Lois de Kepler

Niveau : CPGE

Prérequis : Lois de la mécanique, énergie du point matériel

Introduction

Ces lois ont été établies de manière empirique par Johannes Kepler au début du XVIIe siècle, à partir des observations de Tycho Brahe, dont il était l'élève. A cette époque, l'héliocentrisme de Copernic s'opposait au géocentrisme, ce qui a valu à Galilée d'être condamné par l'Église. On pensait de plus que la vitesse de la lumière était infinie, jusqu'à ce que Roemer prouve le contraire en 1676 en observant les éclipses de Io, découvert par Galilée en 1610. Il faudra attendre 1687 pour que Newton démontre les lois de Kepler, grâce à sa théorie de la gravitation universelle.

I Forces centrales conservatives

1) Définition

Un champ de forces centrales conservatif de centre O vérifie :

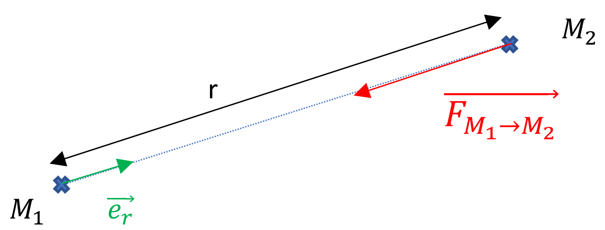
$$* \underline{\vec{F} = F\overrightarrow{e_r}}$$

$$* \underline{F = -\frac{dE_p}{dr}}$$

Si F < 0 alors la force est attractive, si F > 0 alors elle est répulsive.

Exemple : Interaction gravitationnelle

On considère deux objets M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2, distants de r. La force exercée par M_1 sur M_2 s'écrit : $\boxed{\overrightarrow{F_{M_1 \to M_2}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$ (interaction newtonienne).



$$\int dE_p = Gm_1m_2 \int \frac{dr}{r^2}$$

⇨ $E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r} + K$

On choisit d'imposer une énergie potentielle nulle lorsque les deux masses sont infiniment éloignées :

$$\boxed{E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}}$$

2) Lois de conservation

a) Conservation du moment cinétique

D'après le théorème du moment cinétique en O dans R_g (référentiel galiléen) au point M de masse m soumis à une force centrale $\vec{F}$: $\frac{\overrightarrow{dL}}{dt}(O, M/R_g) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

Ainsi $\vec{L}(O, M/R_g) = \overrightarrow{L_0}$ → Le moment cinétique en O de M se conserve au cours du temps, donc le mouvement est plan.

Par définition, $\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ (mouvement dans le plan $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$)

Souvent, on pose $C = r^2\dot{\theta}$ (constante des aires)

b) Conservation de l'énergie mécanique

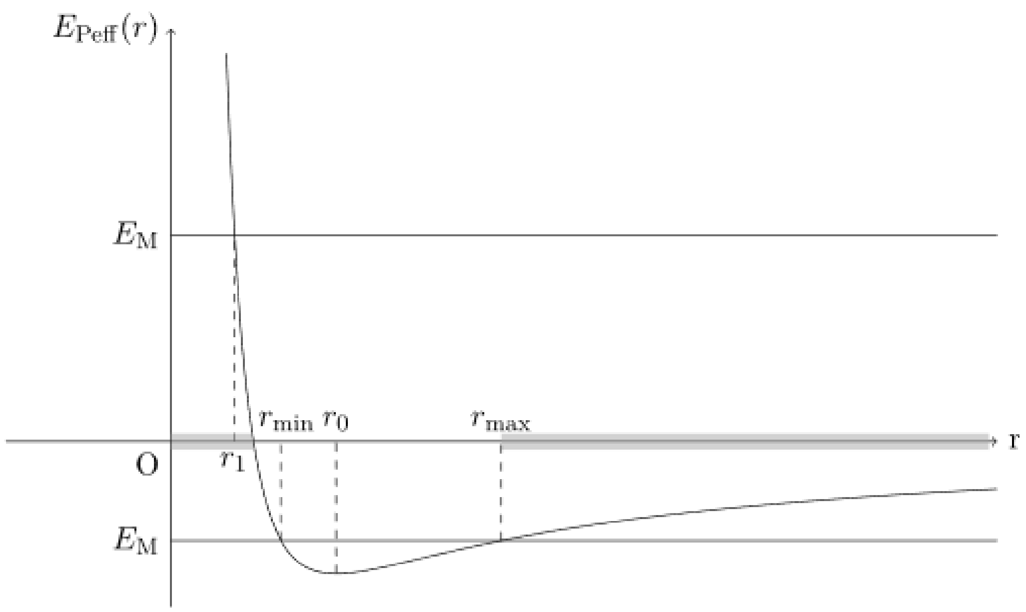
$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)}$, on pose $E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$ (énergie potentielle effective)

⇨ On se ramène à l'étude d'un mouvement à un seul degré de liberté : r

Le système n'étant soumis qu'à l'interaction gravitationnelle, qui est conservative, l'énergie mécanique est constante.

3) Trajectoires



- Si $E_m > 0$, la zone accessible est définie par $r \geq r_1$, le système est dans un état de diffusion, la trajectoire est une hyperbole.
- Si $E_m < 0$, la zone accessible est définie par $r_{min} \leq r \leq r_{max}$, le système est dans un état lié, la trajectoire est une ellipse.
- Si $E_m = E_{p,eff}(r_0)$, la trajectoire est un cercle.
- Le cas entre l'état lié et l'état de diffusion correspond à $E_m = 0$, le système est dans un état de diffusion dont la trajectoire est une parabole.

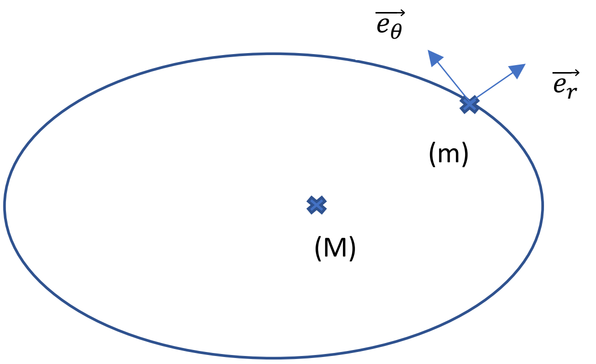
Remarque : pour C=0 et $\dot{r} = 0$, s'il n'y a que l'interaction gravitationnelle, l'objet sera irrémédiablement attiré par le centre attracteur.

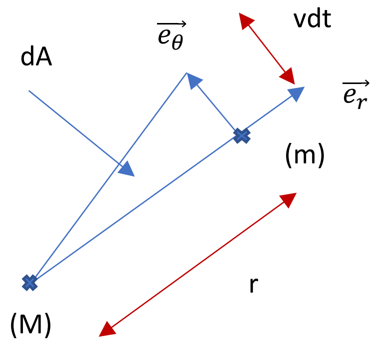
II Mouvement des planètes et des satellites

1) Choix du référentiel – 1e et 2e lois de Kepler

Pour l'étude des mouvements des planètes et des satellites, le référentiel terrestre n'est pas adapté. On se placera donc dans le référentiel héliocentrique (ou référentiel de Copernic), donc le centre est le centre du Soleil et les 3 axes sont définis par les directions de 3 étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixes.

<u>1e loi de Kepler :</u> le centre des planètes décrit une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil.



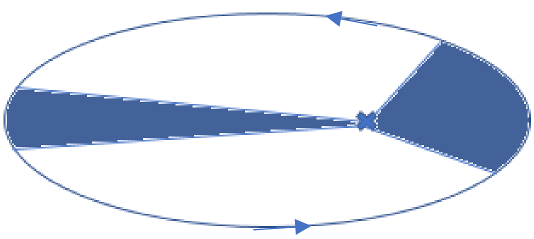


$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v dt = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$ ➔ la vitesse de balayage (= vitesse aréolaire) est constante

$$A = \frac{C}{2} t + cste$$

<u>2e loi de Kepler :</u> Le rayon vecteur balaie des aires égales pour des intervalles de temps égaux.



2) 3e loi de Kepler

Si on note T la période de révolution d'une planète autour du Soleil et a le demi-grand axe de sa trajectoire, alors : $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = cste}$ -> se généralise pour les satellites

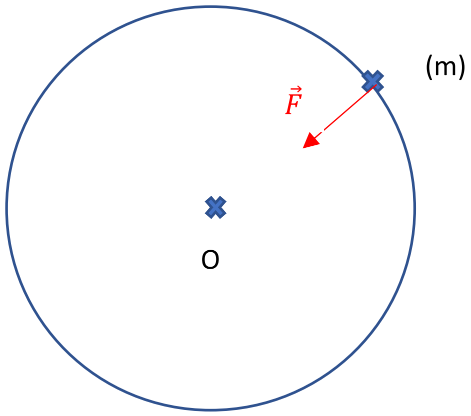
a) Mouvement circulaire

On étudie un système de masse m (planète ou satellite) en interaction gravitationnelle avec un centre attracteur O de masse M (Soleil ou planète).

On suppose une trajectoire circulaire : r = R = cste

On se place dans le référentiel héliocentrique (ou le référentiel de la planète), supposé galiléen.

On utilise les coordonnées polaires



$$\vec{F} = -\frac{GmM}{R^2}\overrightarrow{e_r}$$

La 2e loi de Newton s'écrit : $\underline{m\vec{a}(M/R) = \vec{F}}$

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$$

Or r = cste

- ⇨ $\underline{\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}}$ et $\underline{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GmM}{R^2} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

- ⇨ La 2e équation donne : $\ddot{\theta} = 0$
- ⇨ $\dot{\theta} = cste$
- ⇨ $v = cste$
- ⇨ Le mouvement est circulaire uniforme

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R}$$

En remplaçant dans la 1e équation, on obtient : $\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$, soit $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$

Si on note T la période de révolution du système, comme v = cste, on peut écrire : $v = \frac{2\pi R}{T}$

L'égalité des vitesses se traduit par : $\frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

⇨ $\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R}$

⇨ $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$

Exemple : satellite géostationnaire

Certains satellites de communication doivent toujours être positionnés au même endroit dans le ciel à partir d'un point terrestre. De tels satellites sont géostationnaires. T = 24h

3e loi de Kepler ➔ $\boxed{R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$ (rayon de l'orbite)

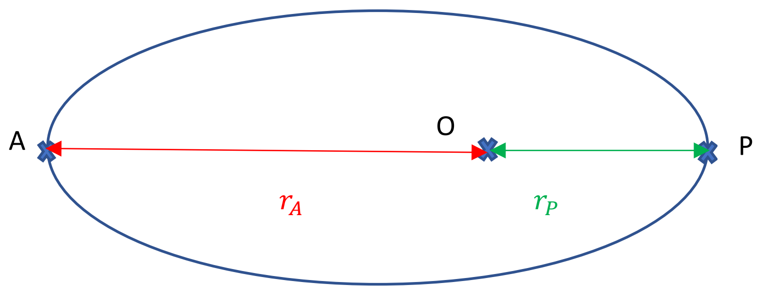
Application numérique : $M_T = 6{,}0.10^{24} kg,\ G = 6{,}67.10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

⇨ R ≈ 42000 km

Or R_T ≈ 6400 km

⇨ Le satellite se trouve à une hauteur h = R - R_T ≈ 36000 km

b) Mouvement elliptique



Le point A est appelé apogée pour un satellite, et aphélie pour une planète.

Le point P est appelé périgée pour un satellite, et périhélie pour une planète.

Remarque : le périhélie de Mercure n'est pas fixe, ce problème se résout grâce à la relativité générale

On définit le demi-grand axe par : $2a = r_A + r_P$

En A, $r = r_{max}$ et $v = v_{min} = r_A \dot{\theta}_A$ $(\dot{r_A} = 0)$

En P, $r = r_{min}$ et $v = v_{max} = r_P \dot{\theta}_P$ $(\dot{r_p} = 0)$

Dans le cas d'une ellipse, on peut généraliser la 3e loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

Remarque : dans le cas général, en posant $u = \frac{1}{r}$ et en déroulant les calculs à partir de la 2^e loi de Newton, on montre que $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, avec $p = \frac{C^2}{GM}$, e est l'excentricité orbitale

Pour e = 0, r = p → cercle

Pour 0 < e < 1 → ellipse

Pour e = 1 → parabole

Pour e > 1 → hyperbole