

# LP Ecoulements visqueux naturels et industriels

Dihya Sadi et Elio Thellier

Session 2021

## 1 Introduction de la notion de viscosité

### 1.1 Observations expérimentales

La viscosité : observée expérimentalement pour certains fluides. Expérience : plaque fixe et une plaque qu'on tire. Le fluide va se mettre en mouvement de proche en proche.

Observation : la force de l'opérateur pour maintenir la plaque à  $v_0$  est proportionnelle à  $\frac{Sv_0}{L}$ . Ce coefficient de proportionnalité est la viscosité dynamique. Il dépend du type de fluide.

Quelques OG à avoir en tête sur slide.

### 1.2 Modèle de Newton

La viscosité impose une continuité du champ des vitesses. Nouvelles conditions limites.

Soit un fluide dont le champ des vitesses s'écrit :

$$\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$$

On pose  $d\vec{F}$  = action de la couche de fluide  $y > y_0$  sur  $y < y_0$

On a :

$$d\vec{F} = \eta dS \frac{dv}{dy} \vec{e}_x$$

On observe que cette force est perpendiculaire à la surface : c'est ce qu'on appelle une force de cisaillement (définition). Pour la décrire on introduit la contrainte :

$$\sigma = \frac{dF}{dS}$$

Un fluide est dit newtonien si  $\eta$  ne dépend pas de  $\sigma$  la contrainte. Pour un tel fluide la relation entre déformation (gradient des vitesses) et contrainte est linéaire.

### 1.3 Force volumique

En généralise l'expression de cette force de viscosité sur un volume. Cf slide. On est toujours dans le cas où  $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$

$$d\vec{F} = (\eta dS \frac{dv}{dy}(y + dy) - \eta dS \frac{dv}{dy}(y))\vec{e}_x$$

$$d\vec{F} = \eta d\tau \frac{d^2v}{dy^2} \vec{e}_x$$

On généralise en 3D (avec la condition d'incompressibilité). La force volumique de viscosité s'exprime alors :

$$\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$$

Si on prends on compte cette force volumique dans l'équation d'Euler on obtient l'équation de Navier Stokes, valable pour les fluides newtoniens et incompressibles. A encadrer et insister sur les hypothèses.

Remarque : on observe que les effets de viscosité correspondent à une diffusion de la quantité de mouvement.

### 1.4 Caractériser l'écoulement, nombre de Reynolds

On compare dans l'équation de Navier Stokes les deux termes convectifs et diffusifs. On exprime les temps caractéristiques associés à la diffusion et à la convection.

$$Re = \frac{\mu v L}{\eta}$$

Permet de savoir si le transfert de quantité de mouvement est majoritairement dominé par la diffusion ou la convection.

Critère pour un écoulement dans un tuyau cylindrique :

- Si  $Re < 2000$  : écoulement laminaire
- $Re > 3000$  : écoulement turbulent

En fonction de la valeur de  $Re$  on va pouvoir simplifier l'équation de Navier Stokes et obtenir des solutions ! (Navier Stokes complète n'est pas résoluble analytiquement...) Si on a introduit ce critère là c'est pas pour rien : c'est l'application à laquelle on va s'intéresser tout de suite.

## 2 Ecoulement d'un fluide visqueux dans une canalisation cylindrique

### 2.1 Profil de l'écoulement

Hypothèse :

- Cylindre parfait et incompressible/non déformable
- Définition sur slide des pressions et géométries
- Ecoulement stationnaire
- Fluide non newtonien
- Fluide incompressible
- On néglige le poids par rapport aux forces de pression et de viscosité (en fait est-ce que c'est pas juste qu'on se place dans une direction d'écoulement orthogonale à la direction du poids ?)
- Ecoulement laminaire

Que donnent ces hypothèses ?

- Si on est laminaire alors on a  $\vec{v} = v(r, \theta, z)\vec{e}_x$
- Invariance par rotation autour de l'axe z :  $\vec{v} = v(r, z)\vec{e}_x$
- Incompressible :  $\text{div}(\vec{v}) = 0 : \frac{\delta v}{\delta z} = 0$
- On reprends Navier Stokes que l'on simplifie dans les hypothèses stationnaire et laminaire :

$$\vec{0} = -g\vec{r}ad(P) + \eta\vec{\Delta}\vec{v}$$

On utilise l'expression du laplacien vectoriel en cylindrique et on projette sur  $\vec{e}_r, \vec{e}_z$ . La première nous donne  $p=p(z)$  et la deuxième nous donne une égalité de deux fonctions l'une uniquement de r l'autre uniquement de z d'où introduction d'une constante  $\alpha$ . On en déduit l'expression de la pression avec les CL  $P(0) = P_e$  et  $P(L) = P_s$  :

$$P = \frac{P_s - P_e}{L}z + P_e$$

Expression que l'on introduit dans l'autre équation et on obtient après quelques lignes de calculs et intégrations, et utilisation de la continuité du champ des vitesses en R ( $V(R)=0$ ) et non divergence en  $r=0$  :

$$v(r) = \frac{\Delta P(R^2 - r^2)}{4\eta L}$$

On obtient un profil quadratique, avec diffusion de la vitesse depuis le centre. Ce qui nous intéresse toutefois dans l'industrie c'est le débit.

## 2.2 Perte de charge

Expression du débit massique :

$$D_m = \int \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

Après calcul :

$$D_m = \frac{\pi R^4 \rho \Delta P}{8 \eta L}$$

Ce qui est intéressant de voir c'est que si on veut imposer un débit sur une distance  $L$  à travers un tuyau on va nécessairement avoir une chute de pression. Donc pour faire s'écouler un tel fluide il faut imposer une différence de pression et ça ça coûte de l'énergie.

## 2.3 Cas d'un pétrole brut dans une pipeline

On veut acheminer le pétrole depuis le trou de forage jusqu'à la raffinerie ou on va lui faire subir des transformations pour qu'il puisse être utilisé dans les chaumières. On utilise des pipelines pour lesquelles on prends le modèle suivant (à faire sur un schéma) :

- Diamètre  $d = 25\text{cm}$
- Débit massique  $D_m = 18\text{kg/s}$

Caractéristiques du pétrole brut :

- Masse volumique :  $\rho = 900\text{kg/m}^3$
- Viscosité  $\eta = 0,26$ : à comparer avec celle de l'huile : 2 fois plus élevée donc très grosse viscosité

Maintenant première chose à faire quand on traite un problème de dynamique des fluides : calculer le nombre de Reynolds pour savoir dans quel régime on se situe. On calcule le débit volumique  $D_v = \frac{D_m}{\rho}$  puis  $v = \frac{D_v}{\frac{\pi d^2}{4}}$  puis calcul du  $Re = 300 < 2000$ . Donc on est dans le cas de la perte de charge qu'on vient de voir et on peut utiliser notre formule.

On va placer des stations de pompage régulièrement, chacune pouvant augmenter la pression de 4,5 bars. Question : tous les combien de mètres il faut placer une pompe ?

$$L = \frac{\pi \rho d^4}{128 \eta D_m} = 8265\text{m}$$

## 2.4 Cas du sang dans les artères

Pas eu vraiment le temps de toute manière l'exemple est à reprendre avec l'épreuve de 2016 d'Agro-Veto.

## 3 Conclusion

On peut critiquer un peu les modèles... On a travaillé avec des canalisations indéformables. Les veines c'est pas comme ça. Elles peuvent se dilater pour s'adapter et compenser les chutes de pression quelque chose comme ça...

## 4 Questions de Manu Combes

- Mesurer la taille totale du réseau sanguin si tout avait 1mm c'est pas forcément pertinent... Qu'est ce qu'on peut faire ?
- Paramètre prépondérant sur la viscosité d'une huile ? Sa température. Et d'ailleurs c'est très drastique. Comment se fait cette dépendance ? Quand la température augmente il y a davantage d'agitation thermique donc davantage de contact entre les molécules, transmission/diffusion de quantité de mouvement se fait beaucoup mieux grâce aux chocs. Donc la viscosité diminue car la quantité de mouvement est plus facile à transmettre.

**Viscosité = capacité du fluide à freiner la quantité de mouvement qu'on lui donne.**

- Quel type de loi ça peut être (dépendance en température de la viscosité) ? Facteur de Boltzmann type loi d'Arrhénius. ça va très très vite !
- De quoi dépendent les pertes de charge que ce soit dans le corps humain ou dans l'industrie, en réalité ? Il existe d'autres paramètres que ceux qu'on a utilisés dans le modèle simple. Etat de surface de la canalisation : granuleux, rugueux, matériau utilisé, etc... Comment on quantifie ça ? Diagramme de Moody, abaques ! Donne la valeur du paramètre qui permet de déterminer la perte de charge. Perte de charge toujours proportionnelle à l'énergie cinétique volumique, avec un facteur de forme qui dépend de la rugosité et du nombre de Reynolds. Ce facteur de forme est important quand on est en régime turbulent. Quand on est en régime laminaire, on peut calculer que le coefficient vaut  $\frac{64}{Re}$ .

**Idée : ajouter le diagramme de Moody dans la leçon pour se démarquer un peu**

- Les pertes de charges peuvent aussi dépendre des accidents sur le parcours : coudes, changement de sections etc... Il s'agit ici de pertes de charges singulières (et non régulières), qui sont tabulées aussi dans l'industrie de manière empirique

- Quand est-ce qu'un gaz est soumis à des problèmes d'écoulement qui devient incompressible ? Vitesse qui devient comparable à la vitesse du son.
- On aurait pu faire le calcul avec un PFD sur un cylindre de rayon  $r$  et longueur  $L$  avec un frottement... En quelques lignes, sans utiliser NS. Plus rapide. On pourrait gagner du temps pour aller plus loin du coup niveau industriel. (A chercher dans un bouquin de PSI de deuxième année)
- Suggestion sur les veines : Epr Agro Veto 2016. Parler de phlébite strombose etc. Rétrécissement du rayon de quelques mm. Veine de 6mm de rayon puis sténose de 1cm de longueur avec un rayon qui passe à 2mm on passe d'un débit de 42 mL/s à 4 mL/s. Mais toute l'étude se fait en stationnaire. L'apport en nutriment et le nettoyage des tissus ne se fait quasiment plus. ça fait apparaître la résistance hydraulique (au même titre que la résistance thermique, le régime stationnaire est équivalent à l'ARQS)
- Sous quelle conditions on peut négliger les forces volumiques de pesanteurs ? Quand on fait l'AN ça marche pas... Réfléchir là dessus. Est-ce qu'on compare les bonnes choses ?
- Différence fluide compressible et écoulement compressible ?
  - Ecoulement incompressible :  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  ie  $\text{div}(\mathbf{v})=0$ .
  - Fluide incompressible : on arrive pas à lui faire changer de volume quand on pousse dessus. On arrive pas à lui faire changer sa masse volumique en changeant la pression. Donc c'est sur le coefficient de compressibilité.

Ici se limiter dès le début aux écoulement incompressibles. On s'en fiche que le fluide soit incompressible ou non, on s'en soucie pas parce que l'écoulement reste incompressible dans tous les cas.

- Fluide Newtonien : loi de modélisation linéaire entre la contrainte et le taux de déformation. Analogie avec la loi de Hooke qui est en compression, et loi de Newton qui est en cisaillement.
- Zoologie des fluides non-newtoniens :
  - Rhéo-épaississant : mélange maizena-eau : se rigidifie sous la contrainte
  - Rhéo-fluidifiant : compote de fruit
  - Fluide à seuil : Si on lance du dentifrice sur la glace de la salle de bain il se colle et ne coule pas. Il subit une contrainte pourtant il ne coule pas... Il y a un seuil de contrainte pour lequel l'écoulement démarre. Un autre exemple est le napalm.

- Ici on a travaillé avec des tenseurs isotropes ce qui simplifie beaucoup les choses. Ecoulements granulaires par exemple sont non isotropes, ou bien les cristaux liquides...
- Il y a des viscosités très élevées. Donner des OG plus grands dans l'introduction. Pétrole, magma (paramètre numéro 1 est la température), miel (10 Pa.s, on peut monter jusqu'à 100 Pa.s si il fait froid),
- Manteau terrestre en convection : base très chaude et au dessus très froid du coup mouvement de convection. Cette convection se voit au niveau de la tectonique des plaques. C'est la partie visible de la convection. ça met quelques millions d'années... Viscosité de  $10^{20} Pa.s$ .
- Rigidité du sol  $10^{23} Pa.s$
- *"Un solide n'existe pas c'est une vue de l'esprit... C'est comme le vide..."*
- Comment on peut mesurer la viscosité de la roche ? Le nord de l'Europe était sous un glacier de plusieurs km de glace il y a 10 000 ans et ça enfonçait le sol de plusieurs cm puis en 1000 ans cette glace a fondu, on a relâché une très très forte contrainte, et la croûte terrestre remonte depuis. Rebond post-glacière. La Scandinavie remonte. C'est ce qui nous a permis de mesurer la viscosité du manteau terrestre.
- 2 impasses faites dans cette leçon : la notion de couche limite pour un fluide un peu moins visqueux. C'est comme ça dans la vraie vie. Comment on se débrouille avec Navier-Stokes quand on parles de VRAIS écoulements ? En introduisant la notion de couche limite.
- Applications plutôt chouettes si on parle de couches limites : Taille caractéristique de la couche limite, nombre de Reynolds dans la couche limite, montrer que c'est la racine carré du nombre de Reynolds de l'extérieur. Donc la couche limite peut devenir turbulente. C'est ce qui explique le phénomène de la crise de traînée. Créé un sillage, et la couche limite décolle à un certain point à cause d'un gradient de pression inverse, et plus elle décroche tout plus on a une traînée importante... Jusqu'à ce qu'elle devienne turbulente et "raccroche" ou en tout cas le décollement a lieu plus tard car le terme de gradient n'est plus dominant.
- En dehors de la couche limite on peut négliger la force de viscosité mais elle n'est PAS nulle.
- Mettre en pré-requis Navier Stokes et la notion de viscosité. Attaquer bille en tête avec l'écoulement de Poiseuille, pertes de charges régulières et singulières,
- Mines Pont PSI 2010 sur la crise de traînée

- Exemple de calcul de perte de charge avec le diagramme de Moody : E3A PSI 2016 (vidange d'une citerne), exemples de coudes etc avec lecture du diagramme de Moody, on peut comparer perte de charge régulière singulière.