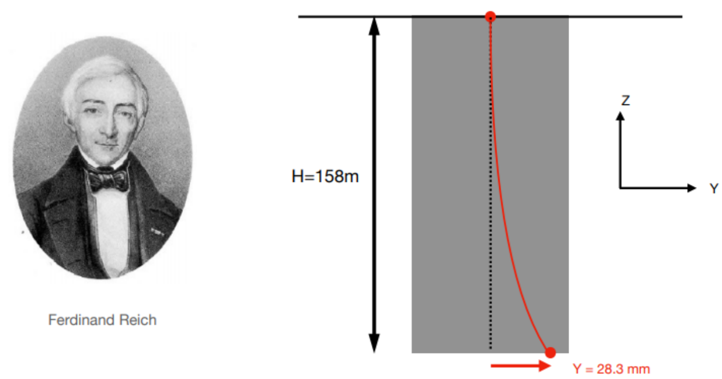
Caractère non galiléen du référentiel terrestre

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : Référentiels galiléens et non galiléens, lois de la dynamique, dynamique en référentiel non galiléen, force de marée

Introduction

En 1832, Ferdinand Reich réalise l'expérience suivante dans une mine de Saxe : il lâche un objet du haut d'un puits de 158 m. Au sol, il remarque que statistiquement, les impacts sont décalés de 28,3 mm du point de lâcher de l'objet par rapport à la verticale locale : il met en évidence ce qu'on appelle depuis déjà des siècles la déviation vers l'est.

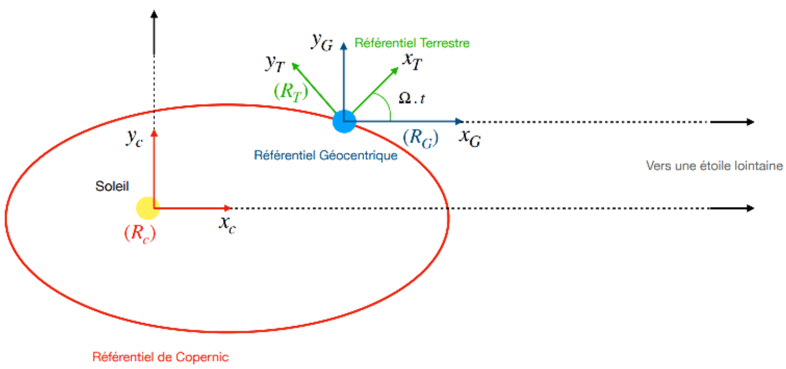


Mise en évidence d'une déviation de la chute vers l'Est

Ce phénomène avait déjà été observé et étudié auparavant, notamment par Newton, qui explique cet effet de manière sommaire par la rotation de la Terre sur elle-même. Il faudra attendre les travaux de Coriolis pour expliquer de manière convaincante cet effet, grâce à l'introduction de l'accélération de Coriolis, qui découle directement du caractère non galiléen du référentiel terrestre, que nous étudierons dans cette leçon.

I Mouvement de la Terre et conséquences

1) Différents référentiels



Quel référentiel pratique pour décrire le mouvement des objets terrestres ?

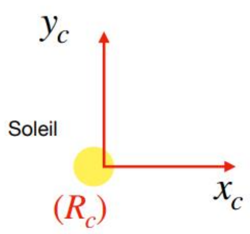
- référentiel de Copernic : origine au centre de masse du système solaire, axes pointant vers 3 étoiles lointaines supposées fixes
- référentiel géocentrique : origine au centre de masse de la Terre, axes pointant vers 3 étoiles lointaines supposées fixes
- référentiel terrestre : origine au centre de masse de la Terre, axes pointant vers 3 points fixes de la Terre

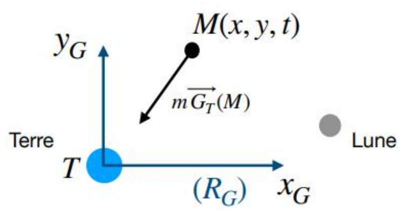
On suppose que le référentiel de Copernic est galiléen, en admettant que cette approximation est valable sur des échelles de temps de l'ordre de 230 millions d'années. Cependant, il n'est pas pratique pour décrire le mouvement d'objets à la surface de la Terre, notamment à cause du mouvement de la Terre (dictée par les lois de Kepler).

Les axes du référentiel géocentrique pointant vers les mêmes étoiles lointaines que le référentiel de Copernic, par définition, le référentiel géocentrique est en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au référentiel de Copernic. A priori, il n'y a pas de raison que l'on puisse le considérer galiléen. Pourtant, il est un bon candidat pour la description du mouvement des objets au voisinage de la Terre. Nous allons étudier plus en détail ce référentiel.

2) Dynamique dans le référentiel géocentrique

On considère un objet de masse m au voisinage de la Terre au point M.





On applique le PFD : $m\vec{a}\big(M/R_g\big) = m\overrightarrow{g_S}(M) + m\overrightarrow{g_L}(M) + m\overrightarrow{g_T}(M) + \overrightarrow{F_{\iota,e}} + \overrightarrow{F_{\iota,c}}$

Avec $\overrightarrow{F_{\iota,e}} = -m\vec{a}(T/R_C) - m\overrightarrow{\Omega_g} \wedge (\overrightarrow{\Omega_g} \wedge \overrightarrow{TM})$ et $\overrightarrow{F_{\iota,c}} = -2m\overrightarrow{\Omega_g} \wedge \vec{v}(M/R_g)$

Le référentiel de Copernic et le référentiel géocentrique sont en translation : il ne reste que le premier terme de la force d'entraînement : $\vec{a}(T/R_C) = \overrightarrow{g_S}(T) + \overrightarrow{g_L}(T)$

Finalement : $m\vec{a}\big(M/R_g\big) = m\overrightarrow{g_T}(M) + m(\overrightarrow{g_S}(M) - \overrightarrow{g_S}(T)) + m(\overrightarrow{g_L}(M) - \overrightarrow{g_L}(T))$

Les accélérations différentielles sont respectivement de l'ordre de 5.10^{-7} m.s^{-2} et 10^{-6} m.s^{-2}, elles sont très faibles devant l'accélération moyenne de la pesanteur terrestre. On peut donc négliger les effets de marée dans cette leçon et supposer que le référentiel géocentrique est galiléen.

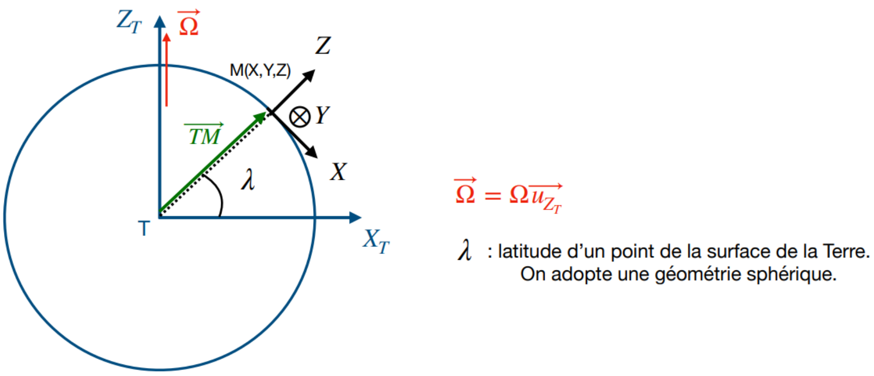
Ainsi, notre étude se limite aux effets non galiléens dus à la rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique. On considère que cette rotation est uniforme, d'axe passant par les pôles, avec $\Omega = 7{,}29.10^{-5}$ rad.s^{-1}. On peut réécrire le PFD dans le référentiel terrestre :

$$m\vec{a}(M/R_g) = \sum_i \vec{F_i} - m\vec{a}(T/R_g) - m\vec{\Omega_g} \wedge (\vec{\Omega_g} \wedge \overrightarrow{TM}) - 2m\vec{\Omega_g} \wedge \vec{v}(M/R_g)$$

Or $\vec{a}(T/R_C) = \vec{0}$

Donc

$$m\vec{a}(M/R_g) = \sum_i \vec{F_i} - m\vec{\Omega_g} \wedge (\vec{\Omega_g} \wedge \overrightarrow{TM}) - 2m\vec{\Omega_g} \wedge \vec{v}(M/R_g)$$



II Correction au champ de pesanteur terrestre

1) Effet de la force d'inertie d'entraînement

On s'intéresse à un objet immobile à la surface terrestre : $\vec{v}(M/R_g) = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{F_{i,c}} = \vec{0}$

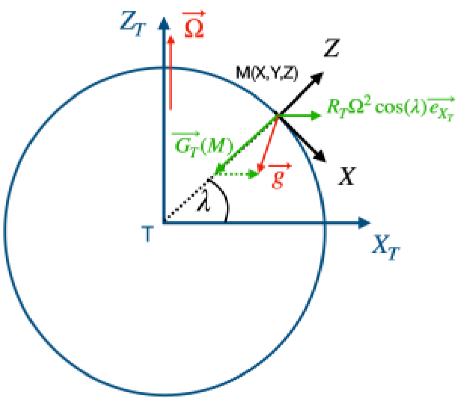
Dans ce cas : $\overrightarrow{TM} = R_T \cos(\lambda)\,\overrightarrow{u_{X_T}} + R_T \sin(\lambda)\overrightarrow{u_{Z_T}}$ et $\vec{\Omega} = \Omega\overrightarrow{u_{Z_T}}$

$$\overrightarrow{F_{i,e}} = m\Omega^2 R_T \cos(\lambda)\overrightarrow{u_{X_T}}$$

On définit le poids comme étant la force subie par un objet placé à la surface de la Terre et ne subissant comme vraie force que l'attraction gravitationnelle de la Terre :

$$\vec{P} = m\vec{g}(\lambda) = m\overrightarrow{g_T} + m\Omega^2 R_T \cos(\lambda)\overrightarrow{u_{X_T}}$$

Conséquence : le poids n'est plus strictement radial, mais admet une composante orthogonale à $\vec{\Omega}$. La verticale n'est donc plus dirigée vers le centre de la Terre.



2) Variation du champ de pesanteur terrestre

Au pôle nord, λ = 90° donc $\vec{g}(\lambda) = \overrightarrow{g_T}(M)$

A l'équateur, λ = 0° donc $\vec{g}(\lambda) = \overrightarrow{g_T}(M) + \Omega^2 R_T \overrightarrow{u_{X_T}}$

La différence maximale est donc $\Delta g = \Omega^{2R_T} = 3{,}39.10^{-2} m.s^{-2}$

Expérimentalement, cette différence est de 5,2.10^{-2} m.s^{-2}, l'écart est dû à l'hypothèse de sphéricité de la Terre. La mesure de cet écart nous renseigne d'ailleurs sur l'excentricité de la Terre.

III Influence de la force d'inertie de Coriolis

1) Déviation vers l'est

On s'intéresse ici au mouvement d'un objet en chute libre depuis une hauteur h au voisinage de la surface de la Terre. On va négliger ici la correction faite sur la direction de la verticale locale.

L'équation du mouvement s'écrit : $m\vec{a}(M/R_T) = m\vec{g}(\lambda) - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M/R_T)$

Cette équation est a priori difficile à intégrer, on souhaite mettre en place un traitement perturbatif. Pour ça, on fait l'hypothèse suivante : à tout instant, on suppose que $v_Z(M/R_T)$ >> $v_Y(M/R_T)$ -> $\vec{v}(M/R_T)//\overrightarrow{u_Z}$.

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2\Omega\cos(\lambda)\dot{z} \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On observe l'apparition d'une accélération due à la force de Coriolis, dirigée selon y, c'est-à-dire vers l'est dans notre système de coordonnées. Après intégration, en prenant une vitesse initiale nulle et z(0) = R_T + h, on obtient :

$$x = 0$$
$$y = g\Omega\cos(\lambda)\frac{t^3}{3}$$
$$z = R_T + h - \frac{gt^2}{2}$$

Le temps de chute libre est tel que z = R_T, soit :

$$\begin{cases} \tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \\ y_c = \dfrac{\Omega\cos(\lambda)}{3\sqrt{g}}(2h)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

y_c est la déviation vers l'est. Application numérique pour l'expérience de Ferdinand Reich : 27,4 mm.

On va maintenant raisonner en ordre de grandeur pour en tirer une observation générale :

$\frac{y_c}{h} \propto \Omega\sqrt{h}$ or $\tau \propto \sqrt{h}$ donc $\frac{y_c}{h} \propto \frac{t_c}{T}$ avec T la période de rotation de la Terre. On en déduit donc une propriété que l'on trouve souvent sans trop de justification : les effets relatifs de la force de Coriolis sont négligeables dès lors que la durée de l'expérience (ici le temps de chute τ) est très faible devant une journée.

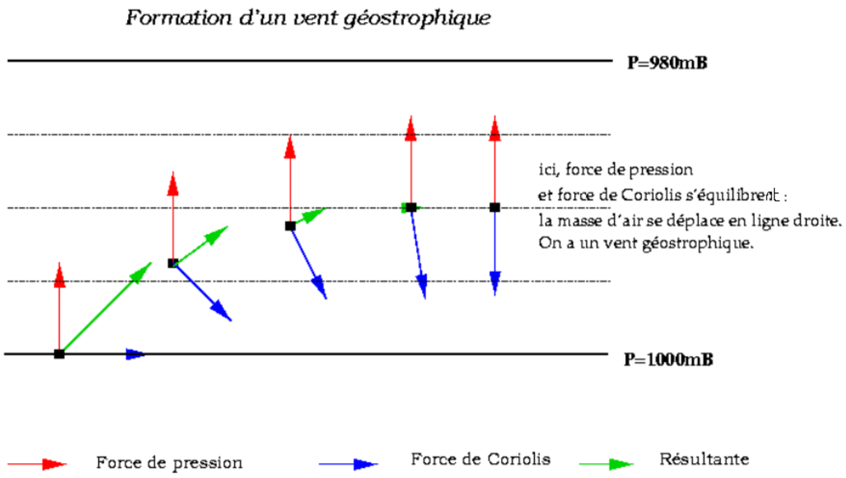
2) Application : les vents géostrophiques

On s'intéresse au mouvement d'une particule de fluide dans l'atmosphère, dans le plan tangent local à la surface de la Terre , par exemple selon $\overrightarrow{u_X}$, c'est-à-dire vers le sud. Dans ce cas,

$$\overrightarrow{F_{i,c}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\Omega v sin(\lambda)\overrightarrow{u_Y}$$

Le fluide est donc dévié vers l'ouest dans l'hémisphère nord, et vers l'est dans l'hémisphère sud. On admet que quelle que soit la direction de son mouvement, la masse de fluide est déviée vers sa droite dans l'hémisphère nord, et vers sa gauche dans l'hémisphère sud.

Une conséquence de cette déviation est la formation de cyclones dans des zones de l'atmosphère où règnent des gradients de horizontaux de pression.



On se place dans l'hémisphère nord. Le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression considéré. Il acquiert une vitesse, et est donc soumis à la force de Coriolis, qui fait tourner la direction dans laquelle il évolue vers la droite constamment. Lorsque la force due au gradient de pression et la force de Coriolis s'annulent, on observe un équilibre. Le fluide en régime stationnaire est régi par l'équation : $\rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}(p) - 2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

En projetant l'équation dans le plan tangent (X, Y) et en notant $\overrightarrow{grad_{//}}(p)$ la composante tangentielle du gradient de pression, on obtient la vitesse géostrophique : $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{u_{Z_T}}}{2\rho\Omega} \wedge \overrightarrow{grad_{//}}(p)$. On en déduit que pour les vents géostrophiques, les isobares sont les lignes de champ.

Pour des dépressions (cyclones) ou des surpressions (anticyclones), le sens de $\overrightarrow{grad_{//}}(p)$ est inversé. Par ailleurs, pour un gradient de pression donné, le sens de rotation est inversé dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud.

Conclusion

On peut négliger les forces de marées pour des objets proches de la surface de la Terre : on s'affranchit alors du caractère non-galiléen du référentiel géocentrique. On peut négliger l'accélération d'entraînement sans condition sur la durée de l'expérience car elle est faible devant l'accélération gravitationnelle terrestre pour un objet proche de la surface de la Terre également. Dans le cas où la durée de l'expérience est très courte devant une journée, on peut également négliger les effets relatifs de la force d'inertie de Coriolis.

Questions

- Dans quelle mesure peut-on parler de « forces d'inertie » ?

→ Les accélérations d'inertie sont des accélérations uniquement dues à l'expression d'un certain mouvement dans un certain référentiel. On peut choisir de les modéliser mathématiquement par des forces, mais celles-ci ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction : ce ne sont pas des forces à proprement parler.

- Comment serait modifiée une résolution énergétique d'un problème posé dans un référentiel non-galiléen ? L'énergie mécanique est-elle conservée ?

→ La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas, et la force d'inertie d'entraînement dérive d'un potentiel, donc l'énergie mécanique est conservée par ces forces. Dans le référentiel non-galiléen en question, il faut inclure l'énergie potentielle associée à la force centrifuge : $E_p(r) = \frac{m\Omega^2 r^2}{2}$ avec r la distance à l'axe de rotation

- N'y a-t-il pas un paradoxe à considérer les forces de marées négligeables alors qu'on en observe facilement les conséquences (marées océaniques) ?

→ Si l'on raisonne sur les ordres de grandeurs de longueur mises en jeu, les amplitudes des marées sont de l'ordre de la dizaine de mètres au maximum, alors que la profondeur moyenne des océans est de 3600 mètres, donc tout à fait négligeable... Mais pas à l'échelle humaine.

- Qu'est-ce que la précession des équinoxes ?

→ Il s'agit du mouvement de précession de l'axe de rotation de la Terre autour de la normale au plan de l'écliptique. Du fait de l'ellipticité de la Terre, l'attraction gravitationnelle du Soleil crée un moment qui a tendance à ramener le grand axe de la Terre dans le plan de l'écliptique ; or le moment cinétique de la Terre est conservé, et donc il y a précession de l'axe de rotation de la Terre (comme un gyroscope).

- Quelle est la différence entre la déviation vers l'est et les vents géostrophiques du point de vue hémisphère Nord/Sud ?

→ La déviation vers l'est est respectée dans les deux hémisphères, puisqu'elle ne dépend que du sens de rotation de la Terre quelle que soit la position sur le globe. Mathématiquement, on a fait intervenir la dépendance en la latitude par un cos λ, qui est une fonction paire. Pour les vents géostrophiques, le sens dans lequel est dévié la masse de fluide par la force de Coriolis dépend de l'hémisphère. Mathématiquement, on a fait intervenir un sin λ, fonction impaire, dans l'expression de la force de Coriolis pour un objet en mouvement dans le plan tangent (X,Y).

- Quels sont les effets qui auraient pu fausser la mesure de Reich dans le puits de la mine ?

→ L'expérience ayant lieu dans une mine, on pourrait penser que Reich s'est affranchi des effets de bourrasques de vents. Pourtant, le fond des puits étant à une température bien plus élevée qu'à la surface, on a probablement des mouvements d'airs convectifs. A priori l'étude statistique menée a permis de s'en affranchir.

- D'où vient le "230 millions d'années" pour la validité du caractère galiléen du référentiel de Copernic ?

→ Il s'agit de la période de rotation du système solaire dans la galaxie.

- Quelle est la différence entre référentiel de Copernic et Héliocentrique ?

→ Il s'agit de l'origine : pour Copernic, c'est le centre de masse du système solaire. Pour l'Héliocentrique, c'est le centre du Soleil. La différence est très mince, puisque le centre de masse du système solaire est compris au sein du soleil lui-même.

- Comment obtenir une cartographie détaillée du champ de pesanteur d'un astre ?

→ On envoie deux sondes, sur des orbites de même altitude, qui se suivent. Lorsque la première sonde rencontre une anomalie gravitationnelle, elle est accélérée (ou freinée), tandis que la seconde ne la rencontrera que plus tard. On mesurant les accélérations relatives des deux sondes, on peut faire l'image du champ gravitationnel crée par l'astre.

- Applications dans lesquels les forces d'inertie d'entraînement sont utiles ?

→ Les centrifugeuses, notamment pour séparer le plasma des globules dans le sang. On peut citer aussi le régulateur de Watt, qui permettait l'asservissement en pression des premières machines à vapeur.

- La Terre est-elle un solide indéformable ?

→ Non, on peut utiliser un modèle de fluide à l'équilibre hydrostatique, on peut ainsi remonter à une modélisation de la forme elliptique de la Terre.

- Pouvez-vous commenter la stabilité des points de Lagrange vis-à-vis des forces d'inertie ?

→ Seuls les points L4 et L5 sont stables par rapport au système à trois corps Objet-Terre-Soleil. Les autres sont des points cols ou selles donc instables. Pour un objet placé en L4 et L5, les forces d'inertie ont tendance à le ramener vers le point de Lagrange occupé à chaque fois qu'il tend à s'en éloigner.

- De quoi sont constitués les gravimètres aujourd'hui ?

→ De systèmes interférentiels à lasers pour mesurer avec précision des temps de vol d'objets (atomes...) en chute libres.

Bibliographie

-BFR, mécanique

-Brasselet, Mécanique

-Perez, Mécanique