

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

студент 4-го курса
Галаничев
Антон Сергеевич

Отчёт по практике на ЭВМ.

Содержание

1	Постановка задачи	1
2	Формализация задачи	2
3	Система необходимых условий оптимальности	3
4	Аномальный случай и исследование задачи	4
5	Краевая задача	4
6	Численное решение краевой задачи методом стрельбы	5
7	Тест решения задачи Коши — гармонический осциллятор	6
8	Оценка точности решения задачи Коши	8
9	Аналитическое решение краевой задачи	11
10	Графики	12

1 Постановка задачи

Рассматривается задача Лагранжа с фиксированным временным отрезком, без ограничений вида "меньше или равно":

$$B_0 = \int_0^1 \dot{x}^2 e^{-\alpha x} dt \rightarrow extr$$

$$\int_0^1 x dt = 0$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 t}{1 + \alpha t^2} dt = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$\alpha \in \{0, 0.01, 0.5, 1.5, 10.5\}$$

2 Формализация задачи

Формализуем задачу как задачу оптимального управления. Для этого обозначим $u = \dot{x}$. Тогда исходная система перепишется в виде:

$$\int_0^1 u^2 e^{-\alpha x} dt \rightarrow \inf$$

$$\int_0^1 x dt = 0$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 t}{1 + \alpha t^2} dt = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$\alpha \in \{0, 0.01, 0.5, 1.5, 10.5\}$$

О выборе условия $B_0 \rightarrow \inf$, а не $B_0 \rightarrow \text{extr}$ см. пункт 5.

3 Система необходимых условий оптимальности

Выпишем функции Лагранжа и Понtryгина:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 L dt + l,$$

Лагранжиан: $L = \lambda_0 u^2 e^{-\alpha x} + \lambda_1 x + \lambda_2 \frac{x^3 t}{1 + \alpha t^2} + p_x(\dot{x} - u)$

Терминант: $l = \lambda_3 x(0) + \lambda_4 (x(1) - 1)$

$H = p_x u - \lambda_0 u^2 e^{-\alpha x} - \lambda_1 x - \lambda_2 \frac{x^3 t}{1 + \alpha t^2}$

Применим к задаче оптимального управления принцип максимума Понtryгина.

Необходимые условия оптимальности:

1. Уравнение Эйлера-Лагранжа :

$$\dot{p}_x = \lambda_1 + 3\lambda_2 \frac{x^2 t}{1 + \alpha t^2}$$

2. Условие оптимальности по управлению, $u = \arg \max H(u)$:

$$u = \arg \max H(u) = \frac{p_x e^{\alpha x}}{2\lambda_0}, \text{ при } \lambda_0 \neq 0.$$

3. Условия трансверсальности :

$$p_x(0) = \lambda_3$$

$$p_x(1) = -\lambda_4$$

4. Условия стационарности по t_k :

Нет, т.к концы фиксированы ($t_0 = 0, t_1 = 1$).

5. Условия дополняющей нежёсткости:

Нет, так как в задаче отсутствуют условия вида "меньше или равно".

6. Условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$.

7. Условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя).

8. НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

4 Анормальный случай и исследование задачи

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$. Из условия оптимальности по управлению имеем: $p_x(t) \equiv 0$, иначе $u(t) = \pm \infty$, и такой управляемый процесс не является допустимым. Следовательно, $p_x(t) \equiv 0 \forall t \in [0,1]$ и из условий трансверсальности получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Таким образом, если $\lambda_0 = 0$, то все множители Лагранжа равны 0 и получается противоречие с условием 8) НЕРОН. Значит, анормальный случай невозможен. Так как $\lambda_0 \neq 0$, в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа выберем следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}$$

Тогда определяется управление: $u = p_x e^{\alpha t}$

5 Краевая задача

На основе принципа максимума решение задачи Лагранжа сводится к решению краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \dot{x} = p_x e^{\alpha x} \\ \dot{p}_x = \lambda_1 + 3\lambda_2 \frac{x^3 t}{1+\alpha t^2} \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \\ \int_0^1 x dt = 0 \\ \int_0^1 \frac{x^3 t}{1+\alpha t^2} dt = 0 \end{array} \right.$$

$[p_x(0), \lambda_1, \lambda_2]$ - параметры стрельбы

$$\alpha \in \{0, 0.01, 0.5, 1.5, 10.5\}$$

$$B_0 \rightarrow \inf, \text{ так как } L_{uu} > 0$$

6 Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Краевая задача решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$:

$$\alpha_1 = p_x(0), \quad \alpha_2 = \lambda_1, \quad \alpha_3 = \lambda_2.$$

Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $[0, 1]$, получим соответствующие выбранному значению $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ функции $x(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $p_x(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $y(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $z(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ и, в частности, значения $x(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $y(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $z(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, где $y(t) = \int_0^t x dt$ и $z(t) = \int_0^t \frac{x^3 t}{1 + \alpha t^2} dt$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений, начальных условий в 0 момент времени и условий $\alpha_1 = p_x(0)$, $\alpha_2 = \lambda_2$, $\alpha_3 = \lambda_3$ решается численно явным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса DOPRI8 с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения α_1 , α_2 , α_3 так, чтобы выполнялись условия:

$$x(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] - 1 = 0, \quad y(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0, \quad z(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0.$$

Соответственно вектор-функцией невязок будет функция $X(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} x(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] - 1 = 0 \\ y(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0 \\ z(1)[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0 \end{pmatrix}$

Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных.

7 Тест решения задачи Коши — гармонический осциллятор

Дабы отбросить все сомнения в корректности работы программы для решения задачи Коши, проведём тестирование на более простом случае с заранее известным решением, а именно на гармоническом осцилляторе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x; \\ 0 < t < 30; \\ t = 0 : x = 0, y = 8. \end{cases}$$

Визуализация численного решения данной задачи с помощью нашей программы представлена в виде графиков на рис. (3), (2) и (1). Для удобства проверки дополнительно решим нашу задачу с помощью пакета *Wolfram Mathematica 8*. Сравнивая полученные результаты можно заметить, что полученные решения абсолютно идентичны, на основе чего можно сделать вывод о корректности работы программы. Однако, для большей достоверности проверим также численные оценки отклонений.

1. Для вычисления глобальной погрешности введём множество переменных δ_i :

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k \cdot e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s) ds}$$

Интеграл в предыдущем выражении можно приблизить следующим образом

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s) ds = (t_{k+1} - t_k) \cdot \text{Hmax} \left(\frac{J + J^T}{2} \right),$$

где J — матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, Err_k — максимум расстояний между соответствующими координатами на k -ом шаге, а Hmax — функция, возвращающая максимальное собственное значение полученной матрицы. В наше

случае мы получим следующее

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k.$$

Таким образом были получены следующие значения глобальной погрешности:

для точности погрешности -7-го порядка $\delta_k = 2.433796 \cdot 10^{-6}$

для точности погрешности -9-го порядка $\delta_k = 3.964618 \cdot 10^{-7}$

для точности погрешности -11-го порядка $\delta_k = 8.135620 \cdot 10^{-9}$

2. А оценка **локального отклонения на шаге** для каждой точки $t = \{50, 100, 150, 200\}$ для обеих координат получилась равна в районе 100 ± 2 , что намного превышает теоретическую оценку 56.23 и свидетельствуют о большом запасе точности в методе — при уменьшении максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования на 2 порядка происходит существенное уточнение решения, метод в данном случае работает как метод более высокого порядка. Это в первую очередь связано с коэффициентами в расчётных формулах метода и особенностями системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора.

На основе выше сказанного можно сделать вывод, что полученная программа работает корректно.

8 Оценка точности решения задачи Коши

Для определения скорости распространения ошибки в оценках глобальной погрешности определяется логарифмическая норма матрицы $\mu(J)$ - максимальное собственное значение матрицы $\frac{J+J^T}{2}$ и норма матрицы $\|J\|$ - максимальное сингулярное число.

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x e^{\alpha x} \\ \dot{p}_x = \lambda_1 + 3\lambda_2 \frac{x^2 t}{1+\alpha t^2} \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha p_x e^{\alpha x} & e^{\alpha x} \\ 3\lambda_2 \frac{xt}{1+\alpha t^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^T = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} \alpha p_x e^{\alpha x} & 3\lambda_2 \frac{xt}{1+\alpha t^2} \\ e^{\alpha x} & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу :

$$\frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} \alpha p_x e^{\alpha x} & 3\lambda_2 \frac{xt}{1+\alpha t^2} + \frac{e^{\alpha x}}{2} \\ 3\lambda_2 \frac{xt}{1+\alpha t^2} + \frac{e^{\alpha x}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{J + J^T}{2} - \lambda E\right) = 0.$$

Максимальное собственное значение матрицы $\frac{J+J^T}{2}$:

$$\mu = |\lambda_{\max}(J)| = \begin{cases} \frac{\alpha p_x e^{\alpha x} + \sqrt{(\alpha p_x e^{\alpha x})^2 + 4(3\lambda_2 \frac{xt}{1+\alpha t^2} + \frac{e^{\alpha x}}{2})^2}}{2}, & \text{если } \alpha p_x e^{\alpha x} > 0 \\ \frac{\alpha p_x e^{\alpha x} - \sqrt{(\alpha p_x e^{\alpha x})^2 + 4(3\lambda_2 \frac{xt}{1+\alpha t^2} + \frac{e^{\alpha x}}{2})^2}}{2}, & \text{если } \alpha p_x e^{\alpha x} < 0 \end{cases}$$

При $\alpha = 0$ получим следующие значения :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальное собственное значение матрицы $\frac{J+J^T}{2}$:

$$\mu = |\lambda_{\max}(J)| = \frac{1}{2}$$

Теперь вычислим максимальное сингулярное число:

$$J^T J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(J^T J - \lambda E) = -\lambda(1 - \lambda) = 0.$$

$$\|J\| = \sqrt{\lambda_{max}} = 1.$$

Так как $\frac{1}{2} = \mu(J) \leq \|J\| = \sqrt{\lambda_{max}} = 1$, то применима следующая оценка глобальной погрешности:

$$\|\vec{x}(t) - \vec{v}(t)\| \leq e^{L(t) \left(\delta_k(0) + \int_0^t e^{-L(s)\rho(s)} ds \right)},$$

Где $\vec{x}(t)$ - вектор точного значения фазовых переменных системы ,

$\vec{v}(t)$ - вектор фазовых переменных системы , вычисляемый в результате решения задачи Коши,

$\rho(s)$ - ошибка в вычисленных правых частях системы в момент времени s ,

$\delta_k(t)$ - ошибка в вычисленных значениях фазовых переменных задачи в момент времени t , для оценки точности решения задачи Коши мы предполагаем, что в начальный момент времени значения фазовых переменных заданы правильно, то есть $\delta_k(0) = 0$,

$L(t) = \int_0^t \ell(s) ds$, где $\ell(s) = \mu(J(s, p_x(s), x(s), y(s), z(s)))$.

Так как для логарифмической нормы получена аналитическая формула, не зависящая от $t, p_x(t), x(t), y(t), z(t)$, - $\ell = \frac{1}{2}$, то интеграл $L_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ell(s) ds$ можно не только оценивать, но и вычислять явно:

$$L_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ell(s) ds = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)$$

В частности,

$$L(1) = \int_0^1 \ell(s) ds = \frac{1}{2}$$

Тогда величина глобальной погрешности решения задачи Коши $\delta_k(1)$ может быть оценена через C_ρ , где константа $C_\rho \geq \rho(s)$ оценивает сверху $\rho(s)$:

$$\begin{aligned}\delta_k(1) &\leq e^{(L(t))\left(\delta_k(0)+\int_0^t e^{(-L(s))\rho(s)} ds\right)} = \\ &= e^{\frac{1}{2}} \int_0^1 e^{(-\frac{1}{2}s)} ds = C_\rho ds = 2C_\rho(e^{\frac{1}{2}} - 1)\end{aligned}$$

Таким образом, глобальная ошибка в решении задачи Коши оценивается по предыдущей формуле, где C_ρ - максимум ошибки в вычислении правых частей.

9 Аналитическое решение краевой задачи

Даже при $\alpha = 0$ краевая задача не решается аналитически.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, y = p_x \\ \dot{y} = \lambda_1 + 3\lambda_2 x^2 t, \\ x(0) = 0; x(1) = 1; \\ \int_0^1 x dt = 1 \\ \int_0^1 \frac{x^3 t}{1+t^2} dt = 0 \end{cases}$$

Сделав все замены, мы перейдем к дифференциальному уравнению вида :

$$\ddot{x} = \lambda_1 + 3\lambda_2 x^2 t$$

Уравнение является нелинейным, соответственно найти его решение аналитически не получится (именно в этом случае).

10 Графики

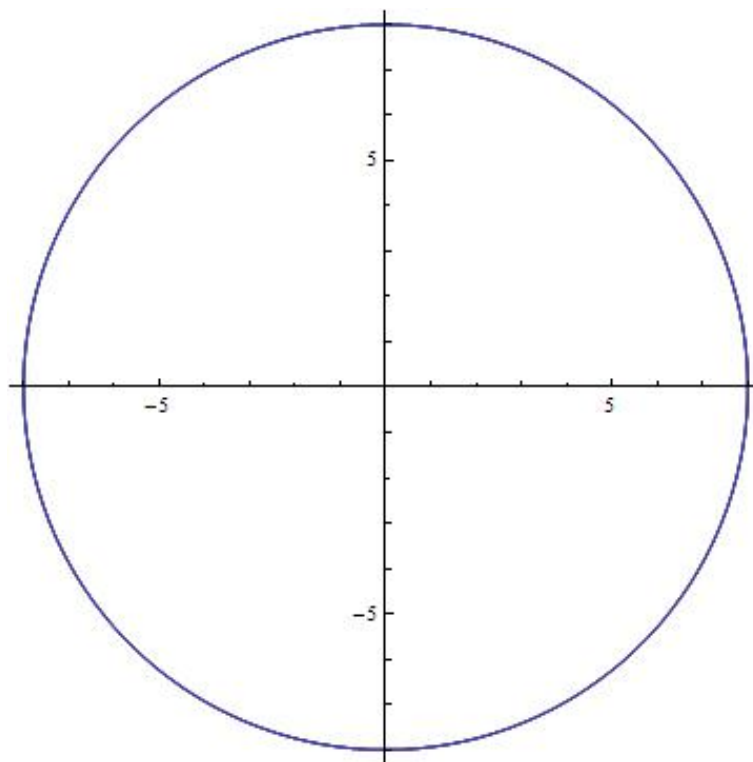


Рис. 1: Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $y(x)$

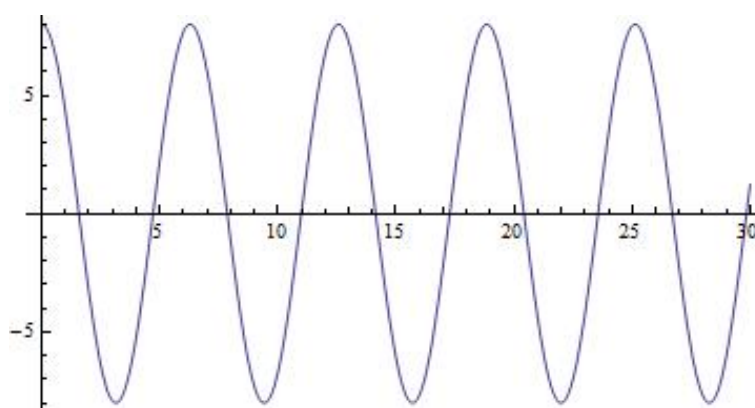


Рис. 2: Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $y(t)$

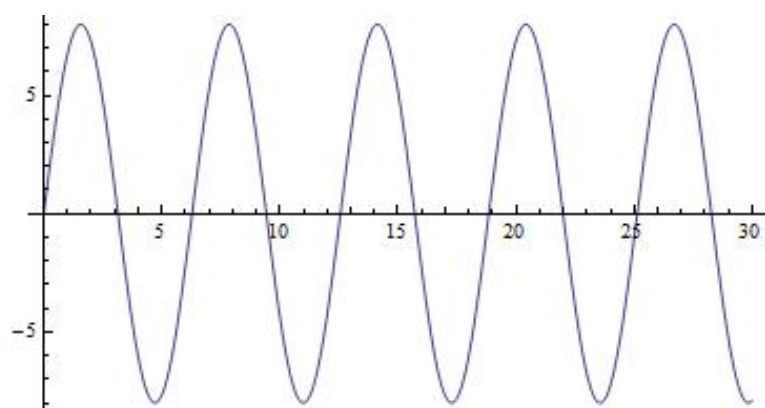


Рис. 3: Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $x(t)$