Dispersion et absorption

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : équation de D'Alembert, équations de Maxwell, ondes électromagnétiques dans le vide

Introduction

Un grand nombre de phénomènes de propagation sont solution de l'équation de D'Alembert. Celle-ci n'a toutefois pas de caractère universel : d'autres phénomènes sont solution d'autres équations aux dérivées partielles, comme l'équation de diffusion. L'objectif de ce cours est de généraliser l'étude de phénomènes de propagation unidimensionnels à toutes les équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

I Corde vibrante amortie

1) Équation de propagation et relation de dispersion

On reprend le modèle de la corde vibrante et on ajoute un terme d'amortissement : $-\lambda dx \frac{\partial y}{\partial t}\overrightarrow{e_y}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b\frac{\partial y}{\partial t}$, avec $b = \frac{\lambda}{T_0} > 0$

On cherche des solutions de la forme : $\underline{s}(x,t) = \underline{s_0}e^{i(\omega t - kx)}$

On obtient la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega b$

2) Ondes planes presque progressives harmoniques

Il n'existe pas de solution réelle pour la relation précédente. Mais si on prend k complexe alors des solutions sont possibles. Il ne s'agit plus d'OPPH, mais comme leur structure est proche, on parlera d'ondes presque planes progressives harmoniques.

$\underline{k} = k'(\omega) + ik''(\omega)$, k' et k'' sont réels.

$$\underline{s}(x,t) = \underline{s_0}e^{i(\omega t - kx)} = \underline{s_0}e^{k''x}e^{i(\omega t - k'x)}$$

➔ $s(x,t) = s_0 e^{k''x}\cos(\omega t - k'x)$

La partie réelle de $\underline{k}$ agit sur la propagation, la partie imaginaire de $\underline{k}$ agit sur la dépendance spatiale de l'amplitude de l'onde.

Pour une prise en compte de phénomènes dissipatifs, on doit avoir une atténuation de l'onde dans le sens de propagation : k'k'' < 0.

3) Vitesse de phase, dispersion

La vitesse de phase s'écrit : $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})} = \frac{\omega}{k'}$

A priori, v_φ dépend de ω → deux ondes de pulsations différentes ne se propagent pas à la même vitesse : c'est le phénomène de dispersion.

Un milieu est dit dispersif si v_φ dépend de ω

Ex : décomposition de la lumière blanche par un prisme

L'angle de réfraction dans un prisme dépend de l'indice $n = \frac{c}{v_\varphi}$, donc n dépend de λ

4) Absorption

Le terme $e^{k''x}$ décrit un amortissement ou une amplification selon le signe de k'' et le sens de propagation. La situation la plus fréquemment rencontrée est celle de l'amortissement : on dit alors que le milieu est absorbant. On peut caractériser l'amortissement par une distance caractéristique : $\delta = \frac{1}{|k''|}$

II Propagation d'une onde quelconque

Une onde réelle est la superposition d'OPPH, elle se propage en se déformant → par absorption, par dispersion.

On néglige l'influence de l'absorption.

1) Propagation de deux ondes de fréquences voisines

$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$, $\Delta\omega \ll \omega_0$

$k_1 = k(\omega_1) = k\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right) = k(\omega_0) - \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk}{d\omega}\Big)_{\omega_0}$

$k_2 = k(\omega_2) = k\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) = k(\omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk}{d\omega}\Big)_{\omega_0}$

$k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2}$ et $k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2}$, $\Delta k \ll k_0$

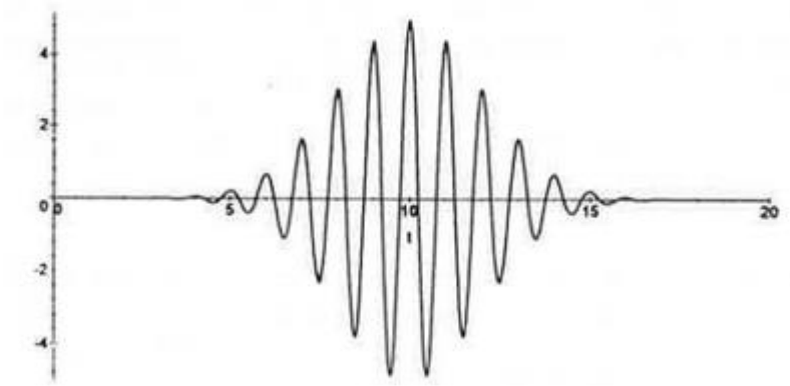
$$s(t) = s_0\cos(\omega_1 t - k_1 x) + s_0\cos(\omega_2 t - k_2 x) = 2s_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

On note que l'enveloppe se propage à $v_\varphi = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

2) Généralisation : notion de paquet d'ondes

<u>paquet d'onde</u> : superposition d'OPPH dont la fréquence varie continûment entre $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ et $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$. On parle d'onde plane dont le spectre est centré sur f_0 et de largeur Δf.

Ex :



Plus le milieu est dispersif, plus le paquet d'ondes s'étale. Ce comportement implique une limitation pour la propagation d'informations. On retient en général qu'il faut que le premier minimum d'un signal soit séparé du maximum du précédent pour que les signaux soient séparables.

3) Vitesse de groupe

Pour un milieu faiblement dispersif, un paquet d'ondes se propage à la vitesse v_g, dite vitesse de groupe, définie par : $v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0, k_0}$

v_g définit la vitesse moyenne de propagation d'un paquet d'ondes. Elle représente une information ou une forme d'énergie.

Pour un milieu non dispersif, $v_g = v_\varphi = c$

III Dispersion dans un plasma

1) Modèle

Un plasma est un gaz dont les atomes sont ionisés : il est constitué de cation et d'électrons.

Au repos, un plasma est localement neutre. Les atomes ont une masse M, les électrons ont une masse m, m << M. Les cations sont supposés quasi-immobiles.

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique presque plane progressive harmonique, se propageant selon Oz, la polarisation est selon Ox.

- ➔ $div(\underline{\vec{E}}(M,t) = -i\underline{\vec{k}}.\underline{\vec{E}}(M,t) = 0$ (Maxwell-Gauss)
- ➔ $\rho = 0$
- ➔ $\rho_e = -\rho_c$

2) Conductivité

On suppose les électrons non relativistes. On néglige la force magnétique devant la force électrique.

On applique le PFD à un électron : $m\frac{d\overrightarrow{v_e}}{dt} = -e\underline{\vec{E}}$ → $im\omega\underline{\overrightarrow{v_e}} = -e\underline{\vec{E}}$

La densité de courants s'écrit : $\vec{j} = -n_e e\underline{\overrightarrow{v_e}} = \frac{n_e e^2}{im\omega}\underline{\vec{E}}$, n_e est la densité particulaire d'électrons dans le plasma au repos.

D'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$

Donc la conductivité s'écrit : $\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2}{im\omega}$

Comme $\underline{\gamma}$ est imaginaire pur, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature → la puissance moyenne cédée aux charges est nulle.

3) Équations de Maxwell et conséquences

Maxwell-Gauss : $-i\underline{\vec{k}}.\underline{\vec{E}} = 0$

Maxwell-Faraday : $-i\underline{\vec{k} \wedge \vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$

Maxwell-Thomson : $i - \underline{\vec{k}}.\underline{\vec{B}} = 0$

Maxwell-Ampère : $-i\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}} + \mu_0\vec{j}$ → $-i\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = (\frac{i\omega}{c^2} + \mu_0\underline{\gamma})\underline{\vec{E}}$

L'onde est transverse électrique et transverse magnétique.

La relation de dispersion s'écrit : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_e e^2}{m}$

On introduit la pulsation plasma : $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}}$, $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}$

Le milieu est dispersif.

4) Propriétés des ondes dans un plasma

Si $\underline{k}^2 < 0$: $\underline{k} = -\frac{i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{c^2}{{\omega_p}^2 - \omega^2}}$

Le champ électromagnétique dans le plasma est une onde stationnaire amortie sur la distance caractéristique δ : on parle d'onde évanescente.

Les fréquences inférieures à f_p ne peuvent pas se propager.

Si $\underline{k}^2 > 0$: $k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}}$ (propagation car k est réel)

La vitesse de phase s'écrit : $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}}} > c$

La vitesse de phase est supérieure à c, vitesse limite imposée par la théorie de la relativité à tout transport d'information. Il n'y a là aucun paradoxe puisque qu'une OPPH seule n'a pas d'existence physique.

La vitesse de groupe s'écrit : $v_g = c\sqrt{1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}} < c$

La vitesse de groupe est inférieure à c : en effet un paquet d'ondes possède une existence physique, et sa modulation transporte une information.

On note que $v_\varphi v_g = c^2$

Conclusion

Dans cette leçon, nous avons expliqué certains phénomènes qui ne sont pas régis par l'équation de D'Alembert.

Bibliographie

-Olivier, Physique des ondes