Induction électromagnétique

Découvert par Faraday en 1831, le phénomène d'induction électromagnétique se manifeste en présence de champs variables, il conduit à l'apparition d'une force électromotrice dans un conducteur. Les courants permanents produisent des champs magnétiques, et c'est en cherchant expérimentalement à mettre en évidence, sans succès, une réciprocité stricte que Faraday découvrit l'effet des variations de flux magnétique à travers un circuit. L'induction est à la base de l'électrotechnique (production, transport, distribution…du courant électrique).

I Loi de Faraday

1) Mise en évidence expérimentale et loi de Lenz

Expérience : on relie une bobine à un ampèremètre. On approche un aimant vers la bobine et on constate l'apparition d'un courant dans la bobine dans un sens, ce courant est appelé courant induit. On éloigne l'aimant : le sens du courant s'inverse. On constate que l'intensité du courant est d'autant plus grande que la vitesse de l'aimant est grande. De plus, si on inverse les pôles de l'aimant, le courant s'inverse aussi.

Une étude détaillée de toutes les circonstances expérimentales montre que l'apparition d'un courant induit dans un circuit fermé est toujours liée à une variation dans le temps du flux magnétique à travers le circuit.

Le flux du champ magnétique à travers une surface S est donné par : $\Phi = \iint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$, il s'exprime en Wb.

Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel que le champ magnétique propre qu'il crée tend à s'opposer à la variation du flux qui lui a donné naissance.

2) Loi de Faraday

Le courant induit dans le circuit est égal à celui que produirait un générateur fictif, dit générateur induit, dont la force électromotrice (fem) e est donnée par : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ (e est la force électromotrice induite). Le signe – traduit la loi de Lenz.

Si on veut étudier un circuit électrique siège d'un phénomène d'induction électromagnétique, il faut ajouter sur le schéma électrique un générateur induit avec une force électromotrice e dans le sens conventionnel du courant (convention générateur).

II Auto-induction

1) Inductance propre

On considère un circuit fermé parcouru par un courant i. Ce circuit crée un champ magnétique $\vec{B}$ proportionnel à i, donc un flux magnétique appelé flux propre, également proportionnel à i. Le coefficient de proportionnalité est l'inductance propre ou auto-induction du circuit, notée L : $\Phi = Li$.

L dépend de la forme et des dimensions du circuit, et est toujours positif.

Si le courant varie au cours du temps, il apparaît une fem auto-induite donnée par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

La fem auto-induite peut être représentée soit par un générateur de fem en convention générateur, soit par une inductance orientée en convention récepteur.

2) Cas du solénoïde

On cherche à établir l'expression de l'inductance propre L d'une bobine de longueur l modélisée par un solénoïde constitué de N spires parcourues par un courant i, de surface S.

Schéma bobine parcourue par un courant i, créant un champ $\vec{B}$.

Le champ magnétique créé par la bobine a pour expression : $\vec{B} = \frac{\mu_0 N}{l} i\overrightarrow{u_x}$

$\vec{B}$ est uniforme, donc le flux de ce champ à travers une seule spire s'écrit : $\Phi = \vec{B}.\vec{S} = \frac{\mu_0 N i S}{l}$

Le flux propre à travers la bobine est le flux total à travers les N spires : $\Phi_p = \frac{\mu_0 N^2 i S}{l}$

Par identification, on a : $\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}}$

Ordre de grandeur : pour un solénoïde de 1000 spires de rayon $R = 3cm$, réparties sur une longueur $l = 10cm$, on obtient : $L = 36mH$.

3) Bilan énergétique

On considère un circuit RL alimenté par un générateur de fem e_{alim} :

Schéma électrique

La loi des mailles d'écrit : $e_{alim} = Ri - e = Ri + L\frac{di}{dt}$

On multiplie la loi des mailles par i : $e_{alim}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2)$

$e_{alim}i$ est la puissance fournie par le générateur

Ri^2 est la puissance dissipée par effet Joule

$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2)$ est la puissance stockée dans la bobine

On en déduit que <u>l'énergie magnétique</u> d'un circuit d'auto-inductance L, parcouru par un courant i, est :

$$\boxed{E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2}$$

III Inductance mutuelle

1) Définition

Quand un circuit C_1 est parcouru par un courant i_1, il crée un champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ dont la norme est proportionnelle à i_1 qui le parcourt. Un circuit C_2 est placé dans le champ $\overrightarrow{B_1}$ donc il intercepte les lignes de champ. Ainsi $\overrightarrow{B_1}$ a un flux à travers C_2 que l'on note $\Phi_{1\to 2}$ (proportionnel à i_1). De même, si C_2 est parcouru par un courant i_2, il envoie un flux magnétique $\Phi_{2\to 1}$ (proportionnel à i_2) à travers C_1. On admet que le coefficient de proportionnalité entre les flux et les courants est le même, ce coefficient est appelé inductance mutuelle M : $\Phi_{1\to 2} = Mi_1$ et $\Phi_{2\to 1} = Mi_2$.

On cherche l'inductance mutuelle entre une bobine de longueur l_1 constituée de N_1 spires parcourue par un courant i_1 (et de section S_1) et une autre bobine constituée de N_2 spires de surface S_2 placée à l'intérieur de la première, et de même axe.

La bobine extérieure crée un champ : $\overrightarrow{B_1} = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l_1}\overrightarrow{u_x}$.

Le flux de ce champ à travers une spire de la bobine intérieure s'écrit : $\Phi_{1\to 2,spire} = \frac{\mu_0 N_1 i_1 S_2}{l_1}$

A travers les N_2 spires, le flux est : $\Phi_{1\to 2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 i_1 S_2}{l_1}$

On en déduit :

$$\boxed{M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{l_1}}$$

Le signe de M est arbitraire, il dépend de l'orientation relative des deux circuits.

2) Circuit équivalent et bilan énergétique

On reprend les circuits C_1 et C_2. Le flux total à travers C_1 s'écrit : $\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{2\to 1} = L_1 i_1 + Mi_2$

La fem induite dans C_1 est donc : $e_1(t) = -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$

De même, $e_2(t) = -L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$

On en déduit alors les représentations électriques équivalentes aux deux circuits selon les 2 conventions :

Schéma en convention générateur, schéma en convention récepteur

On alimente le circuit C_1, de résistance R_1 avec un générateur qui impose la tension $v_1(t) = V_0\cos(\omega t)$ et on ferme C_2, de résistance R_2 par un fil.

Schéma électrique

On écrit la loi des mailles dans chaque circuit :

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

En passant en notation complexe, on peut montrer que $\underline{v_1} = \underline{Z}\underline{i_1}$ avec $\underline{Z} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$

Schéma électrique équivalent

Le couplage entre les deux circuits est équivalent à un circuit d'impédance $\underline{Z}$ alimentée par le générateur. Les caractéristiques du circuit C_2 interviennent par le couplage inductif.

On multiplie la loi des mailles de chaque circuit par leur courant respectif :

$$\begin{cases} v_1 i_1 = R_1 {i_1}^2 + L_1 i_1 \dfrac{di_1}{dt} + M i_1 \dfrac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 {i_2}^2 + L_2 i_2 \dfrac{di_2}{dt} + M i_2 \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

On somme les deux équations et on obtient : $v_1 i_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right) + R_1 i_1^2 + R_2 {i_2}^2$

La puissance délivrée par le générateur se répartit en :

- une puissance dissipée par effet Joule dans les résistances

-une puissance magnétique qui dérive de l'énergie magnétique dans les deux circuits et du couplage entre ces circuits

L'énergie magnétique de deux circuits couplés par mutuelle induction vaut :

$$\boxed{E_{mag} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} i_2^2 + M i_1 i_2}$$