

Précession dans les domaines macroscopiques et microscopiques

Niveau : L3

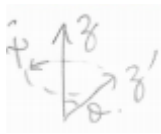
Prérequis : mécanique du point, mécanique du solide, matrices d'inertie, lois de Kepler, magnétostatique

Introduction

La précession est le nom donné au changement graduel d'orientation de l'axe de rotation d'un objet. Ce mouvement est provoqué lorsqu'on applique un couple à un gyroscope. Il s'agit d'un appareil qui exploite le principe de conservation du moment cinétique. On l'utilise notamment pour le guidage des missiles, en aviation, la station spatiale internationale et le télescope Hubble.

I Précession macroscopique : gyroscope

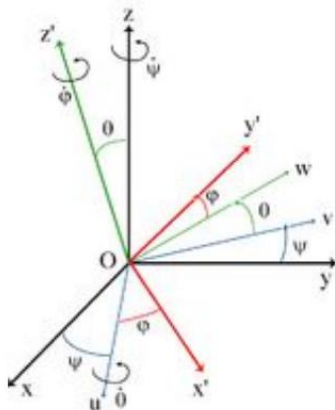
1) Définitions



Ici, l'axe de rotation propre $\vec{e}_{z'}$ décrit au cours du temps un cône parcouru à vitesse de rotation $\dot{\psi}$ constante. L'angle θ entre $\vec{e}_{z'}$ et \vec{e}_z reste fixe.

On étudie un gyroscope équilibré (solide de révolution mobile autour d'un point fixe O) et une masse m. Ce système a une symétrie de révolution autour de (Oz') avec O (point fixe) et G (centre de gravité) tels que $|\vec{OG}| = l$.

On introduit les angles d'Euler : Ψ (précession), ϕ (rotation propre), θ (nutation) et on se place dans la base $R_i(O, u, v, z')$.



Référentiels :

$R(O, x, y, z)$ référentiel du laboratoire

↓ Rotation d'angle ψ d'axe Oz

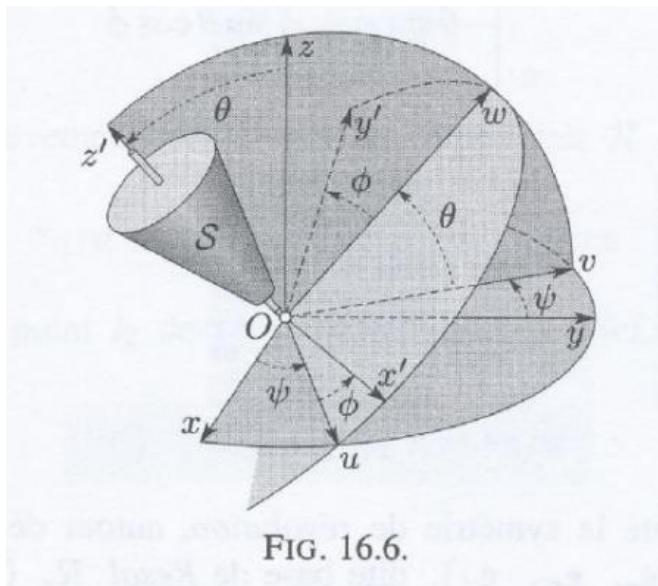
$R_j(O, u, v, z)$ référentiel intermédiaire

↓ Rotation d'angle θ d'axe Ou

$R_i(O, u, w, z')$ référentiel intermédiaire

↓ Rotation d'angle ϕ d'axe Oz'

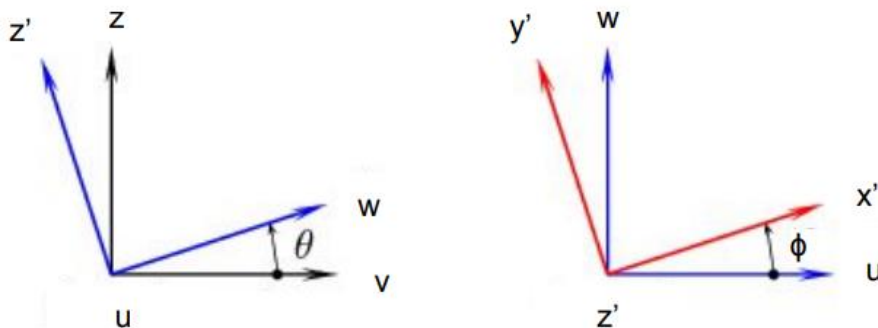
$R'(O, x', y', z')$ référentiel du gyroscope



2) Équation de précession

On cherche $\overrightarrow{\Omega_{R/R'}}$, vitesse de rotation du gyroscope par rapport au référentiel du laboratoire, supposé galiléen, dans la base Ri.

$$\overrightarrow{\Omega_{R/R'}} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$



$$\vec{\Omega_{R'/R}} = \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\psi} (\cos(\theta) \vec{e}_z + \sin(\theta) \vec{e}_w) + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$

$$\vec{\Omega_{R'/R}} = \vec{\Omega_{Ri/R}} + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$

La répartition de la masse est symétrique selon (Oz') , donc la matrice d'inertie est diagonale dans la

base Ri et vaut : $\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}_{Ri}$

Le moment cinétique s'écrit donc : $\vec{L}_O = \vec{I} \vec{\Omega_{R/R'}} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\theta} \\ I_2 \dot{\psi} \sin(\theta) \\ I_z \dot{\psi} \cos(\theta) + I_z \dot{\phi} \end{pmatrix}_{Ri}$

D'après le théorème du moment cinétique appliqué en O dans R :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{R_i} + \vec{\Omega}_{R/R_i} \wedge \vec{L}_O = \vec{M}(\vec{P})_O = -\ell \vec{e}_{z'} \wedge mg \vec{e}_z = mgl \sin(\theta) \vec{e}_u$$

Projection dans la base Ri du théorème du moment cinétique en O par rapport à R :

$$\begin{aligned} 0 &= I\ddot{\theta} + (I_{z'} - I)\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{z'}\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta - \ell mg \sin \theta, \\ 0 &= I\ddot{\psi} + (2I - I_{z'})\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta - I_{z'}\dot{\theta}\dot{\phi}, \\ 0 &= \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta + \ddot{\phi}. \end{aligned}$$

On fait l'approximation gyroscopique : $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}$ et $I_z \dot{\phi} \gg I_2 \dot{\psi}, I_1 \dot{\theta}$

Ainsi, $\vec{L}_O = I_z \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$ avec $\vec{\Omega}_{R/R_i} = \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$

Le système précédent se réécrit :

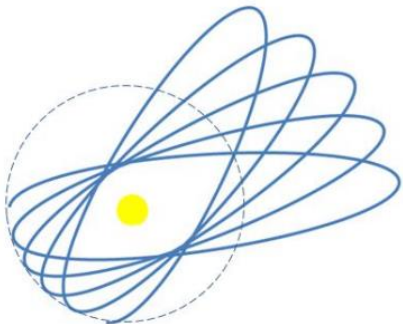
$$\begin{cases} I_z \dot{\psi} \dot{\phi} \sin(\theta) - mgl \sin(\theta) = 0 \\ I_z \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \\ \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

- ➔ $\dot{\phi} = \text{cste}$ (vitesse de rotation propre)
- ➔ $\theta = \text{cste}$ (angle de nutation, entre Oz et Oz')
- ➔ $\dot{\psi} = \frac{mgl}{I_z \dot{\phi}}$ (vitesse de précession)

Le théorème du moment cinétique se réécrit : $\vec{M}(\vec{P})_O = \frac{mgl}{I_z \dot{\phi}} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$ donc $\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{R_i} = \dot{\psi} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O$ (équation de précession)

3) Précession de Mercure

Dans le système solaire, Mercure connaît une importante précession du périastre, de l'ordre de 560''. La précession du périastre est le phénomène selon lequel un corps en orbite autour d'un autre voit l'ellipse décrivant sa trajectoire tourner lentement dans son plan orbital. De fait, au cours des révolutions successives, la direction décrite par la droite passant par le corps attracteur et le corps en orbite n'est pas fixe, mais varie lentement.

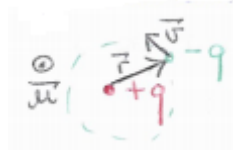


La précession de Mercure ne peut s'expliquer par l'étude précédente, mais par la relativité générale.

II Effet gyromagnétique microscopique

1) Précession de Larmor

On place un atome d'hydrogène dans un champ magnétique constant \vec{B} . Un modèle classique donne :



Le noyau est considéré immobile ($m_p \gg m_e$)

On peut faire une analogie avec une boucle de courant : le moment magnétique s'écrit $\vec{m} = i\vec{S}$, avec $i = \frac{-qv}{2\pi r}$ et $\vec{S} = \pi r^2 \vec{u}$.

Le moment cinétique orbital de l'électron s'écrit : $\vec{L} = m_e r v \vec{u}$

On a donc : $\vec{\mu} = \frac{-q}{2m_e} \vec{L} = \gamma \vec{L}$, γ est le rapport gyromagnétique

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'atome donne : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\vec{F}_{mag}) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

Donc : $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{\mu}$

Il y a donc une précession du moment magnétique à la pulsation $\omega_L = \gamma B$ (pulsation de Larmor)

Ordre de grandeur : pour $B = 1T$ la fréquence est de 14GHz.

2) Effet Einstein-De Haas

Dans les années 1910, Einstein et De Haas ont mis en évidence le lien entre magnétisme, moment angulaire et spin. Cet effet correspond à la rotation communiquée à un matériau ferromagnétique initialement au repos, suspendu à fil au centre d'un solénoïde parcouru par un courant électrique. On associe à cette rotation un moment cinétique, compensé par un moment de même intensité au cœur du matériau. L'effet Einstein-De Haas met en évidence le fait que le moment cinétique de spin est de même nature que le moment cinétique des solides en rotation, décrit en mécanique classique.

On considère un matériau ferromagnétique soumis à un champ magnétique \vec{B} : $\vec{L}_{mat} = \frac{1}{\gamma} \vec{\mu}_{mat}$

$\vec{L}_{sol} = I\vec{\omega}$ (mouvement des centres de gravité des atomes).

$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{mat} + \vec{L}_{sol}$, d'après le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \vec{\mu}_{mat} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car en moyenne sur tout le matériau, $\vec{\mu}_{mat} // \vec{B}$.

On a donc $\vec{L}_{tot} = \vec{cste}$, or $\vec{L}_{tot} = \vec{0}$ initialement.

Donc $\vec{L}_{sol} = -\vec{L}_{mat}$

Cet effet confirme l'existence d'un effet gyromagnétique microscopique.

Conclusion

L'effet gyromagnétique microscopique que nous avons mis en évidence est exploité dans la résonance magnétique nucléaire.

Bibliographie

- Mécanique quantique, Dalibard, Basdevant
- Physique atomique, Cagnac, Pebay-Peroula
- Mécanique : fondements et applications, Perez

Questions

- Applications du gyroscope ?
 - ➔ Le gyroscope équilibré permet de se repérer dans l'espace (bateaux, avions) et peut servir à équilibrer les bateaux.
- Gyroscope équilibré et emplacement de O et G ?
 - ➔ On ramène le centre de gravité sur l'axe, O et G sont confondus sinon le gyroscope tournerait.
- Principe de la RMN ?
 - ➔ Précession des spins des noyaux nucléaires avec application d'un champ magnétique statique et d'un autre faible champ oscillant perpendiculaire au statique tel que sa fréquence est à la fréquence de Larmor des atomes considérés \Rightarrow résonance
- Effet Einstein-De Haas : différence entre para et ferro ?
 - ➔ Aucune différence, dans les deux cas les moments s'alignent selon le champ, simplement le ferro gardera son aimantation si on enlève le champ.
- Comment mesurer la rotation de la Terre avec un gyroscope ?
 - ➔ On mesure la déviation de l'axe du gyroscope après un temps long.
- Précession du périhélie pour d'autres planètes ?
 - ➔ Oui mais l'effet est beaucoup plus faible (Mercure \gg Vénus \gg Jupiter \gg autres).
- Signe du rapport gyromagnétique du neutron ?
 - ➔ Négatif
- L'angle de nutation est-il constant si on prend en compte les frottements ?
 - ➔ Non

Autres types de précession : effet de Sitter, précession de Thomas, précession géodétique, Cardan (voir Perez et BFR)