Statique des fluides

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : approximation des milieux continus, opérateur gradient, lois de Newton

Introduction

La statique des fluides, ou hydrostatique, est l'étude des fluides au repos. En statique des fluides, il n'y a pas de mouvement macroscopique d'une particule fluide par rapport à une autre.

I Relation fondamentale de la statique des fluides

1) Pression dans un fluide au repos

Un fluide au repos exerce sur une paroi une force pressante répulsive normale à la paroi, proportionnelle à la surface. Sur une surface $\overrightarrow{dS}$ s'exerce au point M : $\overrightarrow{dF} = P(M)\overrightarrow{dS}$

La pression est donc la force surfacique exercée par un fluide au repos.

2) Forces volumiques équivalentes

On s'intéresse à la résultante des forces de pression exercées par le reste du fluide sur une particule de fluide de volume dτ.

Schéma d'un cube, forces s'exerçant sur deux parois (par exemple selon l'axe Ox)

$$\overrightarrow{dF} = \sum_{i=1}^{6} \overrightarrow{df_i}$$

$$\overrightarrow{df_1} + \overrightarrow{df_2} = P(x,y,z)dydz\overrightarrow{e_x} + P(x+dx,y,z)dydz(-\overrightarrow{e_x}) = -\frac{\partial P}{\partial x}d\tau\overrightarrow{e_x}$$

De même, $\overrightarrow{df_3} + \overrightarrow{df_4} = -\frac{\partial P}{\partial y}d\tau\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{df_5} + \overrightarrow{df_6} = -\frac{\partial P}{\partial z}d\tau\overrightarrow{e_z}$

Donc $\overrightarrow{dF} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right)d\tau = -\overrightarrow{grad}(P)d\tau$

Les forces pressantes qui s'exercent sur une surface fermée S délimitant un volume V sont équivalentes à des forces volumiques de densité volumique $\frac{\overrightarrow{dF}}{d\tau} = -\overrightarrow{grad}(P)$.

Que se passe-t-il à l'interface entre deux fluides ? A l'interface entre deux fluides, il existe des phénomènes dits de tension de surface/superficielle qui font que P n'a aucune raison d'être continue. On négligera ces phénomènes dans la suite : P est donc continue à la traversée d'une interface.

Pour un champ de pression uniforme P = P_0 = cste, la résultante des forces de pression est nulle sur toute surface fermée est nulle.

3) Relation fondamentale de la statique des fluides

On considère une particule de fluide de masse dm, de volume dτ, immergée dans un fluide au repos.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- forces pressantes exercées par le reste du fluide : $-\overrightarrow{grad}(P)d\tau$
- poids de la particule de fluide : $\rho d\tau\vec{g}$

D'après le PFD : $\vec{0} = \left(\rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}(P)\right)d\tau$, on en déduit la relation fondamentale de la statique des fluides : $\rho\vec{g} = \overrightarrow{grad}(P)$

$\overrightarrow{e_z}$ verticale ascendante : $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$

$\overrightarrow{e_z}$ verticale descendante : $\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g$

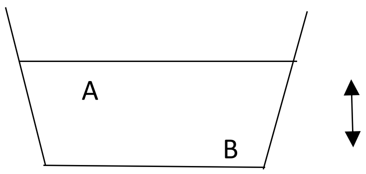
➔ Dans le champ de pesanteur et dans un référentiel galiléen, les surfaces isobares sont des plans horizontaux

II Applications

1) Liquide incompressible

On suppose que ρ et g sont constants. La relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

$\Delta P = \rho g \Delta z$, ou encore $P(B) - P(A) = \rho g(z_B - z_A)$. La seule condition pour appliquer cette relation, c'est qu'on puisse relier A et B par un chemin composé du liquide.



P(B) - P(A) = ρgh

Théorème de Pascal : Si on fait varier P(A) de ΔP(A), alors au point B, P(B) varie de ΔP(B) = ΔP(A).

<u>Toute variation de pression est transmise intégralement en tout point du fluide</u>.

Expérience : tonneau de Pascal : comment faire exploser le tonneau avec 1L d'eau ? Le tonneau est rempli à ras-bord, on utilise un tube en verre et on continue à remplir (on gagne 1 bar pour 10m)

2) Modèle de l'atmosphère isotherme

On fait les hypothèses suivantes :

- L’air est un gaz parfait diatomique
- La température est uniforme
- $\overrightarrow{e_z}$: verticale ascendante
- Le champ de pesanteur est uniforme
- L’étude se fait dans le référentiel terrestre, supposé galiléen

La relation fondamentale de la statique des fluides s’écrit : dP = -ρgdz

De plus, $\rho = \frac{PM}{RT}$ donc $dP = -\frac{MPg}{RT}dz$, soit $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz$

On intègre entre z = 0, P = P_0 et z > 0 et P

$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{RT}z$ donc $P = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z} = P_0 e^{-\frac{z}{H}}$, H vaut environ 8 km

Si z << 1 : $P(z) = P_0(1 - \frac{z}{H})$

Le modèle de l’atmosphère isotherme ne s’applique pas à basse atmosphère ou haute atmosphère.

III Théorème d’Archimède

1) Énoncé

On cherche à déterminer la force résultante qu’exerce un fluide sur un corps immergé. C’est naturellement la somme (intégrale) des forces pressantes élémentaires : $\vec{\Pi} = \iint P(M)\vec{n}.\overrightarrow{dS}$.

Malheureusement, dans la plupart des cas, cette intégrale est tout simplement incalculable. Pourtant, on peut déterminer $\vec{\Pi}$ sans calculer cette intégrale.

Les forces pressantes sont des forces de surface. Ainsi, si on remplace le corps immergé par un corps quelconque mais de même surface extérieure, le résultat est le même. On peut donc le remplacer par du fluide identique à celui dans lequel on est immergé. On prend alors comme système ce volume de fluide. Puisque le fluide est en équilibre, la somme des forces appliquées ET la somme des moments des forces appliquées sont nulles. Or, le système est soumis à son poids et à $\vec{\Pi}$. On en déduit immédiatement que $\vec{\Pi} = -\rho V\vec{g}$ et qu’elle s’applique au centre de gravité du système (qui est donc le centre de masse/gravité du système constitué par le fluide).

Théorème d’Archimède : Tout corps immergé dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une force du bas vers le haut égale au poids de liquide déplacé. Cette force d’applique au centre de masse/poussée C.

2) Exemples

Poids apparent : lorsqu’un corps est immergé dans un fluide, il ressent en fait son poids apparent, égal à la somme vectorielle de son poids et de la poussée d’Archimède : $\overrightarrow{P_{app}} = m\vec{g} - \rho_{fluide}V\vec{g}$

Anecdote historique : Considérer la position relative du centre de poussée C et du centre de gravité G : lors d’un léger « tangage », une des situations (G au-dessus de C) est instable.

C’est ce qui s’est passé pour le Vasa (plus grand bateau de guerre de l’époque construit à la demande du roi de Suède) lors de son voyage inaugural en 1628. Les deux ponts de canons (une première pour l’époque), très lourds, étaient responsables d’un centre de gravité G trop haut. Après quelques mètres, il a commencé à rouler à droite et à gauche jusqu’à ce que l’eau ne s’engouffre dans les fenêtres des canons. Il a ensuite coulé en quelques minutes. Sur les 150 membres d’équipage, entre 30 et 50 ont péri. Le navire allait chercher ses 300 hommes de troupe…Le bateau est resté enfoui 333 ans dans le port de Stockholm, protégé par la faible salinité et les boues du système avant d’être sorti de l’eau avec moult précautions en 1961 (on a construit un musée autour). C’est ce qui peut se produire lorsque l’on surcharge les bateaux.

Conclusion