Dynamique relativiste

Niveau : L3

Prérequis : temps propre, postulats de la relativité restreinte, transformation de Lorentz, notion de quadrivecteurs

Introduction

Les lois de la dynamique newtonienne (le principe fondamental de la dynamique et le théorème de l'énergie cinétique) ne sont applicables uniquement à des systèmes ayant des vitesses très inférieures à celle de la lumière.

L'objectif de cette leçon sera d'établir les lois de la dynamique relativistes applicables `a des particules relativistes, et qui devront être invariantes par transformation de Lorentz et permettre également de retrouver les lois classiques aux faibles vitesses.

I Principes de la dynamique relativiste

1) Quadrivecteurs vitesse et impulsion

On considère une particule relativiste de masse propre m_0. On note $\tilde{X} = (ct, \vec{r})$ son quadrivecteur position et $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ sa vitesse dans le référentiel du laboratoire.

On définit le quadrivecteur vitesse par : $\tilde{U} = \frac{d\tilde{X}}{d\tau}$, avec $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

γ est le facteur de Lorentz, donné par : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

On a donc : $\tilde{U} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$

Le quadrivecteur impulsion s'écrit : $\tilde{P} = m_0\tilde{U} = m_0(\gamma c, \gamma\vec{v})$

$$\tilde{P}^2 = (m_0\gamma c)^2 - (m_0\gamma v)^2 = (m_0 c)^2$$

2) Énergie relativiste

On s'intéresse à la composante spatiale du quadrivecteur impulsion.

Si $|\vec{v}| \ll c, m_0\gamma\vec{v} \approx m_0\vec{v} = \overrightarrow{p_{classique}}$

Pour la composante temporelle de $\tilde{P}$, Si $|\vec{v}| \ll c, m_0\gamma c \approx m_0 c\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{1}{c}(m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2})$

Donc $m_0\gamma c \approx \frac{1}{c}\left(E_{masse} + E_{c,classique}\right) = \frac{E}{c}$

m_0c^2 est l'énergie de masse de la particule, c'est-à-dire l'énergie que lui confère sa masse (d'après le principe d'équivalence masse-énergie introduit par Einstein, il s'agit de l'énergie de la particule au repos).

On peut donc écrire : $E_c = m_0(\gamma - 1)c^2$ et $\tilde{P} = (\frac{E}{c}, \vec{p})$

Donc $\tilde{P}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (m_0c)^2$

3) Équations du mouvement

Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force : $\tilde{F} = \frac{d\tilde{P}}{d\tau} = (\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma\frac{d\vec{p}}{dt})$

Si $|\vec{v}| \ll c$, on retrouve $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

En dérivant $\tilde{P}^2$ par rapport à τ, on obtient : $m_0\gamma(c, \vec{v}).\left(\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = 0$

Ainsi, $\frac{dE}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

Finalement, $\tilde{F} = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}.\vec{v}, \gamma\vec{F}\right) = \frac{d\tilde{P}}{d\tau}$

On obtient donc le principe fondamental de la dynamique relativiste et le théorème de l'énergie cinétique relativiste. L'intérêt d'une équation quadrivectorielle est de pouvoir passer d'un référentiel galiléen à un autre par transformation de Lorentz et de laisser ces lois invariantes.

II Mouvement dans un champ électromagnétique

1) Particule dans un champ électrique

On considère une particule de masse propre m_0 et de charge q initialement au repos et soumise à une différence de potentiel U.

En mécanique classique, le théorème de l'énergie cinétique donne : $\Delta E_c = qU$, soit $v = \sqrt{\frac{2qU}{m_0}}$, ce résultat n'est valable que si $v \ll c$.

En dynamique relativiste : $\Delta E_c = m_0(\gamma - 1)c^2 = qU$

Donc $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qU}{m_0c^2} + 1$

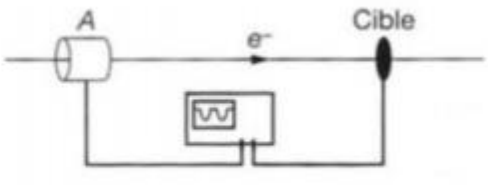
Ce qui donne : $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1+\frac{qU}{m_0c^2})^2}}$

Ce résultat montre que si U augmente, v tend vers la vitesse de la lumière c (sans jamais la dépasser). De plus, si $U \ll \frac{m_0c^2}{q}$, on retrouve le résultat en mécanique classique.

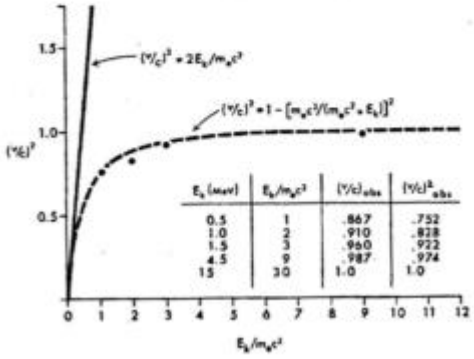
Dans les accélérateurs, les particules sont accélérées avec des différences de potentiel de l'ordre du MV, ce qui donne pour un électron v ≈ 0,94 c.

Cette vitesse limite pour les particules accélérées a été mise en évidence par Bertozzi en 1964.

Dans son expérience, les électrons sont d'abord accélérés par une tension variant entre 0,5 et 15 MV dans un accélérateur. Un anneau est placé à la sortie de l'accélérateur et permet de détecter le passage des électrons via un oscilloscope. Les électrons atteignent ensuite une cible en aluminium, et leur arrivée sur cette dernière est également détectée à l'oscilloscope. Connaissant la distance entre l'anneau et la cible et l'intervalle de temps correspondant au passage des électrons grâce à l'oscilloscope, Bertozzi en a déduit la vitesse des électrons en fonction de la tension accélératrice. Il constate que la vitesse des électrons ne dépasse jamais c, et que ses points expérimentaux suivent la courbe donnée par l'équation précédente.



Dispositif expérimental simplifié utilisé par Bertozzi



Résulats de l'expérience

2) Particule dans un champ magnétique

On considère la même particule, soumise cette fois-ci à un champ magnétique $\vec{B}$ que l'on suppose uniforme et constant (pour ne pas avoir à considérer de champ électrique induit).

D'après les équations de la dynamique relativiste, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B} \\ \dfrac{dE}{dt} = (q\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v} \end{cases}$$

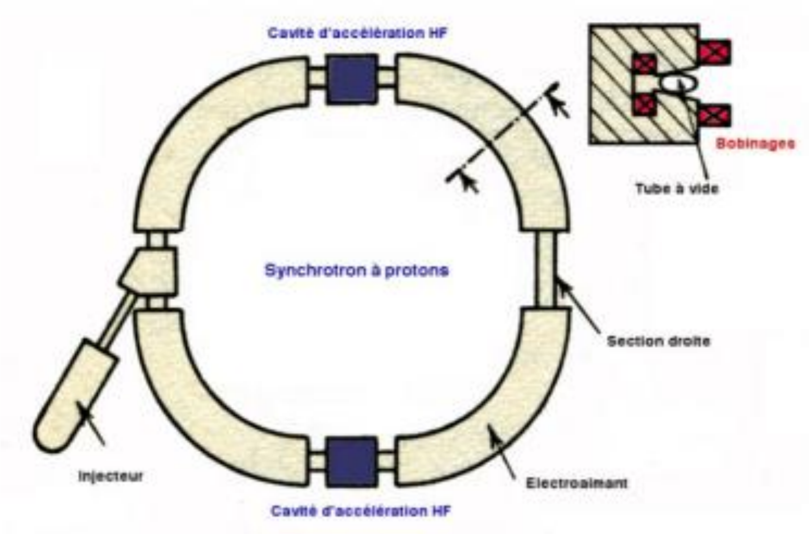
Ainsi E est constant, tout comme γ : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

Les calculs sont donc les mêmes qu'en mécanique classique. Par exemple si la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique, la trajectoire sera circulaire dans le plan orthogonal au champ magnétique, et la norme du vecteur vitesse sera constante. Le rayon de la trajectoire est $R = \frac{\gamma m_0 v}{qB}$, la pulsation est $\omega = \frac{qB}{m_0}$. Le rayon et la pulsation dépendent de γ, donc de v.

Dans les accélérateurs de particules, on utilise le synchrotron pour faire acquérir de l'énergie aux particules avant de les collisionner. Dans un synchrotron, les particules sont accélérées après leur passage dans des cavités accélératrices par le biais d'une différence de potentiel, avant d'être soumises à un champ magnétique pour leur donner une trajectoire circulaire de rayon constant.

Pour maintenir le rayon de cette trajectoire constant, le champ magnétique doit être ajusté, puisqu'en effet, nous venons de voir que le rayon augmente quand la vitesse de la particule augmente.

L'énergie acquise par la particule dans un synchrotron peut actuellement atteindre le TeV, alors que dans un cyclotron, elle ne dépasse pas la centaine de MeV.



III Collisions

1) Lois de conservation

Pour une collision du type 1 + 2 → 3 + 4, on peut écrire la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie :

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_3} + \overrightarrow{p_4} \\ E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \end{cases}$$

On peut le réécrire : $\widetilde{P_1} + \widetilde{P_2} = \widetilde{P_3} + \widetilde{P_4}$

Nous allons voir deux exemples de collisions.

2) Désintégration

On considère la réaction suivante : $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

Les pions sont des particules prédites par Yukawa en 1935 et découvertes en 1947, les muons ont été découverts en 1936, les neutrinos ont été découverts en 1956.

Sachant que $m_\pi c^2 = 139{,}6$ MeV, $m_\mu c^2 = 105{,}7$ MeV et $m_\nu c^2 \approx 0$, on cherche à déterminer les énergies cinétique du muon et du neutrino, $E_{c,\mu}$ et $E_{c,\nu}$.

$\widetilde{P_\pi} = \widetilde{P_\mu} + \widetilde{P_\nu}$, donc $\widetilde{P_\nu}^2 = \left(\widetilde{P_\pi}^2 - \widetilde{P_\mu}^2\right) = \widetilde{P_\pi}^2 + \widetilde{P_\mu}^2 - 2\widetilde{P_\pi}.\widetilde{P_\mu} = 0$

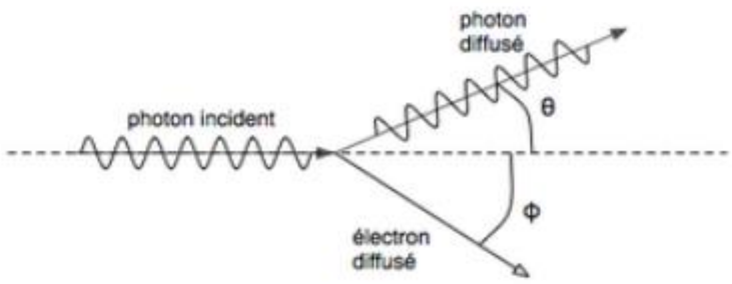
Or, $\widetilde{P_\pi} = (m_\pi c, \vec{0})$ (le pion est au repos) et $\widetilde{P_\mu} = (\frac{m_\mu c^2 + E_{c,\mu}}{c}, \overrightarrow{p_\mu})$

Donc $E_{c,\mu} = \frac{(m_\pi c^2 - m_\mu c^2)^2}{2m_\pi c^2} = 4{,}1MeV$

De plus, il y a conservation de l'énergie : $E_\pi = E_\mu + E_\nu$

$E_\nu = E_{c,\nu} = E_\pi - E_\mu$ donc $E_{c,\nu} = m_\pi c^2 - \left(m_\mu c^2 + E_{c,\mu}\right) = 29{,}8MeV$

3) Effet Compton



L'effet Compton correspond à la diffusion d'un photon sur un électron libre au repos, provocant l'augmentation de la longueur d'onde du photon incident. On peut calculer cette variation de la longueur d'onde entre le photon diffusé γ' et le photon incident γ :

$\widetilde{P_\gamma} + \widetilde{P_e} = \widetilde{P_{\gamma'}} + \widetilde{P_{e'}}$ donc $\widetilde{P_{e'}}^2 = (\widetilde{P_e} + \widetilde{P_\gamma} - \widetilde{P_{\gamma'}})^2$

Or, $\widetilde{P_e}^2 = \widetilde{P_{e'}}^2 = (m_e c)^2$ et $\widetilde{P_\gamma}^2 = \widetilde{P_{\gamma'}}^2 = 0$

Donc $\widetilde{P_\gamma}.\widetilde{P_{\gamma'}} = \widetilde{P_e}.(\widetilde{P_\gamma} - \widetilde{P_{\gamma'}})$

$\widetilde{P_e} = (m_e c, \vec{0})$, $\widetilde{P_\gamma} = (\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}\overrightarrow{u_\gamma})$, $\widetilde{P_\gamma} = (\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'}\overrightarrow{u_{\gamma'}})$ et $\overrightarrow{u_\gamma}.\overrightarrow{u_{\gamma'}} = \cos(\theta)$

Finalement, $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta))$

On appelle $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ la longueur d'onde de Compton (2,4 pm)

La longueur d'onde du photon diffusé est donc augmentée. Cela peut s'interpréter par le fait que le photon cède de l'énergie à l'électron (si ce dernier est faiblement lié à l'atome, ce qui lui permettra d'être mis en mouvement) : or l'énergie d'un photon est inversement proportionnelle à sa longueur d'onde, d'où ce résultat.

Cette variation de longueur d'onde entre le photon incident et le photon diffusé a été vérifié expérimentalement par Compton, et lui a valu le prix Nobel en 1927.

Cette expérience met en valeur à la fois le caractère relativiste du photon en tant que particule se déplaçant à la vitesse c, mais également son caractère ondulatoire, puisqu'on peut lui associer une longueur d'onde.

Conclusion

Nous avons donc décrit les principes de la dynamique relativiste, et notamment les lois de conservation lors des collisions de particules. En physique des particules, il existe également d'autres lois de conservation liées aux nombres quantiques intrinsèques aux particules. Cela permet notamment la prédiction de nouvelles particules, avant leur éventuelle détection dans les accélérateurs.

Bibliographie

-Mécanique , BFR

-Introduction à la relativité, Langlois

-Relativité, fondements et applications, Perez

-Relativité restreinte, Grossetête

Questions

- Pourquoi, dans les collisionneurs, les collisions se font en accélérant deux faisceaux l'un vers l'autre, plutôt qu'en envoyant un faisceau sur une cible fixe ?
- ➔ Cela permet de disposer d'une énergie finale beaucoup plus élevée dans le référentiel du centre de masse, et donc d'étudier des processus de très hautes énergies.
- Peut-on produire des particules avec des collisions en mécanique classique ?
- ➔ Non
- Sur les particules : Quelle est la différence entre particules élémentaires et composites ? Qu'est-ce qu'un lepton, un quarks, un hadron, un méson, un baryon ? Qu'est-ce qu'une antiparticule ?
- Quelle est la différence entre un cyclotron et un synchrotron ?
- ➔ Pour le cyclotron, la pulsation de la trajectoire est indépendante de la vitesse de la particule, contrairement au synchrotron.
- Pourquoi dérive-t-on par rapport à τ pour définir $\widetilde{U}$, $\tilde{P}$?
- ➔ Car τ est un invariant relativiste intrinsèque à la particule (contrairement à t qui dépend du référentiel dans lequel on se place).