[49] Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités

COSTA Guillaume, JORGE Camille, HALFAOUI Abd-Almalik

Février 2020

Bibligraphie : Aschcroft (si on veut faire de la non linéarité dans les solides), BFR de méca, Oscillations de Mathieu, Electronique expérimentale de Krob, Non-linear dynamics de Strogatz.

Niveau :L3

Pré requis :
- Mécanique du point (aspect énergétique).
- Équations de Maxwell.
- Décomposition en série de Fourier.
- Électronique (amplificateur opérationnel idéal).

Remarques du correcteur :

- Partie II trop difficile à suivre à cause du peu de démo, faire proprement la perte d'isochronisme et mentionner le doublage en fréquence comme exemple qualitatif.
- Illustrer la génération d'harmonique du pendule avec l'expérience. Il est important de bien traiter la partie sur l'oscillateur linéaire afin de dégager l'intérêt du portrait de phase. On doit ressentir l'intérêt de l'outil à travers toute la leçon.

Analyse pédagogique :

On commence par traiter un exemple simple qui permet de poser les bases et d'introduire proprement la notion de portrait de phase et une bonne partie de ses propriétés. On va ensuite compliquer le problème en sortant du cadre linéaire et voir les effets que peuvent avoir les non-linéarités sur le système. Pour des raisons de cohérence on continue sur le pendule et on prend ensuite un autre exemple souvent utilisé : le doublage de fréquence (illustre l'influence des non-linéarités dans différents domaines). On s'intéresse ensuite à un autre type d'oscillateur, le but étant d'avoir une partie II qui traite des non-linéarités provenant du potentiel et le III sur une autre source de non-linéarité.

1 Oscillateur linéaire et portrait de phase.

1.1 Le pendule simple.

Aspect énergétique du pendule simple, obtention de l'équation différentielle à partir de l'énergie mécanique.
Équation non linéaire, on linéarise le sinus aux petits angles dans cette partie

1.2 Portrait de phase.

Portrait de phase : Ensemble des trajectoires possibles dans le plan des phases.
On va tracer le portrait de phase du pendule simple en utilisant l'énergie potentielle, pour ça on aligne les graphes (l'un au dessus de l'autre) et on traite différents cas :
— $E_m \ll 1$: pendule aux petits angles (cf équation linéarisée).
— $E_m \leq 2mgl$: Trajectoire liée.
— $E_m > 2mgl$: Trajectoire libre.
Lorsqu'on dispose des trajectoires, il est important d'indiquer le sens de parcours. Pour ça, on utilise le signe de la vitesse, dans le cadran supérieur (resp. inférieur) v>0 (resp v<0), on se déplace donc vers la droite (resp. gauche).

On observe plusieurs propriétés sur le portrait de phase :
— Caractère réversible du mouvement : un processus est réversible si, à la suite d'un renversement du temps, le système repasse par les même positions avec des vitesses opposées ⇒ **le portrait de phase est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.**
— Déterminisme mécanique : L'équation différentielle couplée à un set de conditions initiales assurent l'unicité de la solution donc **les trajectoires ne se croisent pas.**
— Point attracteur : point d'équilibre stable (en pratique c'est plus compliqué que ça).

Transition : On a vu que, aux petits l'angles, l'équation différentielle régissant le pendule est celle d'un oscillateur harmonique, conduisant à une trajectoire circulaire (en traçant le bon jeu de variable). Cependant, lors du tracé du portrait de phase, on constate que les autres trajectoires ne sont plus circulaires, comment expliquer ce phénomène ?

2 Génération d'harmoniques.

2.1 Le pendule aux grands angles.

On se place dans le cas où on ne dispose plus de la relation $\theta \ll 1$, il est alors nécessaire de développer le sinus à un ordre supérieur :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5)$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0}$$

On a donc une équation différentielle non linéaire que l'on va résoudre en cherchant des harmoniques. Pour ça, on effectue un développement en série de Fourier de θ, en utilisant les conditions initiales et la parité on obtient : $\theta(t) = a_1 \cos\omega t + a_3 \cos 3\omega t$.
On montre (en remplaçant dans l'équation en utilisant des approximations) que :

$$\theta(t) = a_1 \cos\omega t - a_1^3 \cos 3\omega t$$

Il a donc **génération d'harmonique ce qui déforme la trajectoire dans l'espace des phases**.
On retrouve la formule de Borda à l'aide de la relation suivante :

$$\omega = \omega_0(1-\epsilon)$$

Où $\epsilon \ll 1$ caractérise l'effet des non linéarités.
En injectant dans l'équation différentielle (en ne gardant que la composante à ω) on obtient :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0(1+\frac{\theta_0^2}{16})}$$

2.2 Doublage de fréquence en optique.

Un exemple d'utilisation pratique des non-linéarités : l'optique. Doublage en fréquence par un cristal non linéaire (faire un petit schéma) qui permet par exemple de passer d'un laser rouge à un laser vert (YAG à 1064 nm)

<u>Transition :</u> On s'est intéressé ici à des phénomènes non linéaires liés au développement du potentiel à un ordre supérieur, on va donc s'intéresser à une autre source de non linéarité.

3 Oscillateur de Van der Pol.

3.1 Modélisation.

On a précédemment étudié des oscillateurs non linéaires par leurs potentiels, on va s'intéresser ici à un **modèle d'oscillateur non linéaire par son amortissement.**

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} - \epsilon\omega_0(1-(\frac{s}{s_0})^2)\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0}$$

Où ϵ est le paramètre de Van der Pol ($\epsilon, \omega_0, s_0 > 0$).
Intérêt : démarrage et stabilisation des oscillations.
- $1-(\frac{s}{s_0})^2 > 0$: amplification du bruit et donc démarrage des oscillations.
- $1-(\frac{s}{s_0})^2 < 0$: amortissement.

3.2 Propriétés et diagramme de phase.

On multiplie l'équation différentielle par $\frac{ds}{dt}$ et on intègre, en se plaçant en régime permanent pour un mouvement quasi-sinusoïdale $s = s_m \cos\omega t$ on trouve que $s_m = 2s_0$.

Montrer le portrait de phase pour différentes valeurs de ϵ à l'aide d'une animation, faire ressortir les points importants comme l'existence d'un régime stable, de point attracteur, de symétries...

3.3 Un exemple de Van der Pol : l'oscillateur à résistance négative.

Présentation de l'oscillateur à résistance négative, illustration des deux régimes de fonctionnement.

4 Conclusion.

Le portrait de phase permet l'étude des propriétés de système sans avoir à effectuer de résolution, on peut obtenir beaucoup d'informations en linéarisant autour d'un point attracteur (point d'équilibre stable). Ouverture sur le chaos et l'utilisation des portraits de phase (si on est à l'aise en physique non linéaire).

5 Questions.

- Comment trouver la pulsation à partir du portrait de phase ? On a la période en intégrant l'équation de l'énergie.
- Pourquoi les trajectoires sont fermés ou non ? Caractère de la trajectoire (mouvement périodique ou non).
- Qu'est-ce qui caractérise la taille de l'ellipse ? Les conditions initiales.
- Intérêt des portraits de phase pour l'étude des systèmes non linéaires ? Permet l'étude du système au niveau des points attracteurs, obtention d'infos sur le système (réversibilités...).