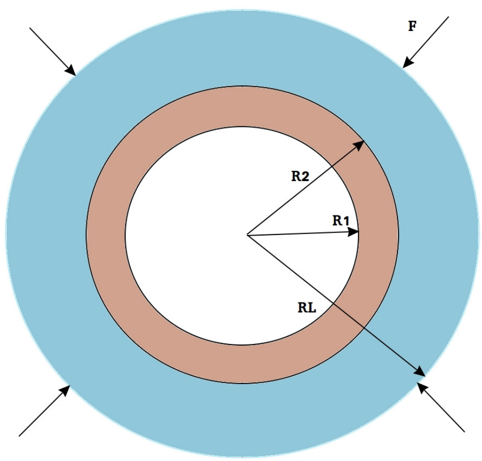
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет.
Кафедра волновой и газовой динамики.

Курсовая работа:
Схлопывание сферической вязкоупругопластической оболочки, окруженной слоем вязкой жидкости, под действием внешней динамической нагрузки.

студент 523 группы
Галаничев А.С.
Научный руководитель
Киселев А.Б.

Оглавление

Постановка задачи



В данной работе изучается процесс воздействия динамической нагрузки на сферическую вязкоупругопластическую оболочку, которая окружена слоем вязкой жидкости. При этом в материале возникают волновые явления, которые являются причиной деформации и, вследствие, схлопывания оболочки.
Данную работу можно рассматривать, как моделирование воздействия ударной волны, появляющейся, например, в результате взрыва на находящиеся в воде тела, имеющие вязкоупругопластическую природу и сферическую симмертрию. Например, подводная лодка или батискаф. Так как в реальных процессах сферическая симметрия неустойчива, то в данной работе этой неустойчивостью пренебрегается.

Система уравнений упруговязкопластической оболочки

Законы сохранения массы и изменения импульса:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\dot{\varepsilon}_r - 2\dot{\varepsilon}_\theta$$

$$\rho\dot{\upsilon} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}$$

r - расстояние до центра оболочки, υ - радиальная скорость, ρ - плотность, σ_r и $\sigma_\theta = \sigma_\phi$ - компоненты тензора напряжений, разлагаемого на шаровую $\sigma = (\sigma_r + 2\sigma_\theta)/3$ и девиаторые части. $\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \upsilon}{\partial r}$ $\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\upsilon}{r}$ - скорости деформации, которые представляются в виде суммы упругих и неупругих скоростей деформации: $\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_r^e + \dot{\varepsilon}_r^p$, $\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_\theta^e + \dot{\varepsilon}_\theta^p$. Кроме того $\dot{\varepsilon}_r^p + 2\dot{\varepsilon}_\theta^p = 0$, т.е. пластическое течение несжимаемо, и $S_r + 2S_\theta = 0$.

Система определяющих уравнений модели:

$$\sigma = K(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta)$$

$$\dot{\varepsilon}_r^e = \frac{\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta}{3} + \frac{\dot{S}_r}{2\mu}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta^e = \frac{\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta}{3} + \frac{\dot{S}_\theta}{2\mu}$$

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \frac{S_r}{2\eta}\left(1 - \frac{Y}{|S_r - S_\theta|}\right) H\left(|S_r - S_\theta| - Y\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta^p = \frac{S_\theta}{2\eta}\left(1 - \frac{Y}{|S_r - S_\theta|}\right) H\left(|S_r - S_\theta| - Y\right)$$

Где K $-$ объемный модуль, μ $-$ модуль сдвига, η $-$ динамическая вязкость, Y $-$ предел текучести.

Численный метод

Аппроксимируем данную систему уравнений. В качестве разностной схемы возмем модель Уилкинсона со смещенной лагранжевой сеткой, в которой υ будут считаться в разных ячейках с ρ, σ_r, σ, S_r.

$$\frac{\upsilon_k^{n+1/2} - \upsilon_k^{n-1/2}}{\tau} = \frac{(\sigma_r)_{k+1/2}^n - (\sigma_r)_{k-1/2}^n}{\alpha_k^n} + 2\beta_k^n$$

$$\alpha_k^n = \frac{1}{2}\left[\rho_{k+1/2}^n(r_{k+1}^n - r_k^n) + \rho_{k-1/2}^n(r_k^n - r_{k-1}^n)\right]$$

$$\beta_k^n = \frac{(\sigma_r)_{k+1/2}^n - (\sigma_\theta)_{k+1/2}^n}{\rho_{k+1/2}^n(r_{k+1}^n + r_k^n)} + \frac{(\sigma_r)_{k-1/2}^n - (\sigma_\theta)_{k-1/2}^n}{\rho_{k-1/2}^n(r_k^n + r_{k-1}^n)}$$

$$\frac{r_k^{n+1} - r_k^n}{\tau} = \upsilon_n^{n+1/2}$$

$$(\dot{\varepsilon}_r)_{k+1/2}^{n+1/2} = \frac{\upsilon_{k+1}^{n+1/2} - \upsilon_k^{n+1/2}}{r_{k+1}^{n+1/2} - r_k^{n+1/2}} \qquad (\dot{\varepsilon}_\theta)_{k+1/2}^{n+1/2} = \frac{\upsilon_{k+1}^{n+1/2} + \upsilon_k^{n+1/2}}{r_{k+1}^{n+1/2} + r_k^{n+1/2}}$$

$$\frac{\rho_{k+1/2}^{n+1} - \rho_{k+1/2}^n}{\tau} = \frac{\rho_{k+1/2}^{n+1} + \rho_{k+1/2}^n}{2}\left(\dot{\varepsilon}_r + 2\dot{\varepsilon}_\theta\right)$$

Для того, чтобы получить уравнение для девиаторов, используем, что $\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_r^e + \dot{\varepsilon}_r^p$, а также $S_r - S_\theta = \frac{3}{2}S_r$. Подставим в это равенство известные соотношения для скоростей деформации.

В итоге, выразив $\dot{S}_r$, получим:

$$\dot{S}_r = \frac{4\mu}{3}(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta) - \frac{\mu}{\eta}S_r\left(1 - \frac{2Y}{3|S_r|}\right)\, H(3|S_r| - 2Y)$$

Численный метод

Следующее значение девиатора получается в 2 шага:
Первый шаг:

$$\frac{(S_r)^{n+1}_{k+1/2} - (S_r)^{n}_{k+1/2}}{\tau} = \frac{4\mu}{3}(\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta)$$

Второй шаг:

$$(S_r)^{n+1/2}_{k+1/2} = \frac{(S_r)^{n+1}_{k+1/2} + (S_r)^{n}_{k+1/2}}{2}$$

если $3|(S_r)^{n+1/2}_{k+1/2}| - 2Y > 0$, то делаем поправку:

$$(S_r)^{n+1}_{k+1/2} := (S_r)^{n+1}_{k+1/2} - \frac{\mu}{\eta}(S_r)^{n+1/2}_{k+1/2}\left(1 - \frac{2Y}{3(S_r)^{n+1/2}_{k+1/2}}\right)$$

Затем вычисляем остальные неизвестные:

$$(S_\theta)^{n+1}_{k+1/2} = -\frac{(S_r)^{n+1}_{k+1/2}}{2} \qquad \sigma^{n+1}_{k+1/2} = -K \cdot ln\left(\frac{\rho^{n+1}_{k+1/2}}{\rho_0}\right)$$

$$(\sigma_r)^{n+1}_{k+1/2} = \sigma^{n+1}_{k+1/2} + (S_r)^{n+1}_{k+1/2} \qquad (\sigma_\theta)^{n+1}_{k+1/2} = \sigma^{n+1}_{k+1/2} + (S_\theta)^{n+1}_{k+1/2}$$

Уравнения вязкой жидкости

Уравнения модели вязкой жидкости Навье-Стокса в предположении несжимаемости и одномерном сферическом приближении:

$$\sigma_r = -p + 2\mu e_r$$

$$\sigma_\theta = -p + 2\mu e_\theta$$

Где σ_r и σ_θ радиальное и кольцевое напряжения в жидкости. $p = -\frac{\sigma_r + 2\sigma_\theta}{3}$ - давление. $e_r = \frac{\partial \upsilon}{\partial r}$, $e_\theta = \frac{\upsilon}{r}$ - радиальная и кольцевая скорости деформации.μ-динамическая вязкость.

Уравнение движения :

$$\rho \dot{\upsilon} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \qquad \rho - \text{плотность}$$

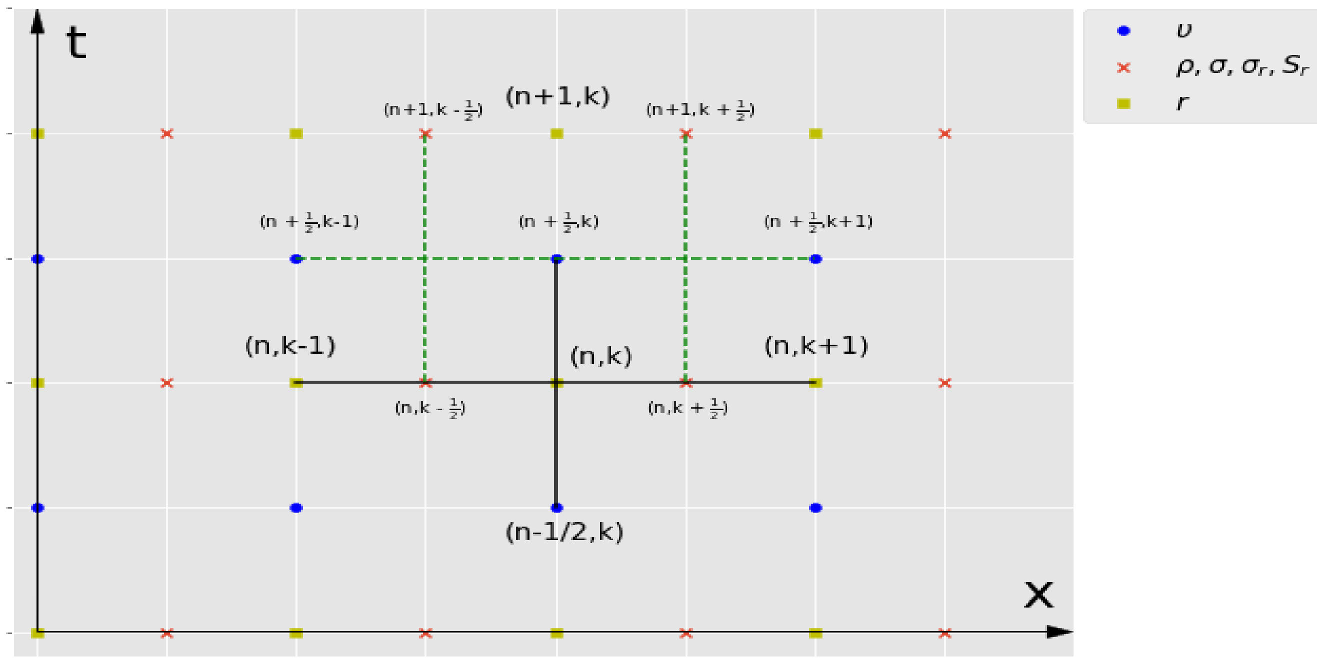
Конечно разностная система для вязкой жидкости :

$$\rho_k^n \frac{\upsilon_k^{n+1} - \upsilon_k^n}{\tau} = \frac{(\sigma_r)_{k+1}^n - (\sigma_r)_{k-1}^n}{2h} + 2\frac{(\sigma_r)_k^n - (\sigma_\theta)_k^n}{r_2 + kh}$$

$$(\sigma_r)_k^{n+1} = -p + 2\mu \frac{\upsilon_{k+1}^{n+1} - \upsilon_{k-1}^{n+1}}{2h}$$

$$(\sigma_\theta)_k^{n+1} = -p + 2\mu \frac{\upsilon_k^{n+1}}{r_2 + kh}$$

Граничные условия и устойчивость



На внутренней поверхности оболочки : $\sigma_r|_{r=r_0} = 0$ $\frac{\partial \upsilon}{\partial r}|_{r=r_0} = 0$

На внешней поверхности жидкости : $\sigma_r^l|_{r=r_l} = P(t)$ $\frac{\partial \upsilon^l}{\partial r}|_{r=r_l} = 0$

На поверхности контакта жидкости и оболочки :

$$\upsilon|_{r_2} = \upsilon^l|_{r_2} \qquad \sigma_r|_{r=r_2} = \sigma_r^l|_{r=r_2}$$

Условие Куранта: $\frac{a_0 \tau}{h} < C$

Константы :

$\rho_0 = 4530$ кг/м^3; $K = 123,4$ ГПа;$\mu = 43,4$ ГПа; $Y = 0,71$ ГПа;
$\eta = 700$ Па $\cdot$ с; $r_1 = 2 \cdot 10^{-2}$м; $r_2 = 3 \cdot 10^{-2}$м; $r_l = 4,5 \cdot 10^{-2}$м;
$a_0 = \sqrt{(K + 4\mu/3)/\rho_0}$; $P(t) = p_0 H(t_0 - t)$; $p_0 = 14,3$ГПа

Сглаживание скоростей по Лаксу

Вместо конечно – разностной аппроксимации уравнения движения

$$\upsilon_k^{n+1/2} = \upsilon_k^{n-1/2} + \tau(...)$$

Ищется следующая аппроксимация:

$$\upsilon_k^{n+1/2} = \tilde{\upsilon}_k^{n-1/2}\gamma_k^{n-1/2} + \upsilon_k^{n-1/2}(1-\gamma_k^{n-1/2}) + \tau(...)$$

,

где $\tilde{\upsilon}_k^{n-1/2} = \frac{\upsilon_{k+1}^{n-1/2}+\upsilon_{k-1}^{n-1/2}}{2}$

Параметр γ вычисляется следующим образом :

$$\gamma_k^{n-1/2} = \min(1, \gamma_0 + \chi|\tilde{\upsilon}_k^{n-1/2} - \upsilon_k^{n-1/2}|)$$

$\gamma_0 = \dfrac{V_0}{a_0} \quad \chi = \dfrac{1}{V_0} \quad V_0 = \dfrac{P_0}{a\rho_0} \quad V_0$ – скорость удара, P_0 – внешнее давление.

Разность $\tilde{\upsilon}_k^{n-1/2} - \upsilon_k^{n-1/2}$ даёт оценку 2–ой производной в окрестности узла k.

Параметр γ включает Лаксову вязкость в окрестности ударных волн и увеличивает её (но не больше 1) с ростом скорости удара.

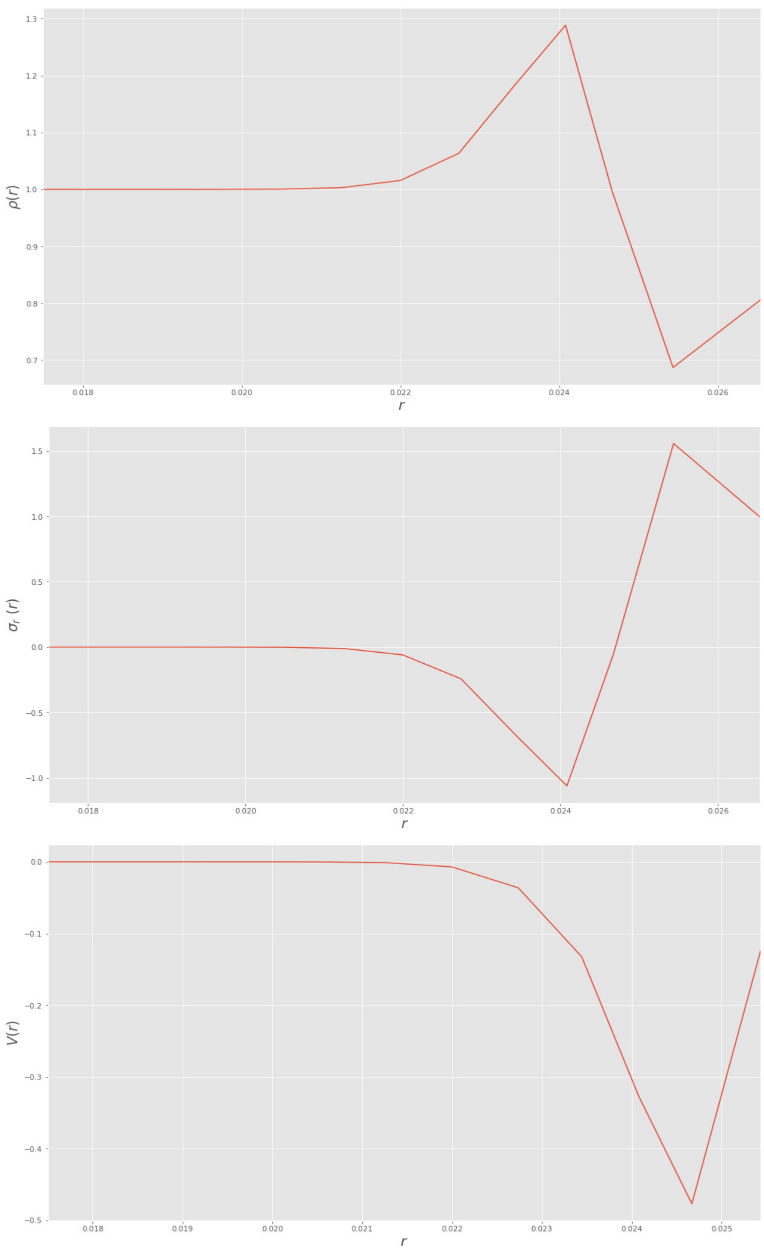
Переход к безрамерным переменным :

$$r = \bar{r}(r_2 - r_1) \quad t = \bar{t}\frac{r_2 - r_1}{a_0} \quad \rho = \bar{\rho}\rho_0 \quad \upsilon = \bar{\upsilon}a_0$$

$$\sigma = \bar{\sigma}K \quad \sigma_r = \bar{\sigma}_r K \quad S_r = \bar{S}_r K$$

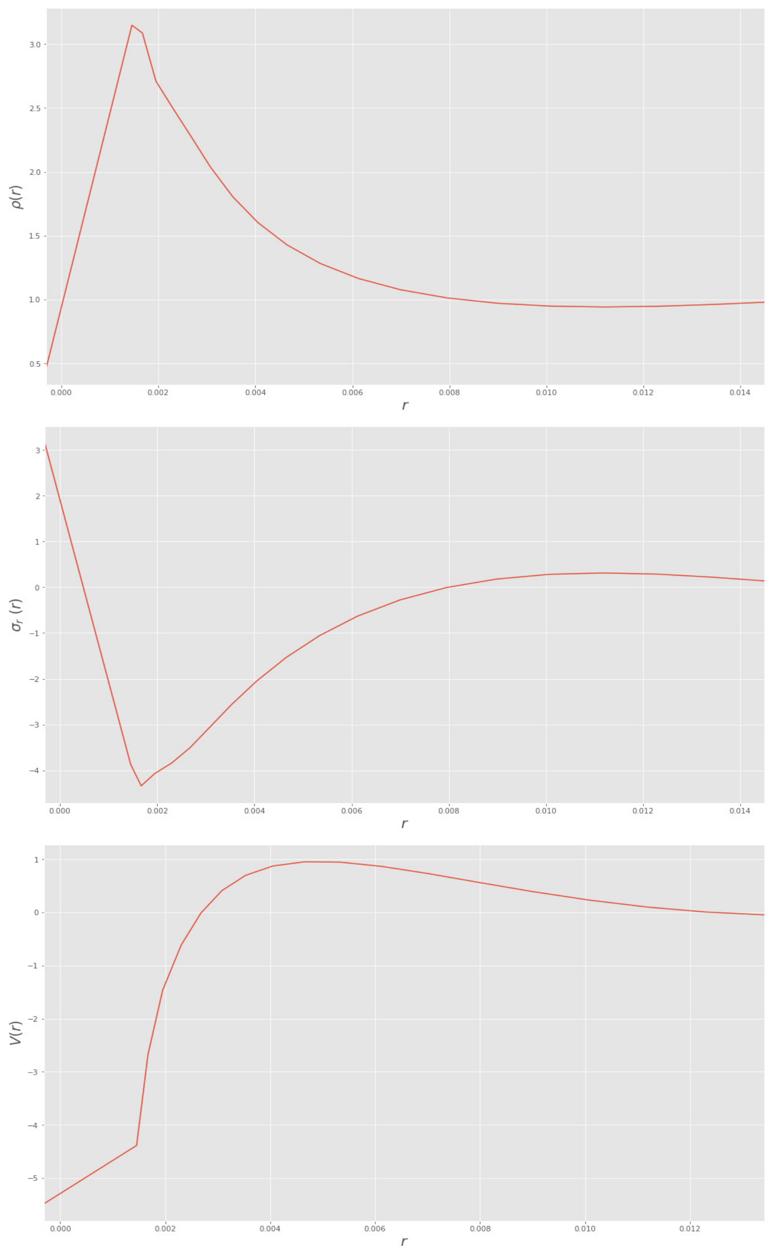
Результаты

Графики распределений ρ, S_r, υ в момент $t = 1.58$ мкс



Результаты

Графики распределений ρ, S_r, v в момент $t = 3$ мкс (момент схлопывания)



Выводы

В данной работе было рассмотрено поведение сферической вязкоупругопластической оболочки, окруженной слоем вязкой жидкости, под действием внешней динамической нагрузки.

Получены графики распределений скорости и радиальных компонент тензоров напряжений и девиаторов.

Найдено время схлопывания.

Используемая литература

1. Киселев А.Б. Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного микроразрушения термоупруговязкопластической среды. Вестник Москва ун-та. сер.1, математика. механика. 1998 №6
2. Киселев А.Б. Аналитические решения динамических задач расширения(сжатия) толстостенных сферических и цилиндрических вязкопластических оболочек, погруженных в вязкую жидкость. Прикладная физика и математика 2. 2016
3. Уилкинс М.Л. Расчет упруго-пластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике 1964.
4. Киселев А.Б. Нехаева О.В. Численное моделирование динамического деформирования и разрушения толстостенной сферической оболочки. Вестник Москва ун-та. сер.1, математика. механика. 2004 №5
5. Киселев А.Б. Рыбакин Б.П. Численное исследование откольного разрушения при взрывном и ударном нагружении. Препринт. 21.12.1989