Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : statique des fluides, viscosité, équation de Navier-Stokes, nombre de Reynolds, 1er principe industriel

Introduction

Dans un cours précédent, l'équation de Navier-Stokes a été abordée mais sans la résoudre, et pour cause, savoir si elle admet une solution dans la cas général et si celle-ci est unique est l'un des problèmes du millénaire. Néanmoins en attendant que quelqu'un trouve cette solution pour nous nous allons devoir faire des approximations afin d'avoir une idée tout de même de ce qu'il se passe. C'est ce que nous allons faire ici avec le modèle de l'écoulement parfait.

I Présentation du modèle

1) Définitions

Un écoulement parfait est un écoulement sans phénomènes de transport diffusif.

Les particules de fluide évoluent de façon adiabatique. L'absence de phénomène diffusif implique des transformations réversibles. Un écoulement parfait est donc isentropique.

$$Re = \frac{|(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}}{|\eta \Delta \vec{v}|} \gg 1$$

Ordres de grandeur :

- Voiture sur l'autoroute : on prend L = 2m, U = 130 km.h^{-1}, ν = 10^{-5} m^2.s^{-1}

Re = 7.10^6 >> 2000

Fluide incompressible : fluide tel que ρ = cste dans tout le fluide.

Si le fluide est incompressible, alors l'écoulement est incompressible

2) Équation d'Euler et couche limite

Dans le cas de l'écoulement parfait, on peut réécrire l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{v}\right)=-\vec{\text{grad}}\ p+\rho\vec{g}+\eta\Delta\vec{v}$$

Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide : $\rho(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\gg\eta\Delta\vec{v}$

Il s'agit de l'équation d'Euler. Cependant, négliger les forces de viscosité dans l'ensemble du fluide est une grosse approximation qui a ses limites.

Dans le modèle de l'écoulement parfait, on a la condition aux limites suivante au niveau d'une paroi :

$$\vec{v_f}|_{paroi}.\vec{n}=\overrightarrow{v_{paroi}}.\vec{n}$$

Dans le cas d'un fluide réel, le fluide adhère toujours à la paroi, c'est-à-dire : $\vec{v_f}|_{paroi}=\overrightarrow{v_{paroi}}$

On observe ici une limite du modèle de l'écoulement parfait puisque dans ce cas la vitesse tangentielle n'est pas influencée par la présence d'un obstacle. Il faut donc prendre en compte la viscosité afin d'avoir aussi l'égalité des composantes tangentielle. Cette zone où la viscosité n'est plus négligeable est appelée couche limite.

À la limite de la couche limite, les effets visqueux sont du même ordre de grandeur que les effets convectifs. L'épaisseur δ de la couche limite est donc telle que $\frac{|(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}|}{|\eta\Delta\vec{v}|}\sim 1$

- ⇨ $\frac{\rho V^2/L^2}{\eta V/\delta^2}\sim 1$
- ⇨ $\delta\sim\frac{L}{\sqrt{Re}}$

Pour une voiture

$$V\sim \text{dizaine de } m.s^{-1}$$
$$\rho\sim 1kg.m^{-3}$$
$$L\sim 1m$$
$$\eta\sim 10^{-5}Pl$$

Donc $\boxed{\delta\sim 1mm}$

Bilan : Un écoulement parfait est un écoulement tel que Re 1 et le modèle est valable uniquement en dehors des couches limites.

II Relation de Bernoulli

1) Hypothèses

On considère un fluide newtonien et on suppose que l'écoulement est parfait, incompressible, homogène et stationnaire. On considère deux points A et B appartenant à la même ligne de courant.

D'après les hypothèses, on utilise l'équation d'Euler (écoulement parfait), ρ = cste sur une ligne de courant (écoulement incompressible) et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (écoulement stationnaire).

2) Relation de Bernoulli

$$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}$$

En prenant en compte les forces volumiques conservatives autres que le poids, on peut écrire :

$$\overrightarrow{f_v} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

L'équation d'Euler se réécrit : $\rho\left(\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}(p) + \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}(E_p)$

Donc $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + E_p + p\right) + \rho\overrightarrow{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v} = \vec{0}$

La circulation du fluide sur la ligne de courant s'écrit :

$$\int_A^B \overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + E_p + p\right).\overrightarrow{dl} + \int_A^B \rho\overrightarrow{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v} = \vec{0}$$

Or, par définition d'une ligne de courant, $\overrightarrow{dl}$ est parallèle à $\vec{v}$ donc orthogonal à $\overrightarrow{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}$

De plus $\overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{dl} = df$

Finalement, $P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z + E_p = cste$

Remarque : la démonstration peut se faire à partir du 1er principe industriel :

$$h_B - h_A + \frac{1}{2}(v_B - v_A) + g(z_B - z_A) + E_{p,B} - E_{p,A} = 0$$

Or, $dh = Tds + \frac{dP}{\rho}$ donc $h_B - h_A = \frac{p_B - p_A}{\rho}$

On peut également démontrer cette relation à partir du théorème de la puissance cinétique, en admettant que la puissance des actions internes est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.

La relation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie totale le long d'une ligne de courant

3) Retour sur l'incompressibilité

Remarque : pour quantifier le fait qu'un fluide soit compressible ou non, on utilise le coefficient d'incompressibilité isentropique $\chi_S = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}\Big)_S$ → $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \chi_S \Delta p$

Or, en utilisant l'approximation acoustique : $\chi_S = \frac{1}{\rho c^2}$

De plus, en utilisant la relation de Bernoulli, $\Delta p \sim \rho v^2$

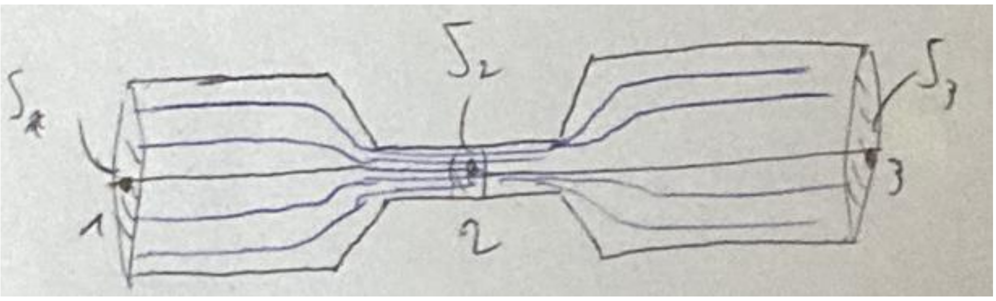
On définit alors le nombre de Mach : $M = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho}}$

Par convention, un fluide est considéré incompressible si M < 0,3, ce qui correspond à une variation relative de masse volumique dans l'écoulement d'environ 10%.

Nous allons maintenant voir comment utiliser ce théorème dans des cas concrets et utiles dans la vie de tous les jours.

III Applications

1) Effet Venturi



Le fluide est incompressible donc $D_{v1} = D_{v2} = D_{v3}$, soit $S_1c_1 = S_2c_2 = S_3c_3$

Comme $S_1 > S_2$, on a $c_1 < c_2$

D'après la relation de Bernoulli (entre 1 et 2), $P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2$

Si le tuyau est horizontal, $z_1 = z_2$

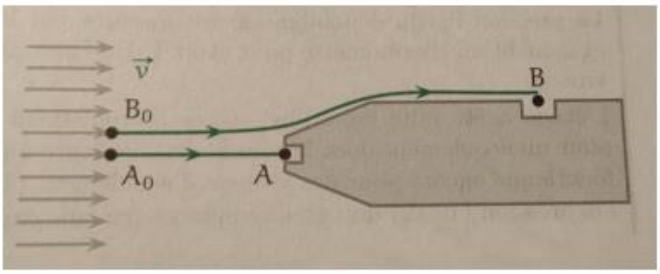
Ainsi, $P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(c_1^2 - c_2^2) = P_1 - \frac{1}{2}\rho c_1^2\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right) < P_1$

➔ Chute de pression au niveau de l'étranglement

Remarque : P_2 pourrait devenir inférieur strictement à P_{sat} : phénomène de cavitation, apparition de bulles de gaz

En appliquant le même raisonnement, entre 2 et 3 (ou 1 et 3), si $S_3 = S_1$, le fluide devrait retrouver les mêmes propriétés en 3 qu'en 1. En pratique, $P_3 < P_1$ (cf pertes de charge)

2) Tube de Pitot



Ce dispositif permet de remonter à la vitesse de l'écoulement en mesurant une différence de pression.

A est un point d'arrêt, donc $v_A = 0$.

On applique la relation de Bernoulli entre A_0 et A : $\frac{P_{A_0}}{\rho} + \frac{{v_{A_0}}^2}{2} + gz_{A_0} = \frac{P_a}{\rho} + \frac{{v_A}^2}{2} + gz_A$

Si A et A_0 sont à la même altitude, on a : $P_A = P_{A_0} + \frac{1}{2}{v_{A_0}}^2$

On obtient une relation similaire entre B_0 et B. A_0 et B_0 sont très voisins, leurs propriétés sont identiques. En pratique, on peut négliger $z_B - z_A$. L'écoulement longe le tube, v_B vaut environ v.

On obtient donc $v = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}}$

Application :

Conclusion

À l'aide du modèle de l'écoulement parfait, on a pu simplifier l'équation de Navier-Stokes et en tirer des applications tel que l'effet Venturi ou le tube de Pitot qui sont utilisés dans des dispositifs technologiques montrant ainsi que ce modèle permet de donner de donner des résultats concluants pour de nombreux écoulements. Cependant, proche d'un obstacle l'étude de la couche limite devient inévitable et le modèle n'est alors plus valable.

Questions

- Que se passe-t-il si le nombre de Reynolds est trop grand ?
- ➔ On entre dans le régime turbulent (modèle de l'écoulement parfait plus valable), les trajectoires ne sont plus définies.
- Démo Euler ?
- ➔ Théorème de transport de Reynolds et bilan des forces
- Comment prendre en compte la diffusion thermique ?

- ➔ N'intervient pas dans Navier-Stokes mais prise en compte dans les calculs d'énergie et d'entropie
- Bernoulli si écoulement pas stationnaire ?
- ➔ On remplace la constante par une fonction du temps uniquement.
- Peut-on étendre Bernoulli à tout le fluide ?
- ➔ Oui si écoulement irrotationnel et dans ce cas on peut se passer de l'hypothèse de stationnarité (terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ apparaît en plus, avec $\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\varphi)$)
- Exemple de l'effet Venturi dans la vie quotidienne ?
- ➔ Porte qui claque
- Effet Coanda ?
- ➔ Lignes de courant suivent un objet convexe placé dans l'écoulement. Cela crée un gradient de pression.
- À petit Reynolds on ne peut pas négliger la viscosité mais si on néglige le terme inertiel, les solutions de Navier-Stokes sont inversibles. Comment on avance ?
- ➔ Mouvement asymétrique ou mouvement collectif.

Bibliographie

-Cap prépa 2^{e} année PC-PC*, Pearson

-Introduction à la dynamique des fluides, De Boeck