

Instabilités et phénomènes nonlinéaires

Matériel

- pendule pesant
- masses
- boîtier d'amplification du capteur potentiométrique
- oscilloscope
- bifurcateur + boîte de bille scotchée à la base du bifurcateur
- alimentation continue (jusqu'à 24V)
- tachymètre rotaro gris
- stroboscope
- potence
- pince
- noix
- ALI
- GBF
- résistance variable (plaque) + 2 résistances à 1 k Ω
- 2 condensateurs de capacité 100 nF
- bobine de 44 mH

Introduction

Dans un monde idéal, le principe de superposition est toujours satisfait. Mais la plupart des systèmes physiques sont non linéaires. Dans ce montage, nous allons étudier les non-linéarités de certains systèmes et montrer qu'elles peuvent être introduites volontairement pour la conception de certains systèmes.

I Pendule pesant aux grand angles

Dans cette première partie, on étudie l'effet des non-linéarités induites par l'expression exacte du moment du poids. L'équation du mouvement est : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$

1) Formule de Borda

En effectuant un développement à l'ordre 3 en θ ainsi qu'une résolution perturbative, on trouve la formule de Borda : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}$ donc $T = T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16})$, avec θ_0 l'amplitude des oscillations. Pour ces mesures, il faut utiliser un pendule pesant qui n'a pas de mandrin de perceuse (ceux-là servent pour les pendules couplés). Le capteur de rotation est un potentiomètre, relié à un boîtier d'amplification. On relie l'oscilloscope à la borne "θ".

On réalise l'étalonnage du capteur : pour des positions du pendule lues sur le rapporteur comprises entre -80° et $+80^\circ$ (zone de linéarité du capteur), on mesure à l'oscilloscope la tension continue fournie par le capteur. On règle le gain et l'offset de l'ampli pour que la tension soit la plus proche de 0 pour $\theta = 0$ et que l'amplitude du signal soit de l'ordre de 1 ou 2 V pour $\pm 80^\circ$. Réaliser un ajustement linéaire, déduire la loi d'étalonnage $\theta_0 = aU + b$ (U : tension) (oscilloscope : Meas -> Type -> CCEFF-PE).

On choisit une masse permettant d'avoir une période d'oscillations pas trop faible. Pour des angles de lâcher du pendule compris dans la zone de linéarisation du capteur, on réalise une mesure de période grâce au mode single de l'oscilloscope. Attention, la formule de Borda fait intervenir l'amplitude des oscillations, mais en raison des frottements celle-ci décroît en fonction du temps (ce qui n'est pas pris en compte dans notre modèle). Du coup, ça ne sert à rien de faire la mesure de période sur plus de 3 oscillations, puisque l'amplitude ne sera plus la même. On mesure également θ_0 (amplitude du premier maximum du signal et en utilisant la loi d'étalonnage obtenue précédemment).

On trace T_0 en fonction de θ_0^2 et on obtient une droite, on vérifie que l'on obtient un facteur 16.

2) Enrichissement spectral

Pour une amplitude d'oscillation intermédiaire, on réalise une TF du signal des oscillations. Pour les paramètres, on a $T = 1,5s$, donc $f_1 = 650$ mHz (environ). On veut une précision environ 10 fois plus faible, disons 40 mHz. Cela correspond à 20s d'acquisition, donc une base de temps de 2s. Le critère de Shannon est largement respecté pour les effets qu'on s'attend à observer, c'est-à-dire l'apparition d'une harmonique à $3 f_1$ (donc vers 2 Hz), due à la présence du sinus dans l'équation du mouvement : c'est le phénomène d'enrichissement spectral, qui est commun aux systèmes non-linéaires.

Ici, les effets non-linéaires à prendre compte ne nous permettent d'obtenir que des corrections à la dynamique du pendule. En revanche, elles ne modifient pas notre compréhension du problème, et en particulier, la position d'équilibre ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$) reste stable quels que soient les paramètres du problème. Nous allons voir une seconde expérience pour laquelle ça ne sera pas le cas.

II Bifurcateur

Il s'agit d'une bille circulant dans une gouttière en forme d'anneau, monté sur l'arbre d'une machine à courant continu. La rotation de l'anneau, par création d'une force centrifuge, va éjecter la bille hors de la position d'équilibre $\theta = 0$ au-delà d'une vitesse angulaire critique. A nouveau, les non-linéarités proviennent de considération purement géométriques lors de la mise en équation du problème. On va montrer qu'ici, suivant les valeurs d'un paramètre de contrôle qui est la vitesse angulaire de l'anneau, certaines positions d'équilibre existent ou non, et sont stables ou non.

On alimente le MCC avec une alimentation stabilisée (ne pas dépasser 24V !).

1) Équations

Dans le repère tournant, la bille à une énergie potentielle effective :

$$E_p = mgR(1 - \cos(\theta)) - \frac{1}{2}m\Omega^2 R^2 \sin^2(\theta), \text{ m est la masse de la bille, R est le rayon de la bille}$$

Les positions d'équilibre sont telles que $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$, donc : $\theta = 0$ ou $\theta = \arccos\left(\frac{g}{\Omega^2 R}\right)$ si $\Omega \geq \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$

On peut également montrer que dans le cas $\Omega > \Omega_c$, alors la position d'équilibre $\theta = 0$ devient instable, d'où le "décollement" de la bille.

2) Bifurcations

La mesure de vitesse de rotation se fait grâce à un tachymètre optique, monté avec une pince et une noix sur un pied. On règle l'ensemble de manière à viser le bout de scotch réfléchissant apposé sur l'anneau du bifurcateur. On fait en sorte que l'incidence du spot laser soit environ normale, en réglant l'inclinaison du tachymètre.

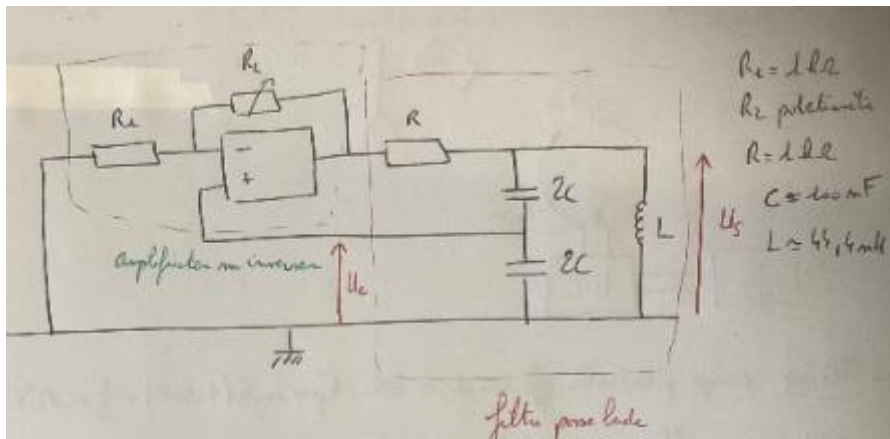
Pour la mesure de l'angle correspondant à la position de la bille, une première méthode est de se placer dans le noir et d'utiliser un stroboscope pour "figer" le bifurcateur et lire une valeur de l'angle sur le rapporteur intégré (avec une précision relative, environ 3°...). Autre méthode : prise de photo en mode rafale et traitement d'image.

Pour des vitesses de rotation comprises entre 0 et 2 ou 3 Ω_c , mesurer l'angle de la position d'équilibre de la bille.

On peut tracer $\cos(\theta)$ en fonction de $1/\Omega^2$: dans ce cas, dans la zone du graphe qui correspond à $\Omega > \Omega_c$ est une droite de pente Ω_c^{-2} . On accède donc à une valeur relativement précise de ce paramètre, qui marque le changement de position d'équilibre stable.

On peut également tracer θ en fonction de Ω : on obtient le diagramme de bifurcation. Formellement, il s'agit d'une bifurcation supercritique, dont on trace l'une des deux branches : en fait, la bille peut partir soit d'un côté soit de l'autre lors du franchissement de la vitesse critique. En raison de l'état de surface et des frottements, la probabilité n'est pas forcément 1/2. Dans tous les cas, on ne trace qu'une branche à la fois.

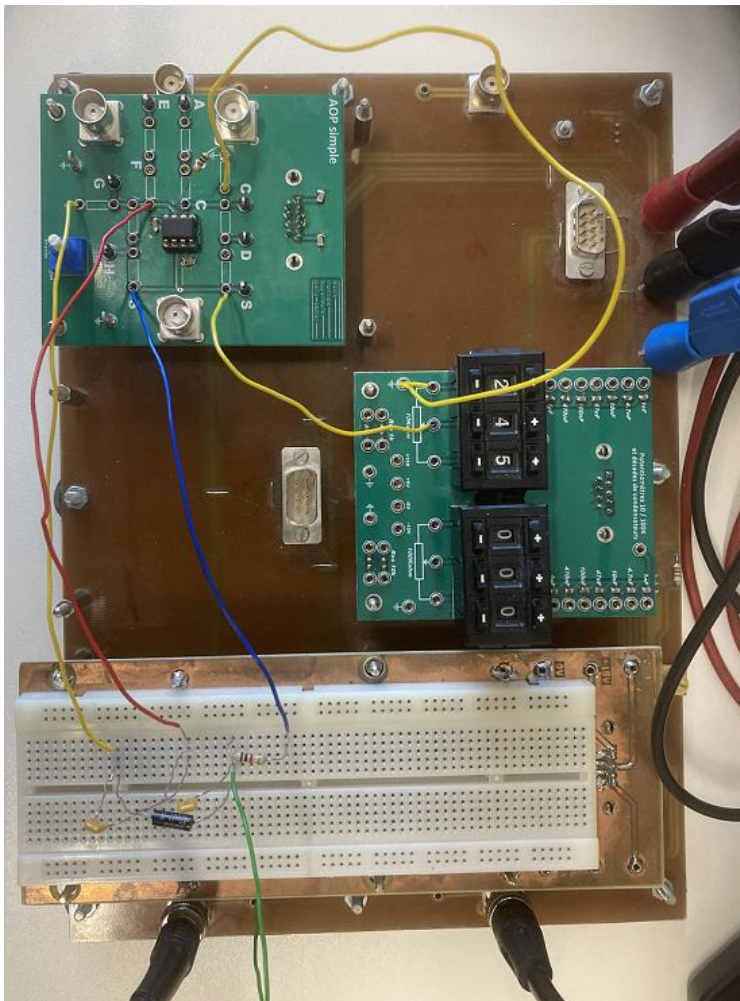
III Oscillateur de Colpitts



Le système est alimenté par un GBF et est relié à un oscilloscope.

D'après le critère de Barkhausen : $\begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \\ \frac{R}{jL\omega_0} + jRC\omega_0 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} R_2 = R_1 \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$ pour avoir des oscillations

On se place à $R_2 < R_1$, on augmente R_2 jusqu'à l'apparition des oscillations, on mesure R_2 et on compare à R_1 . On mesure la fréquence des oscillations et on compare à $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$



En réalité, il faut que $R_2 > R_1$ pour voir apparaître des oscillations, on va avoir des non-linéarités qui vont lancer l'oscillation, ensuite comme $R_2 > R_1 \rightarrow$ divergence, ensuite l'ALI sature donc l'amplitude des oscillations va se stabiliser. Les non-linéarités de l'ALI sont très importantes pour créer des oscillations stables.

Conclusion

On a montré que les non-linéarités d'un système affecte son comportement et que ce n'est pas toujours un phénomène que l'on veut éviter, il est parfois nécessaire, notamment pour faire des oscillateurs.

Questions

- Rôle du contre-poids ?
 - ➔ S'affranchir du moment du poids créé par la masse pesante de la tige du pendule.
- Paramètres d'acquisition lors de la TF ?
 - ➔ On veut une résolution pas trop mauvaise, mais pas acquérir trop longtemps, sinon on verra un amortissement du mouvement du pendule et donc un élargissement des pics de la TF.
- Qu'est-ce que le portait de phase aurait pu nous donner comme un info sur la première manip ?
 - ➔ On aurait pu mettre en évidence la déformation des trajectoires elliptiques aux grands angles. Cependant, pour que ce soit vraiment visible, il faut être proche de la séparatrice dans le diagramme des phases, donc lancer le pendule avec des angles bien supérieurs à 90° .
- Pourquoi utiliser un pendule pesant pour la formule de Borda ?
 - ➔ A priori, on peut se contenter d'un pendule simple. simplement la structure du pendule pesant avec un capteur potentiométrique permet d'avoir une image de θ à tout instant, et donc rend possible les tracés de TF. Avec une masse attachée à un fil, on ferait des mesures de période au chronomètre...
- Quel est le pas en fréquence donnée par l'oscillo lors de la TF ?
 - ➔ C'est l'inverse de la durée d'acquisition
- Pour le bifurcateur, la bille part-elle indifféremment des deux côtés ?
 - ➔ En raison des défauts de l'anneau (rugosité, déformation, inconstance de la rainure), non.
- Quelles sont les conséquences du fait que la bille est un solide et pas un point matériel ?
 - ➔ Cela peut modifier la bifurcation du système : comme la bille est un solide, elle peut acquérir une énergie cinétique de rotation. Ca n'est pas pris en compte dans les équations, on peut imaginer que la bille se mette à tourner mais ne décolle pas par exemple.