Bilans macroscopiques en mécanique des fluides – intérêt – exemples – applications

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : Lois de la dynamique, principes de la thermodynamique

Introduction

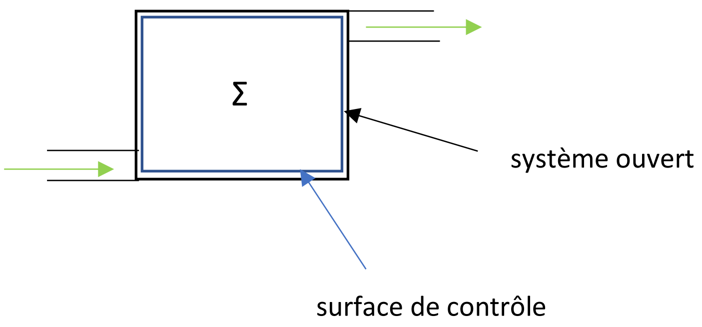
I Position du problème

1) Systèmes ouverts/fermés et surface de contrôle

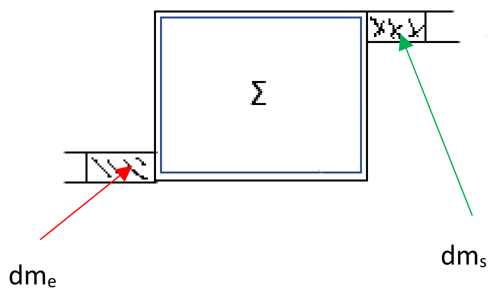
<u>système fermé</u> : pas d'échange de matière

<u>système ouvert</u> : échange de matière

<u>surface de contrôle</u> : surface fermée fixe qui délimite le système ouvert à étudier, il existe une surface d'entrée et une surface de sortie au niveau de la surface de contrôle



➔ On définit un système fermé, qu'on note Σ^*



$\Sigma^*(t) = \Sigma(t) + dm_e$ et $\Sigma^*(t + dt) = \Sigma(t + dt) + dm_s$

dm_e est la masse de fluide qui va entrer dans Σ entre t et t + dt, dm_s est la masse de fluide qui va sortir de Σ entre t et t + dt

2) Première application : bilan de masse

$m_{\Sigma^*}(t) = m_\Sigma(t) + dm_e$ et $m_{\Sigma^*}(t + dt) = m_\Sigma(t + dt) + dm_s$

On a donc $dm_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*}(t + dt) - m_{\Sigma^*}(t) = dm_\Sigma + dm_s - dm_e = 0$ car Σ^* est fermé.

Donc : $\frac{dm_\Sigma}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s}$

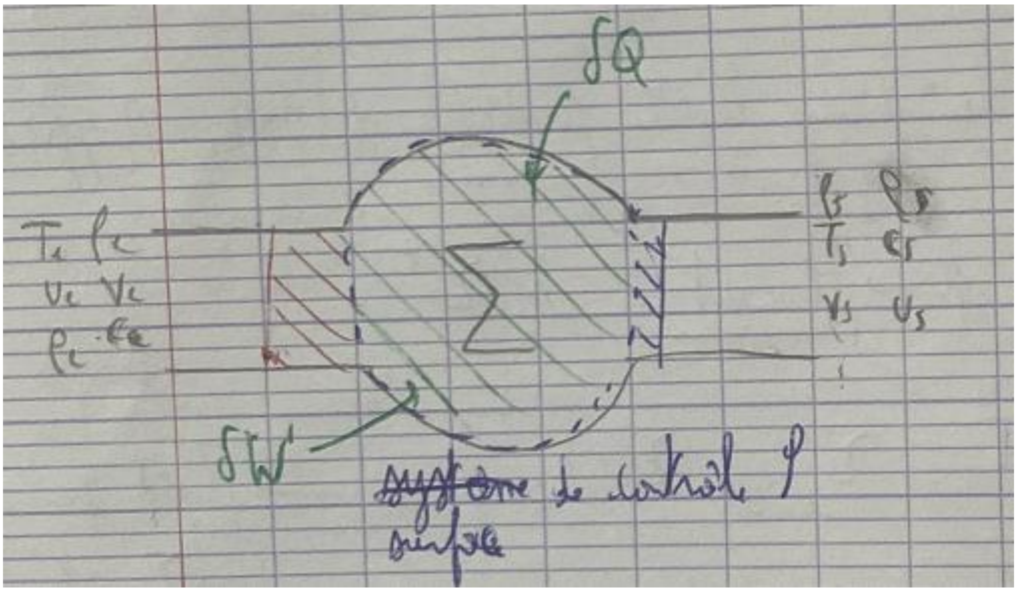
En régime permanent : $D_{m,e} = D_{m,s}$ ou $dm_e = dm_s$

3) Méthode d'étude

- identifier le système ouvert Σ, en déduire le système fermé Σ^*
- bilan de masse
- bilan de la grandeur X d'intérêt entre t et t + dt -> dX
- appliquer théorème/loi/principe sur X à Σ^* -> dX
- conclure en égalisant les deux expressions de dX

II Bilans macroscopiques

1) Bilan d'énergie



Bilan de masse :

$dm_{\Sigma^*} = dm_\Sigma + dm_s - dm_e$ et $dm_{\Sigma^*} = 0$ (système fermé), $dm_\Sigma = 0$ (régime permanent)

Donc $dm_e = dm_s = dm$

Bilan d'énergie :

$$E_{\Sigma^*}(t) = U_{\Sigma^*}(t) + E_{c\Sigma^*}(t) = E_\Sigma(t) + u_e dm + \frac{1}{2}{c_e}^2 dm$$

$$E_{\Sigma^*}(t+dt) = E_\Sigma(t+dt) + u_s dm + \frac{1}{2}{c_s}^2 dm$$

$$dE_{\Sigma^*} = dE_\Sigma + (u_s - u_e)dm + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2)dm$$

Appliquons le premier principe : $dE_{\Sigma^*} = dU_{\Sigma^*} + dE_{c\Sigma^*} = \delta W' + \delta Q + \delta W_t = w_u dm + q dm + \delta W_t$

δW_t est le travail des forces de pression qui permet au fluide d'avancer, $\delta W_t = P_e v_e dm - P_s v_s dm$

- ⇨ $(u_s - u_e)dm + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2)dm = (w_u + q + P_e v_e - P_s v_s)dm$
- ⇨ $u_s + P_s v_s - (u_e + P_e v_e) + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) = w_u + q$
- ⇨ $h_s - h_e + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) = w_u + q$

On obtient le premier principe pour un système ouvert en écoulement permanent :

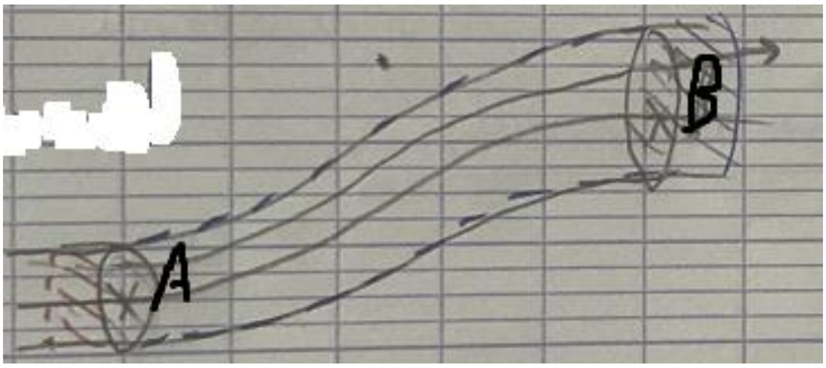
$$\boxed{\Delta\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = w_u + q}$$

On peut le réécrire : $\boxed{D_m \Delta\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = P_u + P_{th}}$

Si l'entrée et la sortie sont à des altitudes différentes, un terme d'énergie potentielle de pesanteur existe dans w_u : $w_u = w_u' - (gz_s - gz_e)$

2) Écoulement parfait, homogène, incompressible et stationnaire

L'écoulement est parfait, donc il n'y a pas de viscosité. L'écoulement est incompressible donc il n'y a pas de travail des forces de pression. On considère que les particules de fluide évoluent de façon adiabatique (-> pas de transfert thermique). On considère un fluide s'écoulant dans un tube :



Le premier principe en écoulement permanent s'écrit donc : $h_B - h_A + gz_B - gz_A + \frac{1}{2}(c_B^2 - c_A^2) = 0$

L'écoulement est homogène donc la masse volumique est constante.

L'identité thermodynamique s'écrit : $dh = Tds + \frac{dP}{\rho} \rightarrow \Delta h = h_B - h_A = \frac{P_B - P_A}{\rho}$

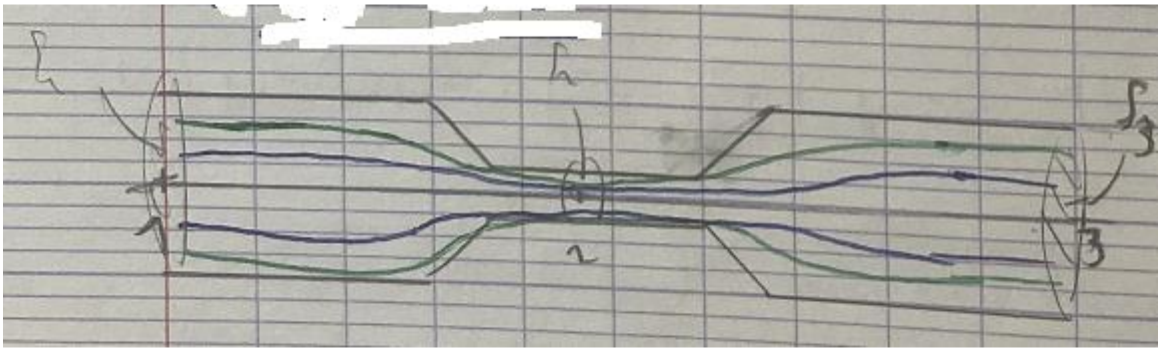
L'absence de phénomène diffusif implique que l'écoulement est réversible.

Ainsi, on obtient : $\frac{P_B}{\rho} + gz_B + \frac{1}{2}{c_B}^2 = \frac{P_A}{\rho} + gz_A + \frac{1}{2}{c_A}^2$

Cette relation se réécrit : $\boxed{\frac{P}{\rho} + gz + \frac{1}{2}c^2 = cste}$

Il s'agit de la relation de Bernoulli, elle traduit la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant.

Ex : effet Venturi



L'écoulement est incompressible donc le débit est constant.

$$c_2 = \frac{S_1}{S_2}c_1 > c_1$$

La relation de Bernoulli s'écrit : $P_1 + \frac{1}{2}\rho {c_1}^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {c_2}^2$ (on considère le tuyau horizontal)

Donc $P_2 = P_1 - \frac{1}{2}\rho {c_1}^2\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right) < P_1$

On observe une dépression au niveau de l'étranglement

Penser au phénomène de cavitation si P_2 devient inférieur à P_{sat} (formation de bulles de gaz).

En réappliquant le même raisonnement, le fluide devrait retrouver les mêmes propriétés à la sortie (en pratique $P_3 < P_1$ -> pertes de charge).

On retrouve l'effet Venturi dans les zones montagneuses par exemple, et on l'utilise pour les trompes hydrauliques et les trompes à eau, certaines cheminées, les pompes à essence…

3) Bilans dynamiques

a) Poussée d'une fusée

On considère une fusée de masse m(t) en mouvement sur la verticale ascendante dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, soumise au champ de pesanteur, supposé uniforme. Les gaz sont éjectés avec un débit massique D_m, $m(t) = m(0) - D_m t$. Les gaz sont éjectés à la vitesse $\vec{u}$.

A l'instant t : $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$

A l'instant t + dt : $\vec{p}(t+dt) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) - dm(\vec{u}+\vec{v})$, avec $dm = -D_m dt$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} + D_m dt\vec{u} - dm\vec{v}$$

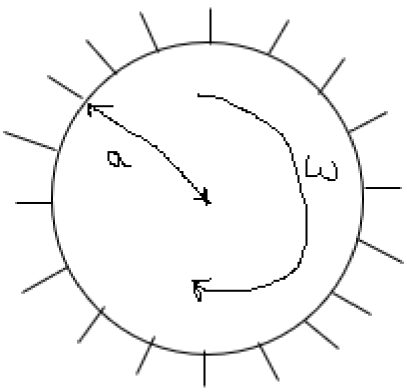
Donc $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + D_m\vec{u}$

D'après la 2e loi de Newton : $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{g}$

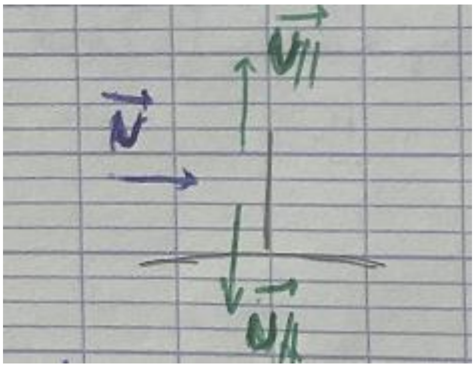
Ainsi, $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - D_m\vec{u}$

Il y a décollage si $\frac{d\vec{v}}{dt}.\overrightarrow{e_z} > 0$, c'est-à-dire si $D_m|\vec{u}| > m|\vec{g}|$

b) Étude d'une turbine



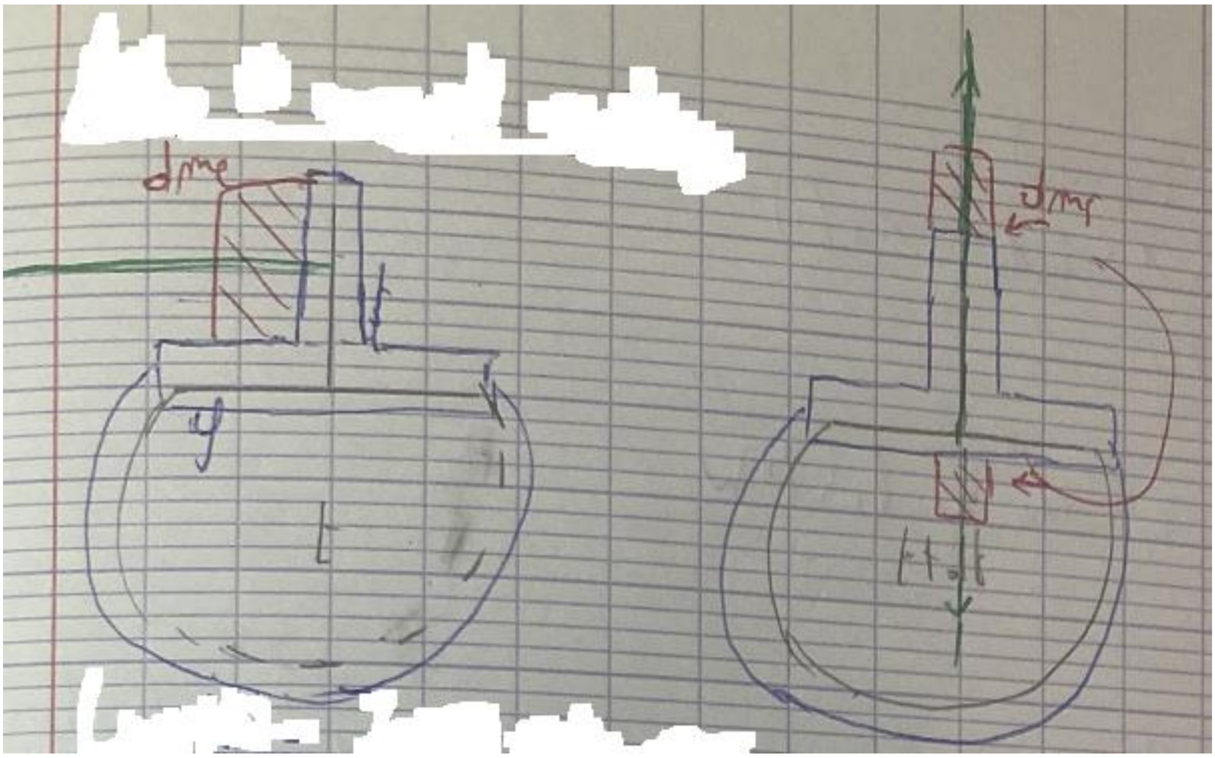
Le rotor est en liaison pivot parfaite d'axe O_z, on note J son moment d'inertie. On suppose un couple résistif $-\Gamma$ constant. Dans le référentiel terrestre, jet d'eau incident à $\vec{v}$ sur l'auget :



Après contact avec l'auget, l'eau est défléchie avec une vitesse $\pm\overrightarrow{v_{//}}$ dans le référentiel de la roue.

Dans le référentiel terrestre, $\overrightarrow{u_{auget}} = \vec{u} = a\omega\overrightarrow{e_x}$

<u>Bilan de moment cinétique</u> :



$$L_{\Delta\Sigma^*}(t) = J\omega(t) + avdm$$

$$L_{\Delta\Sigma^*}(t+dt) = J\omega(t+dt) + audm$$

$$\frac{dL_{\Delta\Sigma^*}}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} + aD_m(u-v) = -\Gamma$$

Donc $J\frac{d\omega}{dt} = aD_m(v - a\omega) - \Gamma$

Régime permanent pour le rotor : $\Gamma = D_m a(v - a\omega)$

Ordre de grandeur : centrale hydroélectrique

$D_m = 10^3$ kg.s^{-1}, ω ~ 600 tr.min^{-1}, v ~ 10^2 m.s^{-1}, a ~ 1 m

Donc Γ = 40 kN

P = Γω = 2,4 MW

Conclusion

Bibliographie