Loi de l’énergie cinétique pour les solides

Niveau : CPGE/L1

Prérequis : cinématique du point matériel, moment cinétique du point matériel, forces conservatives

Introduction

I Énergie cinétique pour un système

1) Cas général

On considère un système $(\mathcal{S})$ de masse m formé de points de masse m_i situés aux points M_i à l'instant t et possédant la vitesse $\vec{v}(M_i/R)$ relativement au référentiel R. L'énergie cinétique du système est donc la somme des énergies cinétiques de chaque point :

$$\boxed{E_c(\mathcal{S}/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2(M_i/R)}$$

2) Solide en translation

Pour un solide en translation, la formule précédente se simplifie car tous les points M_i possèdent la même vitesse, qui est la vitesse du centre d'inertie $\vec{v}(G/R)$, d'où :

$$E_c(\mathcal{S}/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i/R) = \sum_i \left[\frac{1}{2} m_i \times v^2(G/R)\right] = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{m_{tot}} \times v^2(G/R)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c(\mathcal{S}/R) = \frac{1}{2} m_{tot}\, v^2(G/R)}$$

Cette formule est une extension immédiate de la mécanique du point, car un solide en translation se comporte comme un point matériel.

3) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

Chaque point M_i a une trajectoire circulaire de rayon r_i (distance à l'axe de rotation), et de vitesse angulaire ω.

L'énergie cinétique de M_i est donc :

$$E_c(M_i/R) = \frac{1}{2} m_i v^2(M_i/R) = \frac{1}{2} m_i \times (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

On obtient alors l'énergie cinétique du solide :

$$E_c(S/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2(M_i/R) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right) \times \omega^2$$

On reconnaît alors le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ, donc :

$$\boxed{E_c(S/R) = \frac{1}{2} J_\Delta(S) \times \omega^2(S/R)}$$

II Loi de l'énergie cinétique pour un système indéformable

1) Énoncé

Dans le cas d'un solide indéformable, on peut obtenir les théorèmes énergétiques par sommation des théorèmes énergétiques appliqués à chaque point.
On obtient ainsi le théorème de la puissance cinétique :

$$\boxed{\frac{dE_c(S/R)}{dt} = P_{ext}}$$

avec P_{ext} la puissance des forces extérieures
Dans sa forme intégrée, on obtient le théorème de l'énergie cinétique :
La variation d'énergie cinétique du système entre les instants t_1 et t_2 est égale aux travaux des forces extérieures :

$$\boxed{\Delta E_c(S/R) = \int_{t_1}^{t_2} P_{ext}\, dt = W_{ext,1\to 2}}$$

Tout comme la mécanique du point, certains travaux de actions extérieures ne dépendent que de l'état initial et de l'état final du solide.
On peut les écrire sous forme d'énergie potentielle telle que $dE_p = -\delta W$, et on obtient ainsi le théorème de l'énergie mécanique et le théorème de la puissance mécanique

$$\boxed{\Delta E_m(S/R) = W_{ext,\ non\ conservatives,\ 1\to 2}}$$

$$\boxed{\frac{dE_m(S/R)}{dt} = P_{ext,\ non\ conservatives}}$$

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives (et/ou et de forces non conservatives qui ne travaillent pas), alors l'énergie mécanique se conserve.
On dit que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.

<u>remarque:</u> pour un système matériel (S) de masse m_{tot} et de centre d'inertie G, la puissance et le travail du poids sont :

$$\mathcal{P}(\vec{P}/R) = m_{tot}\,\vec{g}\cdot\vec{v}(G/R)$$

$$W_{i\to f}(\vec{P}) = m_{tot}\,g\,(z_{G,i} - z_{G,f})$$ pour un axe (Oz) dirigé vers le haut.

(ou $W_{i\to f}(\vec{P}) = m_{tot}\,g\,(z_{G,f} - z_{G,i})$ pour un axe (Oz) dirigé vers le bas)

L'énergie potentielle de pesanteur du système (S) vaut $E_{p,pes}(S) = m_{tot}\,g\,z_G + cste$ si $\vec{u_z}$ est vers le haut ou $E_{p,pes}(S) = -m_{tot}\,z_G + cste$ si $\vec{u_z}$ est vers le bas

2) Puissance d'une action sur un solide

a) Solide en translation

Pour un solide en translation, la situation est assimilable à celle d'un point matériel.
La puissance d'une force $\vec{F}$ s'exprime alors par :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}(G/R)}$$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, le théorème de la puissance cinétique et la loi du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de rotation doivent permettre d'aboutir à la même équation.
On sait que l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} J_\Delta(S) \times \omega^2(S/R)$$

On peut calculer sa dérivée par rapport au temps et appliquer le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c(S/R)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta(S) \times \omega^2(S/R)\right) = \frac{1}{2} \times J_\Delta(S) \times \frac{d\omega^2(S/R)}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} J_\Delta(S) \times 2\omega(S/R) \times \dot{\omega}(S/R) = J_\Delta(S) \times \omega \times \dot{\omega}$$

D'après le théorème de la puissance cinétique, $\frac{dE_c(\mathcal{Y}/R)}{dt} = P_{ext}$, donc $J_\Delta(\mathcal{Y}) \times \omega \times \dot{\omega} = P_{ext}$

En écrivant la loi du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Δ, on obtient la relation : $\frac{d}{dt}(\underbrace{L_\Delta(\mathcal{Y}/R)}_{= J_\Delta(\mathcal{Y}) \times \omega(\mathcal{Y}/R)}) = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}} \to \mathcal{Y})$

$$= J_\Delta(\mathcal{Y}) \times \frac{d\omega(\mathcal{Y}/R)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}} \to \mathcal{Y})$$

soit $J_\Delta(\mathcal{Y}) \times \dot{\omega} = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}} \to \mathcal{Y})$

On multiplie cette dernière équation par ω : $J_\Delta(\mathcal{Y}) \times \dot{\omega} \times \omega = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}} \to \mathcal{Y}) \times \omega$

En combinant les 2 équations du mouvement, on obtient :

$$J_\Delta(\mathcal{Y}) \times \dot{\omega} \times \omega = P_{ext} = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}} \to \mathcal{Y}) \times \omega$$

La puissance d'une action sur un solide en rotation autour d'un axe fixe est donc :

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F} \to \mathcal{Y}) \times \omega}$$

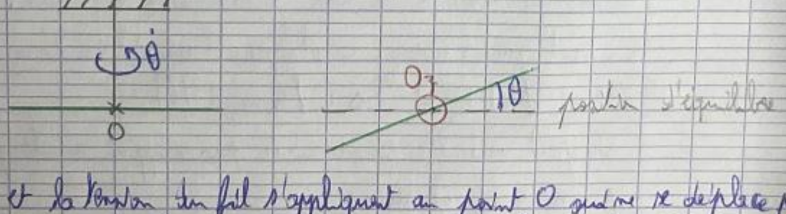
On retiendra en particulier la puissance d'un couple $\mathcal{E}$:

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \omega}$$

3) Exemples

a) Pendule de torsion

On étudie un bâton homogène (longueur l, masse m, moment d'inertie J_{Oz} par rapport à (Oz)) fixé à un fil au point O centre de masse du bâton.



Le poids et la tension du fil s'appliquent au point O qui ne se déplace pas, par conséquent ces deux actions ne travaillent pas. $(\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \underbrace{\vec{v}(O/R)}_{=\vec{0}} = 0)$

Le fil exerce un couple de torsion sur le bâton tel que $\mathcal{C} = -k\theta$ (ou $\vec{\mathcal{C}} = -k\theta \vec{u_z}$)

On peut calculer la puissance du couple :

$$P = \mathcal{C}\omega = -k\theta \times \dot{\theta}$$

On en déduit alors l'expression du travail :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P \times dt = \int_{t_1}^{t_2} -k\theta\dot{\theta}\, dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} -k \frac{d\left(\frac{1}{2}\theta^2\right)}{dt} \times dt$$

$$W = \int 1 \times \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}k\theta^2\right) dt = \left[-\frac{1}{2}k\theta^2\right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{k}{2}\left(\theta^2(t_2) - \theta^2(t_1)\right)$$

On constate que le travail ne dépend que des positions initiale et finale, donc le couple de torsion dérive d'une énergie potentielle de torsion

$$W = -\left(\frac{k}{2}\theta^2(t_2) - \frac{k}{2}\theta^2(t_1)\right) = -\Delta E_p = -\left(E_p(t_2) - E_p(t_1)\right)$$

donc $\boxed{E_p(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2}$ en choisissant une référence d'énergie potentielle lorsque le fil est au repos : $E_p(\theta = 0) = 0$.

<u>remarque</u> : autre méthode : $W = \int_{t_1}^{t_2} -k\theta\dot{\theta}\, dt = \int \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}k\theta^2\right) dt = \int d\left(-\frac{1}{2}k\theta^2\right)$

$$= \int \delta W = \int -dE_p$$

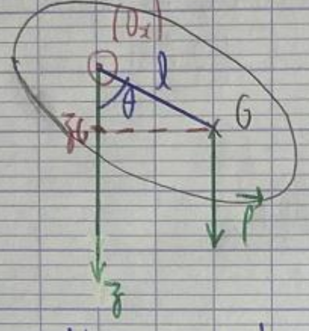
donc par identification, $-d\left(\frac{1}{2}k\theta^2\right) = -dE_p$, soit $E_p = \frac{1}{2}k\theta^2 + \text{cste}$

Toutes les actions extérieures agissant sur le bâton sont conservatives, par conséquent l'énergie mécanique se conserve et on peut écrire une intégrale première du mouvement : $\boxed{E_m(\mathcal{S}/R) = E_c(\mathcal{S}/R) + E_p(\mathcal{S}/R) = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k\theta^2 = \text{cste}}$

On détermine la constante à l'aide des conditions initiales.

b) Pendule pesant

On considère le pendule pesant étudié au chapitre précédent :



On peut écrire l'énergie cinétique du pendule :

$$E_c(\mathcal{S}/R) = \frac{1}{2} J_{Ox} \times \omega^2 = \frac{1}{2} J_{Ox} \times \dot{\theta}^2$$

Le poids est une force conservative, donc on peut écrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : l'énergie potentielle de pesanteur d'un système s'identifie à l'énergie potentielle de pesanteur du centre d'inertie concentrant toute la masse du système.

En prenant $E_{p,pes}(z=0)=0$, on a :

$$\boxed{E_{p,pes}(\mathcal{S}/R) = -m_{tot}\, g \times z_G + 0}$$

avec $z_G = l \cos\theta$

d'où $\boxed{E_{p,pes}(\mathcal{S}/R) = -m_{tot}\, g\, l \cos\theta}$, car l'axe (Oz) est dirigé vers le bas (avec un axe (Oz) dirigé vers le haut, on aurait $E_{p,pes} = m_{tot}\, g\, z_G$ avec $z_G = -l\cos\theta$).

La liaison pivot en O est une liaison pivot parfaite, par conséquent le moment scalaire de l'action de la liaison pivot sur le pendule par rapport à (Ox) est nul. Donc la puissance de cette action $\mathcal{P}(pivot) = \mathcal{M}_\Delta(pivot) \times \omega = 0$.

La liaison pivot parfaite ne travaille pas. Le système est soumis à des actions conservatives ou qui ne travaillent pas, par conséquent l'énergie mécanique se conserve, donc on peut écrire l'intégrale première du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} E_m(\mathcal{S}/R) &= E_c(\mathcal{S}/R) + E_p(\mathcal{S}/R) \\ &= \frac{1}{2} J_{Ox}\, \dot{\theta}^2 - m_{tot}\, g\, l \cos\theta = cste \end{aligned}}$$

L'intégrale première du mouvement correspond exactement à l'équation d'une trajectoire de phase.

On en déduit que lorsqu'un système est conservatif, une trajectoire de phase correspond à une courbe d'énergie mécanique constante.

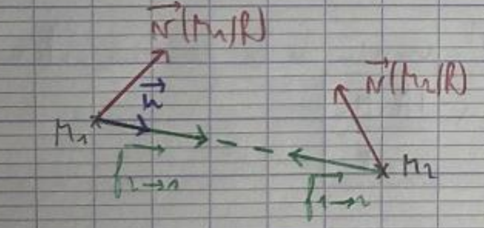
III Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

1) Expérience : tabouret d'inertie (voir polycopié)

2) Puissance des actions intérieures

Pour discuter de l'existence d'une puissance des forces intérieures, on peut se restreindre au cas d'un système de deux points. Pour les systèmes plus complexes, on pourra sommer les puissances des forces intérieures de toutes les paires de points du système.

On considère un système de deux points M_1 et M_2, de vitesses respectives $\vec{v}(M_1/R) = \frac{d\vec{OM_1}}{dt}$ et $\vec{v}(M_2/R) = \frac{d\vec{OM_2}}{dt}$, dans un référentiel R d'origine O



Le point M_1 exerce sur M_2 une force $\vec{f}_{1\to2} = f_{12}\vec{u}$ (ici on a représenté une force attractive, donc $f_{12} < 0$).

D'après le principe des actions réciproques, M_2 exerce sur M_1 une force $\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2} = -f_{12}\vec{u}$.

On définit la puissance des actions intérieures par :

$$\mathcal{P}_{int/R} = \vec{f}_{2\to1}\cdot\vec{v}(M_1/R) + \vec{f}_{1\to2}\cdot\vec{v}(M_2/R)$$

$$= -\vec{f}_{1\to2}$$

$$= -\vec{f}_{1\to2}\cdot\vec{v}(M_1/R) + \vec{f}_{1\to2}\cdot\vec{v}(M_2/R)$$

$$= \vec{f}_{1\to2}\cdot\left(\vec{v}(M_2/R) - \vec{v}(M_1/R)\right)$$

$$= \vec{f}_{1\to2}\cdot\left(\frac{d\vec{OM_2}}{dt} - \frac{d\vec{OM_1}}{dt}\right)$$

$$= \vec{f}_{1\to2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{OM_2} - \vec{OM_1}\right)$$

$$= \vec{f}_{1\to2} \cdot \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\vec{OM_2} + \vec{M_1O}\right)}_{\vec{M_1O}+\vec{OM_2}=\vec{M_1M_2}}$$

$$= \vec{f}_{1\to2} \cdot \frac{d\vec{M_1M_2}}{dt}$$

En utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$ qui n'est pas un vecteur fixe, on a :

$$P_{int/R} = f_{12}\vec{u} \cdot \frac{d(M_1M_2\vec{u})}{dt}$$

$$= f_{12}\vec{u} \cdot \left(\left(\frac{dM_1M_2}{dt}\right)\vec{u} + M_1M_2\frac{d\vec{u}}{dt}\right)$$

$$= f_{12}\frac{dM_1M_2}{dt} \times \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{u})}_{=\|\vec{u}\|=1} + f_{12}\times M_1M_2 \times \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Le vecteur $\vec{u}$ étant un vecteur unitaire, on a : $\vec{u}^2 = 1 \Rightarrow \underbrace{2\times\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}}_{=\frac{d(\vec{u}^2)}{dt}} = 0$

donc $\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$

On en déduit donc l'expression de la puissance intérieure :

$$\boxed{P_{int/R} = f_{12}\times\frac{dM_1M_2}{dt}}$$

Si la distance M_1M_2 est constante au cours du temps, alors la puissance intérieure est nulle. On retrouve alors que pour un solide indéformable, le travail et la puissance des forces intérieures sont nuls. Par contre, si le système se déforme, c'est-à-dire si la distance entre les points du système varie au cours du temps, alors la puissance des forces intérieures n'est pas nulle même si la résultante des forces intérieures l'est.

3) Loi de l'énergie cinétique

Pour un système (S) quelconque, on doit ajouter un terme venant des forces intérieures dans la loi de l'énergie cinétique par rapport au cas des systèmes indéformables. La loi de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{dE_c(S/R)}{dt} = P_{ext} + P_{int}}$$

Cette loi s'écrit aussi sous sa forme intégrée :

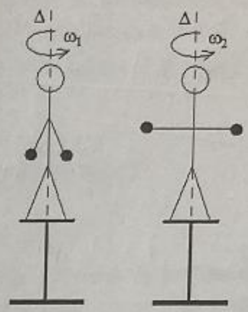
$$\boxed{\Delta E_c(S/R) = W_{ext} + W_{int}}$$

, avec W_{ext} le travail des forces extérieures et $W_{int} = \int_{t_1}^{t_2} P_{int} \times dt$ le travail des forces intérieures.

III) Loi de l'énergie cinétique pour un système déformable

1) Expérience : tabouret d'inertie

Vidéo de l'expérience.



On modélise cette expérience par un homme sur un tabouret dont le siège peut tourner quasiment sans frottement autour d'un axe Δ (liaison pivot parfaite entre le siège et l'axe de rotation).

Les bras repliés le long du corps, la personne est en rotation à la vitesse angulaire ω_1. Lorsqu'elle détend ses bras sa vitesse angulaire devient ω_2.

On cherche à faire un bilan énergétique de cette expérience.

Le système est formé de la personne et du siège mobile du tabouret.

On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les actions mécaniques exercées sur le système sont le poids et l'action de liaison entre le tabouret et l'axe. On écrit alors le théorème du moment cinétique scalaire :

$$\frac{dL_\Delta(S/R)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\text{poids} \to S) + \mathcal{M}_\Delta(\text{pivot} \to S)$$

Le poids est parallèle à l'axe Δ par conséquent $\mathcal{M}_\Delta(\text{poids} \to S) = 0$ et la liaison pivot est supposée parfaite donc $\mathcal{M}_\Delta(\text{pivot} \to S) = 0$. On en déduit :

$$\frac{dL_\Delta(S/R)}{dt} = 0 \Rightarrow L_\Delta(S/R) = \text{cste}$$

Dans l'état initial le moment d'inertie par rapport à Δ est $J_1(S)$ alors que dans l'état final il vaut $J_2(S)$.
La conservation du moment cinétique donne alors :

$$J_1(S)\omega_1 = J_2(S)\omega_2$$

Par définition le moment d'inertie vaut $J(S) = \sum m_i r_i^2$

Or dans l'état final la personne a les bras tendus donc certaines des distances r_i sont supérieures à celles de l'état initial donc $J_2(S) > J_1(S)$

On en déduit donc que $\omega_2 < \omega_1$

On calcule alors la variation d'énergie cinétique du système :

$$\Delta E_c(S/R) = \frac{1}{2}J_2(S)\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_1(S)\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_2(S)\left(\frac{J_1(S)}{J_2(S)}\omega_1\right)^2 - \frac{1}{2}J_1(S)\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_1(S)\omega_1^2\left(\frac{J_1(S)}{J_2(S)} - 1\right) < 0$$

Or le travail des actions extérieures est nul car le centre d'inertie ne se déplace pas au cours de la déformation et la liaison pivot est parfaite. Par conséquent la loi de l'énergie cinétique des systèmes indéformables ne s'applique pas ici.

La déformation du système a entrainé l'existence d'un travail des forces intérieures (exercées par les muscles) qu'il faut prendre en compte. La loi de l'énergie cinétique doit s'écrire ici :

$$\Delta E_c(S/R) = W_{int}$$

Conclusion