Cinématique relativiste

Niveau : L3

Prérequis : lois de Newton, transformation de Galilée, équations de Maxwell

Introduction

Les lois de l' électromagnétisme et celles de la mécanique de Newton fonctionnent bien séparément mais pas si on les combine. En effet, les lois de la dynamique sont invariantes par la transformation de Galilée mais pas les lois de Maxwell. Il est donc nécessaire d'établir un nouveau formalisme pour pouvoir concilier les deux. Le but n'étant pas de repartir de zéro, mais d'adapter les relations existantes en mécanique Newtonienne. Ce nouveau formalisme porte le nom de la relativité restreinte.

I Cadre de la relativité restreinte

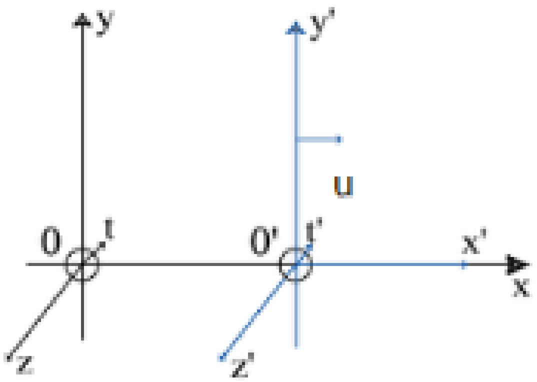
1) Limite de la relativité galiléenne

Rappels :

<u>Référentiel</u> : observateur muni d'une horloge pour mesurer des durées et d'un système de référence pour repérer des distances.

<u>Référentiel galiléen</u> : référentiel dans lequel le centre de masse d'un système isolé est au repos ou en translation rectiligne uniforme.

Transformation de Galilée :



Pour deux référentiels R et R' en translation rectiligne uniforme à la vitesse v, les relations entre les coordonnées des deux référentiels sont : $t' = t$; $x' = x - vt$; $y' = y$ et $z' = z$.

Remarque : les durées mesurées sont identiques dans tous les référentiels : le temps est absolu en relativité galiléenne.

Limites : la relativité galiléenne prédit une vitesse de la lumière dépendant du référentiel.

Expériences : Fizeau (la vitesse de la lumière ne vérifie pas la composition des vitesses galiléennes) et Michelson-Morlay (la vitesse de la lumière est constante quel que soit le référentiel).

Il s'agit donc de considérer une nouvelle transformée laissant invariante la vitesse de la lumière. Nous avons besoin de la relativité restreinte.

Postulats de la relativité restreinte :

- Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens
- La vitesse de la lumière ne dépend pas du référentiel d'étude, ni de la source qui l'émet. Dans le vide, c = 299792458 $m.s^{-1}$

En relativité restreinte, il s'avère que l'espace et le temps sont couplés.

2) L'espace-temps

L'espace-temps, ou espace-temps de Minkowski est constitué d'un ensemble de points. Dans cet espace, un évènement est caractérisé par le lieu et l'instant auquel il se produit. A(x, y, z, t) défini un évènement dans un repère défini. On se place alors dans un espace à 4 dimensions. Un évènement est un point de cet espace. Une paire ordonnée d' évènements permet de définir un vecteur dans l'espace-temps, c'est-à-dire un élément d'un espace vectoriel associé à cet espace, appeĺe quadrivecteur.

Au mouvement d'une particule on fait correspondre une ligne de cet espace que l'on appelle <u>ligne d'univers</u>.

Le carré de l'intervalle entre deux évènements quelconques est un scalaire invariant par tout changement de référentiel galiléen. On considère deux évènements $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B, t_B)$.

$(\Delta s)^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 = cste$

L'intérêt d'avoir un invariant est de pouvoir mesurer des distances dans l'espace de Minkowski.

On distingue 3 types de distances dans l'espace-temps :

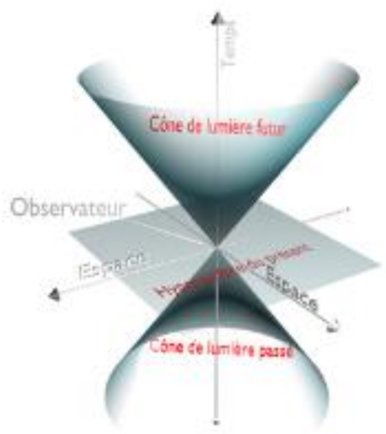
- $(\Delta s)^2 > 0$: l'intervalle est de genre temps : correspond à deux évènements pouvant être reliés par un phénomène de vitesse inférieure à c. Il peut donc y avoir un lien causal entre les évènements et ce dans tout référentiel car $(\Delta s)^2$ est un invariant. La causalité est conservée par changement de référentiel. On définit une durée propre indépendante du référentiel :

$$\tau = \frac{(\Delta s)^2}{c}$$

La durée propre entre deux évènements correspond à la durée mesurée dans un référentiel où les évènements ont lieu au même point d'espace, c'est-à-dire une durée mesurée par une horloge immobile.

- $(\Delta s)^2 = 0$: l'intervalle est de genre lumière : correspond à deux évènements pouvant être reliés seulement par un signal lumineux, et ce dans tous les référentiels galiléens.
- $(\Delta s)^2 < 0$: l'intervalle est de genre espace : correspond à deux évènements ne pouvant être reliés que par un phénomène plus rapide que la lumière. Les deux évènements sont considérés comme ne pouvant être en relation causale.

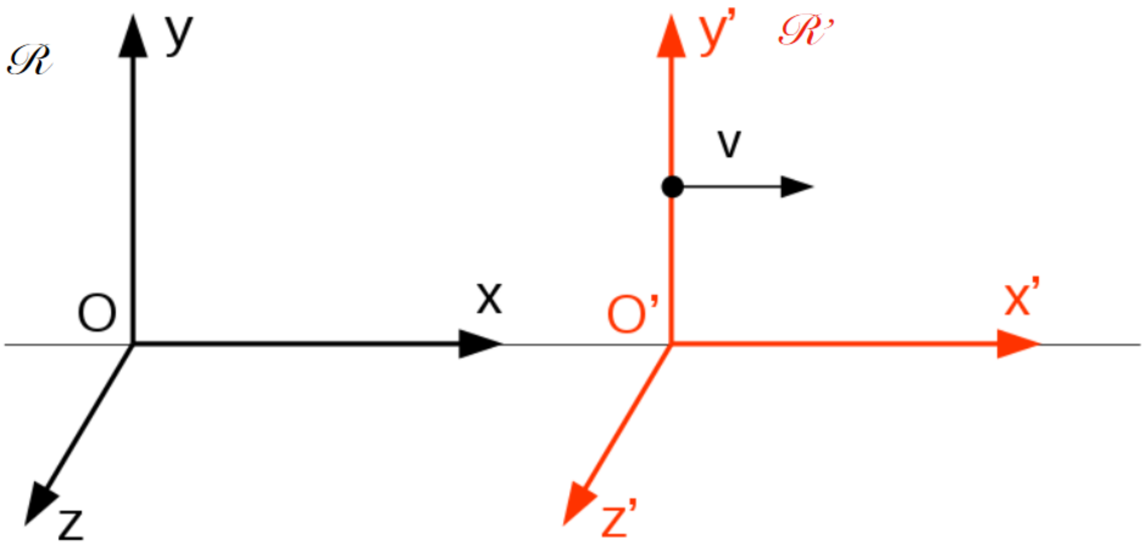
On peut alors se représenter l'espace-temps comme délimité par un cône de lumière en chaque pont de l'hypersurface du présent (de dimension 3).



Nous allons maintenant définir les transformations permettant de passer d'un référentiel à l'autre en relativité restreinte.

II Transformation de Lorentz

1) Transformation de Lorentz spéciale



On considère deux référentiels R et R'. R' est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à R à la vitesse $V\overrightarrow{e_x}$. La transformée de Lorentz est :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Avec $\beta = \frac{V}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ le coefficient de Lorentz.

Remarque : le temps n'est plus universel

Il découle de cette transformation une nouvelle composition des vitesses. En différentiant par rapport au temps, on obtient : $cdt' = \gamma(cdt - \beta dx)$ et $dx' = \gamma(-\beta cdt + dx)$

On obtient : $v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$, avec v_x et v_x' les vitesses instantanées selon x dans les référentiels R et R'.

On peut remarquer que si $v_x = c$, alors $v_x' = c$ également : on retrouve bien l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel.

Si V << c, on retrouve la transformation de Galilée dans le cade de la mécanique newtonienne.

2) Conséquences

- Longueur propre : longueur d'un objet mesurée dans le référentiel où il est immobile

On considère une règle de longueur $\Delta x' = x_2' - x_1'$, immobile dans R' se déplaçant suivant l'axe Ox à une vitesse V par rapport au référentiel R. On veut connaître la longueur Δx mesurée dans R au même temps t.

$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - Vt) \\ x_2' = \gamma(x_2 - Vt) \end{cases}$ donc $\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$

Comme $\gamma > 1$, $\Delta x < \Delta x'$: il y a contraction des longueurs : vu de R, une règle en mouvement paraît plus courte.

- Temps propre : comme on l'a vu précédemment, c'est l'intervalle de temps séparant deux indications d'une même horloge dans le référentiel où elle est au repos.

On considère une horloge immobile dans R' au point x', en mouvement suivant l'axe Ox à une vitesse V par rapport à R. Cette horloge mesure une durée $\Delta t' = t_2' - t_1'$ au même point x'.

$\begin{cases} ct_1 = \gamma(ct_1' + \frac{V}{c}x') \\ ct_2 = \gamma(ct_2' + \frac{V}{c}x') \end{cases}$ donc $\Delta t = \gamma\, \Delta t'$

Comme $\gamma > 1$, $\Delta t > \Delta t'$: il y a dilatation des durées : vu de R, le temps paraît plus long que celui mesuré dans R'.

Paradoxe des jumeaux de Langevin : En 1911 au congrès de Bologne, Paul Langevin propose une expérience de pensée mettant en jeu deux jumeaux dont l'un reste sur Terre et l'autre fait un voyage aller-retour dans l'espace en fusée à une vitesse proche de celle de la lumière. D'après le phénomène de dilatation des durées, pour celui qui est resté sur Terre la mesure de la durée du voyage doit être plus grande que pour celui qui est parti dans l'espace. A son retour, le jumeau resté sur Terre doit donc être plus vieux que lui. Toutefois, si on considère que les référentiels de la Terre et de la fusée sont galiléens, le jumeau qui voyage est en droit de considérer que c'est son frère et la Terre qui s'éloignent à grande vitesse de lui. Il pourrait donc conclure que c'est son frère, resté sur Terre, qui est plus jeune que lui à la fin du voyage. C'est le paradoxe des jumeaux (ou paradoxe des horloges) qui semble montrer que la dilatation des durées n'est en fait qu'illusoire comme le pensaient de nombreux physiciens à cette époque. Pourtant, des confirmations expérimentales (comme la durée de vie des muons ou l'expérience de Hafele et Keating) montrent que cet effet de dilatation des durées est bien réel et mesurable. La levée de ce paradoxe est due au fait que le référentiel de la fusée n'est pas toujours galiléen, notamment dans les phases de demi-tour et d'accélération (un calcul de relativité générale montre que ces phases d'accélérations n'introduisent pas de décalages temporels significatifs). Les situations des jumeaux n'est donc pas symétrique car le jumeau sur Terre est resté dans son même référentiel galiléen, contrairement au jumeau dans la fusée, qui a changé de référentiel.

Ex : trajet en RER depuis Paris

V = 80 $km.h^{-1}$, γ = 1, $\tau = \frac{t}{\gamma}$, $t - \tau = t(1 - \sqrt{1-\beta^2} = \frac{t\beta^2}{2}$, si on fait le trajet 6 fois (3 aller-retours, 18 min par trajet) : on gagne 18ps.

Conclusion

Lorsqu'on étudie un système qui possède une vitesse proche de la lumière, les effets relativistes ne sont pas négligeables. La cinématique relativiste est une nouvelle théorie du mouvement qui implique que les durées varient selon les référentiels. C'est un effet dont on tient compte aujourd'hui dans les GPS. La relativité permet d'expliquer de nombreux phénomènes que l'on ne pourrait pas décrire et comprendre avec la mécanique newtonienne, typiquement la relativité générale permet d'expliquer la précession de Mercure.

Bibliographie

-Relativité restreinte, Grossetête

-Relativité restreinte, Semay, Silvestre-Brac

Questions

- D'autres invariants que $(\Delta s)^2$?
- ➔ Temps propre et longueur propre
- Importance de la notion d'invariant ?
- ➔ Un invariant est une quantité qui peut être mesurée par n'importe quel observateur, chacun de ces observateurs pouvant alors comparer leurs mesures et se mettre d'accord sur une valeur invariante.