Phénomènes diffusifs en physique : principes généraux et exemples

Niveau : CPGE/L2

Prérequis : libre parcours moyen, principes de la thermodynamique, échelle mésoscopique, notion de flux

Introduction

La diffusion est un phénomène de transport des particules sans mouvement macroscopique. Il se caractérise par une migration spontanée des particules des endroits où elles sont le plus concentrées vers ceux où elles le sont le moins. Le phénomène cesse à l'équilibre. Si on considère par exemple une bouteille de parfum, les molécules odorantes finissent par emplir la pièce, des molécules ont quitté le flacon et se sont déplacées dans l'air sans mouvement de ce dernier.

I Diffusion de particules

1) Densité de particules

On cherche à connaître l'évolution locale de la population de l'espèce qui migre : on raisonne à l'échelle mésoscopique. On considère un volume mésoscopique élémentaire dτ centré au point M. On note n(M,t) la densité de particules (nombre de particules par unité de volume). Le nombre de particules contenues dans dτ est : dN(M,t) = n(M,t)dτ

2) Densité de courant de particules

<u>surface fermée</u> : surface qui sépare l'univers en deux, pour passer d'un domaine à l'autre il faut traverser la surface

Pour les surfaces ouvertes, on se limite à celles qui sont délimitées par un contour (courbe continue fermée). Pour orienter une surface ouverte, on oriente le contour (choix arbitraire) et on oriente alors la surface conformément à la règle de la main droite. On note $\overrightarrow{dS} = dS\vec{u}$.

Une surface fermée est systématiquement orientée vers l'extérieur.

On note $\vec{j}(M,t)$ le vecteur de densité de courant de particules. Pendant dt, il y a $dN = \vec{j}(M,t).\overrightarrow{dS}dt$ particules qui traversent $\overrightarrow{dS}$.

Le débit volumique à travers sur surface Σ s'écrit : $D = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS}$

II Équation de diffusion

1) Équation de conservation de la matière

On considère une tranche de longueur dx (entre x et x + dx) et de section droite S.

A l'instant t, dN(t) = n(x,t)dτ = n(x,t)Sdx

A l'instant t + dt, dN(t + dt) = n(x,t + dt)dτ = n(x, t + dt)Sdx

Donc $d^2N = dN(t+dt) - dN(t) = \big(n(x,t+dt) - n(x,t)\big)Sdx = \frac{\partial n}{\partial t}Sdxdt$

Cette variation est due aux échanges de particules aux limites du système.

On a donc également $d^2N = j(x,t)Sdt - j(x+dx,t)Sdt = -\frac{\partial j}{\partial x}dxSdt$

Ainsi, $\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$

S'il y a une source, alors $d^2N = -\frac{\partial j}{\partial x}d\tau dt + \sigma d\tau dt$ donc $\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = \sigma$

En 3D, on considère un volume V délimité par une surface fermée S.

$$\iiint \frac{\partial n}{\partial t}d\tau dt = -\oiint \vec{j}.\overrightarrow{dS}dt + \iiint \sigma d\tau dt$$

<u>Introduction de l'opérateur divergence</u> :

Un opérateur vectoriel agit sur un scalaire ou un vecteur, le résultat est un scalaire ou un vecteur et sa définition est indépendante de tout système de coordonnées.

L'opérateur divergence est défini par le théorème de Green-Ostrogradsky :

Pour tout V, $\oiint \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint div(\vec{A})d\tau$

En coordonnées cartésiennes : $div(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Si on reprend l'équation établie précédemment, on obtient : $\frac{\partial n}{\partial t} + div(\vec{j}) = \sigma$

Il s'agit de l'<u>équation de conservation</u> de la matière.

2) Équation de diffusion

Expérimentalement on observe que :

- si n est uniforme, alors $\vec{j}$ est nul
- le courant de particules est d'autant plus intense que la répartition est inhomogène
- le courant de particules doit être orienté des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées

<u>Introduction de l'opérateur gradient</u> :

Par définition, $df = \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{dl}$

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

Le phénomène de diffusion a été observé par Fick en 1855 et décrite par la loi qui porte son nom :

La loi de Fick s'écrit : $\vec{j} = -D\overrightarrow{grad}(n)$

D est le coefficient de diffusion ($m^2.s^{-1}$), il dépend des particules qui diffusent, du milieu dans lequel elles diffusent, et de paramètres tels que la température et la pression.

Si on remplace $\vec{j}$ par son expression dans l'équation de conservation, on obtient, en posant $div(\overrightarrow{grad}(f)) = \Delta f$: $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$. Cette équation est appelée <u>équation de diffusion</u>. Δ est le laplacien.

En ordre de grandeur $l \sim \sqrt{D\tau}$, l est une échelle d'espace, τ est une échelle de temps.

III Application à la diffusion de chaleur

1) Équation de la chaleur

On considère un tronçon de longueur dx. La variation d'énergie interne s'écrit :

dU(t) = u(x,t)dm = ρu(x,t)dτ

dU(t+dt) = ρu(x,t+dt)dτ

Donc $d^2U = \rho\frac{\partial u}{\partial t}dtd\tau$

L'énergie interne varie en raison des échanges thermiques et de la production pdτdt.

Le même raisonnement conduit à $d^2U = -\frac{\partial j}{\partial x}d\tau dt + pd\tau dt$

Ainsi, $\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = p$ (généralisable en 3D)

Fourier, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques (les fameuses séries de Fourier), a établit une loi phénoménologique qui porte son nom :

Loi de Fourier : $\vec{j} = -\lambda\overrightarrow{grad}(T)$

λ est la conductivité thermique (donner quelques ordres de grandeur).

De plus, u(x,t) = cT(x,t)

On obtient donc l'équation de diffusion de la chaleur : $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\Delta T + p$

On peut poser $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ (coefficient de diffusion thermique)

2) Résistance thermique

On considère un barreau homogène de section S, de longueur L, de conductivité thermique λ

En régime permanent et en l'absence de source : $T_0 - T_1 = R_{th}\phi_{0\text{->}1}$

R_{th} est appelée résistance thermique (en $K.W^{-1}$), elle dépend de la conductivité et de la géométrie. Pour le barreau considéré, $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

On peut faire une analogie avec la loi d'Ohm.

Ex : température d'un composant électronique

3) Application au double vitrage

Diapo (vitre + air + vitre vs vitre)

Conclusion

Dans cette leçon, nous avons défini le phénomène de diffusion de particules et déterminé l'équation qui la régit, dite équation de diffusion. Nous avons également vu la diffusion de chaleur et retrouvé cette équation, à partir de laquelle nous avons traité l'exemple de l'isolation thermique. L'isolation thermique constitue un enjeu majeur, car aujourd'hui il existe encore de nombreuses passoires thermiques, qui induisent une consommation excessive de l'énergie.