frac{2\pi}{\Omega_c}$




Remarque : le signe de la charge de la particule modifie le sens de parcours de l'hélice.

Pour un électron, en prenant B = 0,1 T, $\Omega_c = 1{,}8.10^{10}$ rad.s$^{-1}$ et R = 1,1 mm.

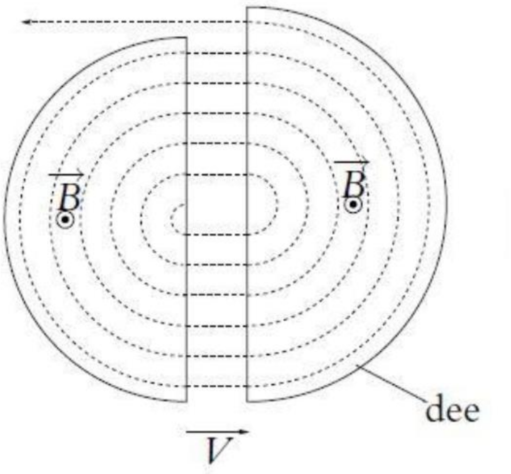
Pour un proton, $\Omega_c = 9{,}5.10^{6}$ rad.s$^{-1}$ et R = 4,57 cm.



Pour un électron, le rayon de gyration est plus petit et le sens de parcours est inversé.

On va maintenant s'intéresser à ce qu'il se passe en couplant le champ magnétique avec un champ électrique.

## 2) Étude du cyclotron




Dans chaque dee règne un champ magnétique uniforme. Une différence de potentiel accélère les électrons à chaque fois qu'ils passent entre les deux.

Pour éviter la décélération, la différence de potentiel s'inverse à chaque passage, elle est sinusoïdale de pulsation $\Omega_c$. Ce dispositif présente deux avantages : on peut accélérer les électrons sans appliquer une énorme différence de potentiel (puisqu'ils repassent plusieurs fois entre les deux dees), le dispositif est compact.

Pour B = 0,1 T et R = 1m, $f_c$ = 1,5 MHz, v = $10^7$ m.s$^{-1}$

La différence à appliquer pour atteindre cette vitesse est : $U = \frac{mv^2}{2q} 500kV$

# Conclusion

Nous avons vu les effets des champs électrique et magnétique seuls ou couplés sur la trajectoire d'une particule. Nous avons également établi le modèle de Drude, permettant de retrouver la loi d'Ohm.

# Bibliographie


-Dunod, Tout en un MPSI-PTSI, p651

-Électromagnétisme, Roux, p103

-http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/general.php