L’onde plane progressive harmonique : modèles physiques et limites

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : électrocinétique, notion d’onde

Introduction

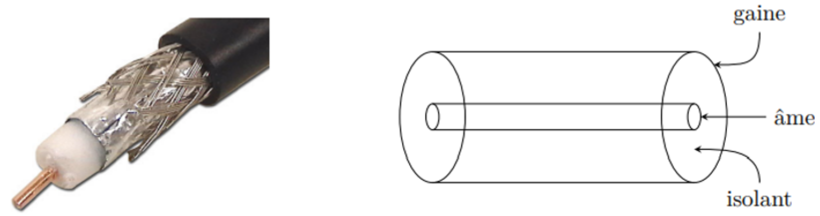
Partout autour de nous, on observe des phénomènes ondulatoires : propagation d’une onde sonore dans un fluide quand on parle, dans un solide lorsqu’on frappe dans ses mains, la lumière qui nous parvient provenant du Soleil ou d’une simple lampe est une onde électromagnétique. Bref, de nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits de manière ondulatoire. Il paraît alors essentiel de développer un modèle permettant de d´écrire de la même façon tous ces phénomènes, c’est le but de cette leçon.

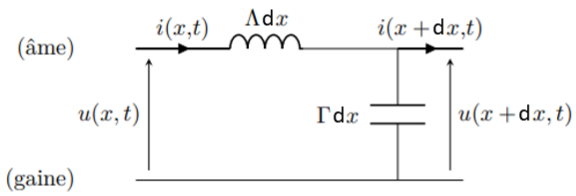
I Modèle de l’onde plane progressive harmonique

1) Équation de D’Alembert

Des ondes électromagnétiques se propagent dans le câble. On peut envisager le modèle suivant :

Modèle du câble coaxial





Loi des nœuds :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$

Lois des mailles :

$$u(x,t) = u(x+dx,t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial i}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial i}$$

Équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \text{, avec } c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} \sim 2.10^8 m.s^{-1}$$

Expérience : mesure de c dans un câble coaxial (L = 100 m)

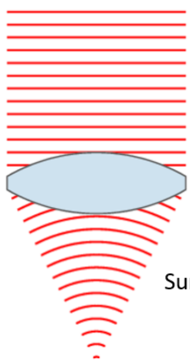
L'équation de d'Alembert est une équation qui intervient dans de nombreux phénomènes ondulatoires c'est la base du modèle de l'OPPH qu'on va développer par la suite.

2) Ondes planes

<u>Surface d'onde</u> : surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même état vibratoire, c'est-à-dire que le champ décrivant la vibration (champ de pression, champ électromagnétique, champ de vitesses, …) prend la même valeur en tout point de la surface.

Une onde est dite plane si ses surfaces d'ondes sont des plans parallèles entre eux. Ces plans sont appelés plans d'ondes. Une onde plane ne dépend alors que d'une seule coordonnée cartésienne spatiale.

Exemple de surface d'ondes



Surface d'onde plane (rayons lumineux parallèles)

Surface d'onde sphérique (rayons lumineux convergent au foyer de la lentille)

Ondes à la surface de l'eau

3) Ondes planes progressives

onde progressive : phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel.

On cherche des solutions de la forme : y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct), f désigne une onde progressive se propageant selon les x croissants, g désigne une onde progressive se déplaçant selon les x décroissants.

4) Ondes planes progressives harmoniques

Une onde plane progressive harmonique est une onde plane, progressive dont la dépendance spatio-temporelle est sinusoïdale.

$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ ou\ y(x,t) = y_0 \cos\,(\omega t + kx + \varphi)$, ω est la pulsation, k est le vecteur d'onde.

En injectant dans l'équation de D'Alembert, on obtient : $\omega^2 = k^2c^2$, soit $\omega = kc$. Cette relation est appelée relation de dispersion.

L'équation d'un plan d'onde est : $\omega t - kx + \varphi = cste$ => $x = v_\varphi t + x_0$, avec $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ la vitesse de phase, ici, $v_\varphi = c$.

On définit aussi la vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

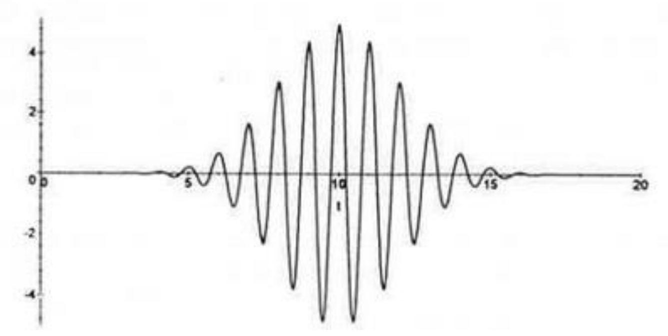
Même si ce modèle est pratique pour décrire un grand nombre de situations, certains phénomènes ondulatoires n'obéissent pas à l'équation de D'Alembert. En outre, les conditions aux limites peuvent avoir une influence sur la structure de l'onde.

II Limites du modèle

1) Paquet d'ondes

L'OPPH n'est pas physique car elle possède une extension spatiale et temporelle infinie. Une onde réelle est la superposition d'OPPH, elle se propage en se déformant.

paquet d'onde : superposition d'OPPH dont la fréquence varie continûment entre $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ et $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$. On parle d'onde plane dont le spectre est centré sur f_0 et de largeur Δf.



v_g définit la vitesse moyenne de propagation d'un paquet d'ondes (vitesse de transport de l'énergie, de l'information).

2) Dispersion, absorption

A priori, v_φ dépend de ω → deux ondes de pulsations différentes ne se propagent pas à la même vitesse : c'est le phénomène de dispersion.

Un milieu est dit dispersif si v_φ dépend de ω

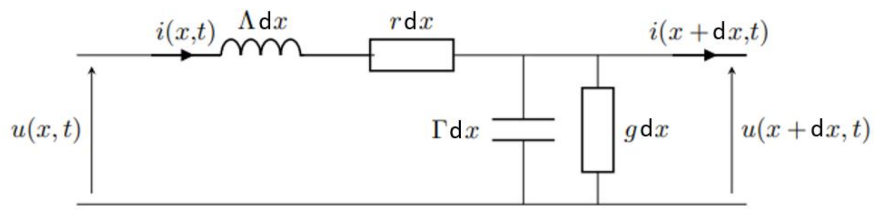
Ex : décomposition de la lumière blanche par un prisme

L'angle de réfraction dans un prisme dépend de l'indice $n = \frac{c}{v_\varphi}$, donc n dépend de λ

On reprend le modèle du câble coaxial, en ajoutant une résistance et une conductance, symbolisant les pertes :

Modèle du câble coaxial avec pertes

d



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Lambda\, g + \Gamma\, r)\,\frac{\partial u}{\partial t} + r\, g\, u \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \mathrm{i}\frac{g}{\omega\,\Gamma}\right)\left(1 + \mathrm{i}\frac{r}{\Lambda\,\omega}\right)$$

Il existe une condition sur la valeurs des différents composants du câble (condition d'Heaviside) pour laquelle il y a propagation avec atténuation mais sans dispersion : Λg = Γr.

Conclusion

Le câble coaxial est un exemple d'onde guidée, l'onde se propageant entre deux conducteurs coaxiaux dans lesquels le champ électrique doit s'annuler (si ce sont des conducteurs parfaits). Cette fois ci l'équation d'onde est toujours une équation de D'Alembert, mais la dispersion provient des conditions aux limites

Questions

- Dispersion : limite du modèle OPPH ?
- ➔ Oui, on ne peut plus supposer qu'on a une OPPH, k n'est plus réel : $\underline{k} = k' + ik''$ (k' : dispersion, k'' : atténuation)
- Autre exemple d'OPPH ?
- ➔ Cuve à ondes
- Lien avec la mécanique quantique ?
- ➔ Équation de Schrödinger peut être vue comme une équation d'onde
- Fonction d'onde = OPPH ?
- ➔ Oui dans certains cas
- Onde sphérique = onde plane ?
- ➔ Oui à grande distance (ex : étoiles)