Notion de viscosité d'un fluide – écoulements visqueux

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : statique des fluides, équation de conservation de la masse, modèle du fluide parfait, phénomène de diffusion

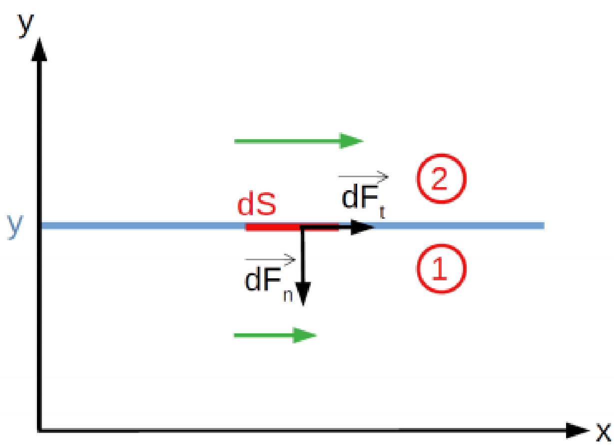
Introduction

Dans un cours précédent, le modèle du fluide parfait a été abordé. Mais il présente de nombreuses limites, notamment dans la prise en compte des effets aux interfaces, on peut penser au paradoxe de D'Alembert par exemple. Une amélioration de ce modèle consiste en la prise en compte de la viscosité du fluide dont on peut observer un effet à travers une manip simple : une burette contient uniquement de l'eau tandis qu'une autre contient un mélange eau-glycérol à 5/6 d'eau en volume. On observe que le mélange s'écoule plus lentement que l'eau pure, or dans un modèle ne prenant en compte que l'action de pesanteur, la masse volumique n'intervient pas dans l'équation déterminant la vitesse donc les deux fluides devraient s'écouler à la même vitesse. Il y a donc une action autre que la pesanteur qui freine l'écoulement, il s'agit de la viscosité du fluide. On va s'intéresser ici à développer le modèle d'écoulement associé aux effets visqueux.

I Notion de viscosité

1) Force tangentielle de « frottements »

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On considère un écoulement inhomogène et incompressible tel que $\vec{v} = v_x(y)\overrightarrow{e_x}$. On suppose que l'écoulement est visqueux, on note η la viscosité. On schématise l'écoulement de la manière suivante :



Comme on a pu le constater dans le cas des burettes, un fluide visqueux semble subir une force de "frottements" lors de son écoulement, ce qui le ralentissait dans le cas de la burette. Ici, en considérant la viscosité comme une action de frottements, on voit bien que si au niveau de l'interface le fluide dans la couche 2 s'écoule plus vite que celui dans la couche 1, il va alors entraîner le fluide de la couche 1 et inversement, le fluide de la couche 1 va freiner celui de la couche 2. Cela peut se résumer dans l'expression d'une contrainte tangentielle : $d\overrightarrow{F_{1\to2}} = \eta dS\frac{\partial v_x}{\partial y}\overrightarrow{e_x}$

On voit bien dans cette expression que la contrainte tangentielle tend à accélérer le fluide de la couche 1 si le fluide de la couche 2 s'écoule plus rapidement, car au niveau de l'interface on aurait $\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0$.

La force de viscosité est introduite par une inhomogénéité de vitesse, η est le coefficient de viscosité dynamique (en Pa.s ou Pl). Quelques ordres de grandeur ;

-η_{eau} = 10^{-3} Pa.s (20°C)

-η_{air} = $1{,}8.10^{-5}$ Pa.s (20°C)

-η_{miel} = 10 Pa.s (20°C)

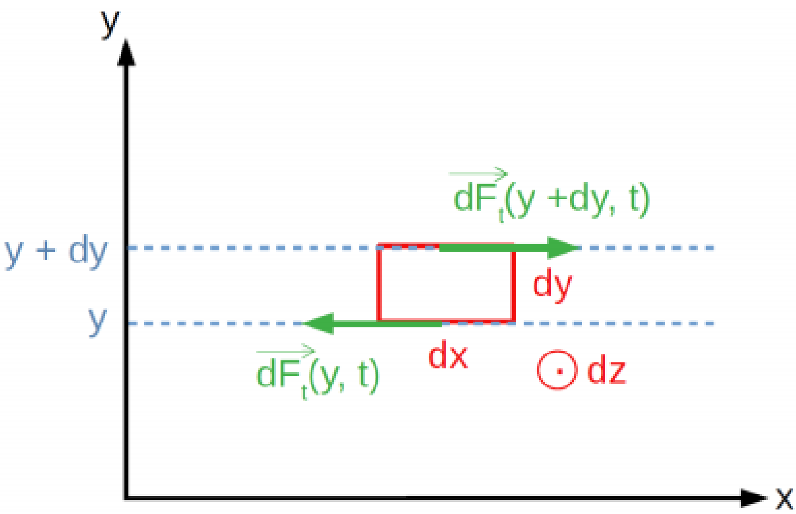
-$\eta_{glycérine}$ = 1,5 Pa.s (20°C)

-η_{magma} = 100 Pa.s (basaltique, 1200°C)

Remarque : le résultat précédent ne s'applique qu'aux fluides newtoniens, pour lesquels la contrainte visqueuse est proportionnelle aux déformations du fluide, ce qui implique notamment que η est constante. En fait η dépend de la température.

2) Équation de Navier-Stokes

On considère une particule de fluide de volume dτ = dxdydz dans l'écoulement précédent.



La particule la force de viscosité en y et en y + dy :

$$d\overrightarrow{F_{tot}} = d\overrightarrow{F_t} - d\overrightarrow{F_t}(y,t)$$

Or d'après l'expression de $d\overrightarrow{F_t}(y,t)$:

$d\overrightarrow{F_{tot}} = \eta dS\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+dy,t)\overrightarrow{e_x} - \eta dS\frac{\partial v_x}{\partial y}(y,t)\overrightarrow{e_x}$ avec dS = dxdz

Donc $d\overrightarrow{F_{tot}} = \eta d\tau\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\overrightarrow{e_x}$

On en déduit l'expression de la force volumique : $\overrightarrow{f_v} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)\overrightarrow{e_x}$

On généralise dans le cas 3D : : $\overrightarrow{f_v} = \eta\Delta\vec{v}$

La particule subit également les forces de pression et d'autres forces volumiques. En appliquant la 2e loi de Newton, on obtient :

$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \overrightarrow{f_{vol}} + \eta\Delta\vec{v}$, souvent $\overrightarrow{f_{vol}} = \rho\vec{g}$, force volumique de pesanteur

Cette équation est appelée <u>équation de Navier-Stokes</u>.

Cette équation est valable pour un écoulement incompressible, on a donc en plus de cette équation : $div(\vec{v}) = 0$

On obtient les nouvelles conditions aux limites au niveau d'une paroi :

-$\overrightarrow{v_{fluide}} = \overrightarrow{v_{paroi}}$

-continuité de la contrainte normale, c'est-à-dire la pression

-continuité de la composante tangentielle

Remarque : dans le cas d'un fluide compressible, la force volumique de viscosité prend la forme :

$\overrightarrow{f_v} = \eta\Delta\vec{v} + (\frac{\eta}{3} + \zeta)\overrightarrow{grad}(div(\vec{v}))$, avec ζ le 2e coefficient de viscosité, il peut s'interpréter comme un coefficient de friction dû à la déformation de la particule fluide au cours de son mouvement, ce qui équivaut à des frottements internes.

3) Nombre de Reynolds

Reynolds (1842-1912) était un ingénieur et physicien irlandais qui a apporté d'importantes contributions à l'hydrodynamique et à la dynamique des fluides, la plus notable étant l'introduction du nombre de Reynolds en 1883.

Le nombre de Reynolds, noté Re, caractérise les écoulements en comparant les termes d'efforts visqueux et d'accélération convective de l'équation de Navier-Stokes. Ainsi, on le définit par :

$$Re = \frac{|\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}|}{|\eta\Delta\vec{v}|} = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$$

On note U la valeur caractéristique de la vitesse, L l'échelle caractéristique de variation de la vitesse (L est une « contrainte »), on a donc : $Re = \frac{\rho LU}{\eta} = \frac{LU}{\nu}$, en posant $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ la viscosité cinématique du fluide ($m^2.s^{-1}$)

Si Re << 2000, les effets de viscosité dominent la convection, l'écoulement est dit <u>laminaire</u>

Si Re >> 2000, le terme visqueux est négligeable, l'écoulement est dit <u>inertiel</u> (souvent turbulent)

On notera que le phénomène qui met le plus de temps à s'établir sera le phénomène que l'on pourra négliger dans l'équation de Navier-Stokes.

	viscosité cinématique ν ($m^2.s^{-1}$)
air	$\nu_{air} = 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
eau	$\nu_{eau} = 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$
glycérine	$\nu_{gly} = 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$
miel	$\nu_{miel} = 10^{-3}\ m^2.s^{-1}$

Remarque : dans le cas où Re << 1 et où on peut négliger les actions autres que celles de viscosité :

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\Delta\vec{v}$ (on reconnait une équation de diffusion)

Quelques ordres de grandeur :

- Voiture sur l'autoroute : on prend L = 2m, U = 130 km.h^{-1}, $\nu = 10^{-5}$ m^2.s^{-1}

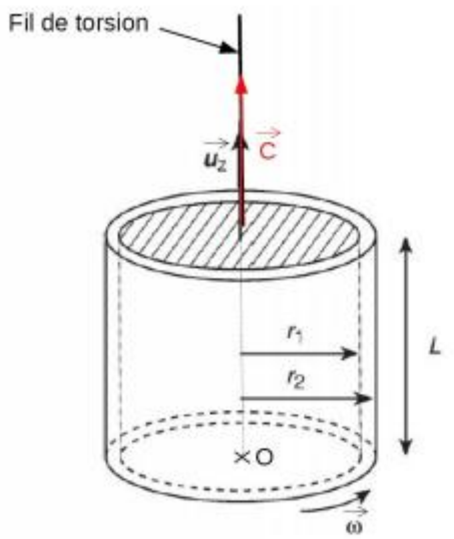
Re = 7.10^6 >> 2000

II Exemples d'écoulements visqueux

1) Mesure de viscosité : viscosimètre de Couette

Lien vers une vidéo illustrant la mise en mouvement du fluide dans un écoulement type Couette cylindrique : https://youtu.be/k7ZZtxdtmeQ

On considère une particule de fluide, considéré incompressible, de masse volumique ρ, de viscosité dynamique η, entre deux cylindres d'axe (Oz) de rayons r_1 et $r_2 > r_1$. Le cylindre 2 tourne autour de (Oz) à la vitesse $\vec{\omega} = \omega\vec{e_z}$, le cylindre 1 est immobile en régime stationnaire fait un angle α par rapport à sa position initiale.



On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on utilise les coordonnées cylindriques.

Invariance du système par rotation d'angle θ autour de (Oz), invariance par translation selon (Oz) (étant donné que L >> r_1, r_2)

Donc la pression et la vitesse ne dépendent que de r.

Le fluide étant incompressible, $div(\vec{v}) = 0$, donc $\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

On en déduit $\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0$ donc rv(r) = cste

Or, par condition d'imperméabilité, $v_r(r_1) = 0$, donc pour tout r, v(r) = 0

Les forces de pression étant normales à la surface du cylindre intérieur, elles ne peuvent pas être à l'origine de l'angle de torsion observé à l'équilibre. cela s'explique donc par la viscosité. En régime permanent l'équation de Navier-Stokes donne :

$$\rho(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = -\overrightarrow{grad}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

En projetant cette équation selon $\overrightarrow{e_\theta}$, on obtient :

$\left(\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_\theta(r) = \eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r^2}\right) = 0$ donc $\frac{d}{dr}\left(\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r}\right) = 0$

Ainsi, en posant $v_\theta(r) = \frac{\alpha(r)}{r}$ on obtient $\frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr} = K_1$ donc $\alpha(r) = \frac{K_1 r^2}{2} + K_2$

Donc $v_\theta(r) = \frac{K_1 r}{2} + \frac{K_2}{r}$

Conditions aux limites : $v(r_1) = 0$ donc $K_2 = -\frac{K_1 {r_1}^2}{2}$ et $v(r_2) = r_2\omega$ donc $K_1 = \frac{2\omega {r_2}^2}{r_2^2 - {r_1}^2}$

Ainsi, $v_\theta(r) = \frac{\omega {r_2}^2}{r}\frac{r^2 - {r_1}^2}{r_2^2 - {r_1}^2}$

On s'intéresse à la force tangentielle exercée par le fluide sur le cylindre interne 1. On suppose que toutes les forces selon $\overrightarrow{e_z}$ sont compensée par la tension du fil. On a :

$$d\overrightarrow{F_{fluide\to 1}} = \eta\left.\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=r_1} dS\overrightarrow{e_\theta} = \frac{2\eta\omega {r_2}^2}{r_2^2 - {r_1}^2}dS\overrightarrow{e_\theta}$$

On en déduit le moment exercé par cette force par rapport à l'axe (Oz) : $d\Gamma = \frac{2\eta\omega {r_2}^2 r_1}{r_2^2 - {r_1}^2}dS$

On obtient alors le couple exercé par le fluide sur le cylindre en intégrant sur l'ensemble de la surface du cylindre 1 : $\Gamma = \frac{4\pi\eta\omega {r_2}^2 {r_1}^2 L}{r_2^2 - {r_1}^2}$

D'après le théorème du moment dynamique appliqué au cylindre 1, sur l'axe (Oz), en régime permanent : 0 = $\Gamma - C\alpha$, d'où : $\eta = \frac{C(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\omega {r_2}^2 {r_1}^2 L}\alpha$

On peut alors en déduire la valeur de η à partir de la mesure de α.

Remarque : les calculs ont été menée en négligeant les effets de bord, on a donc une idée de comment remonter à η mais le modèle est à améliorer

2) Chute de pression dans une conduite horizontale

Pour un écoulement stationnaire, homogène et incompressible, à faible Re, pour une conduite horizontale de longueur L et de rayon R, le débit volumique est relié à la chute de pression ΔP.

On peut montrer par le calcul que $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P$ (loi de Hagen-Poiseuille)

De manière analogue à l'électricité, on peut définir une résistance hydraulique : $R_H = \frac{\Delta P}{D_v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

Pour un cylindre de même géométrie, la résistance électrique est : $R = \frac{L}{\sigma\pi R^2}$, avec σ la conductivité électrique. La résistance électrique varie en R^{-2}, la résistance hydraulique varie en R^{-4}.

Ex : écoulement du sang dans le système artériel

On peut représenter de manière très schématique l'écoulement dans le système artériel par un réseau de tubes qui se subdivisent de plus en plus à partir de l'aorte jusqu'aux plus fins capillaires. On peut classer les vaisseaux en 5 étages de ramifications : aorte (1) – grosses artères (40) – branches artérielles (7100) – artérioles ($1{,}6.10^8$) – capillaires ($5{,}5.10^9$). Débit sanguin : 5 $L.min^{-1}$

On pourrait calculer Re pour chaque partie du système artériel et montrer que l'écoulement peut être considéré comme un écoulement de Poiseuille, excepté au premier étage (aorte).

Conclusion

Au cours de cette leçon nous avons donc introduit la notion de viscosité qui est fondamentale pour l'explication de phénomènes aux interfaces. On aura notamment vu que la notion de viscosité est fortement liée à la diffusion de quantité de mouvement. Les effets visqueux sont également à l'origine des forces de traînée, forces de frottements visqueux et sont la cause de dissipations d'énergie. Néanmoins il est important de noter ici qu'on s'est restreint aux fluides newtoniens qui représentent seulement une faible partie des fluides observés. Des modèles plus compliqués sont donc à envisager pour caractériser ces fluides.

Bibliographie

-Hydrodynamique physique (Guyon, Hulin, Petit)

-Physique PSI/PSI* (ou PC/PC*), Olivier

Questions

- Paradoxe de D'Alembert ?
- ➔ Absence de traînée et de portance pour un objet dans un fluide parfait. En réalité il n'existe pas d'expérience dans laquelle un objet peut se propager dans un fluide sans contrainte s'opposant à son mouvement
- Taille typique de l'écoulement pour évaluer Re dans ce cas ?
- A quelle condition sur la couche limite l'approximation du fluide parfait est-elle valable ?
- Différence fluide/écoulement incompressible ?
- ➔ Fluide incompressible (ρ = cste) → écoulement incompressible ($div(\vec{v}) = 0$)
- Exemples fluides newtoniens et non newtoniens ?
- ➔ Non newtoniens : dentifrice, maïzena

- Pour un fluide parfait, que se passe-t-il pour η ?
- ➔ η → 0
- Longueur typique de diffusion ici ?
- Différence entre régime stationnaire et permanent ?
- ➔ Stationnaire : indépendant du temps, permanent : atteint après le régime transitoire
- Influence de la viscosité sur la propagation du son ?
- ➔ Ajout d'un terme dans l'équation de propagation (dérivée temporelle du Laplacien)
- Comment on obtient l'équation d'Euler ?
- ➔ Équation de Navier-Stokes pour les fluides parfaits
- Équation de Navier-Stokes pour un référentiel non galiléen ?
- ➔ Il faut ajouter la force de Coriolis
- Profil de vitesse dans un tuyau ?
- ➔ $v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)$
- Pourquoi il existe des turbulences à grand Re ?
- ➔ Décollement de la couche limite