第一次模拟训练A题

摘要

本研究针对一个拥有200英亩农场的农场主,在现有条件下制定了一个5年的生产计划。农场主要产出为奶牛和牛奶。研究考虑了奶牛的生命周期、土地利用效率、饲料供给、经济效益和农场的可持续性。模型包括了奶牛的出生率、死亡率、产奶量和土地的粮食及甜菜产量。同时,考虑了农场雇佣的工人成本、饲料成本以及可能的牛舍扩建投资。模型的约束条件包括农场牛舍容量限制、奶牛数量范围以及不允许年度现金流量为负。通过优化模型,得出了一项旨在提高农场盈利能力、合理配置资源和保持奶牛数量可持续的生产计划。

关键词:可持续性 生产计划 资源优化 经济效益 成本效益分析

1 问题重述

1.1 问题背景

在一个拥有200英亩土地的农场上,农场主的主要收入来源是奶牛饲养和牛奶生 产。农场目前拥有120头奶牛,其中包括100头成年奶牛和20头小母牛。每头成年奶牛 每年可以产出1.1头小牛,其中一半为公牛,出生后不久便以30美元的价格出售,另 一半为小母牛,可以选择以40美元的价格出售,或饲养到两岁成为成年奶牛。成年奶 牛的产奶期为2岁到11岁,每年可以产生370美元的牛奶收入。12岁及以上的奶牛产奶 量减少,因此通常会被以120美元的价格出售。奶牛和小母牛分别需要1英亩和2/3英 亩的土地来饲养。 农场有80英亩的土地适合种植粮食,产量因土地的不同而有所差异;此外,甜菜 可以在其他土地上种植,产量为1.5吨/英亩。甜菜和粮食可以用于奶牛饲养或出售。 农场的牛舍当前最大可容纳130头牛,但可以通过每200美元的投资增加1头牛的饲养 容量。农场主还可以通过贷款来扩充牛舍,贷款年利率为15 此外,农场每年支出4000美元的工资,获得5500小时的劳动力,可以通过支付1.20美 元/小时的价格获得额外劳动力。农场在劳动力和土地分配、奶牛饲养和农产品种植 之间需要做出合理的规划,以实现五年内的利润最大化。

1.2 问题提出

在一个拥有200英亩土地的农场上,农场主以奶牛饲养和牛奶生产为主要经济来源。当前农场拥有120头奶牛,其中包括100头成年奶牛和20头小母牛(小于2岁 的母牛)。为了优化农场的生产和运营,需要制定一个为期5年的详细生产计划,使得农场在满足资源和经济约束的前提下,能够实现利润的最大化。

2 符号变量

符号变量	含义
a_i	第 i 个年龄段的生育率
b_i	第 i 个年龄段的存活率
$\mathbf{x^{(k)}}$	第 t_k时刻种群数量分布向量
$\mathbf{x^{(0)}}$	初始种群数量分布向量
$x_i^{(k)}$	第 t_k时刻第 i个年龄组的数量
$\mathbf{L}''$	莱斯利雌雄总矩阵
$\mathbf{L}'$	莱斯利雌性或雄性矩阵
$\mathbf{L_r}$	考虑出售r比例小母牛后,莱斯利雌性矩阵
$\mathbf{y}_1$	选择矩阵,用于提取第一个元素
$\mathbf{y}_{12}$	选择矩阵,用于提取最后一个元素
$\mathbf{y}_{3,12}$	选择矩阵,用于提取第三个至最后一个元素
r	小母牛出售的比例
$w_{小公牛}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小公牛所得金额
$w_{小母牛}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小母牛所得金额
$w_{老母牛}^{(k)}$	第 t_k时刻出售老母牛所得金额
$w_{大母牛}^{(k)}$	第 t_k时刻大母牛所得金额
M	总贷款金额
m	每年还款额度
α	牧草种植所需土地面积（英亩）,也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩）,也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩）,也指甜菜
q_β	粮食的产量
q_γ	甜菜的产量
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间
$t_{小母牛}$	饲养小母牛所需时间
$t_{大母牛}$	饲养大母牛所需时间
t	总时间
c_β	种植粮食的成本
c_γ	种植甜菜的成本
$c_{小母牛}$	饲养小母牛的成本
$c_{大母牛}$	饲养大母牛的成本
c	总成本

其中独立参数如下

符号变量	含义
r	小母牛出售的比例
M	总贷款金额
α	牧草种植所需土地面积（英亩）,也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩）,也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩）,也指甜菜

3 问题分析

3.1 问题目标

制定一个以五年为期的生产计划,以优化农场的产 出,最大化利润。

3.2 决策变量

小母牛出售比例
贷款资金
种植牧草的土地
种植粮食的土地(分为4块)
种植甜菜的土地

3.3 约束条件

土地利用:土地的分配必须满足奶牛和小母牛的需求.
牛舍容量:当前和潜在的牛舍容量限制必须被考虑。
资金预算:确保年度现金流量不为负,并考虑到贷款的偿还。
劳动力:考虑贷款成本和年度还款,确保财务健康。
奶牛数量:五年后奶牛数量必须符合规定,且非负,整数。

3.4 模型假设

假设奶牛每年增长和繁殖的速率是固定的,不受其他因素影响。
假设每头奶牛每天对饲料的消耗量是恒定的.
假设每种作物在单位土地上的产出是固定的,不受气候变化和土壤退化影响。
假设每个劳动力单元（例如,每个工人每小时）可以完成的工作量是固定的
假设贷款的利率是固定的,还款计划是预先设定的。
假设小母牛和公牛的出售价格和淘汰奶牛的成本是固定的。
假设在计划期间,没有新的政策和法规会影响农场的运营。
假设疾病爆发、自然灾害等风险的概率是已知的,且可以通过保险或其他手段来管理。

3.5 奶牛

3.5.1 牛群繁殖逻辑

记 x_i 为种群中第 i 个年龄组中的奶牛数量(雌性,下同),记 t_k 为第 k 年 ,则 t_k 时种群中第 i 个年龄组的奶牛数量可表示为 $x_i^{(k)}$,其中$i = 1, 2, \ldots, 12$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

不出售第一个年龄组小母牛的情况下, t_k 时种群中第一个年龄组的种群数量等于 t_{k-1} 时各年龄组产下的雌性幼体总和

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \cdots, 5$$

t_k 时第$i+1$个年龄组中雌性奶牛的数量等于 t_{k-1} 时第 i 个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1\,, 2\,, \cdots, 12$$

遍历上述12个存活公式,并在最初添加种群数量的繁殖条件公式,有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_{12} x_{12}^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_{13}^{(k)} = b_{12} x_{12}^{(k-1)} \end{cases}$$

当 t_k 年出售 r 比例的刚出生的小母牛,即出售小母牛的数量为 $(a_1x_1^{(k-1)}+a_2x_2^{(k-1)}+\cdots+a_nx_n^{(k-1)})\times r$,由此更新第一个年龄段种群雌性数量的迭代公式如下

$$x_1^{(k)}=(\ a_1x_1^{(k-1)}+a_2x_2^{(k-1)}+\cdots+a_nx_n^{(k-1)}\ )\times(1-r)$$

此时,有

$$\begin{cases} x_1^{(k)}=(\ a_1x_1^{(k-1)}+a_2x_2^{(k-1)}+\cdots+a_{12}x_{12}^{(k-1)}\ )\times(1-r)\\ x_2^{(k)}=b_1x_1^{(k-1)}\\ x_3^{(k)}=b_2x_2^{(k-1)}\\ \vdots\\ x_{13}^{(k)}=b_{12}x_{12}^{(k-1)} \end{cases}$$

3.5.2 小公牛

t_k 年出售小公牛所得金额 = t_k 年出售小公牛的数量 × 出售一只小公牛的价格

$$w_{\text{小公牛}}^{(k)}=x_1^{(k)}\times 30$$

则出售小公牛五年后毛利为

$$w_{\text{小公牛}}=\sum_{k=1}^{5}w_{\text{小公牛}}^{(k)}=\sum_{k=1}^{5}x_1^{(k)}\times 30$$

3.5.3 小母牛

类似的，t_k 年出售小母牛所得金额 = t_k 年出售小母牛的数量 × 出售一只小母牛的价格

$$w_{\text{小母牛}}^{(k)}=x_1^{(k)}\times 40$$

则出售小母牛五年后毛利为

$$w_{\text{小母牛}}=\sum_{k=1}^{5}w_{\text{小母牛}}^{(k)}=\sum_{k=1}^{5}x_1^{(k)}\times 40$$

t_k 年工人饲养小母牛所耗费时间 = t_k 年工人饲养小母牛的数量 × 饲养一只小母牛所耗费的时间

$$t_{\text{小母牛}}^{(k)}=\sum_{i=1}^{2}x_i\times 10$$

则饲养小母牛五年后所耗费时间为

$$t_{\text{小母牛}}=\sum_{k=1}^{5}t_{\text{小母牛}}^{(k)}=\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{2}x_i^{(k)}\times 10$$

t_k 年工人饲养小母牛所需资金 = t_k 年工人饲养小母牛的数量 × 饲养一只小母牛所需的资金

$$c_{\text{小母牛}}^{(k)}=\sum_{i=1}^{2}x_i^{(k)}\times 500$$

则饲养小母牛五年后所需资金为

$$c_{\text{小母牛}}=\sum_{k=1}^{5}c_{\text{小母牛}}^{(k)}=\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{2}x_i^{(k)}\times 500$$

3.5.4 老母牛

t_k 年出售老母牛所得金额 = t_k 年出售老母牛的数量 × 出售一只老母牛的价格

$$w_{老母牛}^{(k)} = x_{13}^{(k)} \times 120$$

则出售老母牛五年后毛利为

$$w_{老母牛} = \sum_{k=1}^{5} w_{老母牛}^{(k)} = \sum_{k=1}^{5} x_{13}^{(k)} \times 120$$

3.5.5 大母牛

t_k 年出售牛奶所得金额 = t_k 年可以产出牛奶的大母牛数量 × 出售一年牛奶的价格

$$w_{大母牛}^{(k)} = \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \times 370$$

则出售牛奶五年后毛利为

$$w_{大母牛} = \sum_{k=1}^{5} w_{大母牛}^{(k)} = \sum_{k=1}^{5} \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \times 370$$

t_k 年工人饲养大母牛所耗费时间 = t_k 年工人饲养大母牛的数量 × 饲养一只大母牛所耗费的时间

$$t_{大母牛}^{(k)} = \sum_{i=3}^{12} x_i \times 42$$

则饲养大母牛五年后所耗费时间为

$$t_{小母牛} = \sum_{k=1}^{5} t_{大母牛}^{(k)} = \sum_{k=1}^{5} \sum_{i=3}^{12} x_i \times 42$$

t_k 年工人饲养大母牛所需资金 = t_k 年工人饲养大母牛的数量 × 饲养一只大母牛所需的资金

$$c_{大母牛}^{(k)} = \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \times 100$$

则饲养大母牛五年后所需资金为

$$c_{大母牛} = \sum_{k=1}^{5} c_{大母牛}^{(k)} = \sum_{k=1}^{5} \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \times 100$$

3.5.6 所有牛

$$t^{(k)} = t_{小母牛}^{(k)} + t_{大母牛}^{(k)} + t_\beta + t_\gamma$$
$$if \quad t^{(k)} \leq 5500\,,\ then \quad c_{工人}^{(k)} = 4000$$
$$if \quad t^{(k)} \geq 5500\,,\ then \quad c_{工人}^{(k)} = 4000 + (t^{(k)} - 5500) \times 1.2$$
$$c_\beta^{(k)} = \beta \times 15$$
$$c_\gamma^{(k)} = \gamma \times 10$$

3.6 贷款

设总贷款金额为M,贷款金额全部用于投资,此时,有,

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^{(\ k\ )} \leq \frac{M}{200} + 130\,,\ k = 0, \ldots, 5$$

至于还款,要求等额还款,市面上流行的还款方式为等额本金还款及等额本息还款,但仅有后者可保证每年还款数额固定不变,故确定还款方式为等额本息还款有,

$$\text{每年应还额度} = \frac{\text{贷款本金} \times \text{年利率} \times (1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}}}{(1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}} - 1}$$

则,每年还款额度 m 计算公式如下,

$$m = \frac{M \times 0.15 \times (1 + 0.15)^{10}}{(1 + 0.15)^{10} - 1}$$

3.7 土地

设牧草,甜菜,粮食种植所需土地分别为 α英亩, β英亩, γ英亩

由题意知,每头小母牛需要$\frac{2}{3}$英亩的土地养活它,每头大母牛需要1英亩的土地养活它,然每头奶牛除了吃牧草以外,每年还需要0.6吨粮食和0.7吨甜菜. 即现有的200英亩土地分配β英亩, γ英亩分别种植甜菜和粮食外,剩余α英亩土地均布满牧草。

3.7.1 分牧草α英亩

$$\alpha \geq \frac{2}{3} \times \sum_{i=1}^{2} x_i^{(k)} + 1 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)}$$

3.7.2 分粮食β英亩

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$$
$$q_\beta = 1.1 \times \beta_1 + 0.9 \times \beta_2 + 0.8 \times \beta_3 + 0.6 \times \beta_4$$
$$l_\beta^{(k)} = q_\beta - 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i^{(\ k\ )}$$
$$if \quad l_\beta^{(k)} > 0\ ,\ then \quad w_\beta = l_\beta^{(k)} \times 75$$
$$if \quad l_\beta^{(k)} < 0\ ,\ then \quad w_\beta = l_\beta^{(k)} \times 90$$
$$t_\beta = \alpha \times 4$$
$$\beta_1 \leq 20\ ,$$
$$\beta_2 \leq 30\ ,$$
$$\beta_3 \leq 30\ ,$$
$$\beta_4 \leq 10\ .$$

3.7.3 分甜菜γ英亩

$$q_\gamma = 1.5 \times \gamma$$
$$l_\gamma^{(k)} = q_\gamma - 0.7 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(\ k\ )}$$
$$if \quad l_\gamma^{(k)} > 0\ ,\ then \quad w_\gamma^{(k)} = l_\gamma^{(k)} \times 58$$
$$if \quad l_\gamma^{(k)} < 0\ ,\ then \quad w_\gamma^{(k)} = l_\gamma^{(k)} \times 70$$
$$t_\gamma = \beta \times 14$$

3.7.4 总土地大小限制

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 200$$

4 模型建立与求解

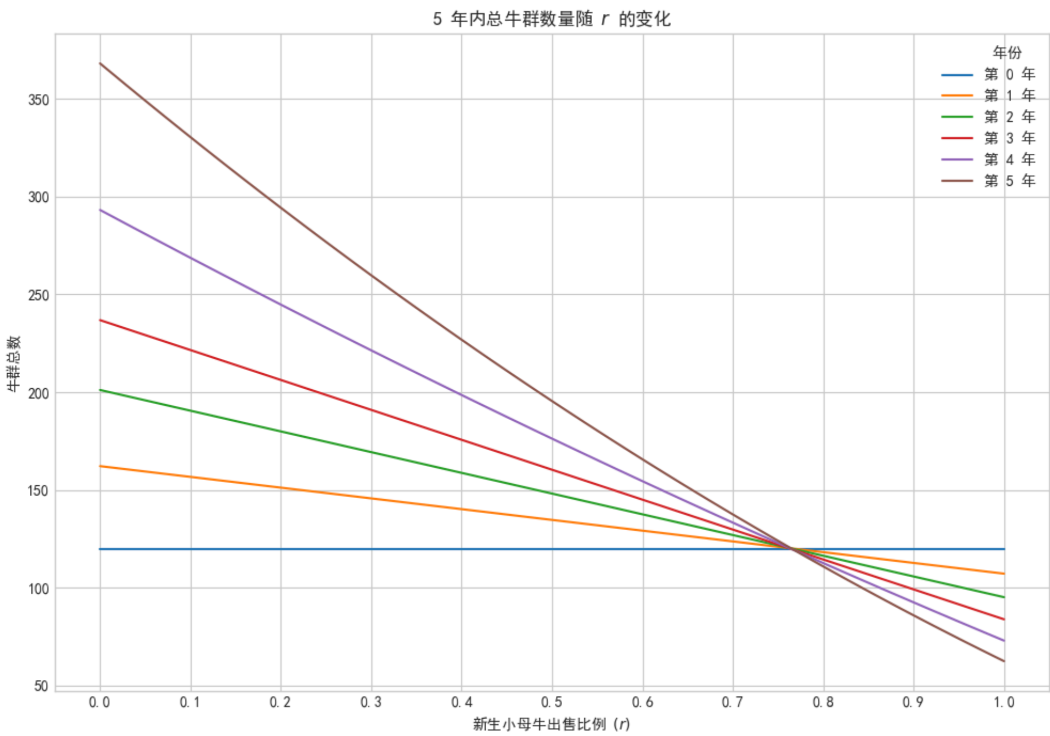
$$Max\ E = Max\sum_{k=1}^{5} E^{(k)} = Max\sum_{k=1}^{5}[w^{(k)} - c^{(k)}]$$

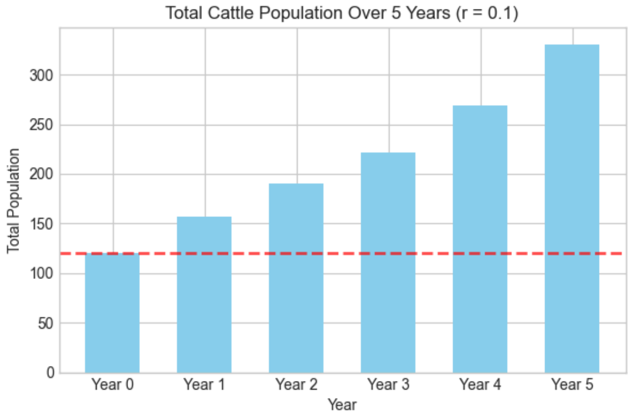
其中

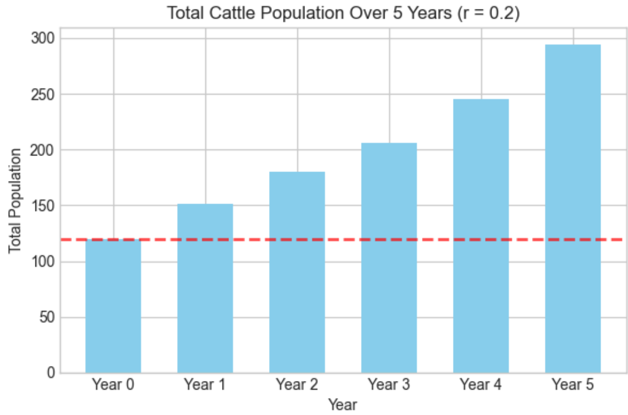
$$w^{(k)} = w^{(k)}_{小公牛} + w^{(k)}_{小母牛} + w^{(k)}_{大母牛} + w^{(k)}_{老母牛} + w^{(k)}_{\beta} + w^{(k)}_{\gamma}$$
$$c^{(k)} = c_{\beta} + c_{\gamma} + c^{(k)}_{小母牛} + c^{(k)}_{大母牛} + c^{(k)}_{工人} + m$$
$$E^{(k)} = w^{(k)} - c^{(k)}$$

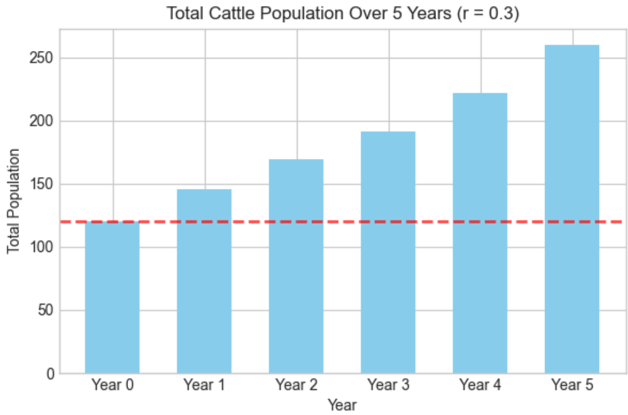
4.1 种群数量（n）— 出售比例(r)图

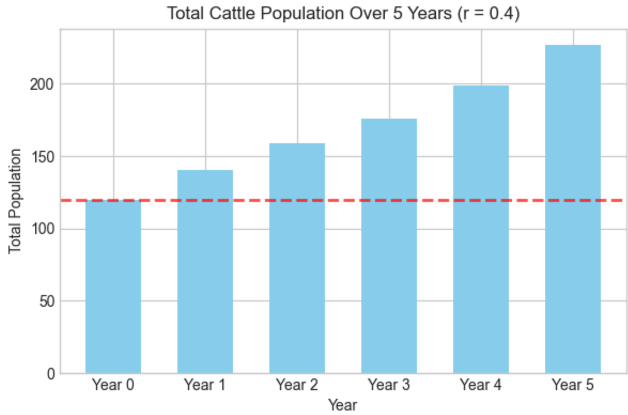
年份	种群总数
0	120
1	162.2 - 55.0r
2	201.152 - 105.985r
3	236.87934 - 153.0276r
4	27.300625r² - 247.585052r + 293.2354506
5	79.362916875r² - 385.097726255r + 368.18760454

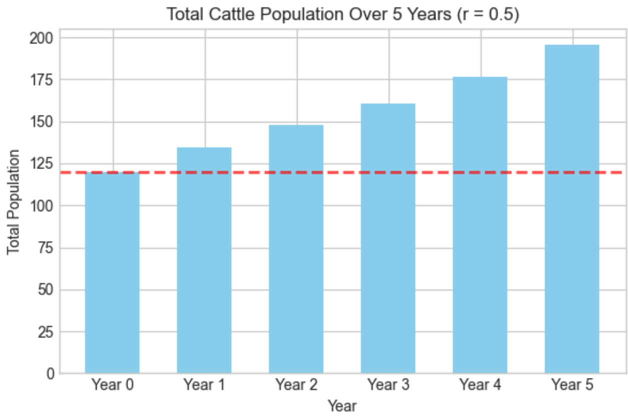


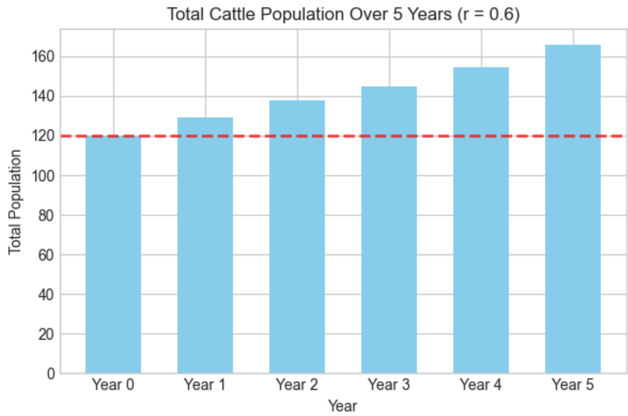

Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.1)
Total Population
0
50
100
150
200
250
300
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year

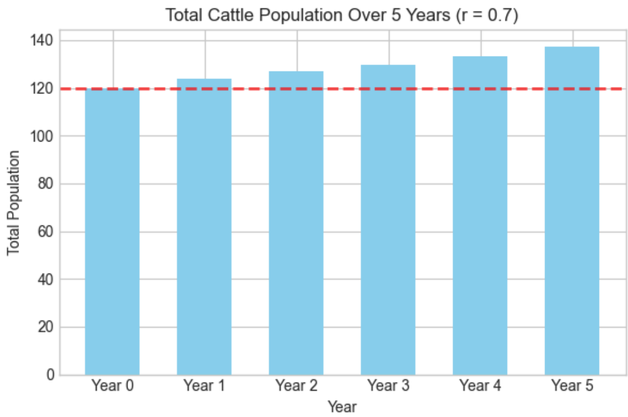

Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.2)
Total Population
0
50
100
150
200
250
300
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year

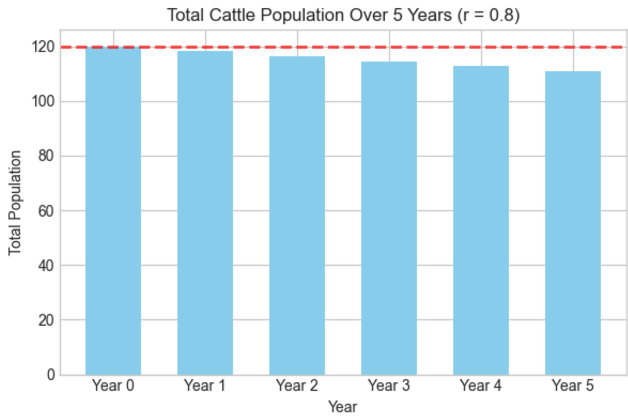

Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.3)
Total Population
0
50
100
150
200
250
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year


Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.4)
Total Population
0
50
100
150
200
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year


Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.5)
Total Population
0
25
50
75
100
125
150
175
200
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year


Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.6)
Total Population
0
20
40
60
80
100
120
140
160
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year


Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.7)
Total Population
0
20
40
60
80
100
120
140
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year


Total Cattle Population Over 5 Years (r = 0.8)
Total Population
0
20
40
60
80
100
120
Year 0
Year 1
Year 2
Year 3
Year 4
Year 5
Year