



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

I Modelli di Ising: Osservabili Fisiche e Lunghezza di Correlazione.

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

Candidato

Alessio Giorlandino
Matricola 1836168

Relatore

Prof. Enzo Marinari

Anno Accademico 2020/2021

Sommario

Il modello di Ising, nonostante la semplicità nel definirlo, mostra una transizione di fase del secondo ordine: si osserva cioè l'esistenza di una temperatura critica tale per cui, per temperature maggiori di essa, il comportamento del sistema è disordinato e simmetrico. Per temperature minori invece si formano delle strutture di spin allineati che provocano una magnetizzazione spontanea, rompendo così la simmetria della fase calda.

Nel capitolo 1 vengono poste le basi fondamentali per le discussioni che seguono, in particolare vengono presentati i teoremi di Yang e Lee, dai quali si evince che nel limite termodinamico non ci è assicurato che la funzione di partizione sia analitica.

Successivamente, nel capitolo 2, viene studiata la magnetizzazione e il suo ruolo fondamentale di parametro d'ordine della transizione; un'equazione per quest'ultima è stata poi ottenuta in approssimazione di campo medio. Da essa è stato possibile studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio, in particolare, in assenza di campo magnetico esterno si è trovato che: sopra la temperatura critica la sola configurazione stabile è quella a magnetizzazione nulla; alla temperatura critica si ha uno stato metastabile, il quale per temperature minori individua due configurazioni stabili ben distinte, di magnetizzazione opposta ma stessa energia.

Successivamente sono stati fatti degli sviluppi attorno alla temperatura critica e allo zero assoluto in modo tale da fornire, in tali regioni, un'espressione approssimata per il comportamento della magnetizzazione.

I risultati di campo medio sono stati usati nel capitolo 3, per determinare la funzione di correlazione connessa tra gli spin del reticolo, in particolare sono stati utili a valutare la relazione di fluttuazione e dissipazione. Quanto trovato mostra che nella fase simmetrica la correlazione è soppressa esponenzialmente con la distanza, alla temperatura critica invece, la lunghezza di correlazione diverge e la funzione di correlazione decade soltanto a potenza, rendendo possibili comportamenti collettivi a lungo raggio.

In ultima analisi, il capitolo 4 si pone l'obiettivo di studiare gli effetti di taglia finita attraverso delle simulazioni condotte con l'algoritmo di Metropolis. Per sistemi grandi, ma comunque finiti, anche se non è possibile avere una transizione di fase in senso rigoroso, dalle simulazioni risulta evidente che il comportamento del reticolo tende molto velocemente a ciò che ci si aspetta dal limite termodinamico.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Transizioni del Secondo Ordine	2
1.2	Considerazioni sui Sistemi Magnetici	2
1.3	Analiticità della Funzione di Partizione nel Limite Termodinamico	3
2	Modello di Ising	5
2.1	Definizione	5
2.2	Approssimazione di campo medio	5
2.3	Temperatura Critica e Transizione di Fase	7
2.3.1	Comportamento della Magnetizzazione a Basse Temperature	8
2.3.2	Comportamento della Magnetizzazione attorno a T_C	9
2.4	Modello di Ising in Infinite Dimensioni	10
3	Funzione di Correlazione Connessa tra gli Spin del Reticolo	12
3.1	Relazione di Fluttuazione e Dissipazione	12
3.2	Lunghezza di Correlazione	13
4	Simulazione del Modello con Metodi Monte Carlo	16
4.1	Effetti di Taglia Finita	16
4.2	Algoritmo di Metropolis	17
4.3	Risultati	19
	Bibliografia	21

Capitolo 1

Introduzione

L'importanza del modello di Ising è criticamente legata al fatto che, nonostante la sua semplicità, macroscopicamente esso presenta dei comportamenti complessi, consentendo di introdurre i principali concetti che caratterizzano le **transizioni di fase**.

Generalmente, soprattutto per modelli non interagenti o in situazioni in cui siano poche le particelle in questione, si è abituati a pensare che le quantità che descrivono tale sistema siano funzioni differenziabili ovunque. Questo modello, invece, è un esempio del fatto che, quando una grande quantità di particelle interagisce, è possibile che il comportamento collettivo risultante sia completamente diverso da quello del singolo costituente; per di più, alcune grandezze macroscopiche non risultano essere funzioni analitiche. In questo caso, l'interazione di un sistema infinito di spin, riesce approssimativamente a modellizzare il fenomeno della magnetizzazione spontanea.

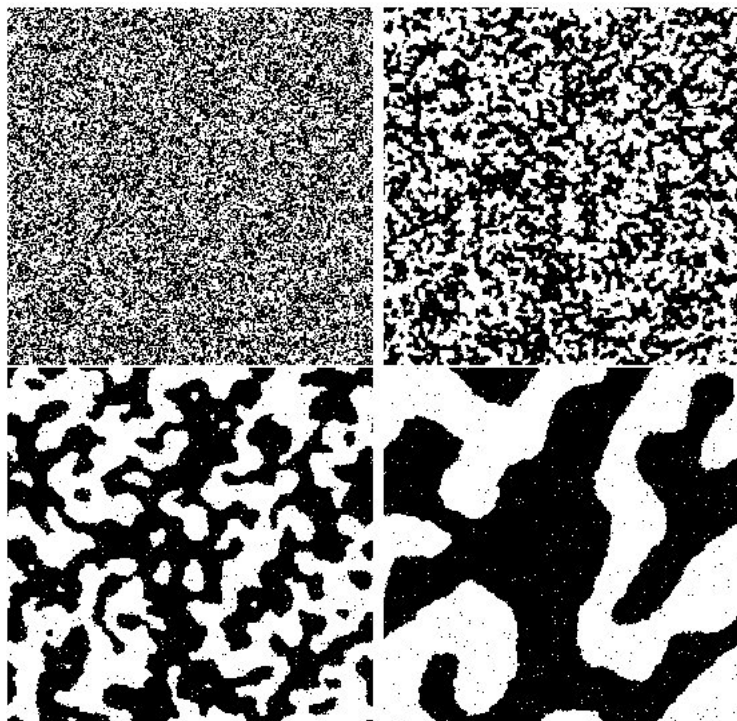


Figura 1.1. Esempio delle strutture macroscopiche che si formano nel reticolo quando viene abbassata la temperatura in assenza di campo magnetico esterno.

Ha un'importanza ancora più profonda il comportamento attorno al punto critico, in quanto caratterizzato da una certa **universalità** nel descrivere le transizioni di fase di molti altri sistemi, a prescindere dal dettaglio microscopico. Infatti, in tal regione, molte osservabili mostrano un andamento del tipo: $|T - T_c|^{-\zeta}$, in cui l' **esponente critico** risulta ad essi comune in una gran varietà di modelli. Segno del fatto che, vicino alla transizione, le interazioni a lungo raggio risultano possibili, consentendo il verificarsi della transizione stessa.

Questa serie di osservazioni fa parte di una collezione di fenomeni molto vasta, che sembrerebbe puntare nella direzione che l'organizzazione universale avviene per scala: la dinamica microscopica influenza i comportamenti macroscopici, ma non il contrario.

Nel caso del modello di Ising, vedremo che nella fase calda la correlazione tra due spin del reticolo è esponenzialmente soppressa con la distanza tra essi; esiste però una **temperatura critica** per cui la lunghezza di correlazione diverge e la correlazione decade soltanto a potenza, rendendo possibile alla scala microscopica di influenzare quella macroscopica, consentendo la transizione di fase in questione.

Nel corso della discussione ci saranno utili alcune osservazioni generali, che riportiamo qui nel resto dell'introduzione.

1.1 Transizioni del Secondo Ordine

Le transizioni di fase ordinarie, anche dette del primo ordine, avvengono in modo discontinuo e inaspettato, nel senso che nessuna grandezza termodinamica sembra anticipare il salto tra i due stati. Per cui, per un sistema che può subire una transizione di questo tipo, è sempre possibile indicare in quale delle due fasi esso si trovi. Al contrario, nelle transizioni del secondo ordine, lo stato del corpo varia con continuità, piuttosto è la sua simmetria a subire un brusco cambiamento.

Se lungo le transizioni del primo ordine le due fasi sono all'equilibrio, lungo le transizioni del secondo, gli stati delle due fasi coincidono.

Le funzioni di stato termodinamiche sono continue lungo queste transizioni, che non sono legate a processi di assorbimento o emissione del calore, come accade invece in quelle di primo ordine. Al contrario, non è escluso che grandezze termodinamiche derivate, presentino punti di non continuità o singolarità. Quanto appena visto, è formalizzato dalla **classificazione di Ehrenfest**:

Se l'energia libera è una funzione differenziabile K volte, ma non $K+1$, allora tale sistema presenterà una transizione di fase di ordine $K+1$.

Per convenzione tutte le transizioni di ordine superiore al primo, vengono comunque dette del secondo ordine.

1.2 Considerazioni sui Sistemi Magnetici

La transizione gas-liquido al punto critico è l'esempio più rappresentativo delle transizioni del secondo ordine, tuttavia la complessità delle interazioni coinvolte rende la trattazione molto complicata. D'altro canto sistemi ferromagnetici vincolati sul reticolo offrono la possibilità di studiare questo tipo di fenomeni con una difficoltà notevolmente ridotta.

Per questi sistemi si osserva che, sopra la temperatura critica, non vi è magnetizzazione in assenza di campo magnetico esterno e il sistema risulta invariante sotto rotazioni. Al di sotto della temperatura critica, la magnetizzazione avviene spontaneamente, individuando una direzione privilegiata nello spazio e rompendo così la simmetria spaziale definita dall'isotropia dell'allineamento degli spin: una determinata configurazione e quella con tutti gli spin invertiti hanno la stessa energia e dunque sono equiprobabili. L'hamiltoniana risulta dunque invariante sotto inversione di spin, mentre non lo è il valore d'aspettazione della magnetizzazione. Per questo motivo quest'ultima gioca il ruolo di **parametro d'ordine**, cioè esprime univocamente l'appartenenza del sistema alla fase simmetrica, dove non vi è magnetizzazione spontanea, o a quella antisimmetrica, dove invece avviene tale fenomeno. Un primo argomento euristico che si può formulare per immaginare la rottura della simmetria \mathbb{Z}_2 è che allineando gli spin a temperatura fissata con un campo magnetico esterno h , la magnetizzazione residua sarà diversa se $h \rightarrow 0^+$ oppure $h \rightarrow 0^-$. In seguito formuleremo nel dettaglio questo punto, studiando la stabilità delle configurazioni di equilibrio della magnetizzazione. In tal occasione ci saranno utili queste relazioni, comuni a tutti i sistemi magnetici immersi in un campo magnetico esterno uniforme nel tempo e nello spazio:

$$m_\nu = -\frac{\partial f(T, h)}{\partial h_\nu} \quad \chi_{\mu\nu} = \frac{\partial m_\mu}{\partial h_\nu} \quad (1.1)$$

1.3 Analiticità della Funzione di Partizione nel Limite Termodinamico

Poiché le transizioni di fase sono associate ai punti di non analiticità dell'energia libera, è interessante discutere l'esistenza di questi punti dato che:

$$F(T, h, V) = -\frac{1}{\beta} \ln(Z(T, h, V)) \quad Z(T, h, V) = \int ds e^{-\beta H(s)} \quad (1.2)$$

Cioè $F(T, h, V)$ è il logaritmo di una funzione che non sembra mostrare singolarità per $\beta \in \mathbb{R}^+$. Il problema si pone quando si passa al limite termodinamico.

Dobbiamo dunque controllare il comportamento delle singolarità complesse della funzione di partizione quando $N \rightarrow \infty$: se esse convergono sull'asse reale allora $Z(T, h, V)$ presenta delle singolarità che danno luogo alle transizioni di fase.

Tale discorso è formalizzato dai seguenti teoremi dovuti a Yang e Lee:

Teorema

Sia z la fugacità, allora esiste finito $\forall z > 0$ il limite:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln(Z(z, V))$$

Inoltre, esso è una funzione continua e non decrescente di z , e non dipende dalla forma di V fintanto che la superficie è $O(V^{2/3})$.

Teorema *Considerando $R \subset \mathbb{C}$, tale che sia incluso un segmento di asse reale positivo, se $\forall z \in R$ la funzione di gran partizione non mostra singolarità allora la quantità $V^{-1} \ln(Z)$ converge uniformemente al suo limite per $V \rightarrow \infty$. Inoltre tale limite è analitico $\forall z \in \mathbb{R}$.*

Dal secondo teorema in particolare, capiamo che se esiste una regione R che contiene una singolarità, non ci è garantita l'analiticità della funzione di gran partizione nel limite termodinamico. Inoltre come corollario, è chiaro che non sono possibili transizioni in sistemi di taglia finita.

Capitolo 2

Modello di Ising

2.1 Definizione

Il modello di Ising è un insieme di variabili discrete definite su reticolo in D dimensioni, che possono assumere soltanto due valori, per convenzione $\sigma_i = \pm 1$, e impropriamente vengono chiamate *spin*.

L'energia del sistema è data da un termine dovuto all'interazione con un campo magnetico esterno e un termine di mutua interazione a primi vicini, il quale nel caso si voglia modellizzare un comportamento ferromagnetico è tale da favorire l'allineamento degli spin.

$$H(\{\sigma\}) = -h \sum_i \sigma_i - \frac{J}{2D} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (2.1)$$

La costante J è detta di accoppiamento, più in generale essa è un tensore che dipende dallo spazio, ma qui ci limiteremo al caso isotropo e omogeneo.

Il modello descritto rappresenta un'estrema semplificazione classica del modello quantistico di Heisenberg per il ferromagnetismo. Nonostante la sua semplicità, il modello di Ising è risolvibile analiticamente soltanto in una dimensione, dove però non presenta una transizione di fase; in due dimensioni è possibile fornire una soluzione esatta solo in assenza di campo magnetico esterno.

Un approccio alternativo è quello di cercare una soluzione di campo medio; uno strumento prezioso con il quale è possibile fornire risultati approssimati in dimensione arbitraria.

2.2 Approssimazione di campo medio

E' possibile ottenere la distribuzione di probabilità canonica, come funzione che minimizza il funzionale energia libera, definito dall'eq.(2.2).

$$F[P] = E[P] - TS[P] \Rightarrow P_{can} = \operatorname{argmin}\{F[P]\} \quad F := F[P_{can}] \quad (2.2)$$

Se non ci concentriamo sul vero minimo, ma cerchiamo una distribuzione che minimizza $F[P]$ vincolata alla richiesta che essa si fattorizzi su tutti gli spin, allora il problema viene semplificato notevolmente. Sicuramente $F[\prod_i P_i] \geq F \quad \forall P_i$, si dovrà infatti discutere in seguito quanto siano accettabili i risultati di questa brutta approssimazione.

La soluzione che cerchiamo sarà allora del tipo $P(\{\sigma\}) = \prod_{i=1}^N P(\sigma_i)$.
Imponendo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 1 = P_i(\sigma = 1) + P_i(\sigma = -1) \\ m_i = P_i(\sigma = 1) - P_i(\sigma = -1) \end{cases}$$

si ottiene un'espressione per la probabilità di singolo spin:

$$\Rightarrow P(\sigma_i) = \frac{1 + m_i}{2} \delta_{\sigma_i, 1} + \frac{1 - m_i}{2} \delta_{\sigma_i, -1} \quad (2.3)$$

Sapendo che le configurazioni di equilibrio sono determinate dai minimi dell'energia libera, valutiamo i valori di aspettazione dell'energia e dell'entropia con questa probabilità fattorizzata. In questo modo ci sarà possibile determinare $F[\prod_i P(\sigma_i)]$ e conseguentemente i suoi punti stazionari.

Energia: Risulta utile riscrivere la somma sui primi vicini dell'espressione dell'hamiltoniana dell'eq.(2.1), come somma su tutti gli spin, dove però la costante di accoppiamento è un tensore, con elementi non nulli solo per indici tale che $|i - j| = 1$.

$$E = \left\langle - \sum_i \sigma_i h - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{J_{ij}}{2D} \sigma_i \sigma_j \right\rangle = -Nmh - \frac{1}{2} m^2 \sum_{i,j} J_{ij}$$

In D dimensioni, si hanno $2D$ primi vicini per ogni nodo, per cui $\sum_{i,j} J_{ij} = 2DNJ$.

$$E(m) = -N \left(mh + m^2 \frac{J}{2} \right) \quad (2.4)$$

Entropia: Poiché abbiamo ricavato una distribuzione discreta, per valutare l'entropia è possibile usare la definizione di Shannon:

$$S[P] = - \langle \log P \rangle_P = \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma_i = \pm 1} P_i(\sigma_i) \log P_i(\sigma_i) \quad (2.5)$$

Sostituendo l'espressione (2.3), si ottiene:

$$s(m) := \frac{S(m)}{N} = - \frac{1+m}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) - \frac{1-m}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) \quad (2.6)$$

E' interessante notare che l'entropia si annulla soltanto quando $m = \pm 1$, è maggiore di zero quando $m \in (-1, 1)$ e non è ben definita altrimenti. Inoltre, essa è simmetrica in m .

Ci sarà utile in seguito la sua derivata:

$$s'(m) = - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+m}{1-m} \right) = -m$$

Energia Libera: Il funzionale energia libera, calcolato su questa distribuzione, sostituendo le espressioni trovate per l'energia e l'entropia, risulta essere:

$$F(m) = -N \left[mh + m^2 \frac{J}{2} + \frac{1}{\beta} s(m) \right] \quad (2.7)$$

La configurazione d'equilibrio, in funzione di h e β , saranno date dai minimi di questa espressione.

Per determinarli imponiamo:

$$f'(m) = -h - Jm + \frac{1}{\beta} \operatorname{arctanh}(m) = 0$$

Dalla quale si ottiene:

$$\boxed{m = \tanh \beta(Jm + h)} \quad (2.8)$$

Successivamente studieremo la derivata seconda per classificare la stabilità dei punti di equilibrio.

L'approssimazione fatta nel richiedere la fattorizzazione della probabilità ci ha portato ad un risultato detto di *campo medio*, perché corrisponde a quanto si sarebbe ottenuto se al posto del campo efficace che agisce sul singolo spin, avessimo sostituito il suo valor medio $\langle h_i^{eff} \rangle = h + \frac{mJ}{2}$.

Tale campo efficace è definito dalla seguente riscrittura:

$$H(\{\sigma\}) = - \sum_i \sigma_i \left(h + \frac{1}{2} \sum_j \frac{J_{ij}}{2D} \sigma_j \right) = - \sum_i \sigma_i h_i^{eff}$$

2.3 Temperatura Critica e Transizione di Fase

Si vuole esplorare il comportamento della magnetizzazione in approssimazione di campo medio al variare della temperatura, in assenza di campo magnetico. A tal fine è utile una rappresentazione grafica dell'equazione trascendente per la magnetizzazione, che si riporta in fig.(2.1) in cui è rappresentato:

$$\begin{cases} y = m \\ y = \tanh \beta J m \end{cases}$$

E' possibile notare che al variare della temperatura, le soluzioni per la magnetizzazione sono una o tre. Per mostrare analiticamente l'esistenza di una temperatura critica T_C che separi nettamente questi due comportamenti, è conveniente calcolare la suscettibilità per poi trovare un'espressione del campo magnetico h in funzione della magnetizzazione.

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h} = \frac{(1 - m^2)\beta}{1 - \beta J + m^2 \beta J}$$

Dalla quale potremmo trovare $h(m)$ e vedere le possibili configurazioni di m tale per cui $h = 0$ e discutere le varie condizioni affinché si abbiano una o tre soluzioni. In realtà dalla fig.(2.2) si vede subito che tale condizione è equivalente al richiedere che $h(m)$ ammetta punti estremali.

La derivata prima del campo magnetico è data dall'inverso della suscettibilità, per cui si ha:

$$\frac{dh}{dm} = 0 \iff m^2 = \frac{\beta J - 1}{\beta J}$$

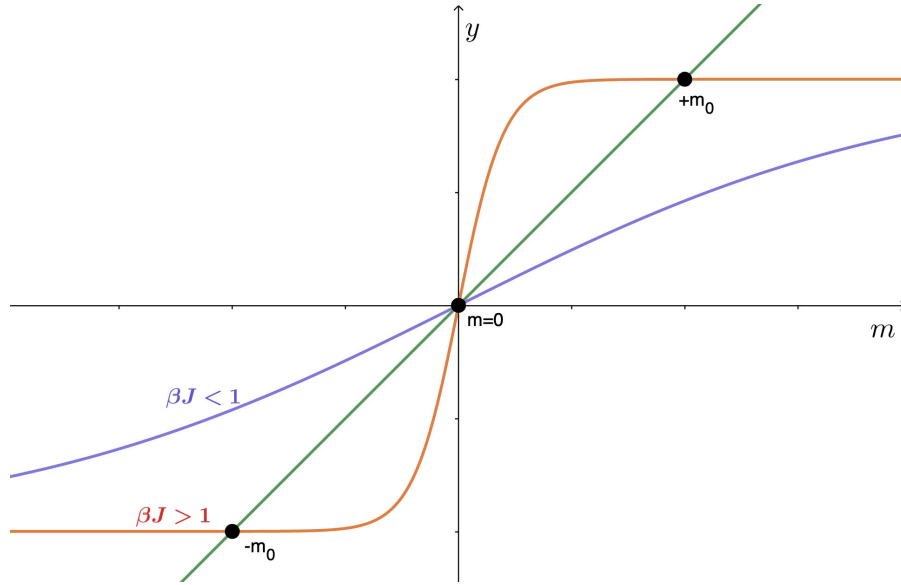


Figura 2.1. Equazione trascendente per la magnetizzazione, ottenuta dall'approssimazione di campo medio, nel caso in cui $h = 0$. Le intersezioni rappresentano le configurazioni d'equilibrio della magnetizzazione.

La condizione trovata è rispettata soltanto se $\beta J > 1$. La soluzione $m = 0$ è un minimo per $\beta J < 1$ e un massimo per il caso complementare:

$$\left. \frac{d^2 f}{dm^2} \right|_{m=0} = -J + \frac{1}{\beta} > 0 \iff \beta J < 1$$

Ricapitolando, i **punti di equilibrio stabile** per $h = 0$ sono:

$$\begin{cases} m = 0 & \text{se } \beta J < 1 \\ m = \pm m_0 & \text{se } \beta J > 1 \end{cases}$$

Cioè esiste una temperatura critica $T_C = J$, al di sotto del quale $m \neq 0$, invece per temperature maggiori la magnetizzazione è nulla.

Dunque m è il parametro d'ordine della transizione del secondo ordine che subisce questo sistema di spin.

Generalmente il calcolo di m_0 è ottenuto numericamente, è possibile però vederne il comportamento approssimato per due casi limite in assenza di campo magnetico: $T \ll 1$ e $\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \ll 1$.

2.3.1 Comportamento della Magnetizzazione a Basse Temperature

In presenza di campo magnetico esterno risulta cruciale la discussione del segno dell'argomento della tangente iperbolica nell'espressione della magnetizzazione. Se invece $h = 0$, il segno è completamente identificato dalla magnetizzazione stessa. In tal caso risulta immediato il seguente sviluppo:

$$m = \tanh \beta(Jm) = \pm \frac{1 - e^{-2\beta Jm}}{1 + e^{-2\beta Jm}} = \pm \left(1 - 2e^{-2\beta J|m|}\right) + O(e^{-4\beta J|m|})$$

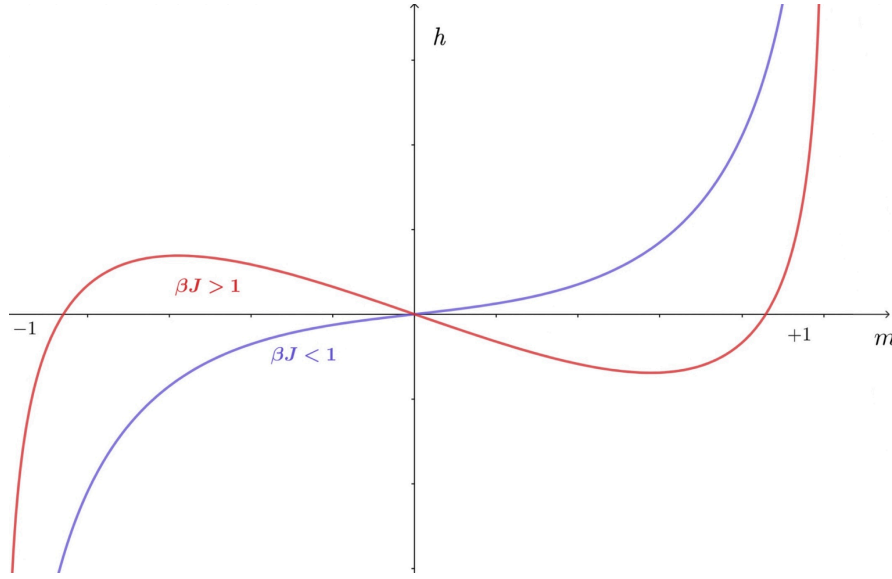


Figura 2.2. Andamento del campo magnetico h scritto in funzione della magnetizzazione. Si noti che per $h = 0$, si hanno uno o tre soluzioni a seconda che la temperatura sia maggiore o inferiore di quella critica.

Riscrivendo il tutto in termini della temperatura e trascurando i termini sotto-dominanti:

$$m \simeq \pm \left(1 - 2e^{-2J|m|\frac{T_c}{T}}\right) \simeq \pm \left(1 - 2e^{-2T_c/T}\right) \quad (2.9)$$

2.3.2 Comportamento della Magnetizzazione attorno a T_C

Il limite attorno alla temperatura critica va approcciato dal basso ($T \rightarrow T_c^-$), altrimenti percorrendolo dall'alto la magnetizzazione è nulla. In questo caso $\beta J = O(1)$, ma la magnetizzazione sta tendendo a zero. Anche qui risulta più semplice valutare lo sviluppo in assenza di campo magnetico.

$$m = \tanh \beta J m = \pm \beta J m \mp \frac{(\beta J m)^3}{3} + O(m^5)$$

Visto che ci troviamo sotto la temperatura critica, la magnetizzazione è non nulla, di conseguenza risulta possibile dividere per m . In questo modo:

$$m^2 \simeq \frac{3}{\beta J} \left(1 - \frac{1}{\beta J}\right)$$

L'espressione finale per la magnetizzazione è:

$$m \simeq \pm \sqrt{3} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \quad (2.10)$$

L'esponente $\beta = \frac{1}{2}$ è l'esponente critico della magnetizzazione e ne caratterizza il comportamento della prossimità della transizione di fase. Attorno a tale regione, è possibile il seguente sviluppo:

$$f(m) = -T \log 2 - h m + \frac{1}{2} (T - T_c) m^2 + \frac{1}{12} T m^4 + O(m^4) \quad (2.11)$$

Il termine lineare, termine dominante dell'espansione, è presente soltanto se vi è campo magnetico. In assenza di quest'ultimo, l'energia libera è una funzione simmetrica. Se invece $h \neq 0$ allora $f(m)$ non ha parità definita, in quanto viene favorita, tra le due, la configurazione concorde con tale perturbazione esterna. Ponendo $h = 0$ l'energia libera mostra il comportamento in fig.(2.3).

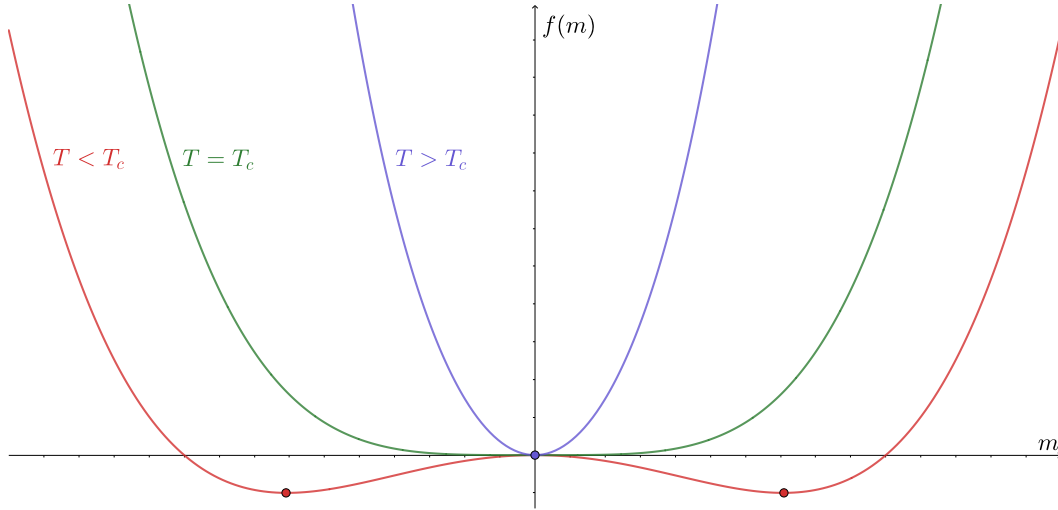


Figura 2.3. Attorno la temperatura critica la stabilità delle configurazioni della magnetizzazione dipende dalla temperatura come mostrato nei tre casi qui riportati. Tali configurazioni stabili sono i minimi di $f(m)$ evidenziati in figura.

Se la temperatura è quella critica, la configurazione a magnetizzazione nulla in realtà è data da due soluzioni coincidenti, dando luogo ad uno stato metastabile. Infatti, abbassando la temperatura tale degenerazione viene risolta: si ottengono le due configurazioni stabili $\pm m_0$.

L'hamiltoniana del sistema è invariante sotto l'inversione $m \rightarrow -m$, per cui l'evoluzione verso una particolare delle due configurazioni stabili $\pm m_0$ comporta una **rottura spontanea di simmetria**.

2.4 Modello di Ising in Infinite Dimensioni

Si vuole mostrare che la soluzione di campo medio per la magnetizzazione ottenuta in D dimensioni, nel passaggio a $D \rightarrow \infty$, risulta essere la soluzione analitica. Infatti, in infinite dimensioni ogni spin ha infiniti primi vicini; presi N spin totali, considerando come costante d'accoppiamento $J/2N$ è possibile dare a questo modello un'interpretazione alternativa di modello di Ising a interazioni deboli con range infinito in dimensione arbitraria.

Considerando un campo magnetico esterno uniforme, si ha:

$$H(\{\sigma\}) = -h \sum_i \sigma_i - \frac{J}{2N} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j \quad (2.12)$$

Dato che la seconda sommatoria è estesa su tutto il sistema vale la seguente relazione:

$$\sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j = \sum_i \sigma_i \cdot \sum_j \sigma_j = \left(\sum_i \sigma_i \right)^2 \quad (2.13)$$

Questa relazione semplifica notevolmente il calcolo della funzione di partizione.

$$Z(T, h, N) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H(\{\sigma\})} = \sum_{i_1=\pm 1} \cdots \sum_{i_N=\pm 1} \exp \left[\frac{\beta J}{2N} \left(\sum_i \sigma_i \right)^2 + \beta h \left(\sum_i \sigma_i \right) \right]$$

A questo punto è utile usare la **trasformazione di Hubbard–Stratonovich**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \mu x} = e^{\frac{\sigma^2 \mu^2}{2}} \quad (2.14)$$

Prendendo $\sigma^2 = \frac{\beta J}{N}$ e $\mu^2 = (\sum_i \sigma_i)^2$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{1}{2} \frac{\beta J}{N} \left(\sum_i \sigma_i \right)^2 \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\beta J}{N}}} \exp \left[-\frac{N}{2\beta J} x^2 + \left(\sum_i \sigma_i \right) x \right] \\ \Rightarrow Z(T, h, N) &= \sum_{i_1=\pm 1} \cdots \sum_{i_N=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\beta J}{N}}} \exp \left[-\frac{N}{2\beta J} x^2 + \left(\sum_i \sigma_i \right) x + \beta h \left(\sum_i \sigma_i \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\beta J}{N}}} e^{-\frac{N}{2\beta J} x^2} \prod_{i=1}^N \sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{\sigma_i(x+\beta h)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\beta J}{N}}} e^{-\frac{N}{2\beta J} x^2 + N \log[2 \cosh(x+\beta h)]} \end{aligned}$$

Effettuiamo il cambio di variabile $x = \beta J m$, dove per ora m è soltanto un parametro, successivamente vedremo che è proprio la magnetizzazione.

$$Z(T, h, N) = \sqrt{\frac{\beta J N}{2\pi}} \int dm e^{-N f(m)} \quad f(m) = \frac{\beta J}{2} m^2 - \log [2 \cosh \beta(Jm + h)]$$

Applicando il metodo di Laplace, si ottiene la magnetizzazione che domina l'integrale:

$$m^* = \tanh \beta(Jm^* + h) \quad (2.15)$$

Il risultato ottenuto coincide con l'eq.(2.8) ottenuta in approssimazione di campo medio.

Manca soltanto da mostrare che la variabile m introdotta è proprio la magnetizzazione: la funzione di partizione ottenuta è:

$$Z(T, h, N) \simeq \sqrt{\frac{\beta J N}{2\pi}} e^{-N f(m^*)} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow F(T, h, N) = -T \log Z(T, h, N) \simeq N T f(m^*)$$

Da cui abbiamo ottenuto che la funzione $f(m^*)$, considerata finora un funzione generica, è in realtà la densità di energia libera. A questo punto, sostituendo nell'eq.(1.1) si ottiene subito che m^* è davvero la magnetizzazione.

Capitolo 3

Funzione di Correlazione Connessa tra gli Spin del Reticolo

3.1 Relazione di Fluttuazione e Dissipazione

Si vuole enfatizzare la relazione che intercorre tra le interazioni locali e gli effetti globali che si hanno quando ci si avvicina alla temperatura critica. Definiamo allora funzione di correlazione connessa per gli spin i e j la funzione:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^{h=0} := (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle)_{h=0} \quad (3.1)$$

dove i valori di aspettazione si riferiscono alla probabilità canonica. Per il momento vogliamo cercare la relazione per la funzione di risposta esattamente; nella prossima sezione ci sarà possibile effettuare delle approssimazioni usando i risultati della teoria di campo medio sviluppata nel capitolo precedente.

Non sarebbe sensato valutare direttamente la funzione di correlazione connessa in teoria di campo medio, visto che essa è stata costruita a partire dal brutale assunto che la probabilità si fattorizzi. La validità di questo *modus operandi* verrà giustificata in corso d'opera.

La funzione di partizione per un reticolo con N nodi è data dalle seguente espressione.

$$Z(T, h, N) = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left\{ -\beta \left(\frac{J}{2D} \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i \right) \right\} \quad (3.2)$$

Ricordando le eqs.(1.1), la suscettività in assenza di campo magnetico esterno è data da:

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= \frac{\partial \langle \sigma_j \rangle}{\partial h_i} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial h_i \partial h_j} \log Z(t, h, N) \right)_{h=0} \\ &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{Z(T, h, N)} \frac{\partial^2 Z(t, h, N)}{\partial h_i \partial h_j} - \frac{1}{Z^2(T, h, N)} \left(\frac{\partial Z(t, h, N)}{\partial h_i} \right) \left(\frac{\partial Z(t, h, N)}{\partial h_j} \right) \right]_{h=0} \\ &= \beta (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle)_{h=0} \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo determinato la relazione di fluttuazione e dissipazione:

$$\chi_{ij} = \beta \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^{h=0} \quad (3.3)$$

3.2 Lunghezza di Correlazione

La relazione appena trovata per la funzione di correlazione connessa è ovviamente valida soltanto se si sta usando la probabilità canonica, l'uguaglianza nell'eq.(3.3) non è rispettata se i valori medi vengono calcolati su un'altra distribuzione. Siamo dunque interessati a capire quanto sia buona la suscettività calcolata in approssimazione di campo medio. Infatti, l'errore compiuto sulla funzione di risposta è di un ordine inferiore rispetto all'errore che si compirebbe sulla funzione di correlazione. Supponiamo che la differenza tra la distribuzione canonica e quella approssimata sia $O(\epsilon)$:

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c - \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^{MF} = O(\epsilon)$$

Nel valutare invece la funzione di partizione, abbiamo minimizzato il funzionale $F[P]$ sotto l'ipotesi che la probabilità si fattorizzi sugli spin. Avendolo valutato da un principio di minimo, è nullo il primo ordine, per cui:

$$F[P_{can}] - F[P_{MF}] = O(\epsilon^2)$$

Allora si evince che, finché è piccolo l'errore che si commette su δP , è una buona approssimazione calcolare la funzione di correlazione a partire da quella di risposta valutata in approssimazione di campo medio, sfruttando relazione di fluttuazione e dissipazione.

In particolare, concentriamoci sul caso in cui non vi è campo magnetico esterno e $T > T_c$.

L'espressione per la magnetizzazione è data dall'eq.(2.8). In realtà in tale espressione avevamo già applicato la somma sui primi vicini, un'espressione più generale è data da:

$$m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_j \frac{J_{ij}}{2D} m_j + h_i \right) \right] \quad (3.4)$$

Se ci avviciniamo alla temperatura critica dall'alto e accendiamo un piccolo campo magnetico di ordine $O(\lambda)$, è ragionevole il seguente sviluppo dell'espressione precedente:

$$h_i \simeq \frac{m_i}{\beta} - \sum_j \frac{J_{ij}}{2D} m_j = \sum_j \left(\frac{\delta_{ij}}{\beta} - \frac{J_{ij}}{2D} \right) m_j$$

Definiamo la matrice $A_{ji} = \left(\frac{\mathbb{I}}{\beta} - \frac{1}{2D} J \right)_{ji}^{-1}$, allora la magnetizzazione è data da:

$$m_j = \sum_i A_{ji} h_i \quad (3.5)$$

Il reticolo è invariante sotto traslazione, per cui identificando lo spin i -esimo con la posizione \vec{i} , si ha che $A_{ji} = A(\vec{j} - \vec{i})$. Cioè l'interazione dipende solo dalla posizione relativa di due spin, non dalla posizione assoluta. In questo modo l'eq.(3.5) risulta essere un prodotto di convoluzione.

Ora, immaginando che il reticolo sia di passo unitario, la prima zona di Brillouin è identificata da $B : \{p_\nu \in [-\pi, \pi], \nu = 1, \dots, D\}$.

Chiamando $\vec{r} = \vec{j} - \vec{i}$, si vede subito che:

$$\sum_{\vec{r}} [\delta(\vec{r}) - \beta J(\vec{r})] e^{i\vec{r} \cdot \vec{p}} = \left(1 - \frac{\beta J}{D} \sum_{\alpha=1}^D \cos p_\alpha \right)$$

Allora definendo il propagatore:

$$G(\vec{p}) = \left(1 - \frac{\beta J}{D} \sum_{\alpha=1}^D \cos p_{\alpha} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

si ottiene un'espressione per $A(\vec{r})$ di questo tipo:

$$A_{ji} = \frac{\beta}{(2\pi)^D} \int_B d^D p \, G(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{j} - \vec{i})} \quad (3.7)$$

Ricordando che $\chi_{ij} = \frac{\partial m_j}{\partial h_i}$, dall'eq.(3.5) si ottiene:

$$\chi_{ij} = A_{ji} = A_{ij} \quad (3.8)$$

Dove nell'ultimo passaggio si è usata l'hermitianicità di A .

Finalmente è possibile determinare la funzione di correlazione connessa, legata alla suscettività dall'eq.(3.3).

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c^{h=0} \simeq \frac{A_{ij}}{\beta} \quad (3.9)$$

Studiamo allora cosa succede a A_{ij} quando ci avviciniamo alla transizione di fase. Quando $p^2 \rightarrow 0$ e la temperatura approssima quella critica ($\beta_c = J^{-1}$) $G(\vec{p})$ diverge, di conseguenza diverge l'integrando dell'eq.(3.7) che definisce A_{ij} . Studiamo tale polo per capire il comportamento della funzione di correlazione attorno a quel punto. Sviluppando il coseno attorno $p_{\nu} = 0 \, \forall \, \nu$:

$$G(p) = \frac{1}{1 - \beta J + \frac{\beta J}{2} p^2 + O(p^4)}$$

Per temperature maggiori di quella critica il contributo dominante alla funzione di correlazione è dato dalla dal termine del propagatore con momento nullo, il quale descrive il comportamento a grandi distanze. Per cui concentrandoci sulla regione dove in modulo è piccolo il momento, si ottiene:

$$G(p) \propto \frac{1}{p^2 + a^2} \quad a^2 = 2 \frac{1 - \beta J}{\beta J} \quad (3.10)$$

Se valutiamo la correlazione tra due spin generici, di cui per comodità ne prendiamo uno nell'origine, si ottiene la seguente espressione:

$$\langle \sigma_k \sigma_0 \rangle_c^{h=0} \propto \int_B d^D p \, \frac{1}{p^2 + a^2} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{k}}$$

In una dimensione è possibile valutare l'integrale con il Teorema dei Residui, in più dimensioni è necessario ricorrere a questa identità:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 + a^2} &= \int_0^{\infty} dt \, e^{-(p^2 + a^2)t} \\ \Rightarrow \langle \sigma_k \sigma_0 \rangle_c^{h=0} &\propto \int_0^{\infty} dt \int_B d^D p \, e^{-(p^2 + a^2)t - i\vec{p} \cdot \vec{k}} \end{aligned}$$

Effettuiamo il cambio di variabile $\vec{p}' = \vec{p} - i\vec{k}/(2t)$.

$$\propto \int_0^{\infty} dt \, e^{-a^2 t - \frac{k^2}{4t}} \int_B d^D p \, e^{-p^2 t} \propto \int_0^{\infty} dt \, t^{-D/2} e^{-a^2 t - \frac{k^2}{4t}}$$

Chiamando $s = ta^2$ quel che si ottiene è proporzionale alla funzione di Bessel modificata del secondo tipo $K_{D/2-1}(ak)$.

L'espressione integrale per tali funzioni è:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} z \right)^\nu \int_0^\infty ds s^{-(\nu+1)} e^{-s - \frac{z^2}{4s}}$$

Se allora ci focalizziamo sugli effetti a lungo raggio, cioè, fissata la temperatura, sviluppiamo per $ak \gg 1$. Al primo ordine si ottiene il seguente comportamento asintotico

$$K_{D/2-1}(ak) \sim \frac{e^{-ak}}{\sqrt{ak}}$$

Mettendo insieme i risultati del cambiamento di variabili e della scrittura in termini della funzione di Bessel, si ottiene il risultato finale:

$$\boxed{\langle \sigma_k \sigma_0 \rangle_c^{h=0} \sim \frac{e^{-k/\xi}}{k^{(D-1)/2}}} \quad (3.11)$$

Dove abbiamo definito la **lunghezza di correlazione** come l'inverso di a :

$$\xi = \sqrt{\frac{\beta J}{2(1 - \beta J)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)^{-1/2} \quad (3.12)$$

In approssimazione di campo medio si è dunque trovato l'esponente critico $\nu = 1/2$ per la lunghezza di correlazione. Inoltre si osserva che la correlazione tra due spin è esponenzialmente compressa a tutte le temperature maggiori di quella critica. Invece quando $T \rightarrow T_c$, la lunghezza di correlazione diverge e dunque $\langle \sigma_k \sigma_0 \rangle_c^{h=0}$ decade come una potenza della distanza (solo se $D > 1$) e non più esponenzialmente. Si ha dunque che gli effetti della correlazione diventano rilevanti rendendo possibile un comportamento collettivo esteso.

Capitolo 4

Simulazione del Modello con Metodi Monte Carlo

4.1 Effetti di Taglia Finita

Nella sezione 1.3, si era accennata l'impossibilità, per un sistema a volume finito, di mostrare una transizione di fase. Questo era stato ottenuto come corollario dei teoremi di Yang e Lee, in quanto per un sistema finito la funzione di partizione è sicuramente analitica, almeno per un hamiltoniana regolare.

Mettendo un modello di Ising $L \times L$ in un bagno termico alla temperatura critica, esso non subirà una vera e propria transizione di fase, visto che $Z(T, h, N)$ è analitica.

Dal discorso fatto in approssimazione di campo medio, ma il risultato è vero in generale, si è ottenuto che la lunghezza di correlazione diverge quando $T \rightarrow T_c$. In questo caso, anche se ξ diverge, il sistema è finito.

Risulta allora essenziale l'effetto che hanno le condizioni al bordo sul resto del sistema: per volumi comunque grandi, esse si comportano come una perturbazione per un sistema infinito.

Ad esempio, bloccando la configurazione degli spin di bordo, l'effetto è simile a quello di un debole campo magnetico esterno.

Qualsiasi essa sia, la scelta della condizione al bordo guida la transizione verso un particolare stato dei due metastabili che si hanno alla temperatura critica. Nelle simulazioni che seguiranno sono state usate condizioni al contorno periodiche, in modo tale da minimizzare gli effetti di reticolo finito.

La proposizione che il comportamento, quando il sistema è grande, sia simile a quello di un sistema infinito, non è così azzardata come potrebbe sembrare. Questo perché la correlazione tra gli spin, nella fase disordinata decresce esponenzialmente con la distanza, come mostrato in eq.(3.11). Per cui al centro del reticolo la dinamica sarà molto simile a quella che si ha nel limite termodinamico.

E' dunque escluso che si verifichi una vera e propria transizione, nel modo inteso dalla classificazione di Ehrenfest, ma la presenza della singolarità complessa della funzione di partizione, che si avvicina all'asse reale man mano che aumentata la taglia del sistema, provoca comportamenti simili ad una transizione di fase: si osserva una fase ordinata e una disordinata anche nei reticoli finiti simulati.

Sono state allora condotte delle simulazioni con l'algoritmo di Metropolis per reticoli di taglia diversa. I risultati seguono dopo una breve esposizione della strategia intrapresa.

4.2 Algoritmo di Metropolis

Data una configurazione iniziale generica, vogliamo costruire un algoritmo che simuli l'evoluzione di tale sistema una volta che esso viene posto a contatto con una sorgente a temperatura T . A tale scopo, si vuole costruire una catena di Markov i cui stati sono tutte le possibili configurazioni di un reticolo $L \times L$. La probabilità limite degli stati di questa catena sarà data proprio dalla distribuzione canonica:

$$u(c) = \frac{e^{-\beta H(c)}}{\int dc e^{-\beta H(c)}} \quad (4.1)$$

In particolare vogliamo costruire tale catena affinché sia reversibile, così che valga l'equazione di bilancio dettagliato:

$$u_i P_{ik} = u_k P_{ki} \quad (4.2)$$

Dove P_{ik} rappresenta la matrice stocastica delle transizioni tra gli stati della catena. Dobbiamo allora costruire P_{ik} tale che il suo comportamento asintotico sia quello canonico.

Schematizziamo la transizione tra gli stati come un processo di proposta di cambiamento e uno di accettazione/rifiuto di quest'ultimo.

La matrice di proposta S_{ik} sarà simmetrica e ha il significato di probabilità che venga proposto uno stato k se il sistema è nello stato i . La costruiamo in modo che abbia elementi non nulli soltanto per transizioni tra stati le cui configurazioni differiscono soltanto per uno spin; per quest'ultimi stati scegliamo una probabilità uniforme di essere proposti.

Di conseguenza la matrice di transizione avrà questa forma:

$$P_{ik} = S_{ik} A_{ik} \quad (4.3)$$

Prendendo due configurazioni tale che S_{ik} non sia nullo, ovvero i due stati hanno tutti gli spin uguali tranne uno, sfruttano che S_{ik} è simmetrica, è possibile riscrivere l'equazione di bilancio dettagliato:

$$e^{\beta H(i)} A_{ik} = e^{\beta H(k)} A_{ki} \Rightarrow \frac{A_{ik}}{A_{ki}} = e^{-\beta(H(k)-H(i))} \quad (4.4)$$

Allora il cambiamento viene accettato con certezza se l'energia dello stato proposto è minore dello stato in cui ci si trova. Se invece è maggiore, esso viene accettato con probabilità $\exp(-\beta \Delta E)$.

La strategia usata nella scrittura del codice, può essere schematizzata come segue:

1. Si crea una configurazione iniziale aleatoria.
2. Viene proposta l'inversione di uno spin scelto casualmente tra tutti quelli del reticolo.
3. Se $\Delta E < 0$ il cambiamento viene accettato
4. Se $\Delta E > 0$ il cambiamento viene valutato estraendo un numero casuale $x \in [0, 1]$; se $x < \exp(-\beta \Delta E)$ si accetta la nuova configurazione, altrimenti si rifiuta.
5. Si ricomincia dal punto 2 fino a raggiungere una condizione in cui la porzione di cambiamenti accettati è ~ 0.3 .

Ad esempio, prendendo una generica configurazione iniziale, se si applica l'algoritmo descritto, dopo un numero sufficiente di passi Monte Carlo, si ottengono configurazioni asintotiche in cui la presenza di strutture macroscopiche è unicamente legata alla temperatura simulata. Nello specifico, riportiamo in fig.(4.1) le configurazioni a termalizzazione avvenuta, per i casi in cui la temperatura è minore, uguale e maggiore di quella critica. Si noti l'evidenza dell'esistenza di una fase simmetrica ed una asimmetrica nonostante il reticolo sia finito.

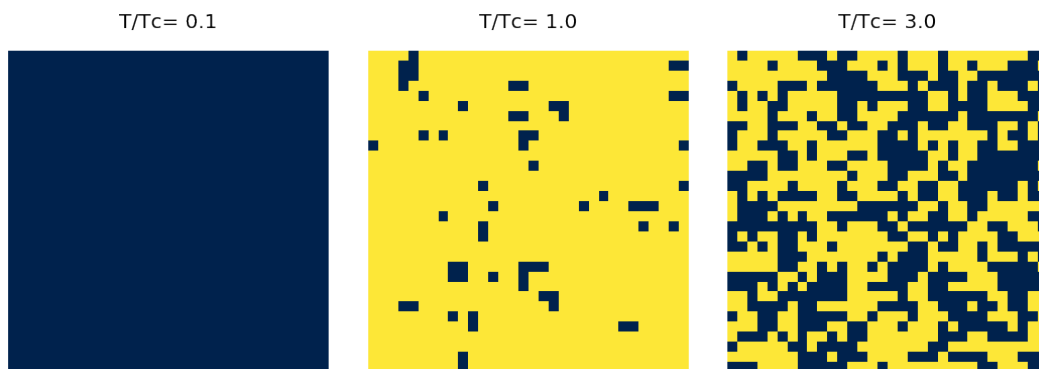


Figura 4.1. Una stessa configurazione iniziale di un reticolo 32×32 è stata fatta evolvere a tre diverse temperature, si riportano le configurazioni ottenute dopo 10^6 passi di Montecarlo.

4.3 Risultati

Il motivo principale per cui si effettua una simulazione di questo tipo, è che la probabilità di transizione tende a quella canonica se quest'ultima viene presa come probabilità asintotica. Per cui questo approccio è ideale per il calcolo delle medie canoniche dei vari osservabili macroscopici a cui siamo interessati. Analiticamente il valore d'aspettazione di un osservabile generico é

$$\langle O \rangle := \sum_{\{\sigma\}} \frac{e^{-\beta H(\{\sigma\})}}{Z} O(\{\sigma\}) \quad (4.5)$$

Il quale, in due dimensioni, è una sommatoria di 2^{L^2} termini.

Si vuole allora usare l'algoritmo discusso in precedenza, per valutare l'eq.(4.5) come una media ristretta alle configurazioni che portano un contributo dominante alla sommatoria; questa operazione è solitamente chiamata *Importance Sampling*.

Cioè, otterremo che effettuando N passi sulla la catena di Markov costruita con il criterio appena descritto, la collezione di stati visitati $\{\sigma\}_{MC}$ è tale che la media canonica è approssimabile in questo modo:

$$\langle O \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{\{\sigma\}_{MC}} O(\{\sigma\}_{MC}) \quad (4.6)$$

L'osservabile a cui siamo più interessati è la magnetizzazione, in quanto come discusso in precedenza, essa è il parametro d'ordine della transizione.

Simulando per varie dimensioni del reticolo, si osserva che lontano dalla regione di transizione il comportamento della magnetizzazione è conforme a quello di un sistema infinito; questo è dovuto al fatto che la correlazione tra due spin è esponenzialmente soppressa con la distanza tra di essi. Per cui lontano da T_C ritroviamo il comportamento di alte e basse temperature studiato, dove rispettivamente $m = 0$ e $|m| \simeq (1 - 2e^{-2T_c/T})$.

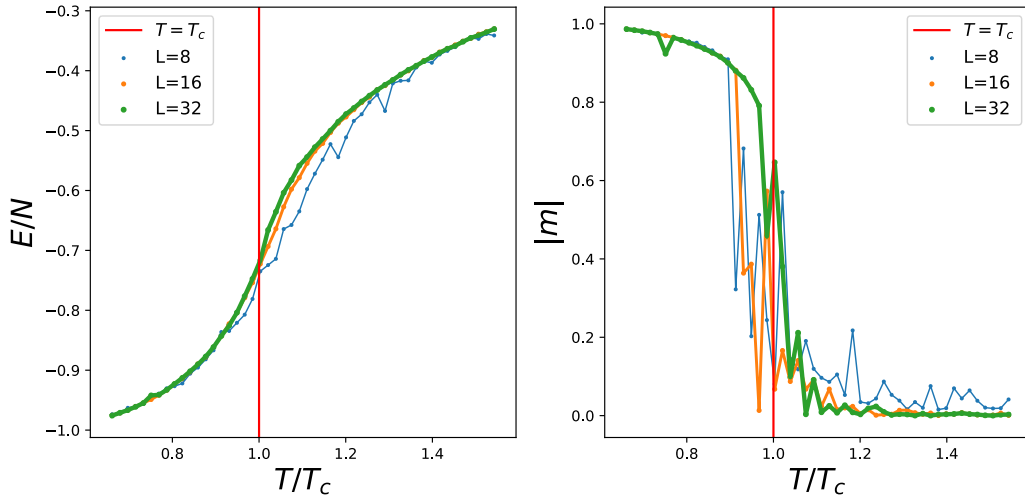


Figura 4.2. Lontano da T_c il comportamento dell'energia e della magnetizzazione è circa indipendente da L ; attorno essa emergono delle differenze notevoli.

Attorno alla temperatura critica, emergono gli effetti di taglia dovuti al fatto che seppur diverge la lunghezza di correlazione, il reticolo simulato è finito. Infatti, dalla fig.(4.2) si osserva che il modulo della magnetizzazione, abbassando la temperatura, inizia a crescere ben prima di arrivare a T_c e questo effetto risulta sempre più evidente in reticoli di dimensione minore. Dunque, tali effetti fanno sì che la magnetizzazione non abbia più il comportamento rigoroso di parametro d'ordine.

Per quanto riguarda l'energia intensiva, si osserva che: lontano dalla transizione l'andamento risulta pressoché indipendente dalla dimensione del sistema, invece avvicinandosi a T_c risulta possibile distinguere le curve dei tre L presi in considerazione: 8, 16 e 32.

Inoltre, è stata valutata la capacità termica come il rapporto incrementale dell'energia rispetto alla temperatura. Il comportamento alla transizione è caratterizzato da un esponente critico α ; la singolarità che ci si aspetta dal limite termodinamico, si manifesta nel reticolo finito con picco deciso attorno alla temperatura critica, come visibile in fig.(4.3).

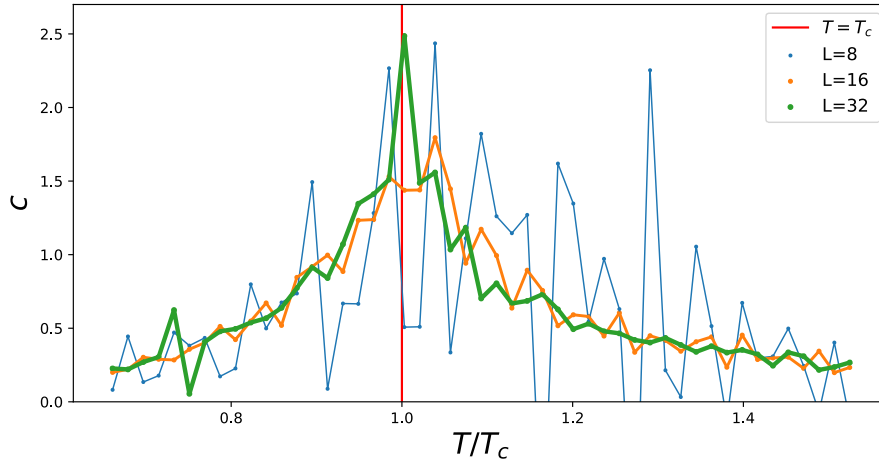


Figura 4.3. Andamento della capacità termica in funzione della temperatura. Nel caso $L = 8$ gli effetti di taglia finita sono dominanti; per $L = 16, 32$ è invece possibile notare come la transizione stia iniziando a crearsi.

In conclusione, lo studio di un sistema grande ma finito è una buona approssimazione di ciò che si osserverebbe per un reticolo infinito: le osservabili coinvolte evidenziano come la transizione stia iniziando a crearsi, svelando un accenno dei comportamenti che si avrebbero nel limite termodinamico. Questo è in accordo con l'esperienza comune, dove le transizioni di fase si osservano per sistemi macroscopici in cui il numero di componenti è enorme ma finito.

Bibliografia

- [1] Parisi, G. and Ramamurti, S. "Statistical Field Theory.", Physics Today 41: 110-110 (1988).
- [2] Huang, K. "Statistical Mechanics.", John Wiley Sons (1987).
- [3] Tuckerman, M. E. "Statistical Mechanics.", Oxford : Oxford University Press (2010).
- [4] Ma, S. K. "Statistical Mechanics.", World Scientific Publ. (2004).
- [5] Pathria, R. K. "Statistical Mechanics.", Pergamon Press (1994).