LP24 : Ondes progressives, ondes stationnaires

Valentin DUMAIRE, Romain MACCARY

La physique des ondes regroupe un grand nombre de phénomènes et couvre différents domaines, comme l'acoustique ou l'électromagnétisme.

Une onde est le phénomène de transport d'une information/d'une perturbation avec transport d'énergie mais sans transfert de matière.

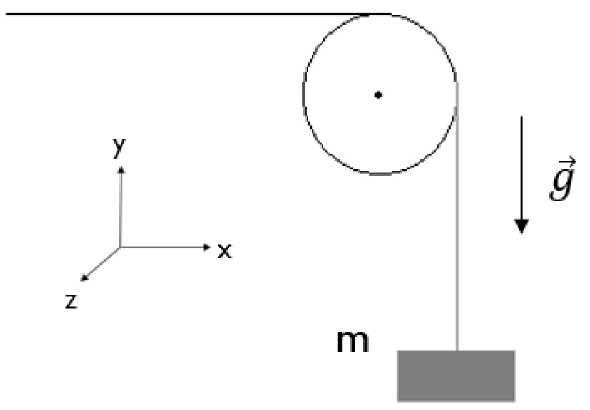
Une onde est décrite par une grandeur physique variant dans l'espace et dans le temps, ces variations sont régies par une équation de propagation. Nous allons d'abord établir cette équation dans le cas unidimensionnel pour une corde vibrante.

Avant ça : expérience corde de Melde -> mise en évidence de nœuds et ventres de vibration à une fréquence bien choisie. Penser à peser la corde et à mesurer la fréquence fondamentale en préparation.

I Cas de la corde vibrante

1) Modèle

On considère une corde tendue (par exemple par une masse), et donc soumise à une tension.

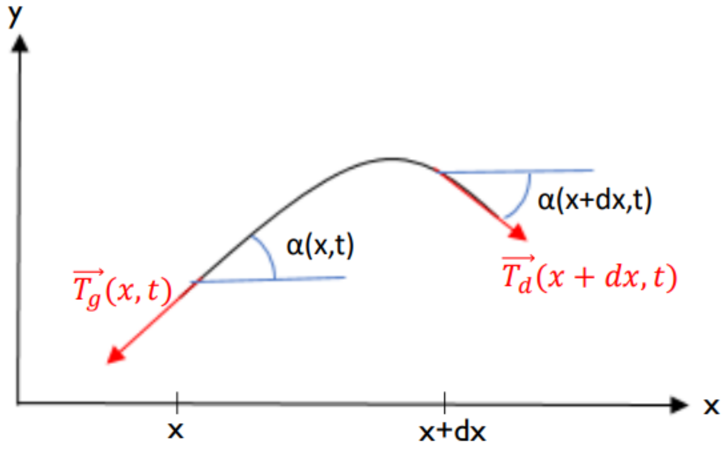


La corde est supposée : -homogène, de masse linéique µ

-sans raideur

On néglige le poids de la corde (corde horizontale au repos).

On applique une déformation à la corde :

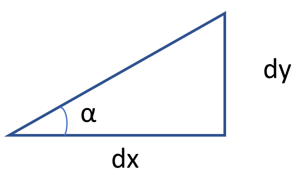


α est l'angle entre la corde au point x et l'horizontale. On se place dans l'approximation des petits mouvements.

2) Mise en équation

<u>système :</u> portion élémentaire de corde de longueur ds et de masse dm=µds

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}$$



$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan(\alpha) \approx \alpha$

Donc dm≈µdx car α << 1 rad

<u>référentiel :</u> terrestre, supposé galiléen

<u>bilan des actions mécaniques extérieures :</u> * $\overrightarrow{T_g(x,t)}$

*$\overrightarrow{T_d(x+dx,t)}$

D'après le principe des actions réciproques : $\overrightarrow{T_g(x,t)} = -\overrightarrow{T_d(x,t)}$

<u>principe fondamental de la dynamique :</u> $dm\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \overrightarrow{T_d(x+dx,t)} - \overrightarrow{T_d(x,t)}$

On projette sur $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ l'équation précédente, et on obtient :

$$\begin{cases} 0 = T(x+dx,t)\cos\big(\alpha(x+dx,t)\big) - T(x,t)\cos\big(\alpha(x,t)\big) \ (1) \\ \mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx,t)\sin\big(\alpha(x+dx,t)\big) - T(x,t)\sin\big(\alpha(x,t)\big) \ (2) \end{cases}$$

D'après (1) : $T(x+dx,t)\cos\big(\alpha(x+dx,t)\big) = T(x,t)\cos\big(\alpha(x,t)\big) = T_0$

D'après (2) : $\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T_0\tan\big(\alpha(x+dx,t)\big) - T_0\tan\big(\alpha(x,t)\big) \approx T_0\frac{\partial \tan(\alpha)}{\partial x}dx = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$

Ainsi, on obtient $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$

Cette équation est appelée <u>équation de D'Alembert</u>.

On pose $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ la célérité des ondes. Pour un piano, $c \approx 300\ m.s^{-1}$.

Cette équation est très importante, puisqu'on la retrouve dans de nombreux domaines. Maintenant l'objectif va être de la résoudre.

II Solutions de l'équation de D'Alembert

1) Ondes progressives

<u>onde progressive :</u> phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel.

Pour une onde progressive, l'espace et le temps sont couplés. On peut poser u = x-ct et v = x+ct et montrer que $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$ (voir diapo).

On cherche des solutions de la forme : y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct), f désigne une onde progressive se propageant selon les x croissants, g désigne une onde progressive se déplaçant selon les x décroissants.

Une onde progressive se propage à la célérité c sans déformation.

Attention ! y n'a aucune raison d'être une onde progressive !

2) Ondes progressives harmoniques

$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\ ou\ y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$, ω est la pulsation, k est le vecteur d'onde.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

En injectant dans l'équation de D'Alembert, on obtient : $\omega^2 = k^2c^2$, soit $\omega = kc$. Cette relation est appelée relation de dispersion.

L'équation d'un plan d'onde est : $\omega t - kx + \varphi = cste \Rightarrow x = v_\varphi t + x_0$, avec $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ la vitesse de phase, ici, $v_\varphi = c$.

Une onde progressive harmonique n'a pas de réalité physique, car elle transporte une énergie infinie.

3) Ondes stationnaires

Pour une onde stationnaire, l'espace et le temps sont découplés : $y(x,t) = f(x)g(t)$

En injectant dans l'équation de D'Alembert, on obtient : $f(x)\frac{d^2g}{dt^2} = c^2g(t)\frac{d^2f}{dx^2}$

⇨ $\boxed{\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dt^2} = \frac{c^2}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = K = cste}$ car les deux membres ne dépendent que du temps ou de l'espace.

⇨ $\frac{d^2g}{dt^2} = Kg(t)$

*Si K > 0, $g(t) = Ae^{\sqrt{K}t} + Be^{-\sqrt{K}t}$

On prend A = 0 sinon g diverge. Quand t tend vers l'infini, g tend vers 0, mais ce n'est pas ce qu'on observe, cette solution n'est donc pas pertinente.

*Si K = 0, $g(t) = At + B$, on doit prendre A = 0, donc g(t) = B. Cette solution n'est pas plus pertinente que la précédente.

*Si K < 0, on reconnait un oscillateur harmonique, on pose K' = -K.

$$\frac{d^2g}{dt^2} + K'g(t) = 0$$

Donc $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, avec $\omega = \sqrt{K'}$

De même, $f(x) = B\cos(kx + \psi)$, avec $k = \frac{\sqrt{K'}}{c}$

Finalement, $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

On remarque qu'il existe des x pour lesquels la vibration est nulle pour tout t :

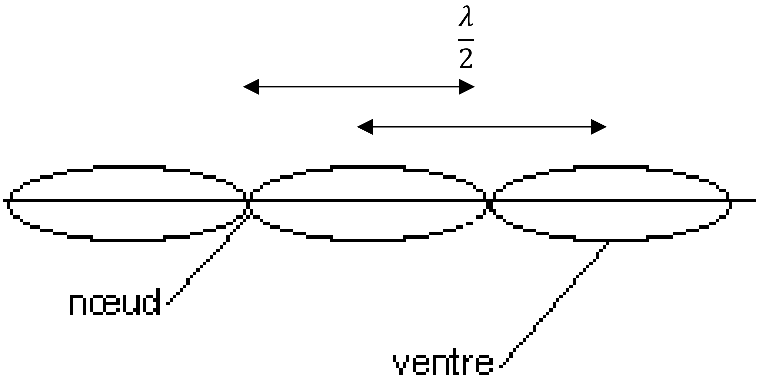
⇨ $kx_n + \psi = (n + \frac{1}{2})\pi$, n est un entier relatif. Ces points sont appelés nœuds de vibration.

Entre 2 nœuds successifs, $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$

De même, il existe des x pour lesquels l'amplitude est maximale pour tout t :

- ⇨ $kx_n + \psi = n\pi$, n est un entier relatif. Ces points sont appelés ventres de vibration.

Entre 2 ventres successifs, $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$



Un ventre et un nœud sont séparés de $\frac{\lambda}{4}$. La longueur de la corde est $L = \frac{n\lambda}{2}$.

Retour sur l'expérience : détermination de la fréquence fondamentale en faisant varier la fréquence du vibreur et comparer avec la valeur trouvée en préparation. Mise en évidence des ventres et nœuds successifs.

Lien avec les ondes progressives harmoniques :

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi) = \frac{y_0}{2}(\cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi))$$

- ⇨ Toute onde stationnaire peut être décomposée en somme de 2 ondes progressives harmoniques de même amplitude.

Si on part d'une OPH : $Acos(\omega t - kx) = Acos(\omega t)\cos(kx) + Asin(\omega t)\sin(kx)$

Les OPH d'une part ou les ondes stationnaires d'autre part forment une base de solutions de l'équation de D'Alembert.

4) Corde finie : modes propres et résonance

Voir diapo

Si sin(kL) = 0, c'est-à-dire $k_n L = n\pi$, y diverge. En réalité on ne l'observe pas car il y a des non-linéarités (inélasticité des matériaux) et notre modèle ne les prend pas en compte, la corde n'est pas élastique. On observe en fait une résonance.

III Câble coaxial

Voir diapo.

Conclusion

Dans ce cours nous avons établi l'équation de D'Alembert et trouvé deux bases de solutions équivalentes. Suivant le problème rencontré, on choisira d'utiliser une base plutôt qu'une autre (OPH -> conditions initiales, ondes stationnaires -> conditions aux limites). Nous avons également établi la relation de dispersion. Ici on avait $\omega = kc$, mais en général cette relation n'est pas linéaire, on parle alors de milieux « dispersifs ».

Questions

Autres domaines où apparaît l'équation de D'Alembert ?

- ⇨ Ondes électromagnétiques dans le vide, acoustique, chaîne infinie d'oscillateurs, ondes sismiques…

Quelle information donne la vitesse de phase ?

- ⇨ Si la vitesse de phase est proportionnelle à la pulsation, alors le milieu est non dispersif. Autrement, le milieu est dispersif.

Quelle notion on introduit souvent pour se libérer du caractère non physique de l'OPH ?

- ⇨ Paquet d'ondes : peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'OPH de pulsations (et donc de vecteurs d'onde) différents.

Toutes les pulsations/fréquences ?

- ⇨ Non, il faut prendre des fréquences proches de la fréquence fondamentale -> le paquet d'ondes a une largeur spectrale finie.

Pourquoi on utilise les OPH et pas un paquet d'ondes ?

- ⇨ Les équations sont linéaires, on peut donc appliquer le théorème de superposition, et tout signal périodique est décomposable en série de Fourier. Par superposition, tous les résultats fonctionnent pour un paquet d'ondes.

Comment retrouver c avec le câble coaxial ?

- ⇨ Bien choisir les paramètres de l'impulsion : choisir une durée d'impulsion plus petite que le temps de parcours du câble (on s'attend à 500 ns), lui-même plus petit que la période (prendre T = 1 µs).

Autres types d'équation d'ondes ?

- ⇨ Klein-Gordon dans les plasmas, équation des télégraphistes, ondes capillaires, équation de diffusion…

De quoi est constitué un câble coaxial ?

- ⇨ Conducteur central, isolant diélectrique, conducteur (fil de cuivre) -> capacité : 2 cylindres coaxiaux forment un condensateur cylindrique.

Comment modéliser les pertes dans un câble coaxial ?

- ⇨ Résistance : pertes par effet Joule, conductance : fuite des électrons (fuite de charge) à travers le diélectrique

Qu'est-ce qu'un mode propre ? Différence avec mode résonant ?

- ⇨ Défini en régime libre -> la solution se décompose sur une base de solutions harmoniques : les modes propres. Il se trouve que la fréquence des modes résonants est égale à la fréquence des modes propres.

Titre alternatif ?

- ⇨ Ondes, propagation et impédance

Qu'est-ce qu'une impédance ?

- ⇨ Rapport d'une grandeur caractérisant une excitation et d'une grandeur caractérisant sa réponse (ex : force/débit, pression acoustique/vitesse, tension/courant, température/flux de chaleur…)