

LP 29 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Manon Barrière, Cassandra Dailedouze

Niveau : L2

Prérequis :

- Ondes électromagnétiques dans le vide
- Equations de Maxwell
- Loi d'Ohm locale en statique
- Vitesse de phase
- Dérivée particulière

Introduction : On sait que dans le vide, le comportement d'une onde électromagnétique est régi par l'équation de D'Alembert. Cette équation a été établie en considérant un milieu vide de charge et de courants. Or, les équations de Maxwell dont on connaît la forme dans le cas général font apparaître un terme de charge et un terme de courant. Comment évolue la propagation de l'onde électromagnétique lorsque l'on prend en compte ces quantités ? Les équations de Maxwell ne se suffisent pas à elles mêmes si l'on tient compte de ces quantités (plus d'inconnues que d'équations). Il est donc nécessaire d'étudier un milieu donné et d'établir dans ce milieu une équation constitutive qui régira la propagation de l'onde. Quelle équation permet alors de décrire la propagation dans un milieu conducteur, sachant qu'il s'agit **Définition diapo** d'un milieu possédant des porteurs de charges libres de se déplacer ?

Exemples de milieux conducteurs : Métal, semi conducteur, plasma, électrolyte

Nous verrons en particulier la propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux et les plasmas.

But : trouver la réponse fréquentielle d'un conducteur selon la pulsation ω de l'OEM.

1 Ondes électromagnétiques dans un métal

1.1 Modèle de Drude (1900)

[Ascroft et Mermin Chapitre 1]

Trois ans après la découverte de l'électron par Thompson, Paul Drude construit sa théorie de la conduction électrique par application de la théorie cinétique des gaz à un métal.

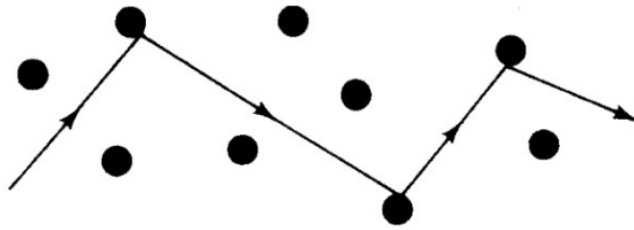
Modèle de Drude : Lorsque les atomes d'un élément métallique se rassemblent pour former un métal, les électrons de valence se détachent et se déplacent librement dans ce dernier pendant que les ions métalliques (constitués du coeur cationique correspondant au noyau et des électrons

de coeur) restent intacts. Un métal peut donc être modélisé par un réseau fixe d'ions immobiles et lourds baignants dans un gaz d'électrons de conduction libres de se déplacer ($M_{ions} \gg m_e$ - facteur 2000).

Ordre de grandeur de la densité particulière d'électrons de conduction : $n_{Cu} = 10^{29} \text{particules.m}^{-3}$.

Le modèle de Drude s'appuie sur quelques hypothèses (criticables mais qui permettent de se faire une idée simple et d'obtenir des estimations valides de certaines propriétés) :

- 1) On néglige les interactions électrostatiques électrons-électrons et électrons-ions.
- 2) Présence de collisions des électrons sur les ions du réseaux supposés fixes : événement instantané qui change de manière abrupte la vitesse d'un électron.
- 3) La probabilité d'effectuer une collision pendant une durée dt est $dP = \frac{dt}{\tau}$ avec τ le temps de libre parcours moyen, temps de collision ou temps de relaxation du système tel que $\tau_{Cu} = 10^{-14} \text{s}$.



4) Equilibre thermodynamique local établi par les collisions

Les collisions ralentissent alors le mouvement de l'électron, ceci se traduit par une force de type frottement fluide exercée sur un volume mésoscopique d'électron : $\vec{f} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$

1.2 Equation constitutive (ou Relation de structure)

On écrit le principe fondamental de la dynamique sur un volume mésoscopique d'électrons du gaz d'électrons de conduction dans un référentiel galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_{Lorentz} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

avec $\vec{f}_{Lorentz} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$.

On peut simplifier cette expression :

1) On choisit une forme d'ondes transverses (dessin trièdre direct E,B,k) Ondes transverses telles que :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \\ \vec{B} &= B_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y\end{aligned}$$

\vec{v} (vitesse du volume mésoscopique d'électrons) et \vec{E} sont parallèles, ainsi, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ [Garing Chapitre 3]

Donc le PFD (qui est en fait écrit sur un gaz donc s'apparente plus à une équation d'Euler sur un gaz d'électrons) est de la forme :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f}_{Lorentz} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

2) $\frac{f_{magnétique}}{f_{électrique}} = \frac{vB}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1$ puisque les électrons sont non relativistes.
On a donc finalement :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} - \frac{m \vec{v}}{\tau}$$

3) Régime sinusoïdal forcé d'où $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$. Alors,

$$m(i\omega) \vec{v} = -e \vec{E} - \frac{m \vec{v}}{\tau}$$

donc

$$\vec{v} = \frac{-e\tau}{m(1+i\omega\tau)} \vec{E}$$

Comme les ions sont supposés fixes, $\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_{ions} \simeq \vec{j}_e = -ne \vec{v}$

On en déduit ainsi :

$$\vec{j} = \sigma(\omega) \vec{E} \quad \text{Loi d'Ohm locale}$$

$$\text{avec } \sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau/m}{1+i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}$$

Commentaires :

A basse fréquence on retrouve les propriétés de conduction similaire à $\omega = 0$ (cas statique) avec une certaine conductivité σ_0 , c'est-à-dire la loi d'Ohm locale en statique.

A haute fréquence, les électrons n'arrivent pas à suivre l'excitation, cohérent avec $\sigma = 0$

1.3 Equation de propagation et relation de dispersion

- Equation de propagation :

On part du PFD :

$$m(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \vec{v}) = -e \vec{E} \text{ soit en multipliant par } ne,$$

$$m(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \vec{j}) = ne^2 \vec{E}$$

$$\text{Ainsi, } m(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau}) \text{rot}(\vec{j}) = ne^2 \text{rot}(\vec{E})$$

$$\text{Or, } \text{rot}(\vec{j}) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \text{rot}(\vec{E})}{\partial t} \text{ d'après Maxwell Ampère.}$$

Puis, avec Maxwell-Faraday, on retrouve :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau})(\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}) = \frac{w_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Equation d'onde}$$

où on peut noter la pulsation plasma : $w_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

- Relation de dispersion (obtenue en introduisant $B = B_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$) :

$$(i\omega + \frac{1}{\tau})((-ik)^2 - \frac{1}{c^2}(i\omega)^2) = \frac{w_p^2}{c^2} i\omega$$

$$k^2 = \frac{w^2}{c^2} - \frac{w_p^2}{c^2} \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau} \quad \text{Relation de dispersion}$$

Deux grandeurs caractéristiques apparaissent : $\tau = 10^{-14}$ s et $\omega_p = 10^{-16} \text{s}^{-1}$

On souhaite donc étudier les différents régimes qui peuvent exister en fonction de ces grandeurs.

1.4 Etude de différents régimes

Cas basse fréquence : $\omega\tau \ll 1$ ce qui est équivalent à $\omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$

La relation de dispersion devient : $k^2 \approx \frac{-i\omega\tau\omega_p^2}{c^2} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}\omega\tau\omega_p^2}{c^2}$

D'où $k = \pm \frac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2c^2}{\omega_p^2\omega\tau}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma_0}}$ l'épaisseur de peau (homogène à une longueur).

Rq : On choisit la solution + pour k car on veut une onde qui se propage selon les z croissants.
On a ainsi : $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x$ où $e^{-\frac{z}{\delta}}$ caractérise l'atténuation exponentielle sur une distance caractéristique δ et $e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$ caractérise la propagation.

Application numérique : Ordre de grandeur de δ

Pour le cuivre, $n_{Cu} = 6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$ (à température ambiante), à $\omega = 10^6$ rad/s, $\delta = 0.16$ mm.

Animation Python Effet de peau

Aspect énergétique : $\langle P_v \rangle \neq 0 = \sigma_0 \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \sigma_0 \frac{E_0^2}{2}$. Le conducteur ohmique reçoit de l'énergie du champ qu'il dissipe par Effet Joule

Cas haute fréquence : $\omega\tau \gg 1$

La relation de dispersion devient : $k^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.

On cherche $k = k' + ik''$.

Pour $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$ soit $k = ik''$ imaginaire pur d'où $k = \pm i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ alors $\vec{E} = E_0 e^{-k''z} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ onde évanescence (atténuation et pas de propagation onde stationnaire dont l'amplitude décroît au fur et à mesure que l'on entre dans le milieu).

Rq : On choisit la solution - pour k car il s'agit d'un système passif.

Animation Python Plasma BF

Pour $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ Pour $\omega > \omega_p$ réel d'où $k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = k'$ alors $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{e}_x$ onde progressive.

Rq : On choisit la solution + pour k car on veut que l'onde se propage selon les z croissants.

$v_\phi(\omega)$ dépend de ω (relation non linéaire entre ω et kv : phénomène de dispersion. Des Opp de pulsation ω différentes se propagent à des vitesses différentes.

Milieu transparent

Animation Python Plasma HF

Pour $\omega \gg \omega_p$ $k \approx \frac{\omega}{c}$, la propagation est identique au vide (variation de E trop rapides pour être ressenties par les électrons).

Aspect énergétique : \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase donc $\langle P_v \rangle = 0$. Milieu miroir réfléchissant (application aux métaux visibles dans le domaine du visible)

A chaque étape, on montre une animation issue d'un code Python. De plus, sur le diapo se trouve un résumé des différents régimes placés sur un axe en ω Métal différents régimes.

Métal = filtre passe bas avec la lumière

On remarque que le régime $\omega\tau \gg 1$ correspond aux hautes fréquences ou bien au cas τ petit donc à un milieu dilué comme on va le voir dans la suite pour le plasma.

2 Ondes électromagnétiques dans un plasma dilué

De la même manière que pour les conducteurs, on cherche d'abord à décrire les plasmas pour obtenir la relation constitutive et enfin l'équation d'onde et la relation de dispersion. Il va se déduire par analogie.

2.1 Modèle microscopique

Plasma : milieu partiellement ionisé contenant notamment des ions $(M, +e)$, des électrons $(m, -e)$. Il peut s'agir par exemple, d'un gaz à haute température soumis à un rayonnement ionisant. (4ème état de la matière)

- comme pour le métal $M \gg m$: ions fixes
- $n_c = n_e$ globalement neutre
- milieu dilué : Cette hypothèse correspond au fait qu'il n'y a pas ou peu d'interactions entre les particules considérées. (n faible) $\tau \rightarrow +\infty$ $\vec{f} \rightarrow 0$
- On a pour un plasma un $\omega_{p\text{plasma}}$ différent du $\omega_{p\text{metaux}}$

Exemples de plasmas ionisés et ordre de grandeur de n : ionosphère (couche atmosphérique ionisée par le rayonnement solaire), mais pas les étoiles.

On va pouvoir étudier les plasmas en travaillant par analogie avec les métaux.

2.2 Relations caractéristiques du plasma

$\sigma = \frac{-i\sigma_0}{w\tau}$ conductivité à partir de celle du métal

$$(\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}) = \frac{w_p^2}{c^2} \vec{B} \quad \text{Equation de Klein Gordon}$$

On peut la retrouver en faisant $\tau \rightarrow +\infty$ dans celle du métal.

Relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{w^2 - w_p^2}{c^2}$$

On retrouve bien celle du métal dans le cas $\omega\tau \gg 1$.

Echelle de ω avec les différents régimes dans le cas du plasma

On va voir à travers un exemple, comment ces phénomènes peuvent être utiles à la communication.

2.3 Application à la télécommunication

[Garing Chapitre 4] Dans cette application, on étudie un plasma dilué : l'ionosphère qui correspond à une des couches de notre atmosphère. La densité électronique de l'ionosphère est très variable, notamment entre le jour et la nuit. On prendra pour les calculs $n = 10^{12} m^{-3}$.

Schéma réflexion ionosphère On évalue ainsi la fréquence plasma de l'ionosphère à : $f_p = \frac{w_p}{2\pi} \approx 9 MHz$

- cas $f > f_p$: exemple $f_{ondesGPS} = 1GHz$. Cela permet de transmettre des informations à un satellite qui se trouve au dessus de l'ionosphère.

- cas $f < f_p$ exemple : $f = 100\text{kHz}$ grandes ondes radiocommunication Cas utile pour des radios qui voudraient augmenter le nombre d'auditeurs en atteignant des zones plus lointaines. En effet, l'utilisation de ces fréquences permettent les réflexions sur l'ionosphère.

Plasma = filtre passe haut

Conclusion : Nous sommes parvenus à modéliser des milieux conducteurs simples pour établir la forme des ondes dans ces milieux en fonction de la pulsation et ainsi l'adapter aux applications souhaitées. On pourrait ensuite étudier des milieux plus complexes tels que les semi-conducteurs dont le comportement dépend de la température : comportement conducteur ou diélectrique par rapport aux ondes électromagnétiques en fonction de T (ATTENTION : Il se peut qu'il faille alors connaître la forme des ondes dans les semis conducteurs si on parle de ça en ouverture.)

Temps de présentation : 39 min

Choix pédagogiques

On a fait le choix de développer les calculs pour comprendre la forme des ondes. Mais l'idée était tout de même de limiter les calculs car cette leçon peut être très calculatoire, pour se concentrer sur la forme des ondes dans chacun des régimes. On a choisi de traiter le métal en premier, puis de traiter le plasma, en montrant les similitudes avec le métal et ainsi en se servant de l'étude du métal pour faire celle sur le plasma. On choisit de traiter d'abord le cas le plus général (ici le métal) puis de le simplifier pour étudier le cas le plus simple (ici le plasma).

Bibliographie

- Ashcroft et Mermin, Physique des solides, Chapitre 1 Théorie de Drude des métaux
- Stéphane Olivier, Physique des ondes
- Garing, Chapitre 3 Ondes et conducteur métallique ; Chapitre 4 Ondes dans un plasma

Questions

- Difference entre un plasma froid et un plasma chaud ? Exemples
Un plasma est appelé froid lorsque celui ci est généré par une source lumineuse qui ionise les atomes du milieu. L'exemple type d'un plasma froid est l'ionosphère (qui est la dernière couche d'atmosphère ionisée d'une planète), comme son nom l'indique les atomes dans ce milieu sont ionisés par le rayonnement solaire. Un plasma est appelé chaud lorsque celui-ci est généré par une source de chaleur si intense qu'elle va séparer les électrons de leur noyau. Cet état de la matière particulier se retrouve dans le soleil.
- Dans le plasma, est ce que c'est la vitesse de phase qui décrit la vitesse de propagation de l'information ?

Non, c'est la vitesse de groupe car c'est un paquet d'onde qui se propage et non une OPPH mais ici on fait l'étude d'une OPPH pour comprendre les phénomènes. Dans la réalité, il s'agit d'une superposition de ces OPPH.

- Quelle forme d'onde si on a pas le $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}$?

Solliton

- Que sont les électrons de conduction ?

Ce sont les électrons de valence.

- Définition d'un semi conducteur

Les semi-conducteurs sont des corps solides dont la conductivité électrique se situe entre celle des métaux et celle des isolants. La conductivité électrique des solides est une propriété qui est due à la présence d'électrons libres de se déplacer dans le milieu et de générer ainsi un courant électrique. Le courant électrique est un simple écoulement de ce fluide d'électrons libres. L'étude des corps purs et bien cristallisés montre que les cristaux se séparent en deux grandes familles au voisinage du zéro absolu : les métaux conducteurs de l'électricité, qui contiennent un grand nombre d'électrons libres, et les isolants, où tous les électrons participent à des liaisons chimiques et sont donc fortement liés. Certains isolants deviennent conducteurs à plus haute température, en particulier s'ils contiennent des impuretés, des défauts cristallins ou des défauts de stœchiométrie (écart par rapport à la composition chimique nominale) ; ce sont par définition les semi-conducteurs. Un semi-conducteur est donc un cristal qui est isolant s'il est pur et au zéro absolu, et dont la conductivité électrique est due à l'agitation thermique, à des impuretés ou à différents types de défauts.

- Expérience de Markoni

Il est considéré comme l'un des inventeurs de la radio et de la télégraphie sans fil.

- Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons ?

Vitesse moyenne des électrons de l'ordre du mm/s (moyennée sur un volume mésoscopique) $\langle \vec{v} \rangle$ beaucoup plus faible que les vitesses de chaque électrons qui sont réparties jusqu'à la vitesse de Fermi ($v_F = 10^6$ m/s)

- Comment se justifie l'existence d'une force de frottement ?

Les électrons ont des vitesses qui s'annulent souvent $\langle \vec{v} \rangle = 0$ lors de collisions quand aucun champ électrique n'est appliqué. Le retour à la situation d'équilibre se fait avec un temps τ . L'effet des collisions individuelles des électrons est d'introduire un terme d'amortissement dans l'équation du mouvement de la quantité de mouvement par électron. Le $e^{-t/\tau}$ a la bonne forme même si il n'est pas justifié quantitativement dans le modèle de Drude.

Les collisions dans le modèle de Drude, comme dans la théorie cinétique, sont des événements instantanés qui changent de manière abrupte la vitesse d'un électron. Drude les attribua aux rebonds des électrons sur les cœurs impénétrables des ions, et non aux collisions électron-électron qui constituent le mécanisme prépondérant des collisions dans un gaz ordinaire. La diffusion électron-électron est en effet l'un des mécanismes de collision les moins importants dans un métal, sauf sous certaines conditions particulières. Cependant, le mécanisme simple schématisé d'un électron rebondissant d'ion en ion est loin de décrire la réalité. Heureusement, c'est sans importance : on peut comprendre de manière qualitative (et souvent quantitative) la conduction métallique en supposant simplement l'existence d'un certain mécanisme de diffusion, sans vraiment en préciser la nature. En faisant uniquement appel, dans notre analyse, à certaines généralités sur les processus de collision, nous évitons de nous compromettre en

adoptant un point de vue particulier concernant la façon dont la diffusion des électrons se produit.

- Application numérique de la conductivité du cuivre à 25 °C
 $\sigma = 0.64(\mu\Omega.cm)^{-1}$
- Interface vide-métal donner les conditions aux limites
Continuité de la composante tangentielle de E
Continuité de la composante normale de B
Discontinuité de la composante normale de E
Discontinuité de la composante tangentielle de B
- Pourquoi si les métaux sont transparents aux UV le plomb est utilisé pour arrêter les rayons X ?
Electrons de coeur à prendre en compte. Le modèle utilisé pour les métaux n'est plus valide pour le plomb excité par des rayons X car c'est un autre phénomène qui est mis en jeu faisant intervenir non pas que les électrons libres comme avec DRUDE mais les électrons liés. Les rayons X provoquent des changements de niveaux électroniques au sein des électrons des couches profondes.
- Situation physique où $\vec{j} \cdot \vec{E}$ peut transférer de l'énergie à l'onde
Laser à électrons libres. Il joue le rôle d'amplificateur de l'onde.
- Utilisation du signal qui rentre dans le métal
Antenne
- Pourquoi la couleur de l'or/ du cuivre ?
Limite de l'effet miroir, en réalité plus complexe (effet relativiste)
- Pourquoi sur un miroir on a un taux de réflexion à 97% ?
L'hypothèse $w \gg \frac{1}{\tau}$ est moyennement vérifiée pour des ondes dans le domaine visible dans un métal comme l'Argent. Ceci explique que les miroirs en argent ne soient pas totalement réfléchissants.
- Dessiner une onde soumise à l'effet de peau et une onde evanescente
Visible sur l'animation python

Remarques

- Bien insister sur la convention qu'on choisit $e^{i(\omega t - kz)}$ et faire attention aux conventions choisies dans les livres
- Parler de l'énergie pour expliquer ce qui se passe à l'interface pour justifier l'aspect miroir réfléchissant
- Bien de faire le métal d'abord puis le plasma ensuite
- Transposer le cas du plasma à partir de celui du métal plutôt sur diapo pour gagner du temps (tableau de synthèse sur le métal qui justifie tous les résultats du plasma)
- Attention à l'ouverture sur les semi-conducteurs qu'il faut alors maîtriser
- $v_\phi(\omega)$ ne pas parler de changement de longueur d'onde pour la dispersion
- Le calcul de l'équation de propagation générale pour aboutir à la relation de dispersion est compliqué, il valait mieux intégrer \vec{j}