Ondes acoustiques

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : Lois de la mécanique, équation de conservation, équation de D'Alembert

Introduction

On a tous une idée assez intuitive de ce que sont les ondes sonores, quand on parle à nos amis ou qu'on écoute de la musique : on a cette image d'une vibration de la membrane d'un haut-parleur ou bien des cordes vocales qui vont mettre en mouvement les molécules de l'air, puis elles vont se pousser de proche et proche et c'est ainsi que l'onde va se propager ! Mais quel rapport avec les ondes sismiques par exemple, qui déforment les roches de la terre sur plusieurs km ? Ou bien l'échographie qui permet de sonder ce qui se passe dans le ventre d'une femme enceinte ? Tous ces phénomènes peuvent être décrits par les ondes acoustiques, domaine très large qui décrit le déplacement d'une perturbation dans les fluides comme dans les solides, avec des OG de fréquences ou d'intensités très larges.

I Équations de l'acoustique

1) Approximation acoustique

On étudie une particule de fluide dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On suppose que le fluide est parfait et on néglige les effets de la pesanteur. On considère une évolution adiabatique réversible (isentropique).

On se place dans l'approximation acoustique : l'onde sonore est une faible perturbation, on conduit tous les calculs à l'ordre 1.

$P(M,t) = P_0 + p_1(M,t)$, $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$, $\vec{v} = \vec{v_1}(M,t)$

2) Équations d'évolution linéarisées

- On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule de fluide, de masse $\mu d\tau$:

$\mu d\tau \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}(p)d\tau$, avec $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$, le deuxième terme est négligeable car d'ordre 2

Après linéarisation à l'ordre 1, on obtient : $\mu_0 \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p)$

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + div(\vec{v}) = 0$$

A l'ordre 1 : $\frac{\partial\mu_1}{\partial t} + \mu_0 div(\vec{v}) = 0$

- Équation thermodynamique :

L'évolution des particules de fluide mises n mouvement par l'onde sonore est isentropique, le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit : $\chi_S = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial P}\Big)_S$ (on néglige la dérivée advective).

A l'ordre 1 : $\mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1$

3) Équation de propagation de la suppression acoustique

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mu_0 div(\vec{v})$$

On dérive l'équation d'Euler : $\mu_0 div\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\Delta p_1$

Avec le théorème de Schwarz, on peut écrire : $\mu_0 \frac{\partial div(\vec{v})}{\partial t} = -\Delta p_1$

Ainsi, on obtient l'équation de D'Alembert : $\Delta p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$

4) Célérité

On prend le modèle du gaz parfait, d'après la loi de Laplace : $P\mu^{-\gamma} = cste$

On fait une différentiation logarithmique et on obtient : $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0$

⇨ $\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}$

Ainsi, $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

M = 28,8 $g.mol^{-1}$, on prend T = 300 K et γ = 1,4 et on obtient : c = 350 $m.s^{-1}$ pour l'air.

Newton pensait que l'évolution des particules était isotherme, dans ce cas on aurait c = 294 $m.s^{-1}$.

Pour l'eau, c = 1500 $m.s^{-1}$

En fait notre "ressenti" du son ne passe pas uniquement par les conduits auditifs mais aussi à travers nos os, c'est l'ostéophonie. La légende dit que Beethoven, devenu sourd, utilisait une baguette coincée entre ses dents qui touchait également la caisse de son piano pour ressentir les vibrations à travers les os de sa mâchoire puis de son crâne ! Ce phénomène est aussi la raison pour laquelle notre voix nous paraît très différente dans les enregistrements par rapport à ce qu'on entend au quotidien : quand on parle les ondes sonores passent certes à travers notre conduit auditif, comme tous les autres sons qui proviennent de l'extérieur, mais aussi à travers les os de la mâchoire et du crâne.

Pour les solides, $c = \sqrt{\frac{E}{\mu_0}}$, pour l'acier c = 5300 $m.s^{-1}$

Après avoir caractérisé la propagation d'une onde sonore et estimé sa célérité, nous allons maintenant nous intéresser à l'énergie qu'elle transporte

II Étude énergétique

1) Bilan d'énergie

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p)$$

$$\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} + div(\vec{v}) = 0$$

On multiplie la première équation par $\vec{v}$ et la deuxième par p_1 puis on les somme. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0 {v_1}^2 + \frac{1}{2}\chi_S {p_1}^2\right) + div(p_1\overrightarrow{v_1}) = 0$$

On note $\vec{\Pi} = p_1\overrightarrow{v_1}$ le vecteur densité de flux de puissance, ou vecteur de Poynting acoustique,

$e_c = \frac{1}{2}\mu_0 {v_1}^2$ la densité volumique d'énergie cinétique et $e_p = \frac{1}{2}\chi_S {p_1}^2$ la densité volumique d'énergie potentielle. Finalement, on retrouve l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + div(\vec{\Pi}) = 0$$

2) Cas d'une onde progressive harmonique

$$p_1 = P_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

En remplaçant dans l'équation d'Euler : $i\omega\mu_0 v_1 = ikp_1$

Ainsi, on définit l'impédance acoustique : $Z = \frac{p_1}{v_1}$

Calcul : $e_c = e_p = \frac{e}{2}$

Π = ce

3) Intensité acoustique et niveau sonore

L'intensité acoustique se note $I = <\vec{\Pi}>$, l'intensité acoustique minimale (=seuil de détection) de l'oreille humaine est $I_0 = 10^{12}$ W.m^{-2}. On définit alors le niveau sonore (en dB) par : $I_{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

Revenons sur l'approximation acoustique :

- dérivée advective négligée :

$$\left|\frac{(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}}{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}\right| \ll 1 <=> \frac{v}{c} \ll 1$$

Pour une OPH, $v_1 = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}}$, si on prend 50 dB, $v_1 = 2.10^{-5}$ m.s^{-1} << c

- pesanteur négligée : $|\mu\vec{g}| \ll |\overrightarrow{grad}(p)| <=> f \gg \frac{g}{c} = 7.10^{-3} Hz$

Pour les ondes sonores, f est entre 20 Hz et 20 kHz

- adiabaticité :

Le temps caractéristique de diffusion est : $L_{diff} = \sqrt{\frac{D_{th}}{f}}$, on peut négliger les échanges thermiques si cette longueur est négligeable devant la longueur d'onde, c'est-à-dire si $f \ll \frac{D_{th}}{c^2}$ = 10^{13} Hz, ce qui est le cas

- approximation acoustique et linéarisations à l'ordre 1 :

Pour 50 dB, $p_1 = 10^{-2}$ Pa << P_0, et $\mu_1 << \mu_0$

Seuil d'audition : 0-10 dB

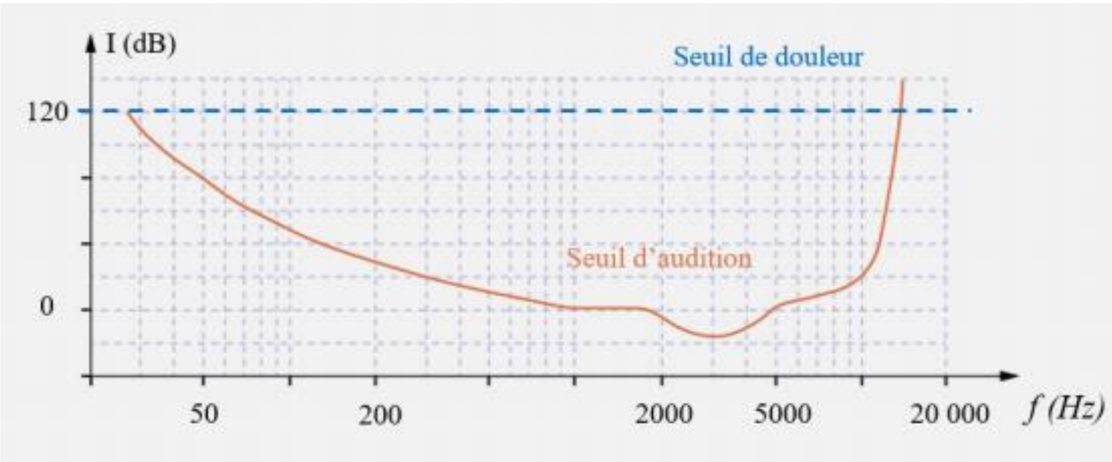
Pièce calme : 20 dB

Conversation normale à 1 m : 60 dB

Concert : 100 dB

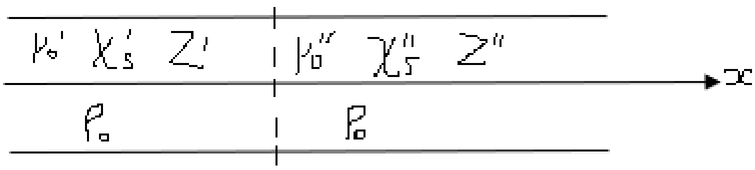
Seuil de douleur : 120 dB

Diagramme de Bode de l'oreille :



III Réflexion et transmission sans incidence normale

1) Position du problème



Hypothèses : les fluides ne se mélangent pas (l'interface est imperméable), les vitesses normales sont égales : $v_1'(0, t) = v_1''(0, t)$ pour tout t.

On applique le PFD à l'interface, de masse nulle : $0 = (P_0 + p_1')dS - (P_0 + p_1'')dS$

➔ $p_1'(0, t) = p_1''(0, t)$

$\underline{v_1}' = \underline{a_i}e^{i(\omega t - k'x)} + \underline{a_r}e^{i(\omega t + k'x)}$ et $\underline{v_1}'' = \underline{a_t}e^{i(\omega t - k''x)}$

$\underline{p_1}' = Z'(\underline{a_i}e^{i(\omega t - k'x)} - \underline{a_r}e^{i(\omega t + k'x)})$ et $\underline{p_1}'' = Z''\underline{v_1}''$

2) Réflexion et transmission en amplitude

Conditions aux limites : $\underline{a_i} + \underline{a_r} = \underline{a_t}$ et $Z'\underline{a_i} - Z'\underline{a_r} = Z''\underline{a_t}$

$r_v = \frac{\underline{a_r}}{\underline{a_i}} = \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''}$ et $t_v = \frac{\underline{a_t}}{\underline{a_i}} = \frac{2Z'}{Z' + Z''}$

$r_p = -\frac{\underline{a_r}}{\underline{a_i}} = \frac{Z'' - Z'}{Z'' + Z'}$ et $t_p = \frac{2Z''}{Z'' + Z'}$

3) Réflexion et transmission en puissance

$R = \frac{<\Pi_r>}{<\Pi_i>}$ et $T = \frac{<\Pi_t>}{<\Pi_i>}$

$v_i = a_i\cos(\omega t - k'x)$, $v_r = r_v a_i\cos(\omega t + k'x)$, $v_t = t_v a_i\cos(\omega t - k''x)$

$p_i = Z'a_i\cos(\omega t - k'x)$, $p_r = Z'r_p a_i\cos(\omega t + k'x)$, $p_t = Z't_p a_i\cos(\omega t - k''x)$

$<\Pi_i> = \frac{1}{2}Z'{a_i}^2$, $<\Pi_r> = \frac{1}{2}Z'r_v r_p {a_i}^2$, $<\Pi_t> = \frac{1}{2}Z't_v t_p {a_i}^2$

Donc $R = (\frac{Z' - Z''}{Z' + Z''})^2$ et $T = \frac{4Z'Z''}{(Z' + Z'')^2}$

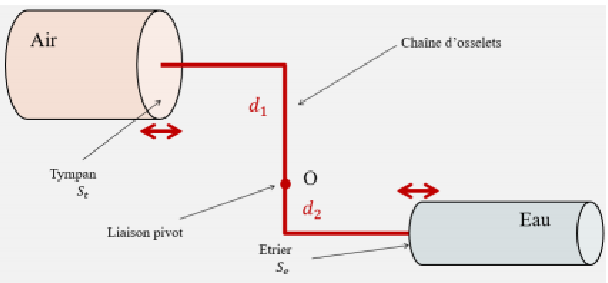
<u>R + T = 1</u> (traduit la conservation de l'énergie)

Ex : oreille

L'onde sonore arrive au niveau du tympan qui, en vibrant, la transmet aux liquides cochléaires, assimilables à de l'eau.

Z' ~ 400 kg.m^{-2}.s^{-1} (eau) et Z'' ~ 1,3.10^{6} kg.m^{-2}.s^{-1}

T = 1,1.10^{-3} << 1 : la transmission se fait très mal, la chute du niveau sonore est d'environ 30 dB.



➔ Adaptation d'impédance par les osselets

On applique le théorème du moment cinétique : $F_1d_1 = F_2d_2$

Donc $p_1S_td_1 = p_2S_ed_2$ -> $\frac{p_2}{p_1} = \frac{S_td_1}{S_ed_2} = 26$

Donc $\Delta I_{dB} = 10\log\left(\frac{p_2^2}{p_1^2}\right) = 28dB$

Ainsi grâce à la présence des osselets on peut entendre dans des conditions raisonnables. De plus il y a l'existence de ce qu'on appelle le réflexe stapédien : si l'intensité sonore entrante est trop grande les osselets se rigidifient et ne transmettent plus la vibration mécanique : on perd à nouveau les 28 dB.

Conclusion

En conclusion avec le modèle de l'approximation acoustique on a pu décrire de manière satisfaisante plusieurs phénomènes d'ondes acoustiques. Le modèle marche vraiment très bien. Toutefois il est insuffisant pour décrire des effets non linéaires mettant en jeu des ondes sonores de très fortes intensité, tels que le phénomène de lévitation acoustique, de plus en plus utilisé dans l'industrie car on peut mettre en mouvement des objets non conducteurs. A l'heure actuelle on n'est capable de déplacer que quelques milligrammes mais c'est encore en travaux et l'idée ce serait de l'utiliser dans les milieux pharmaceutiques.

Bibliographie

-Garing, Ondes

-Centrale Physique 1 PC 2015

Questions

- Limites du modèle de l'acoustique linéaire ?
- ➔ Ne suffit pas à expliquer le phénomène de lévitation acoustique (très intéressant d'ailleurs) qui est dû à des effets de non-linéarités des ondes sonores intenses. Utilisé dans l'industrie pour déplacement d'objets de manière contrôlée, et ce même pour des matériaux non conducteurs, ce qui n'est pas permis par la lévitation électromagnétique.
- Est-ce qu'on a toujours $c_{gaz} < c_{liq} < c_{sol}$?
- ➔ Non, cas particuliers : dihydrogène et chloroforme
- Grosse différence entre propagation dans les fluides et solides ?
- ➔ Dans les fluides l'onde se propage grâce à une variation de pression tandis que dans les solides le son se propage grâce à la vibration des atomes autour de leur position d'équilibre.
- Causes d'amortissement du son ?
- ➔ Absorption par relaxation moléculaire, par viscosité, ou par conduction thermique (échange de chaleur entre les tranches) (change l'équation de dispersion).
- Quelles sont les hypothèses de la loi de Hooke ?

- ➔ C'est une loi phénoménologique qui fonctionne très bien dans le domaine d'élasticité du solide (c'est-à-dire le domaine dans lequel après déformation le solide revient dans sa position initiale).
- Est-ce qu'on parles d'ondes longitudinales ou transversales ? Est-ce que les deux existent ?
- ➔ Oui les deux existent, dans les solides comme dans les fluides. Par exemple les ondes S sont des ondes sismiques de cisaillement. Dans les fluides les ondes de cisaillement existent aussi mais elles sont très vite atténuées.
- Qu'est ce qui caractérise la compressibilité d'un solide ?
- ➔ Equivalence entre le χ_S et le module d'Young, tous les deux caractérisent la compressibilité du milieu.
- Comment fonctionne la lévitation acoustique ?
- ➔ On crée des ondes acoustiques stationnaires verticales d'intensité très forte et on place l'objet au-dessus d'un ventre de pression et en dessous d'un nœud, et en moyenne on voit un gradient de pression tellement fort qu'il compense le poids suffisamment pour mettre l'objet en lévitation.
- Comment fonctionne l'échographie ?
- ➔ On envoie une onde acoustique ultrasonore (longueur d'onde de l'ordre du mm pour éviter la diffraction sur les organes) puis réflexion sur le bébé et d'après les distances de parcours on peut cartographier ce qui se passe dans le ventre.
- Pourquoi on applique un gel ?
- ➔ Le contact entre la sonde et la peau n'est pas parfait, il y a à priori une fine couche d'air or si on fait le calcul du coefficient de transmission en intensité air/peau, on trouve qu'il est très faible (10^{-3}), d'où l'application d'un gel avec une impédance acoustique très proche de celle de la peau.
- Autre utilisation des ondes acoustiques en médecine ?
- ➔ On peut détruire des caillots de calcium responsables de cancers de la prostate en focalisant des ondes acoustiques dessus.
- Comment on focalise ?
- ➔ Comme en optique il existe des lentilles acoustiques. Par contre elles devraient avoir des tailles de l'ordre du mètre... Il y a une autre technique utilisée notamment pour les échographies : l'émetteur est constitué d'une barrette de plein de petits émetteurs dont on pilote le déphasage pour focaliser à une profondeur donnée.
- Phénomène de mirage acoustique ?
- ➔ Un gradient de célérité implique un gradient d'impédance Z et la trajectoire de l'onde sonore est donc incurvée vers les zones ou la vitesse du son est la plus faible. Or dans les fluides la célérité (et donc l'impédance) augmente avec la température T et la pression P. Dans les océans, avec la profondeur T diminue mais P augmente. Du coup il existe une certaine profondeur à laquelle tout cela se compense et on a une valeur minimale de la célérité des ondes sonores. C'est le canal SOFAR situé à environ 1000 m de profondeur. Si une baleine par exemple émet à cette profondeur toutes les ondes vont être incurvées de sorte à être "canalisées" et ça va fonctionner comme un guide d'onde de sorte que les ondes vont pouvoir se propager sur de très grandes distances. Utilisé aussi par les sous-marins pour se cacher des sonars : il suffit de se mettre en dessous de cette ligne, car alors toutes les ondes arrivant de la surface de l'eau, à moins qu'elles soient exactement au-dessus du sous-marin et donc arriver normalement au dioptre, vont être courbées et jamais atteindre le sous-marin. Remarque : on a le même phénomène dans l'air...
- Pourquoi dans les concerts on entends via le squelette ?
- ➔ Via le sol puis adaptation d'impédance par les chaussures.

- Célérité des ondes sismiques ?

➔ Ondes S et P entre 5 et 10 $km.s^{-1}$. S'il y a des gradients de température ou autres qui font diminuer ou augmenter la célérité au cours du trajet, ça donne un indice pour savoir si on est passé par un milieu plus chaud, et donc plus compressible, et donc de supers infos sur ce qui se passe dans la croûte terrestre.

- Pourquoi un trombone est plus bruyant qu'une flûte ?

➔ Cornet fait une adaptation d'impédance.