МГТУ им. Н.Э. Баумана
ТЕХНОПАРК
Mail.Ru Group

# Лекция 5.
# Графы 1.

Алгоритмы и структуры данных

Крымов А.Ю.

# План лекции 5 «Графы 1»

- Терминология.
- Обход в глубину.
- Времена входа-выхода. Лемма о белых путях.
- Поиск циклов.
- Проверка связности.
- Топологическая сортировка.
- Поиск сильносвязных компонент. Алгоритм Косарайю.
- Обход в ширину.
- Поиск кратчайших путей.
- Поиск мостов
- Поиск точек сочленения
- Эйлеровы графы

# Граф

**Граф** – это совокупность непустого множества вершин V и множества ребер E.

$$G = (V, E)$$

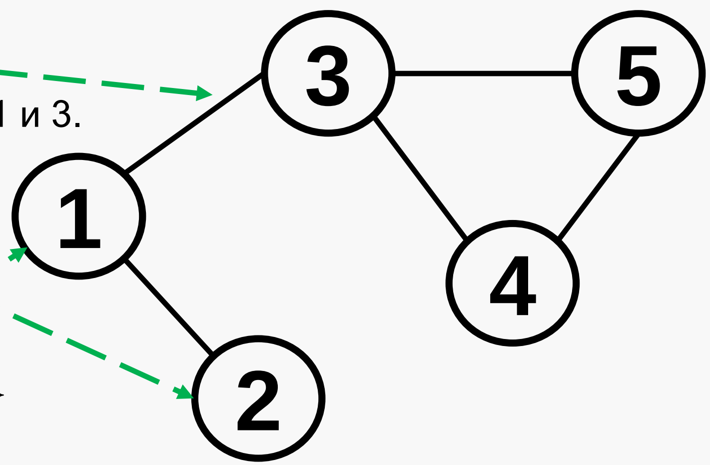
$$n = |V|, m = |E|$$

$$V = \{1, 2, \dots, n\}, E \subset \left\{\{v, u\}, v, u \in V\right\}$$

Ребро
*Инцидентно* вершинам 1 и 3.

Вершина

Смежные вершины

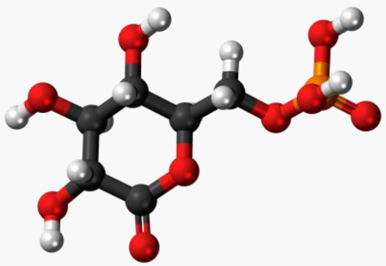


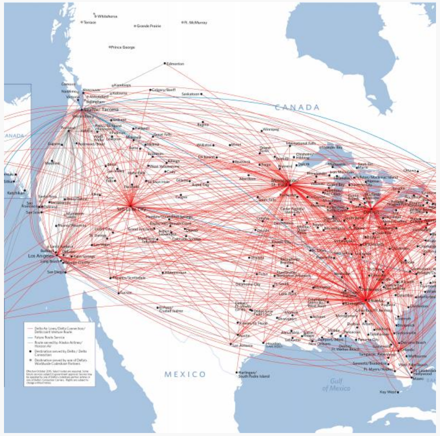

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

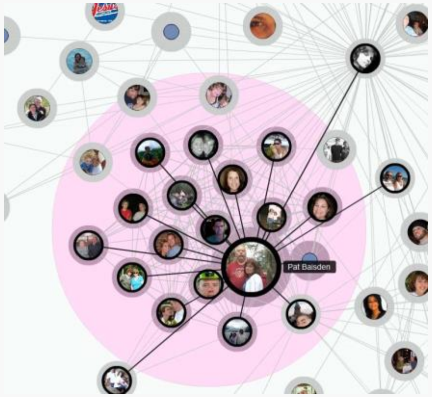
$E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 4)\}$

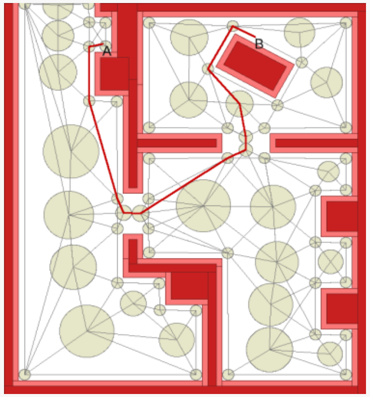
# Графы в реальной жизни

- Страницы в интернете с ссылками
- Дороги
- Самолетные маршруты
- Друзья в соцсетях
- Генеалогическое древо
- Химические элементы
- Зависимости в исходниках
- Сетка перемещений в играх
- Печатные платы



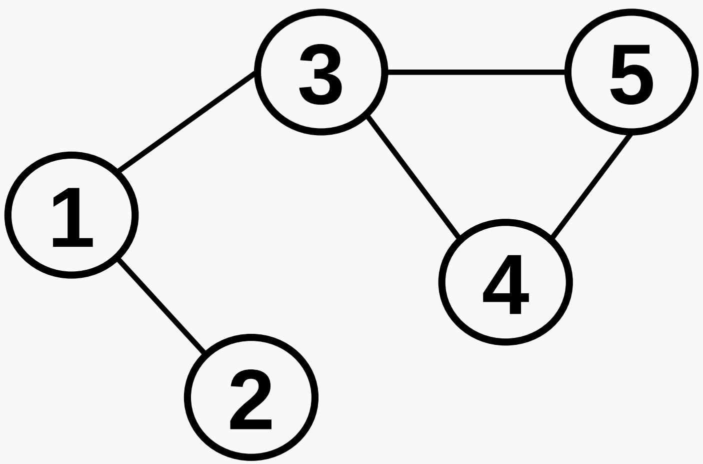


# Виды графов

## Неориентированные графы

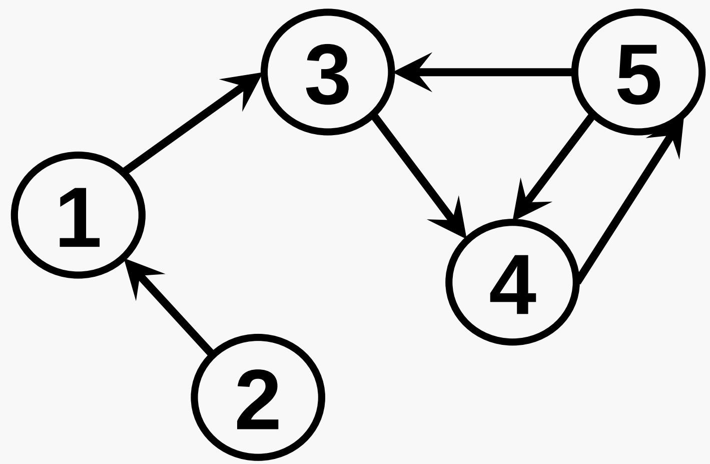



$G = (V, E)$, где $E \subset \{\{v, u\}, v, u \in V\}$

Ребра не имеют направлений
(4,5) и (5, 4) – одно и то же ребро

## Ориентированные графы

(орграфы)




$G = (V, E)$, где $E \subset V \times V$

Ребра (дуги) имеют направления
(4,5) и (5, 4) – <u>разные</u> дуги

# Мультиграф. Псевдограф.

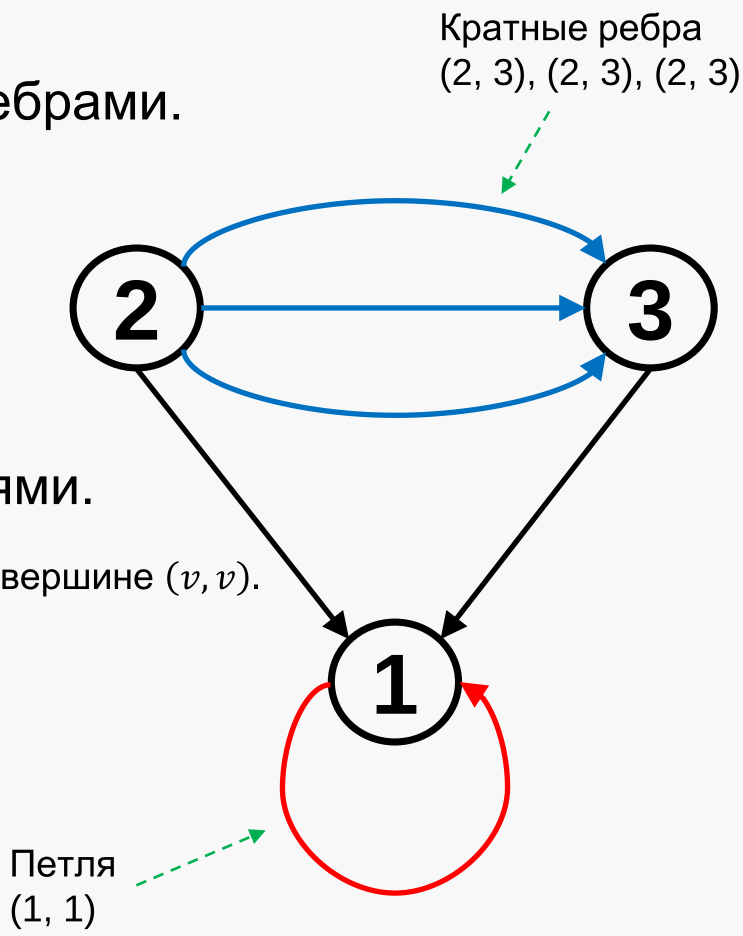
**Мультиграф** – граф с кратными ребрами.

**Кратные рёбра** (параллельные рёбра, мультирёбра) — это два и более **рёбер**, инцидентных одним и тем же двум вершинам.

**Псевдограф** – мультиграф с петлями.

**Петля** – это ребро, инцидентное одной и той же вершине $(v, v)$.

**Простой граф** – граф, в котором нет кратных ребер и петель.



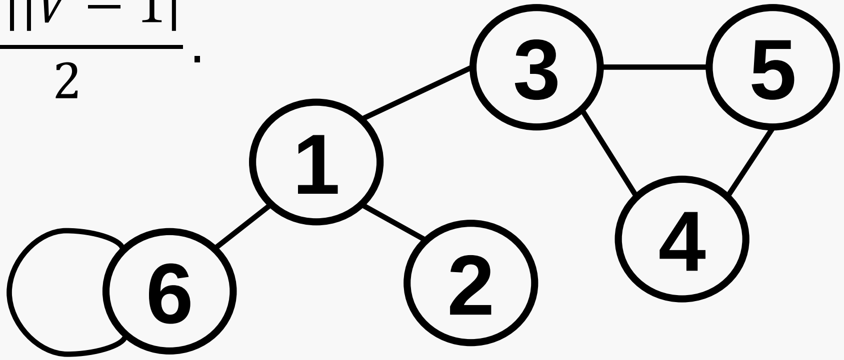
# Степень вершины

**Степень вершины** $\deg v$ – число ребер, инцидентных $v$, причем петля добавляет степень 2.

Лемма (о рукопожатиях). $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$.
Доказательство. Индукция по числу ребер.

Следствие 1. Число вершин нечетной степени – четно.
Следствие 2. Число ребер в полном графе равно

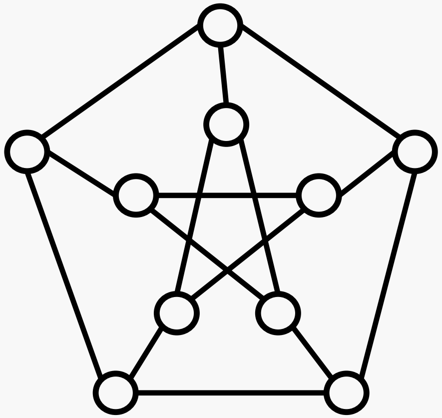
$$\frac{|V||V-1|}{2}.$$

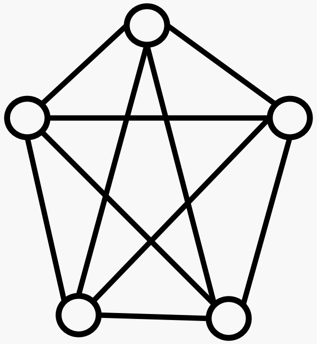


# Регулярный и полный графы

**Регулярный граф** – граф, в котором степени всех его вершин равны.

В таком графе $|E| = \frac{k|V|}{2}$.





**Полный граф** – граф, в котором каждая пара вершин смежна (все вершины соединены со всеми).

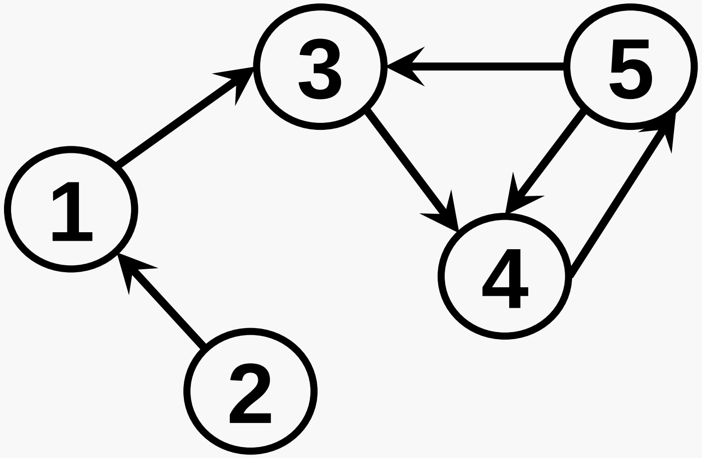
В таком графе $|\mathrm{E}| = \frac{|V||V-1|}{2}$

# Представление графов в памяти

**Матрица смежности** – это матрица $n \times n$ элементов, в которой значение $a_{ij}$ равно количеству рёбер из i-й вершины графа в j-ю вершину.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i



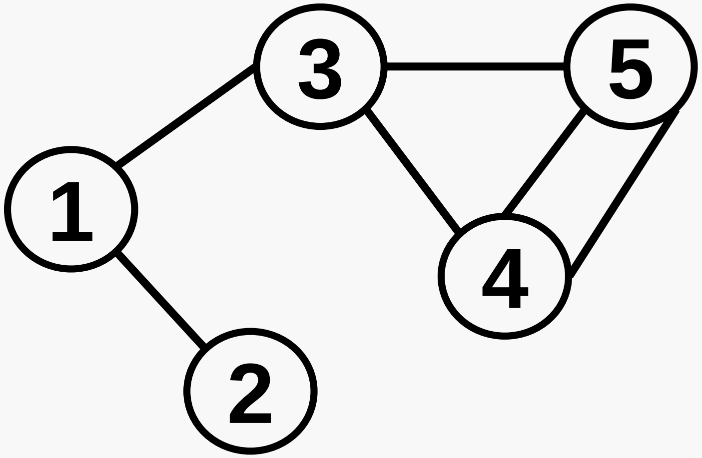

- Требует $O(|V^2|)$ памяти
- Определение наличия ребра в графе за $O(1)$
- Эффективна для хранения насыщенных графов ($|E| = O(|V|^2)$)

# Представление графов в памяти

**Матрица смежности** – это матрица $n \times n$ элементов, в которой значение $a_{ij}$ равно количеству рёбер из i-й вершины графа в j-ю вершину.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

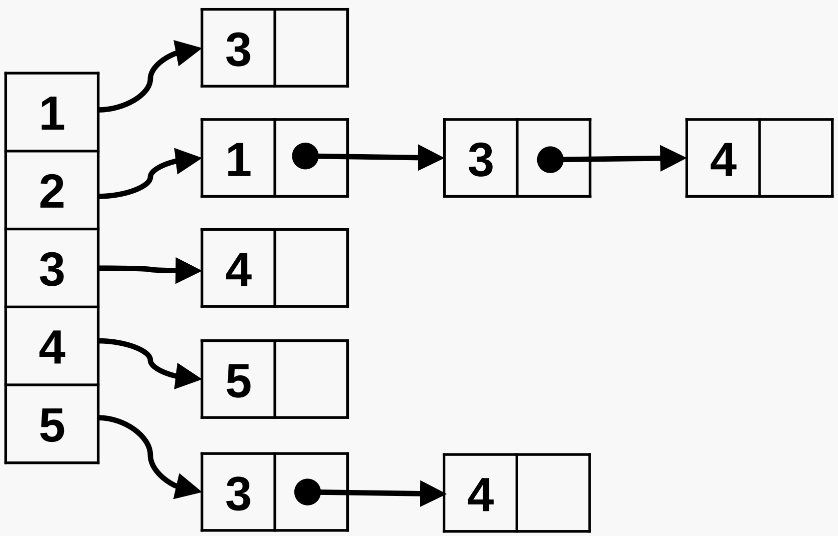
i

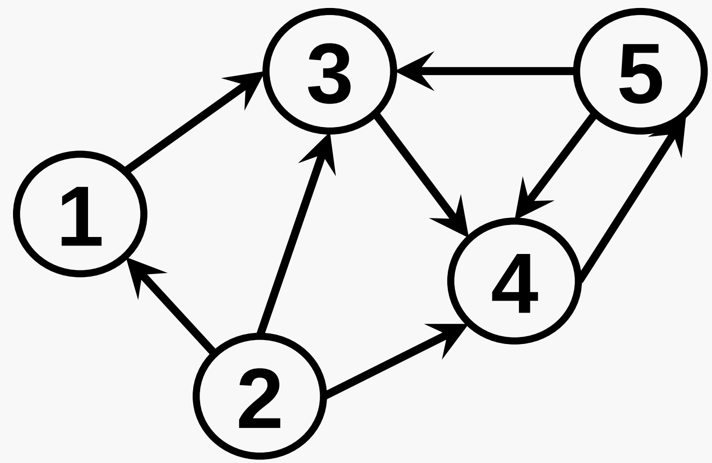



- Требует $O(|V^2|)$ памяти
- Определение наличия ребра в графе за $O(1)$
- Получение списка смежных вершин за $O(|V|)$
- Эффективна для хранения насыщенных графов ($|E| = O(|V|^2)$)

# Представление графов в памяти

**Списки смежных вершин** – для каждой вершины хранится список смежных с ней вершин.




- Требует $O(|V| + |E|)$ памяти
- Определение наличия ребра в графе за $O(|E|)$
- Получение списка смежных вершин за $O(|E|)$
- Эффективна для хранения разреженных графов ($|E| = O(|V|)$)

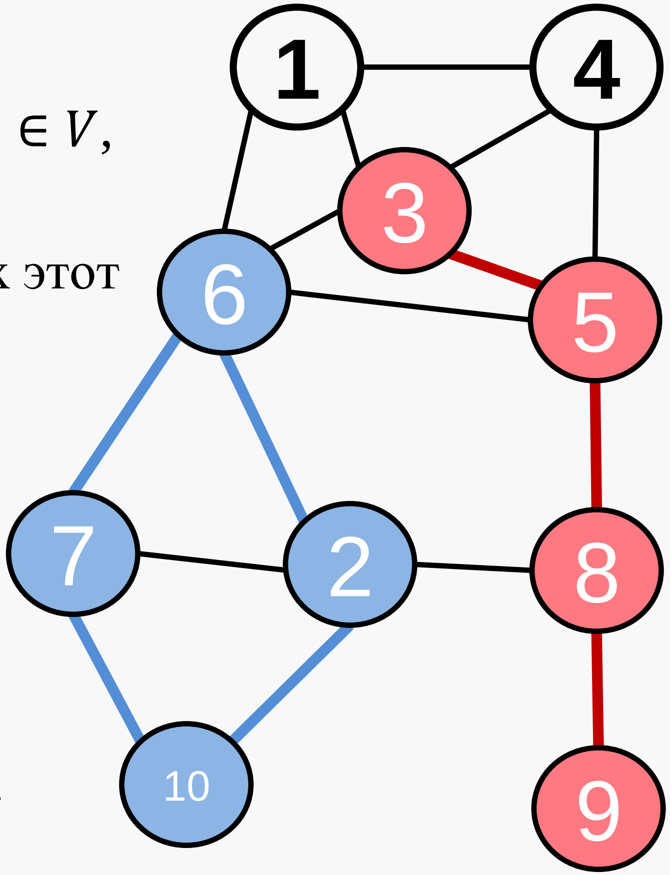
# Пути и циклы

**Путь** – последовательность $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, где $e_i \in E$, $v_i \in V$, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, k – *длина* пути.

**Длина пути** – кол-во рёбер, задающих этот путь

**Циклический путь** (цикл) в ориентированном графе – путь, в котором $\mathrm{v_0 = v_k}$.

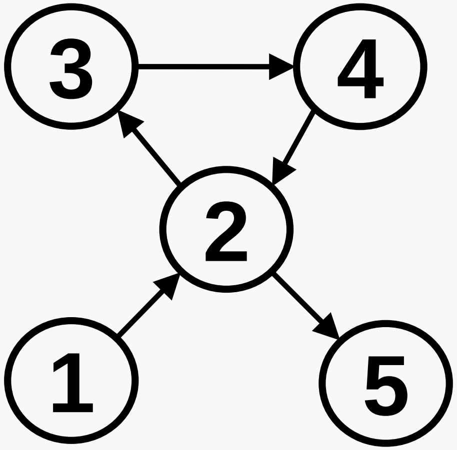
**Циклический путь** (цикл) в неориентированном графе – путь, в котором $\mathrm{v_0 = v_k}$ и $\mathrm{e_i \neq e_{i+1}}$, $\mathrm{e_1 \neq e_k}$.



# Пути и циклы

**Простой (вершинно-простой) путь** – путь, в котором каждая из вершин встречается не более одного раза.

Путь (1, 2, 3, 4, 2, 5) не является вершинно-простым.




**Реберно-простой путь** – путь, в котором каждое ребро встречается не более одного раза.

Путь (1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 5) не является реберно-простым.

# Связность графа

Вершины $u$ и $v$ в неориентированном графе ***связны***, если существует путь $u \rightsquigarrow v$.

<ins>*Теорема.*</ins> Связность – отношение эквивалентности.

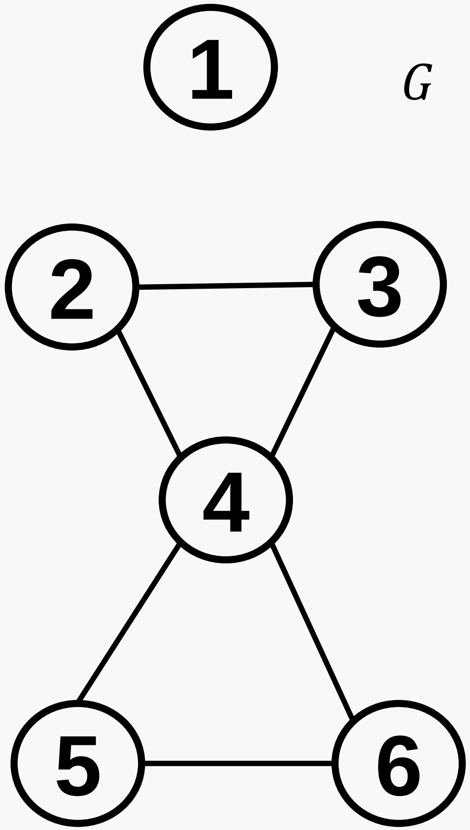
<ins>*Доказательство*</ins>. Надо доказать:

Рефлексивность. $\forall u \in V \; u \rightsquigarrow u$

Симметричность. $u \rightsquigarrow v \Rightarrow v \rightsquigarrow u$

Транзитивность. $v \rightsquigarrow a \wedge a \rightsquigarrow u \Rightarrow v \rightsquigarrow u$

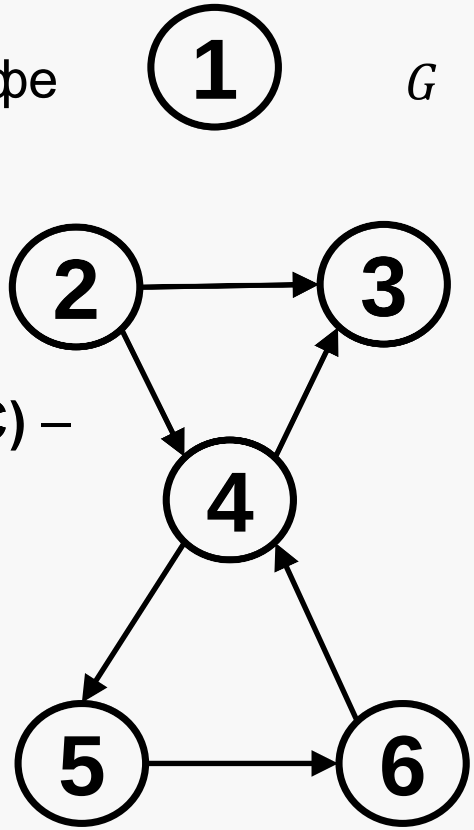
***Компонента связности*** – класс эквивалентности отношения связности.




V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
E = {(2, 4), (2, 3), (4, 3), (4, 5), (5, 6), (6, 4)}

# Сильная связность

- Вершины $u$ и $v$ в ориентированном графе $G$ **сильно связны**, если существуют пути $u \rightsquigarrow v$ и $v \rightsquigarrow u$.
- **Сильная связность** – отношение эквивалентности.
- **Компонента сильной связности (КСС)** – класс эквивалентности отношения сильной связности.



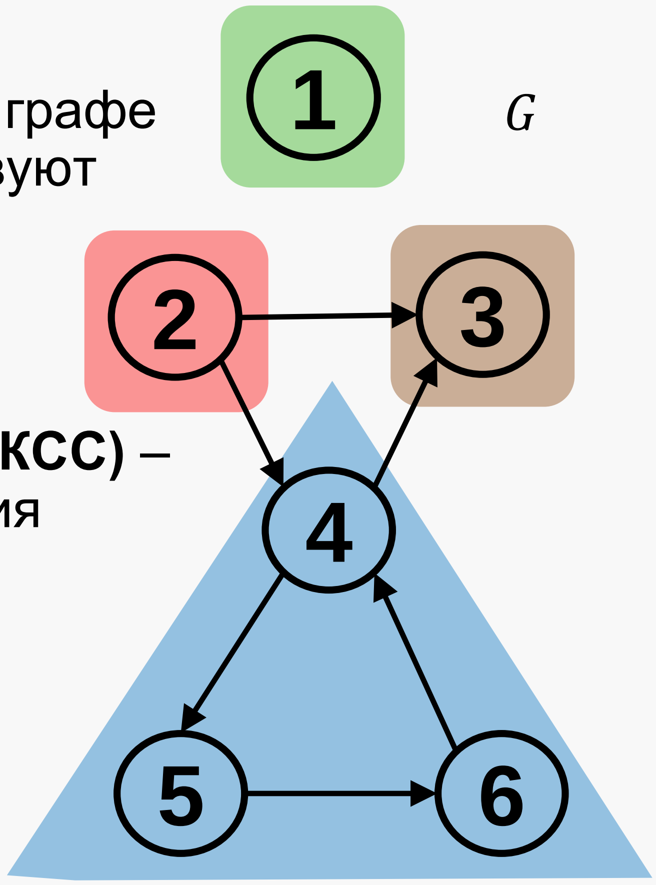

Сколько компонент сильной связности в примере?

# Сильная связность

Вершины $u$ и $v$ в ориентированном графе $G$ **сильно связны**, если существуют пути $u \rightsquigarrow v$ и $v \rightsquigarrow u$.

**Сильная связность** – отношение эквивалентности.

**Компонента сильной связности (КСС)** – класс эквивалентности отношения сильной связности.



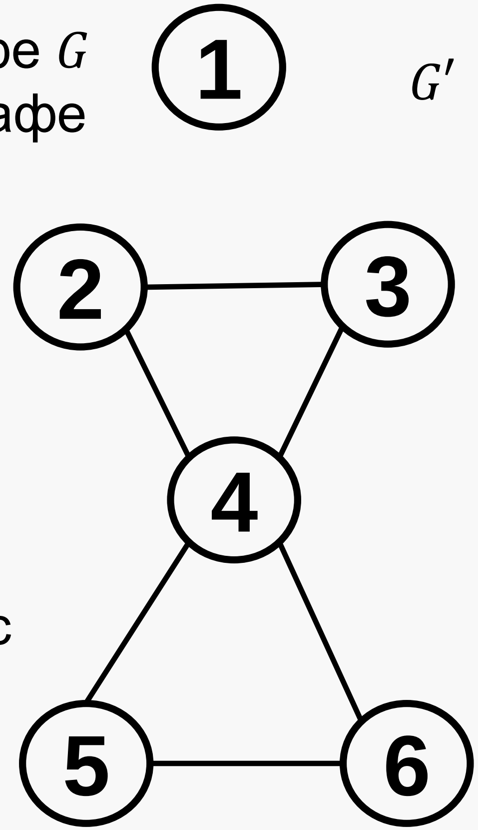

Сколько компонент сильной связности в примере?

# Слабая связность

Вершины $u$ и $v$ в ориентированном графе $G$ **слабо связны**, если они связны в графе $G'$, полученном из $G$ удалением ориентации ребер и повторяющихся ребер.

**Слабая связность** – отношение эквивалентности.

**Компонента слабой связности** – класс эквивалентности отношения слабой связности.



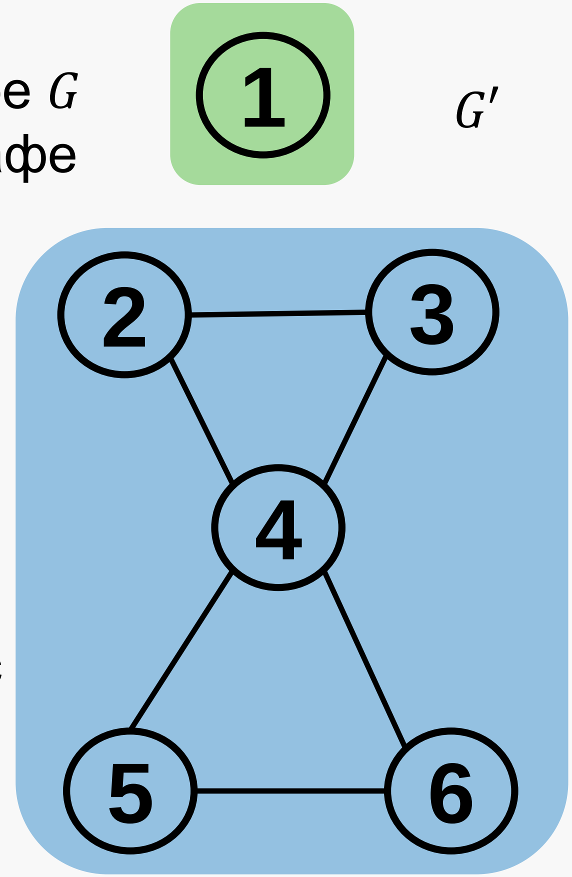

Сколько компонент слабой связности в примере?

# Слабая связность

Вершины $u$ и $v$ в ориентированном графе $G$ **слабо связны**, если они связны в графе $G'$, полученном из $G$ удалением ориентации ребер и повторяющихся ребер.

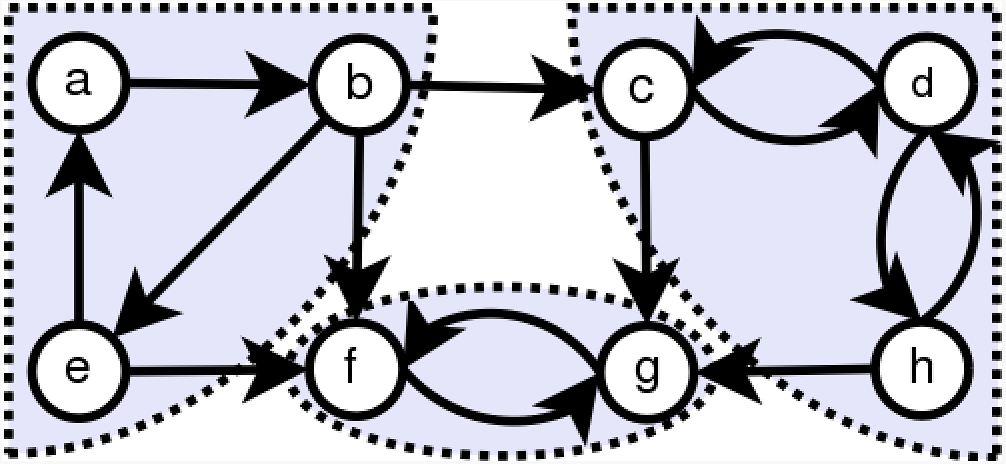
**Слабая связность** – отношение эквивалентности.

**Компонента слабой связности** – класс эквивалентности отношения слабой связности.



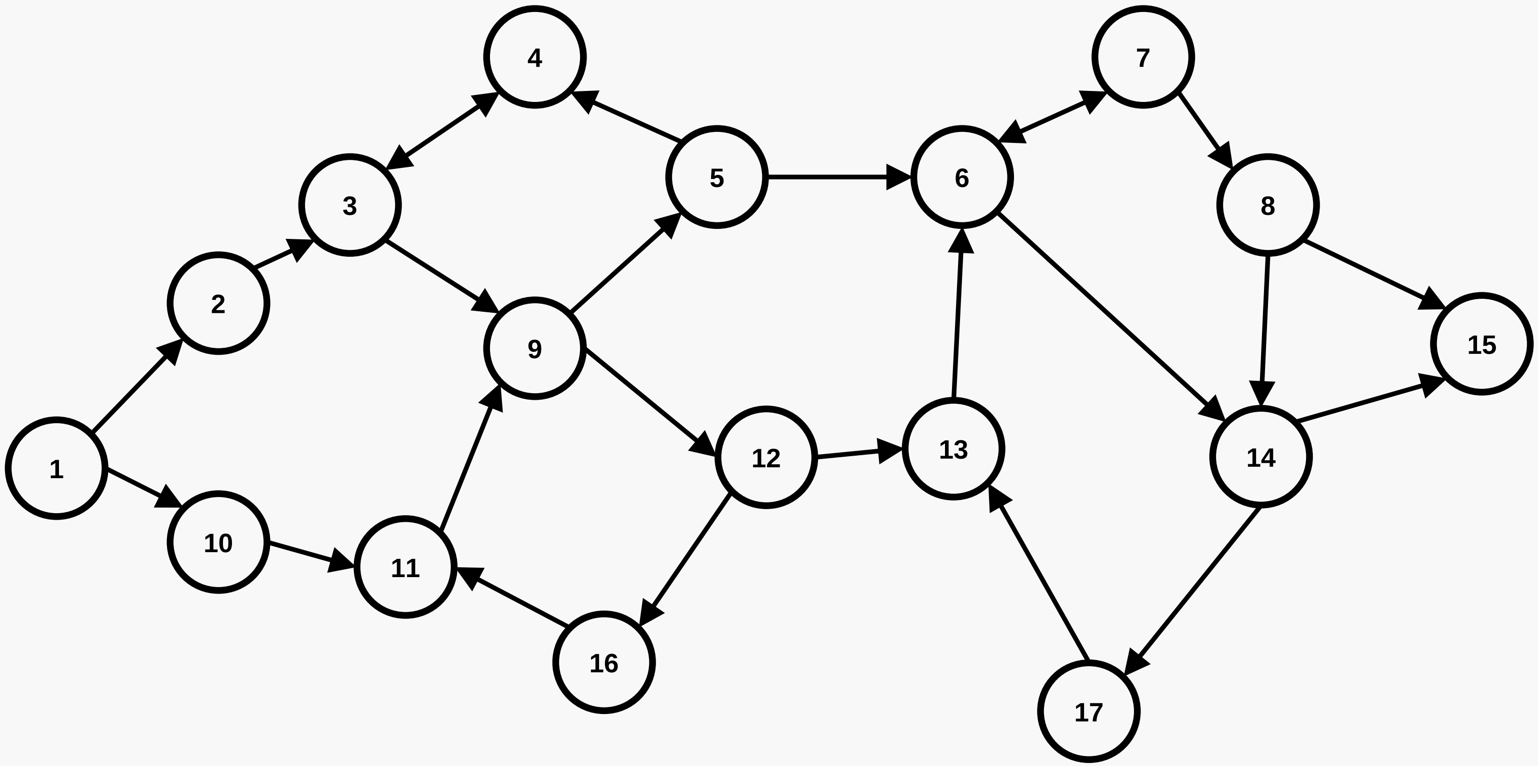
# КСС

Интересно искать сильно связные компоненты графа.



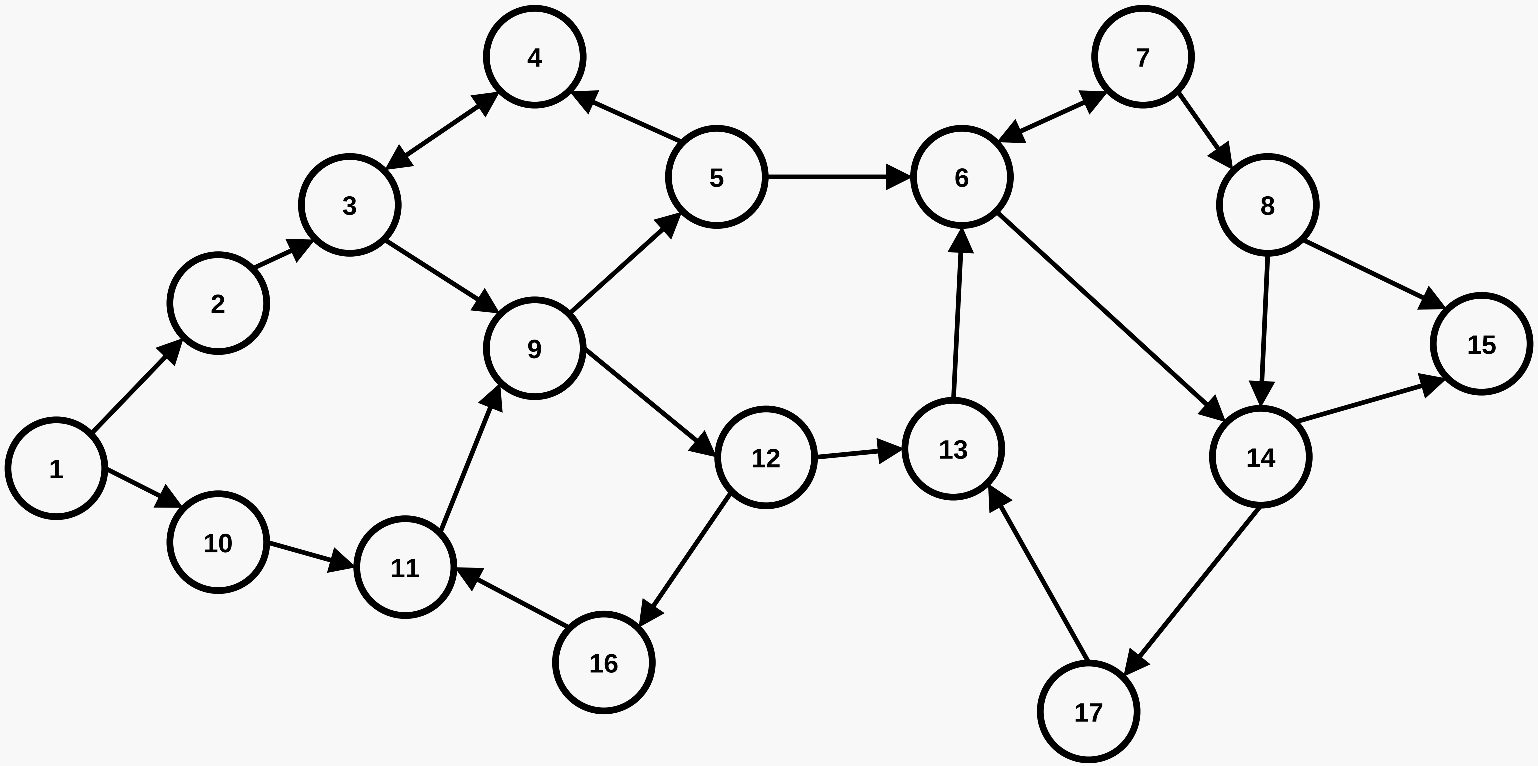
# КСС

Сколько КСС в этом графе?



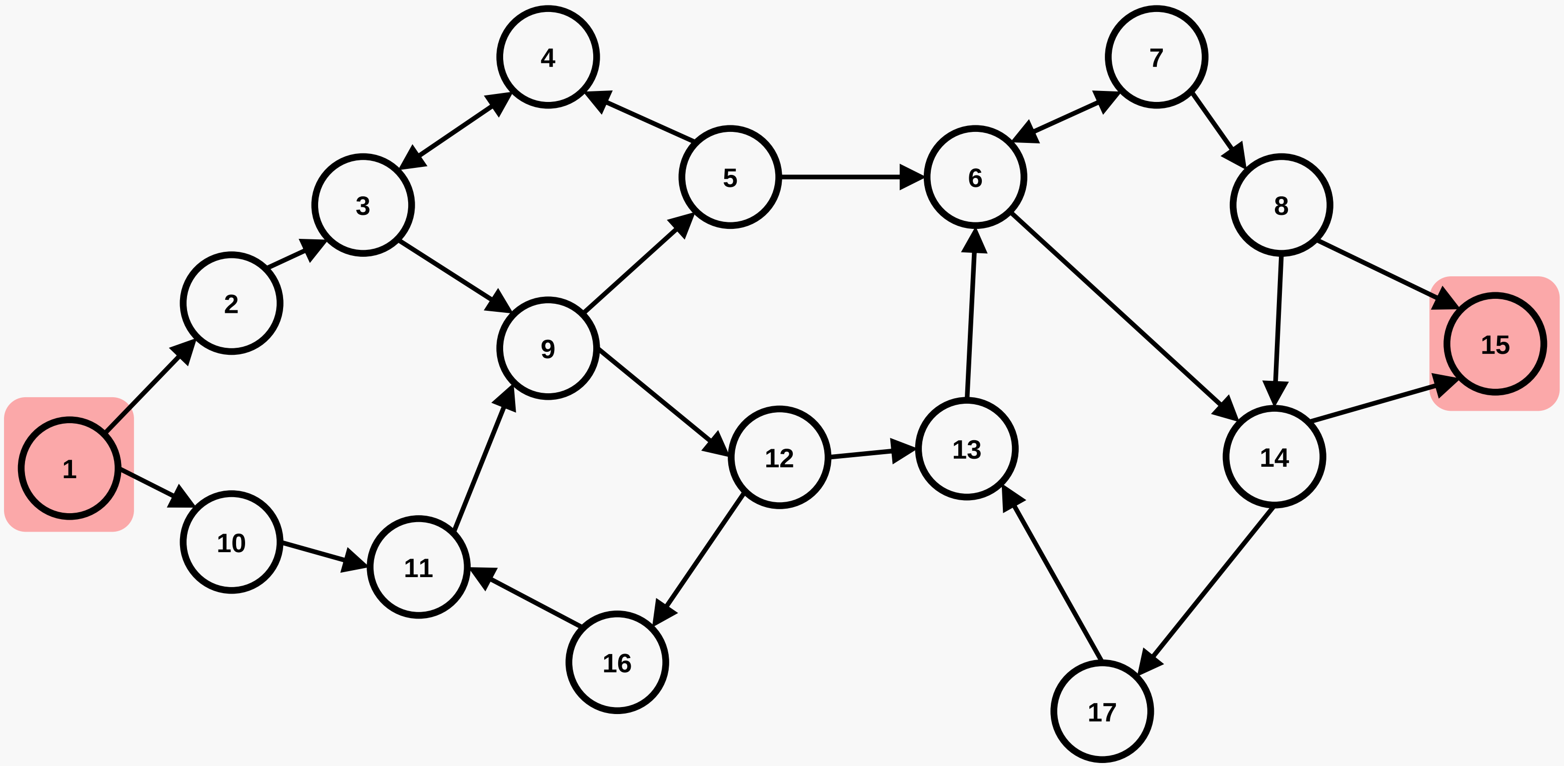
# КСС

**Шаг 1.** Поиск стоков и истоков



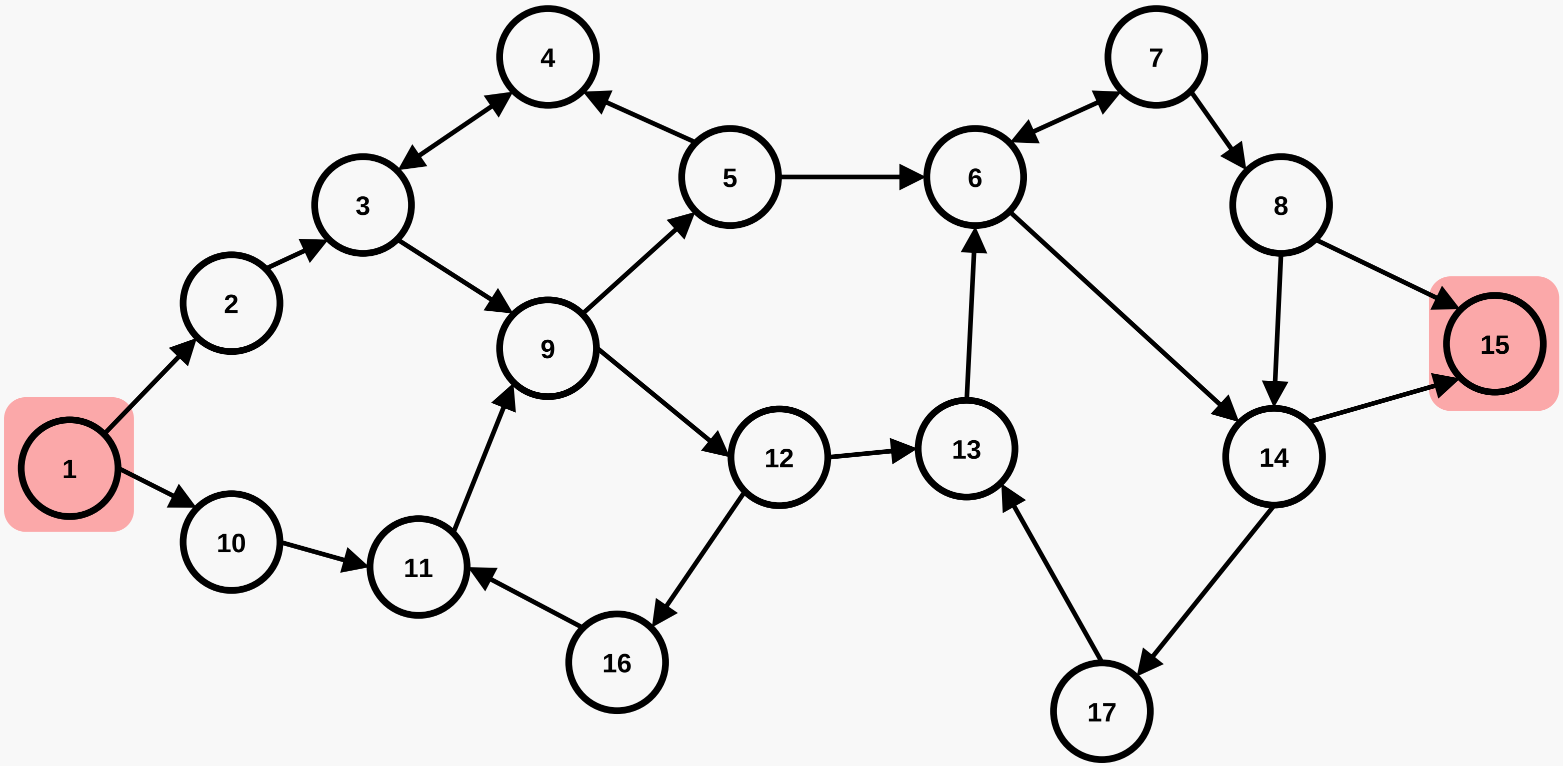
# КСС

**Шаг 1.** Поиск стоков и истоков



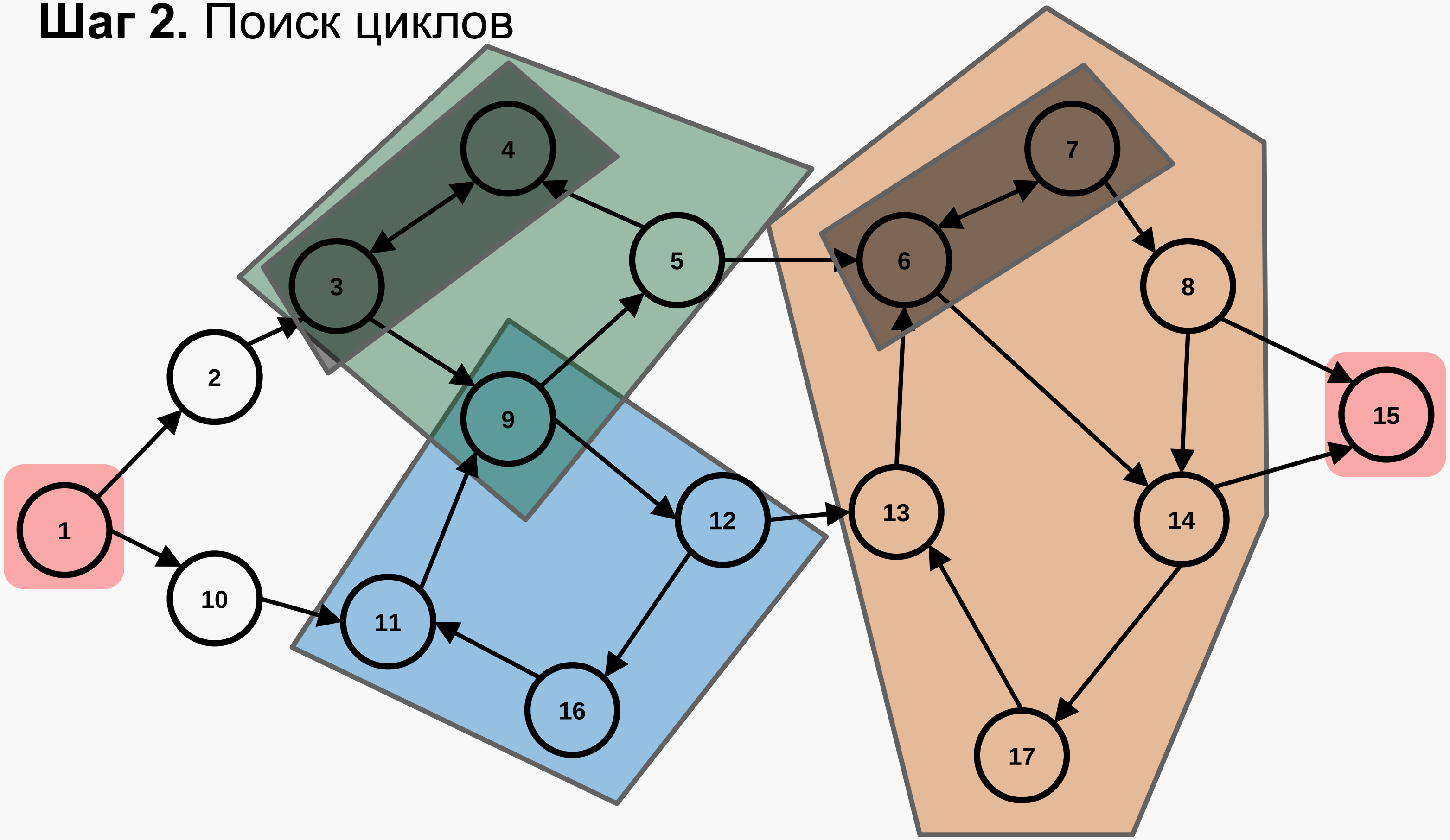
# КСС

**Шаг 2.** Поиск циклов



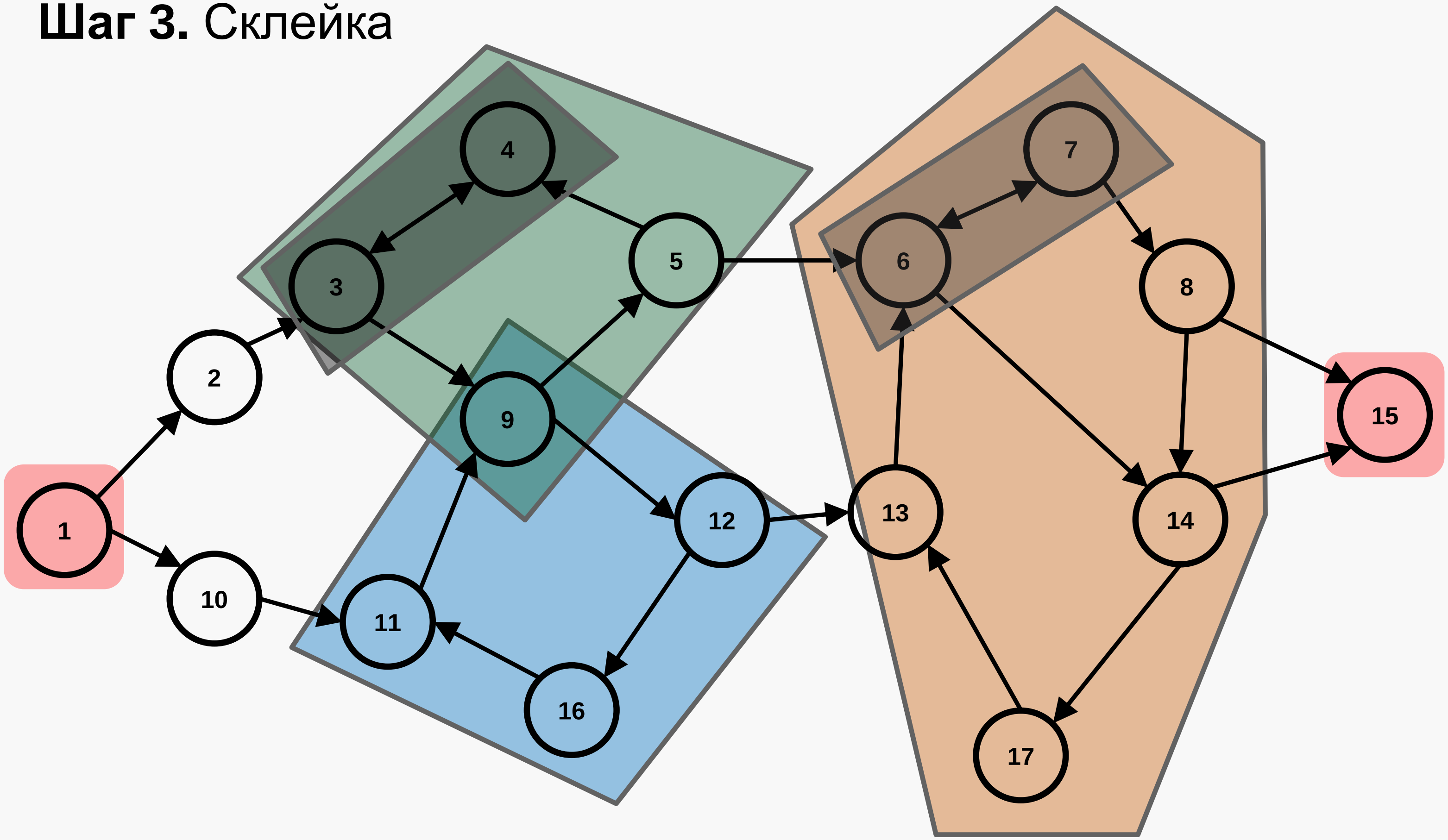
# КСС

**Шаг 2.** Поиск циклов



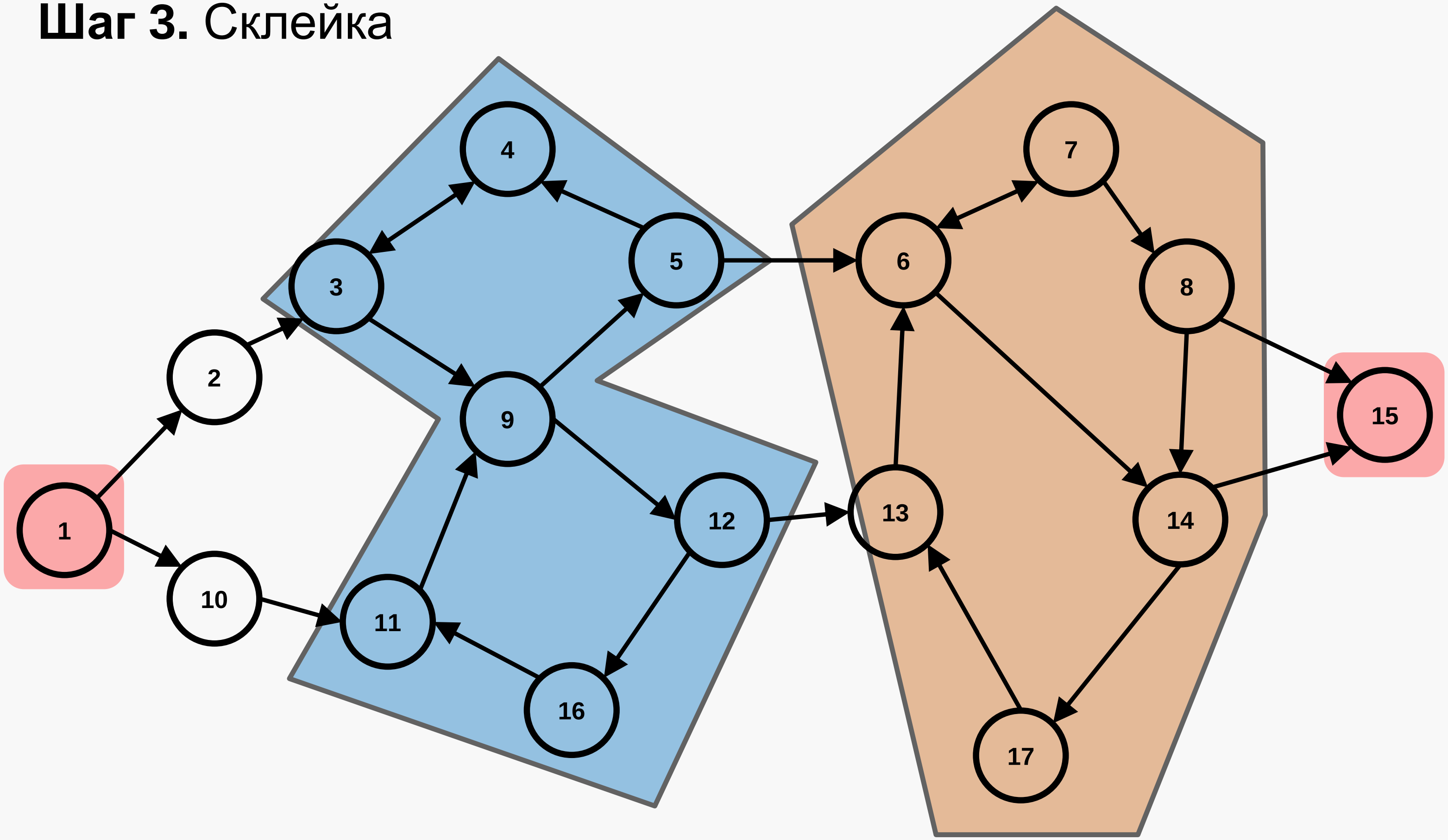
# КСС

**Шаг 3.** Склейка



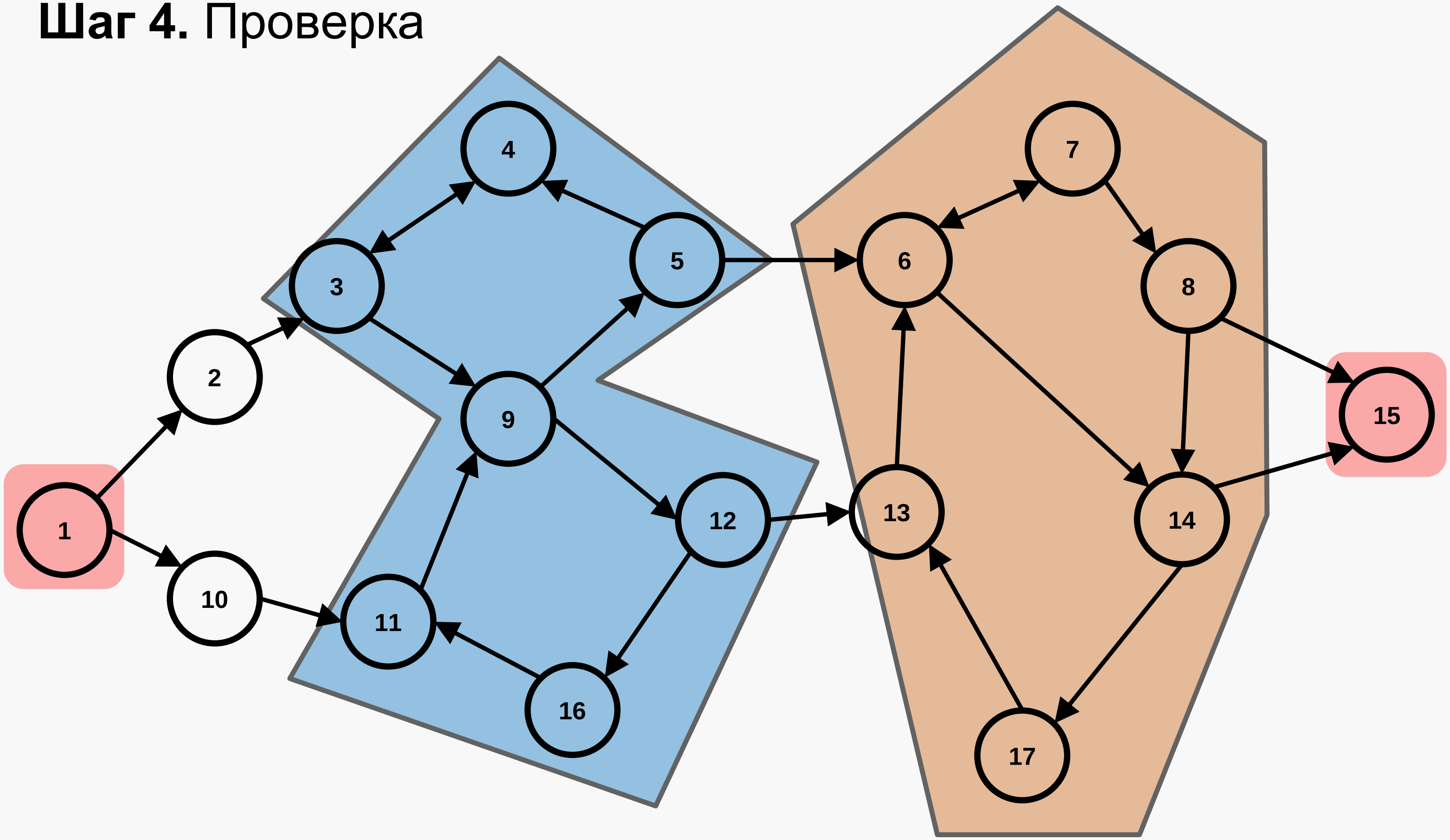
# КСС

**Шаг 3.** Склейка



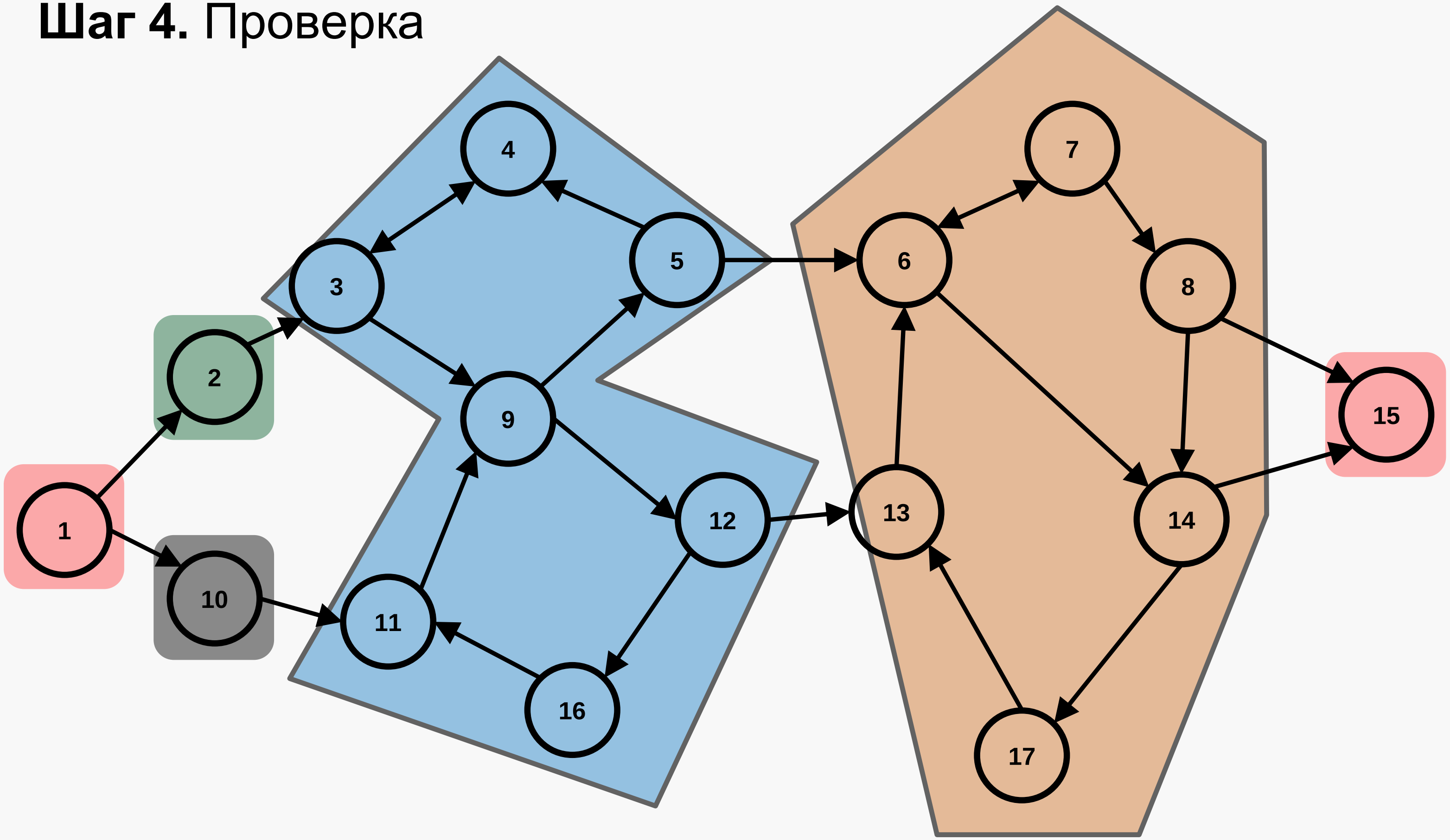
# КСС

**Шаг 4.** Проверка



# КСС

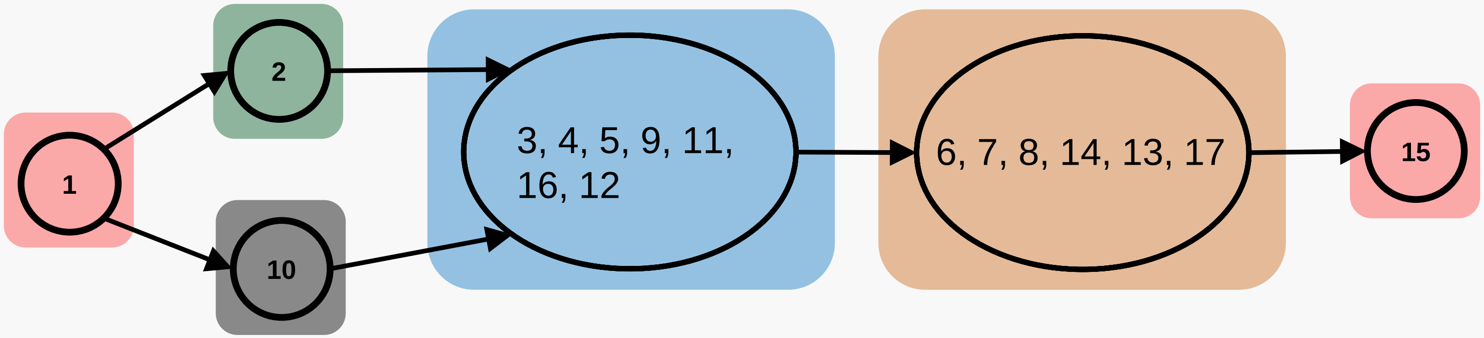
**Шаг 4.** Проверка



# Конденсат графа

**Конденсат графа** – это ориентированный граф, в котором вершины соответствуют компонентам сильной связности, а дуги отражают достижимость компонент друг из друга.

Конденсат графа **ацикличен**.



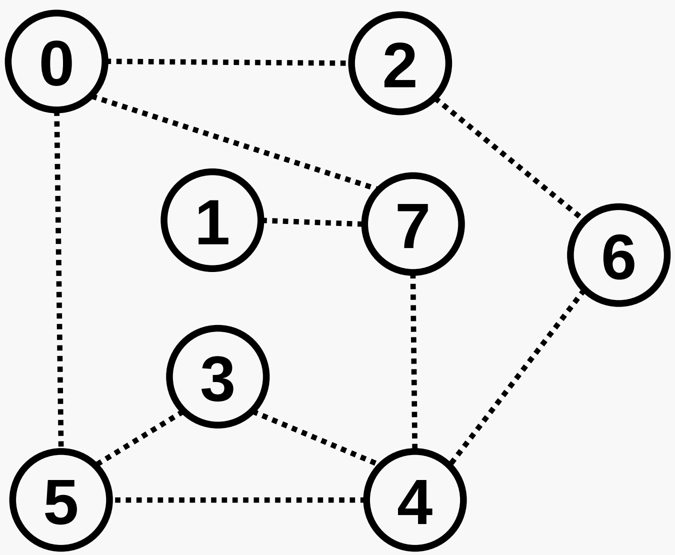
# Обход в глубину

**DFS** – Depth First Search – обход ориентированного или неориентированного графа, при котором рекурсивно обходятся все вершины, достижимые из текущей вершины.

1) Выбираем непосещённую вершину $u$.
2) Запускаем dfs($u$):
   - Помечаем $u$,
   - Запускаем dfs($v$) для всех $(u, v) \in E$.
3) Повторяем 1) и 2) пока есть непосещенные вершины.

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

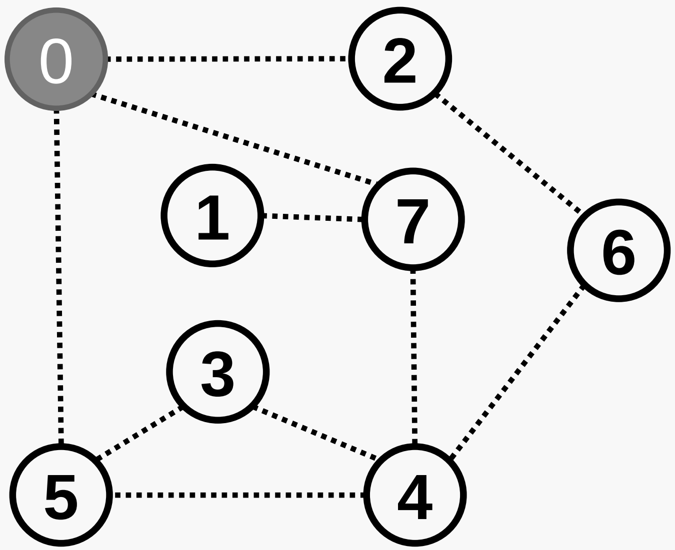
# Обход в глубину




| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

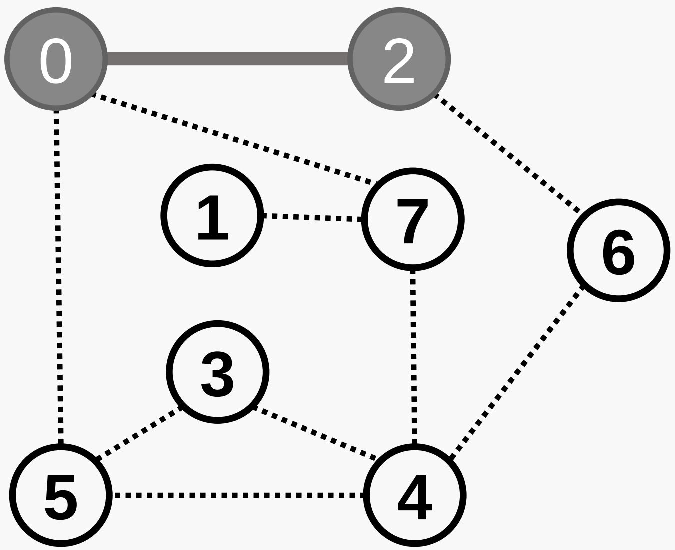



[0] Порядок посещения вершин

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

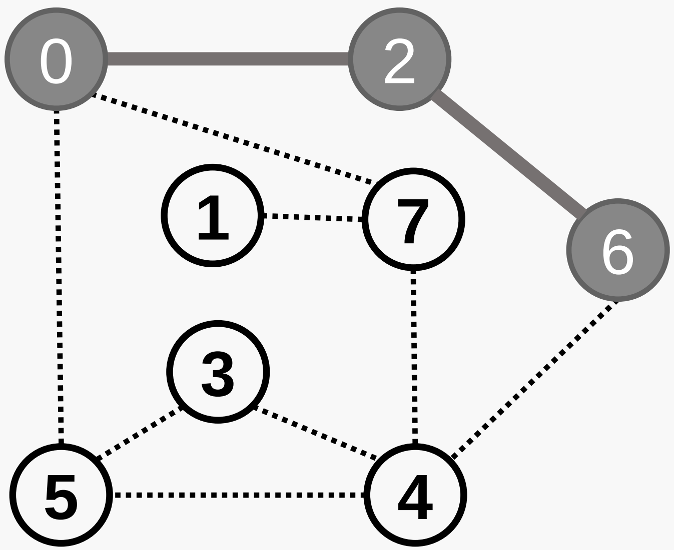



[0, 2]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

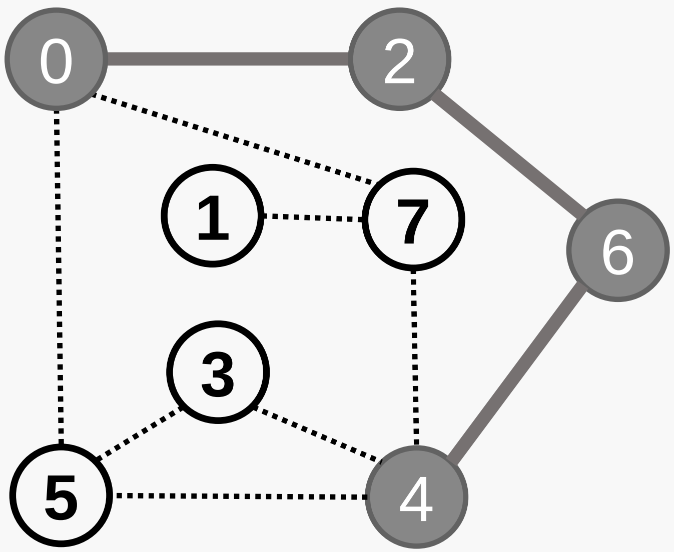



[0, 2, 6]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

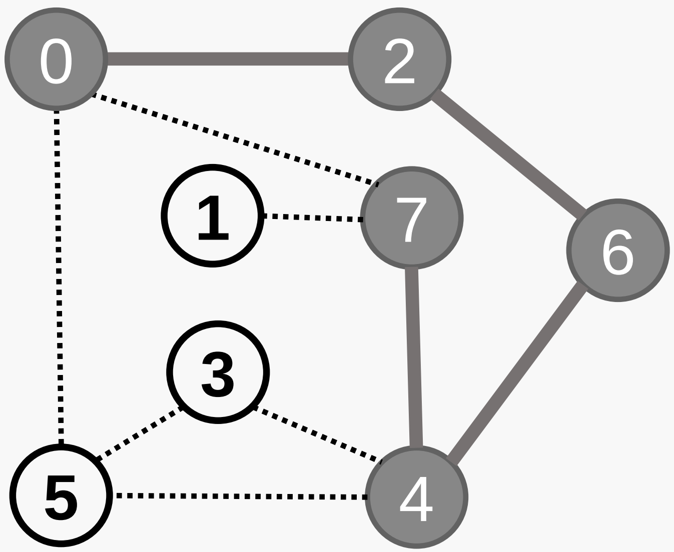



[0, 2, 6, 4]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

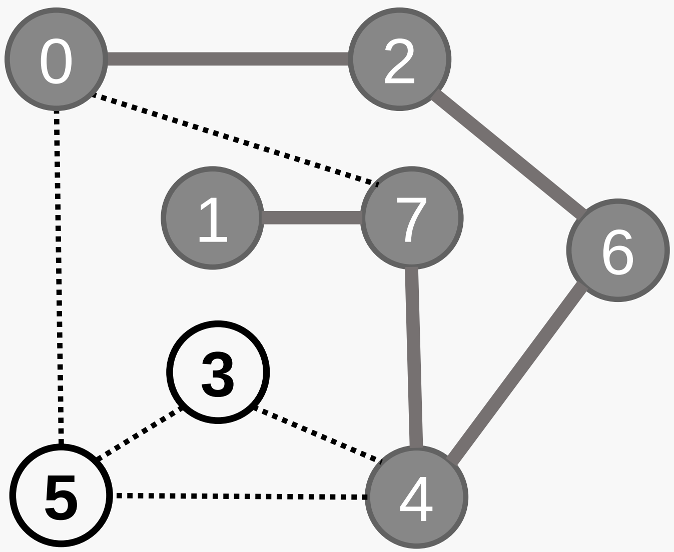



[0, 2, 6, 4, 7]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

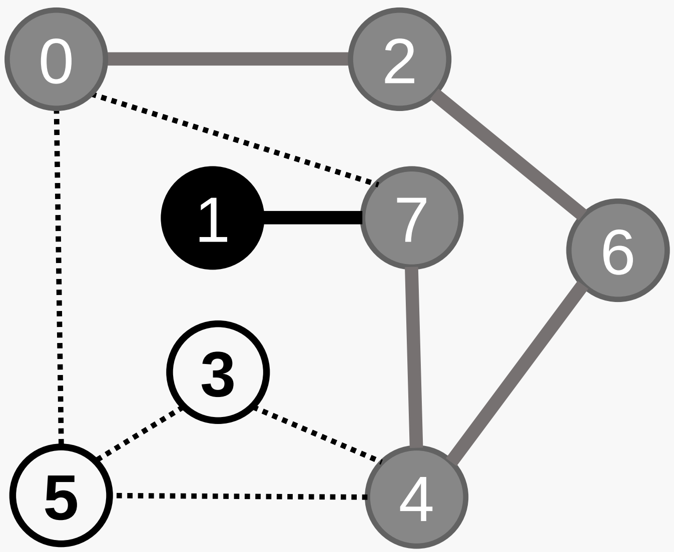



[0, 2, 6, 4, 7, 1]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

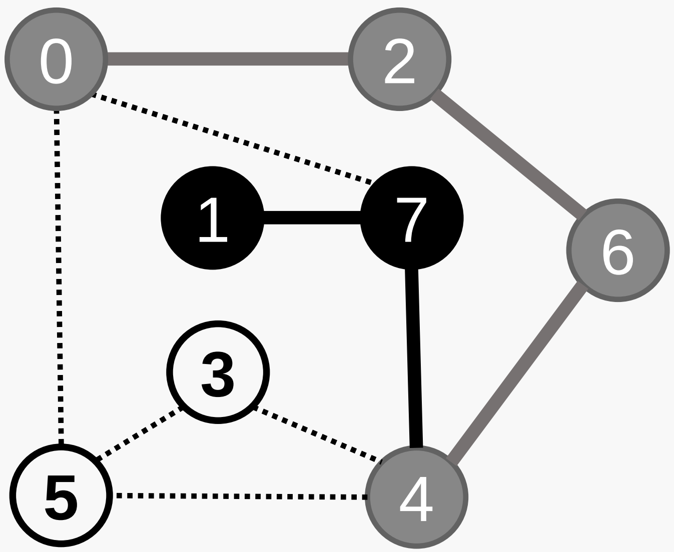



[0, 2, 6, 4, 7, 1]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

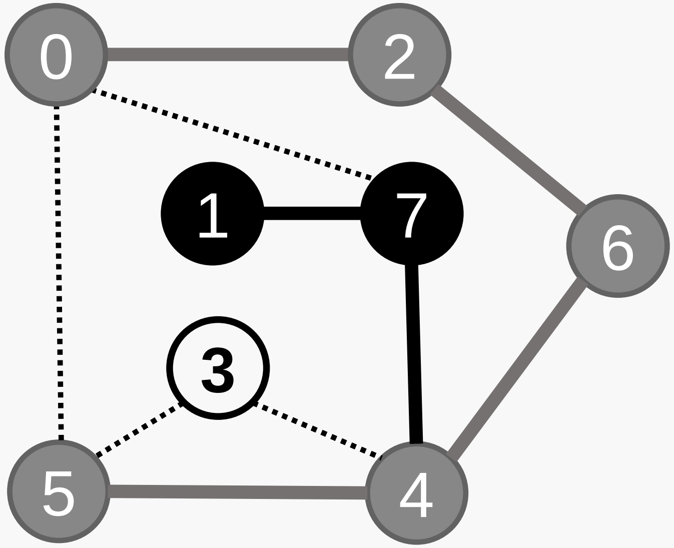



[0, 2, 6, 4, 7, 1]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

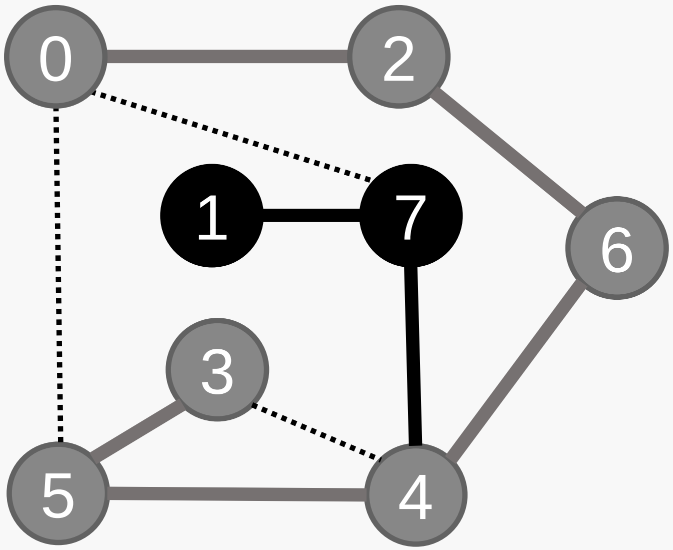



[0, 2, 6, 4, 7, 1, 5]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

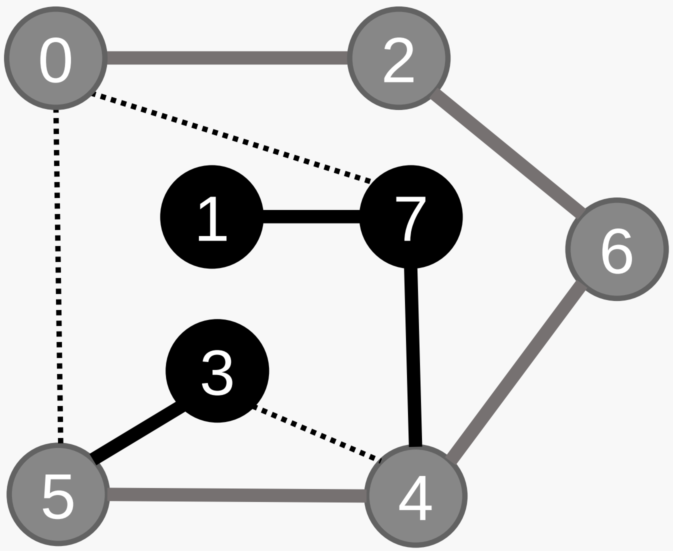



[0, 2, 6, 4, 7, 1, 5, 3]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

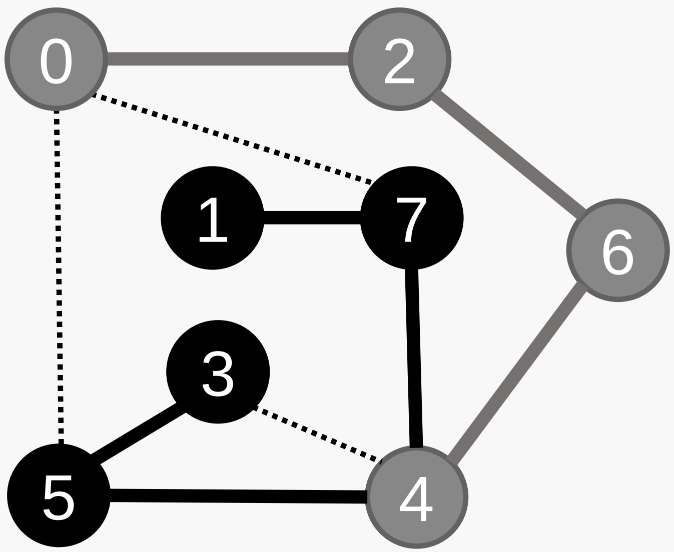



[0, 2, 6, 4, 7, 1, 5, 3]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину

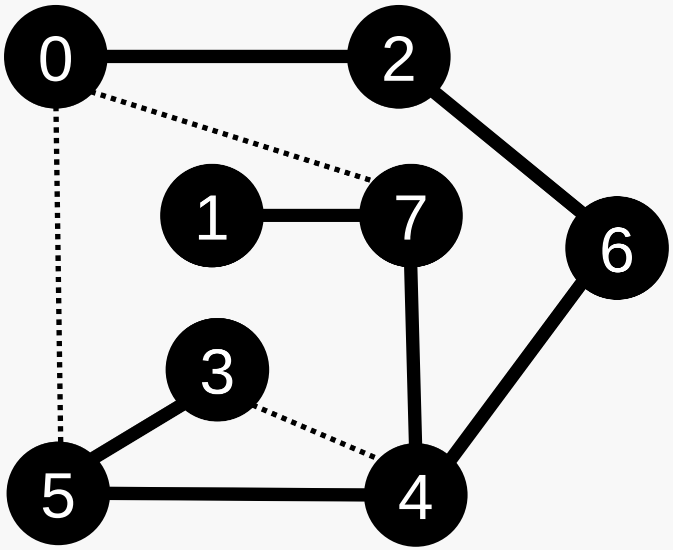



[0, 2, 6, 4, 7, 1, 5, 3]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Обход в глубину




[0, 2, 6, 4, 7, 1, 5, 3]

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

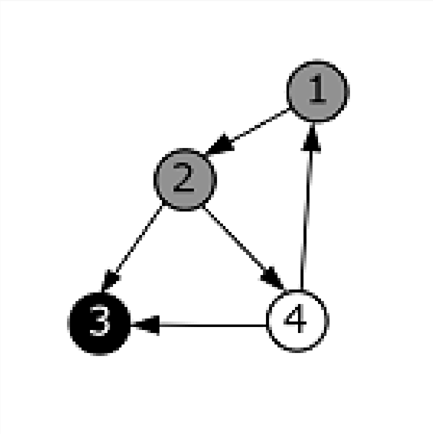
```
vector<bool> visited;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Цвета вершин

Белая – в ней еще не были.

Серая – проходимся текущим вызовом dfs.

Черная – пройдена, итерации завершены.




**Подграф предшествования.**

$G_P = (V, E_P)$, где $E_P = \{(p[u], u)\}$, $p[u]$ – вершина, от которой был вызван dfs( u ).

$G_P$ – лес обхода в глубину, состоящий из нескольких деревьев.

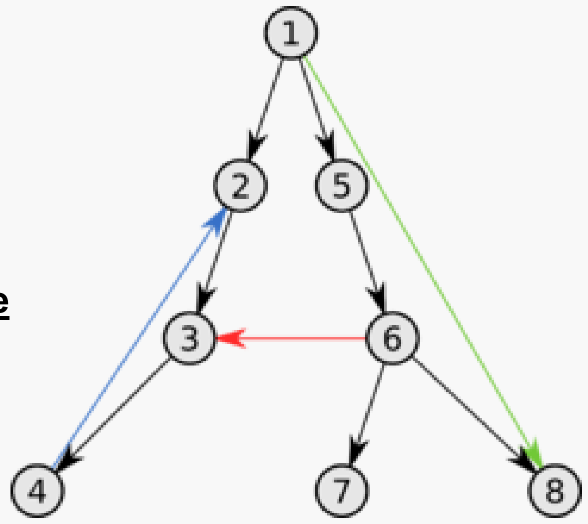
# Типы ребер графа относительно dfs

1. **<u>Ребра дерева</u>** $\in G_P$.

2. Ребра (u, v), соединяющие u с предком v – **<u>обратные</u>** ребра.

3. Ребра (u, v), соединяющие u с потомком v – **<u>прямые</u>** ребра.

4. Остальные ребра (u, v) – **<u>перекрестные</u>** ребра.




Переход в белую вершину в dfs – ребро дерева.

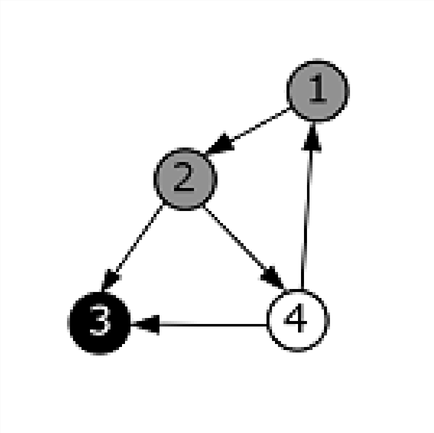
Переход в серую вершину в dfs – обратное ребро.

Переход в черную вершину в dfs – прямое или перекрестное.

Последние можно различить по времени входа и выхода.

1) ребра дерева
2) обратные ребра
3) прямые ребра
4) перекрестные ребра

# Времена входа и выхода




```
dfs( u ) {
    entry[u] = time++;

    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );

    leave[u] = time++;
}
```

В дереве dfs вершина u – предок v (ребро $(u, v)$ - прямое), если
$entry[u] < entry[v]$ и $leave[u] > leave[v]$.

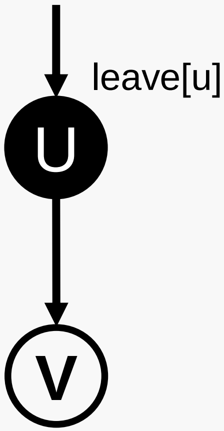
# Простая лемма

**Лемма.** Не существует момента поиска в глубину такого, в котором существует ребро из черной вершины в белую.

**Доказательство.** От противного. Пусть такое ребро (u, v) и момент *time* существуют. Рассмотрим момент *leave[u]*. Этот момент – первый, в котором вершина u – черная. Т.е.

$$leave[u] \le time.$$

Следовательно, вершина v в момент *leave[u]* – белая, т.к. она белая в момент *time*. Но это означается, что на момент выхода из вершины u есть необработанное ребро (u, v). Противоречие.



# Лемма о белых путях

**Лемма о белых путях.** Пусть есть некоторый обход dfs в графе G.

*entry[u]* и *leave[u]* – моменты входа и выхода из вершины $u$. Тогда между этими моментами:

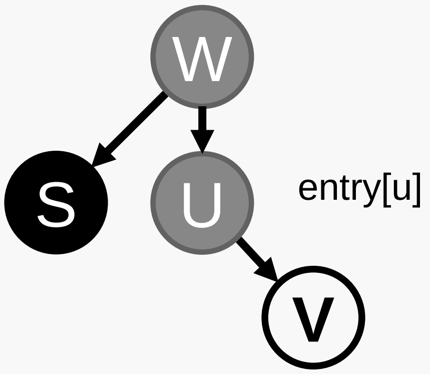
1. Черные и серые вершины $G\backslash u$ не поменяют свой цвет.
2. Белые вершины $G\backslash u$ либо останутся белыми, либо станут черными. Причем черными станут те, которые были достижимы из $u$ по белым путям и только они.

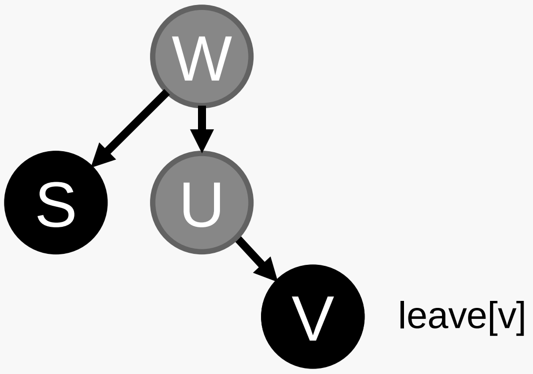
**Доказательство.** Черная вершина останется черной.

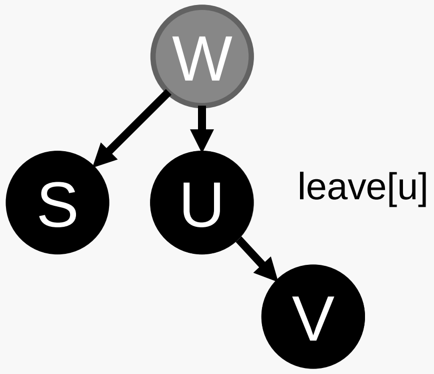
Серая вершина останется серой, т.к. находится в стеке рекурсии.

Достижимая белая вершина станет черной. Иначе на пути к ней в момент *leave[u]* будет ребро из некоторой черной вершины в некоторую белую,  чего не может быть по лемме.

Если вершина стала черной к моменту *leave[u]* , значит, она была достижима из $u$ по белому пути.



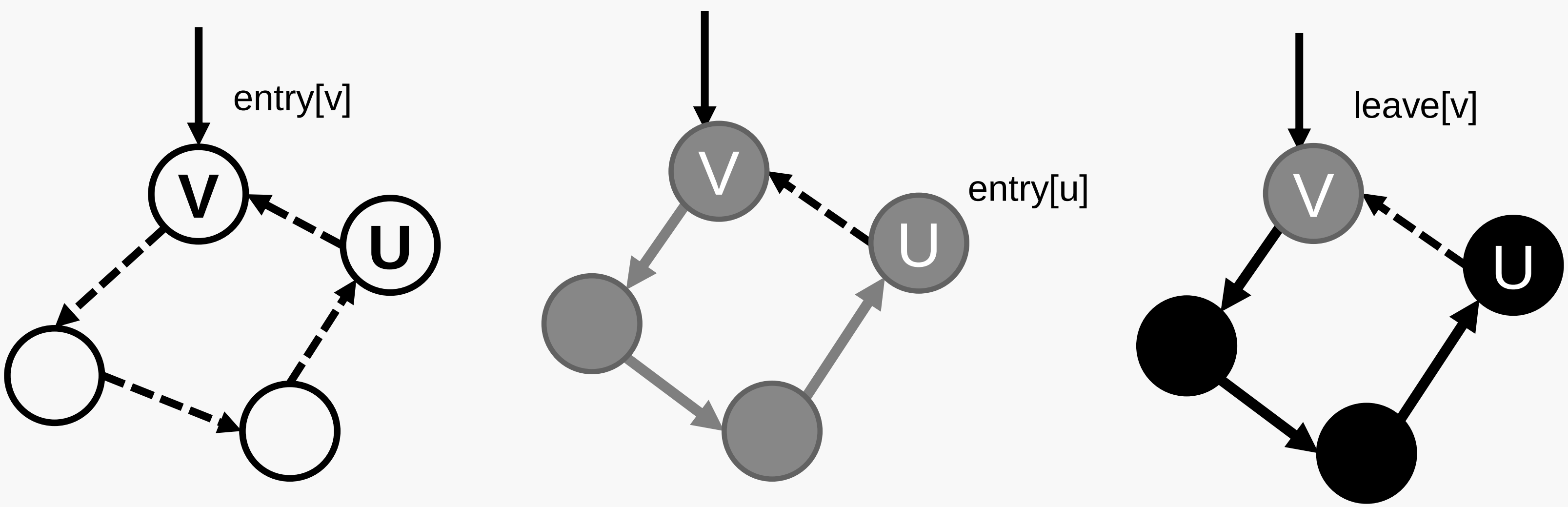



# Проверка наличия циклов

**Задача.** Есть ориентированный или неориентированный граф G. Проверить наличие циклов в графе и, если циклы есть, найти какой-нибудь цикл.

**Решение.** Если в некоторый момент некоторого обхода dfs нашли обратное ребро (ведущее из текущей вершины в серую), то цикл существует. Иначе цикла нет.



# Поиск цикла

Время работы проверки наличия цикла – O(V + E).

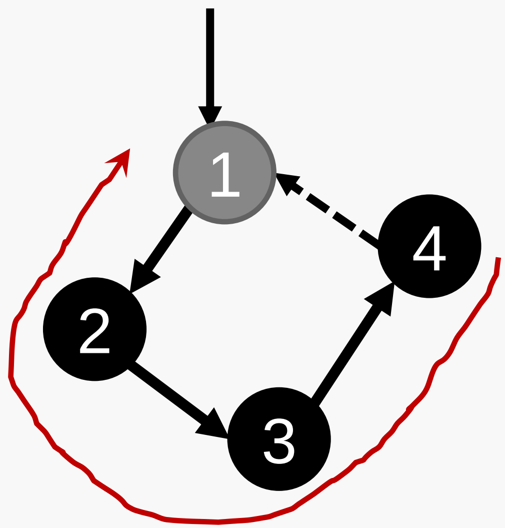
**Задача.** Найти какой-нибудь цикл в графе с циклами.

**Решение.**

Пусть в момент time в dfs была найден переход (u, v) в серую вершину v.

Цикл восстанавливается по предкам (стек вызовов в момент *entry[u]*):

$$v, u, p[u], p\big[p[u]\big], \ldots, v.$$



# Проверка связности

**Задача.** Проверить, является ли неориентированный граф G связным.

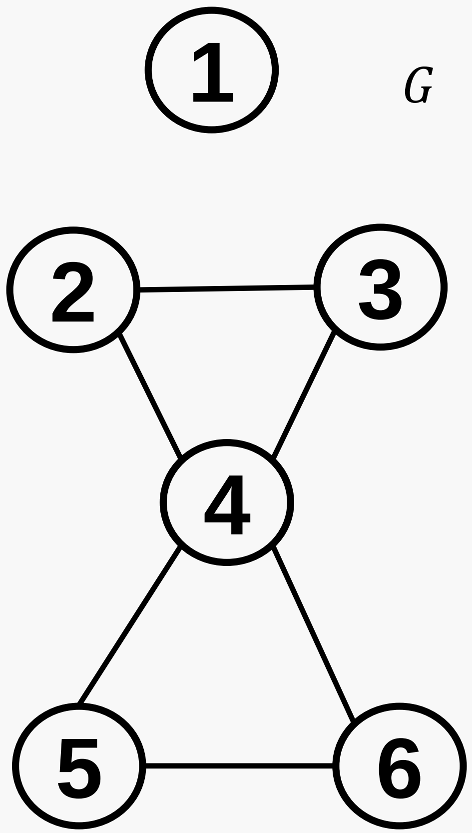
**Решение.**

Запустим dfs(v).

Если после выхода все вершины посетили ⇔ связность.

После выхода из dfs(v) все вершины можно не проверять на visited[u], если использовать переменную для подсчета числа обработанных вершин.

Время работы $O(V + E)$.



# Топологическая сортировка

**Топологическая сортировка** ациклического графа $G = (V, E)$ – такое упорядочивание всех вершин $V$, что если $(u, v) \in E$, то $u$ располагается до $v$.
Формально: упорядочивание

$$\phi: V \to \{1, \dots, n\}, \phi(u) < \phi(v).$$

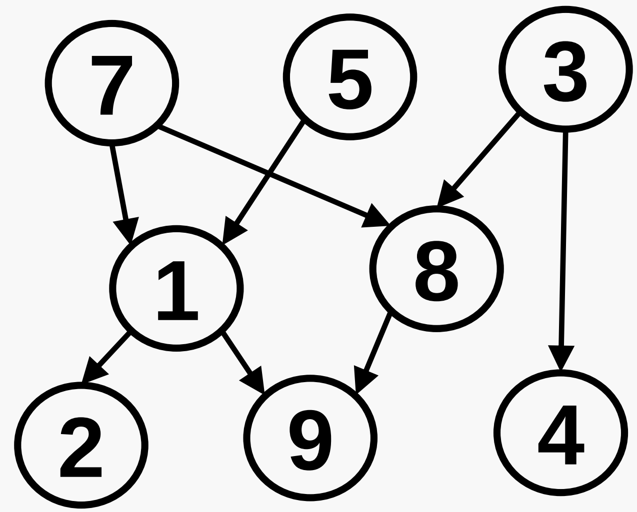
Топологическая сортировка для графов с циклами невозможна.

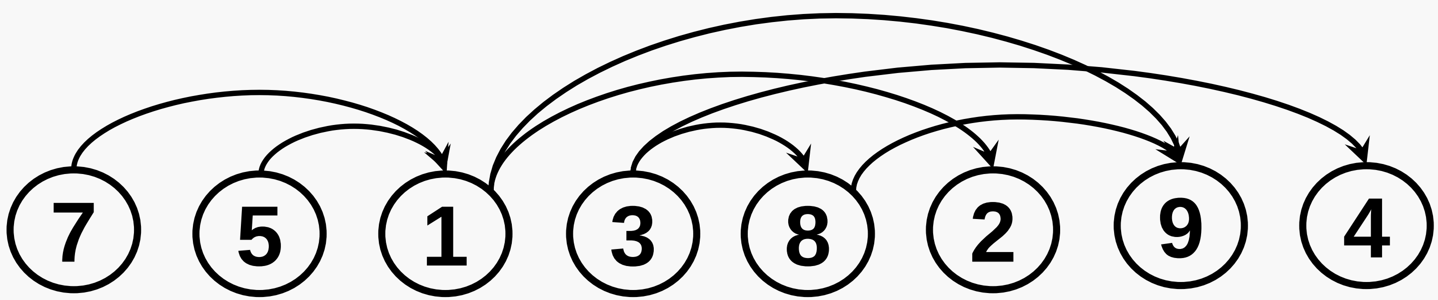
# Топологическая сортировка

Строится корректная последовательность зависимых действий.

Например:

- Сборка исходников в правильном порядке
- Порядок прохождения обучающих курсов
- Порядок выполнения технологических операций



# Топологическая сортировка

Алгоритм топологической сортировки:

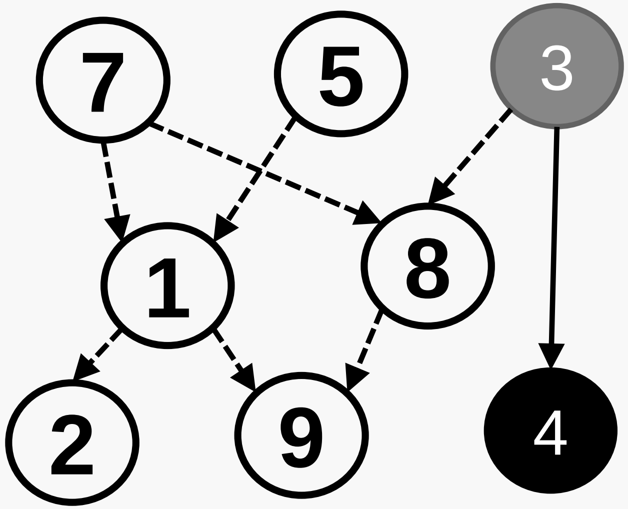
- Запустить DFS, считать $leave$.
- $\phi(v) = |V| + 1 - leave[v]$

Время работы $T = O(V + E)$.

# Топологическая сортировка

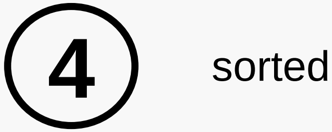
```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Топологическая сортировка

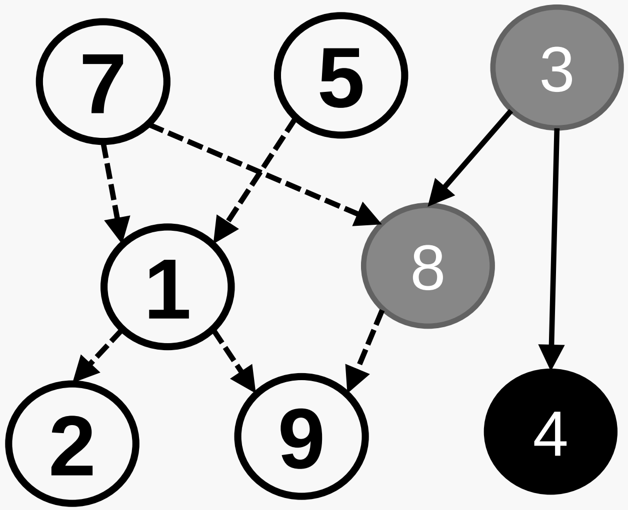



Добавляем элемент в начало списка в момент окраски в чёрный

```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```



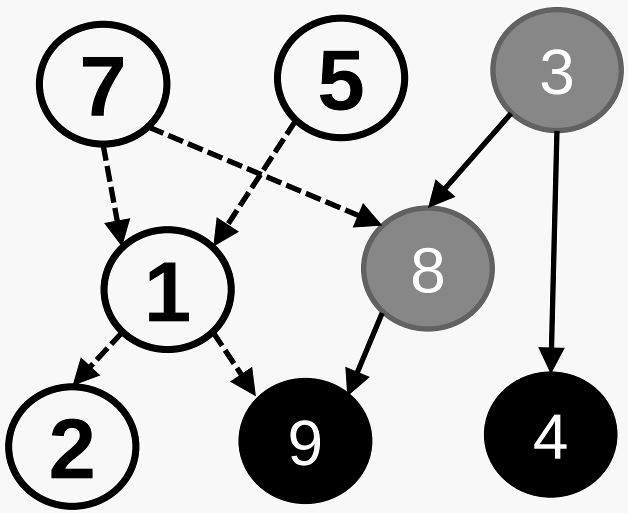
# Топологическая сортировка




```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```


sorted

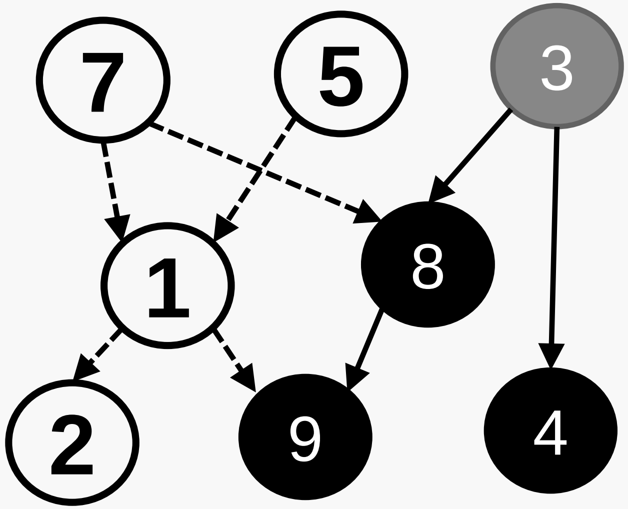
# Топологическая сортировка




```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

# Топологическая сортировка

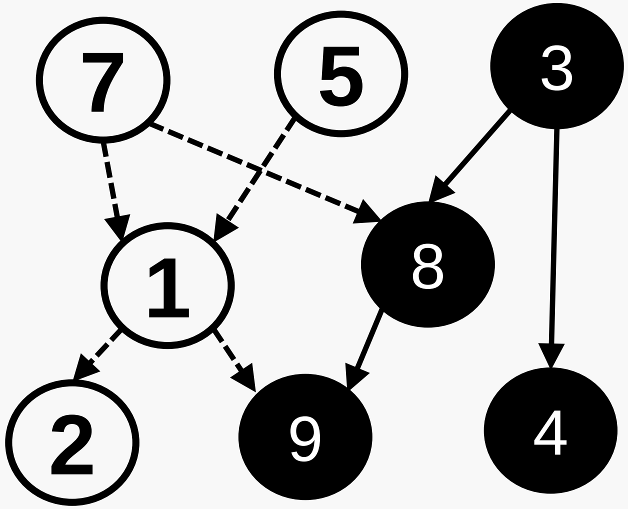





```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```


sorted

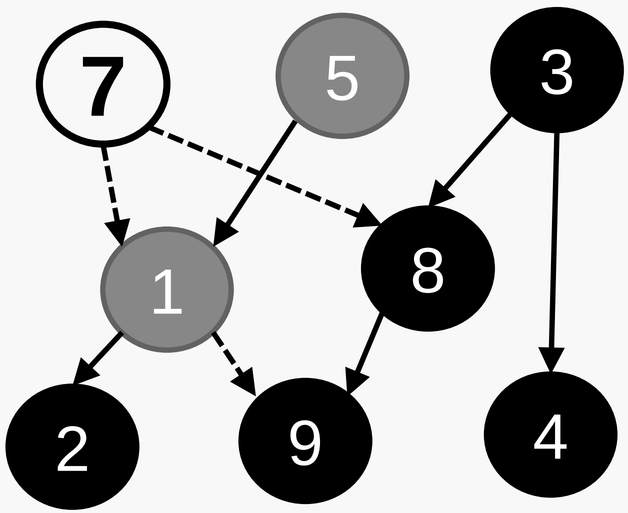
# Топологическая сортировка




```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

3 8 9 4 sorted

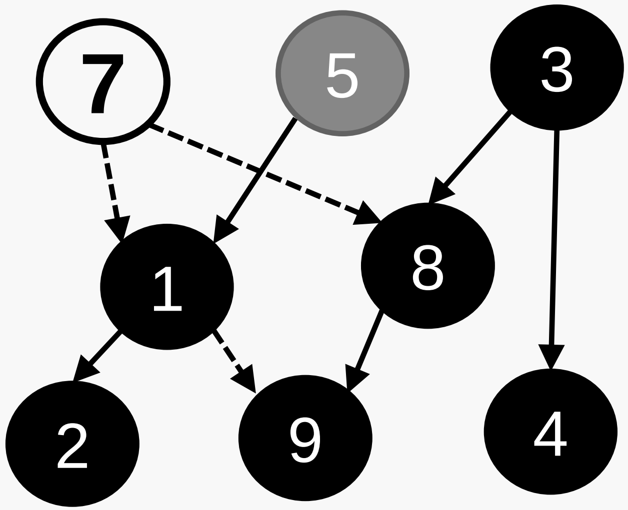
# Топологическая сортировка




```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

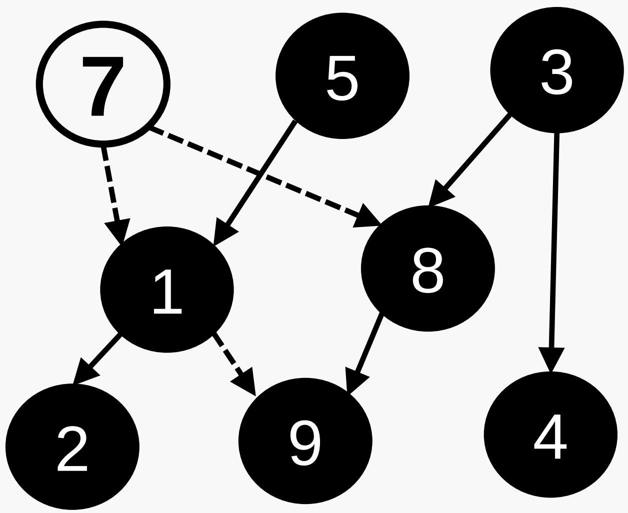

sorted

# Топологическая сортировка




```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

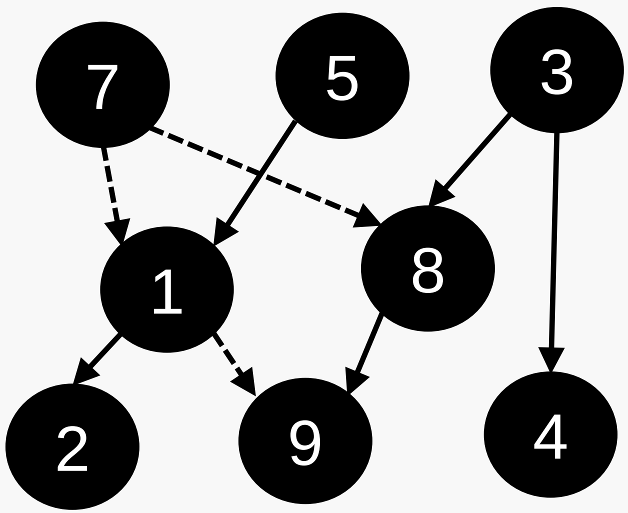
# Топологическая сортировка



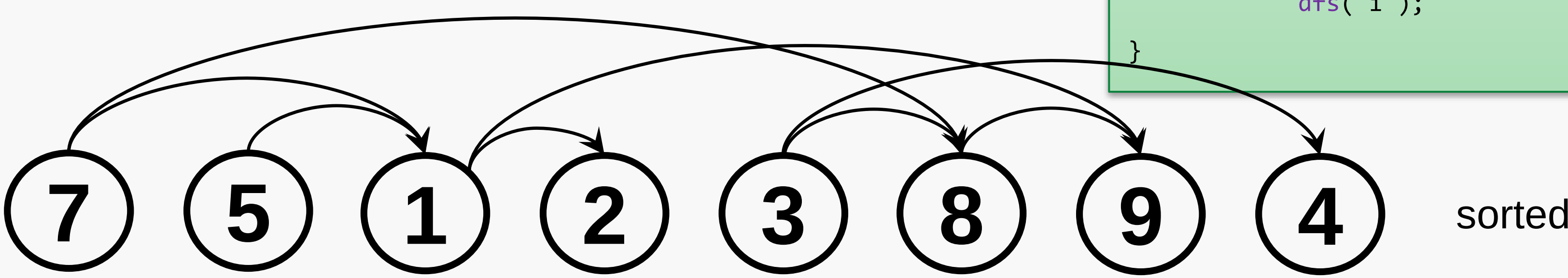

```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```

5 1 2 3 8 9 4 sorted

# Топологическая сортировка




```
vector<bool> visited;
list<int> sorted;
void dfs( int u ) {
    visited[u] = true;
    for( v: (u, v) ∈ E )
        if( !visited[v] )
            dfs( v );
    sorted.push_front(u);
}
int MainDFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            dfs( i );
}
```



# Алгоритм Косарайю

Алгоритм Косарайю (1978г) – алгоритм поиска сильно связных компонент.

Пусть $G = (V, E)$.

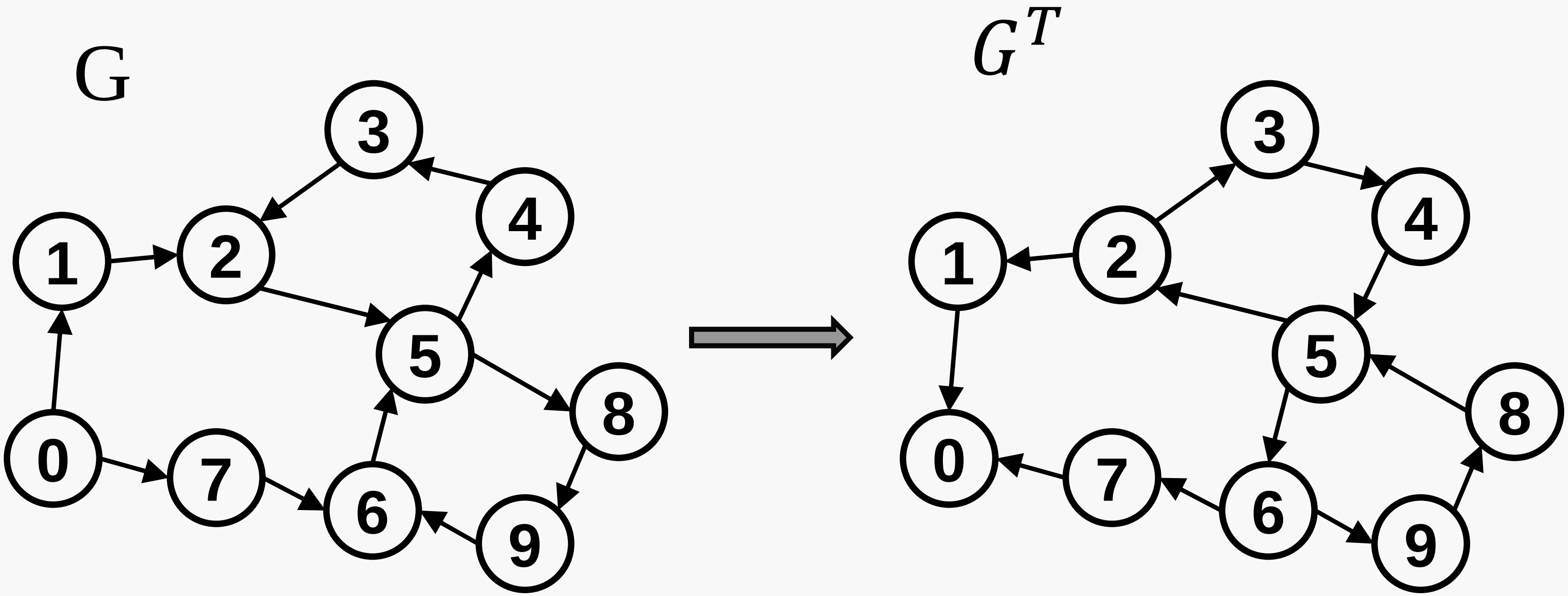
Алгоритм:

1) Построим $H = G^T$ – граф, являющийся инвертированным к $G$.
2) DFS(H)
3) DFS(G), перебирая вершины в MainDFS в порядке убывания $leave_H$.

Деревья, полученные запусками dfs на шаге 3 – компоненты сильной связности.

# Алгоритм Косарайю

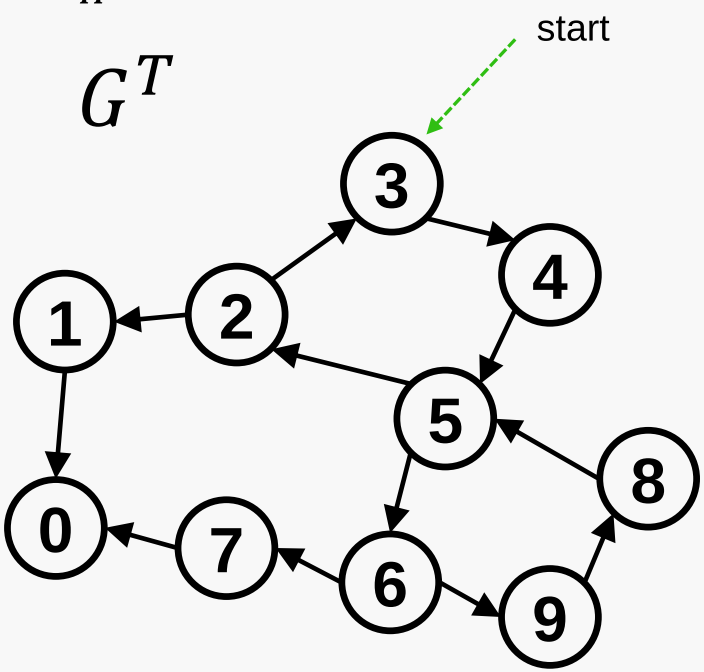
1) Построим $H = G^T$ – граф, являющийся инвертированным к $G$.



# Алгоритм Косарайю

2) Обходим в глубину граф $H = G^T$, для всех вершин запоминаем $leave_H$

$G^T$




$leave_H: 0$

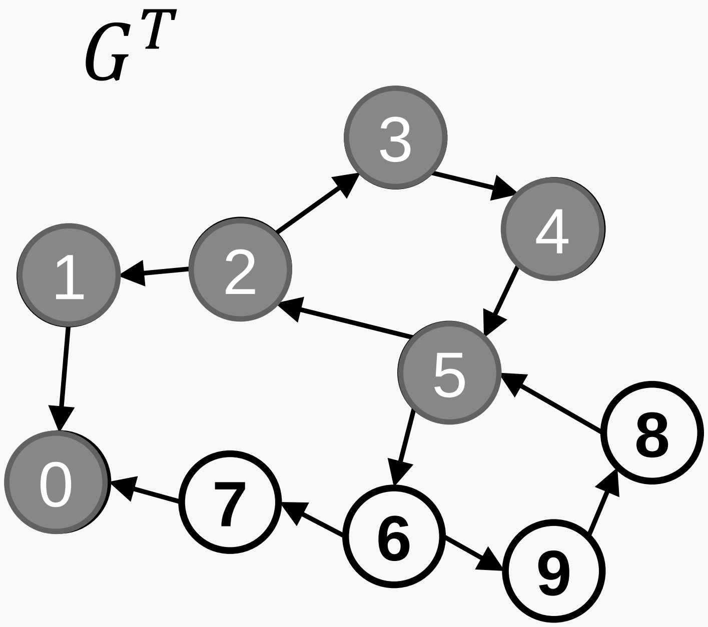
| | Visited | Order |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 1 | 0 | |
| 2 | 0 | |
| 3 | 0 | |
| 4 | 0 | |
| 5 | 0 | |
| 6 | 0 | |
| 7 | 0 | |
| 8 | 0 | |
| 9 | 0 | |

**Порядок обхода:**

# Алгоритм Косарайю

2) Обходим в глубину граф $H = G^T$, для всех вершин запоминаем $leave_H$

$leave_H: 0$



| | Visited |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| 6 | 0 |
| 7 | 0 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |

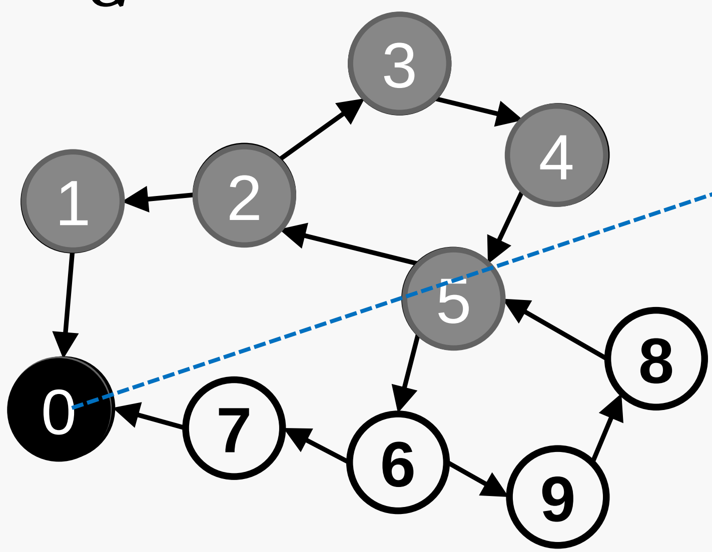
| | Order |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |

**Порядок обхода:** 3 4 5 2 1 0

# Алгоритм Косарайю

В момент, когда вершина становится чёрная, пишем order[$leave_H$] = v

$G^T$



$leave_H: 0$

Visited

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| 6 | 0 |
| 7 | 0 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |

Order

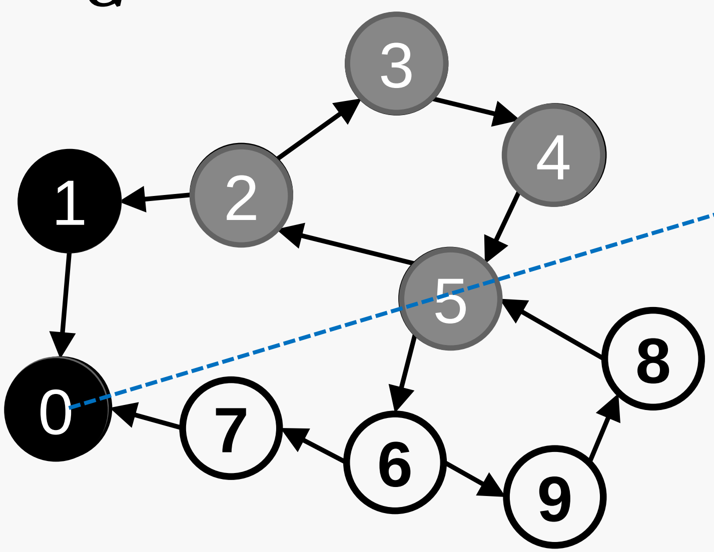
| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |

**Порядок обхода:** 3 4 5 2 1 0

# Алгоритм Косарайю

В момент, когда вершина становится чёрная, пишем order[$leave_H$] = v

$G^T$




$leave_H: 1$

| | Visited | Order |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | |
| 3 | 1 | |
| 4 | 1 | |
| 5 | 1 | |
| 6 | 0 | |
| 7 | 0 | |
| 8 | 0 | |
| 9 | 0 | |

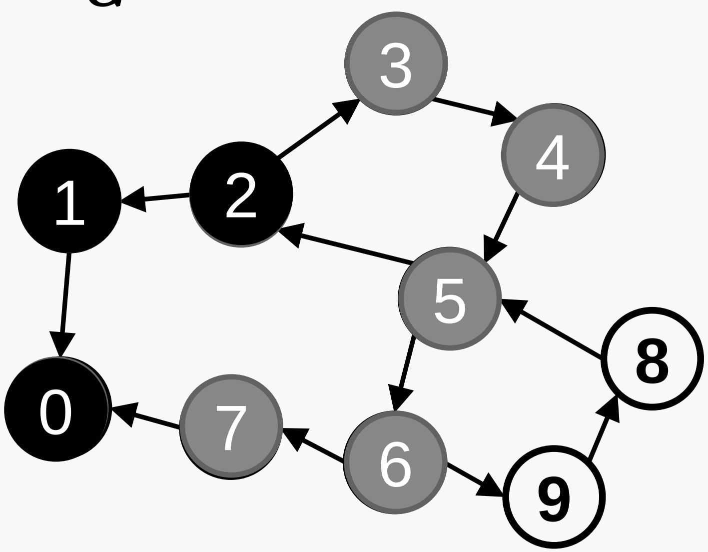
**Порядок обхода:** 3 4 5 2 1 0

# Алгоритм Косарайю

В момент, когда вершина становится чёрная, пишем order[$leave_H$] = v

$leave_H$: 3

$G^T$



Visited

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| 6 | 1 |
| 7 | 1 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |

Order

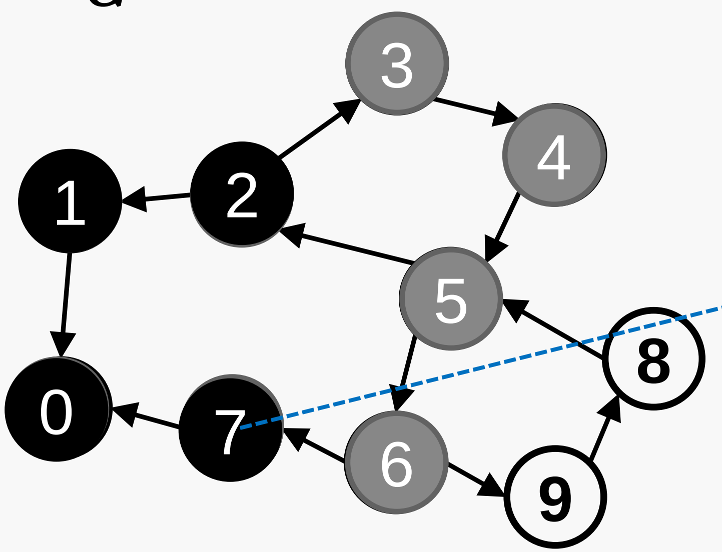
| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |

**Порядок обхода:** 3 4 5 2 1 0 6 7

# Алгоритм Косарайю

В момент, когда вершина становится чёрная, пишем order[$leave_H$] = v

$G^T$




$leave_H: 3$

| | Visited | | Order |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 7 |
| 4 | 1 | 4 | |
| 5 | 1 | 5 | |
| 6 | 1 | 6 | |
| 7 | 1 | 7 | |
| 8 | 0 | 8 | |
| 9 | 0 | 9 | |

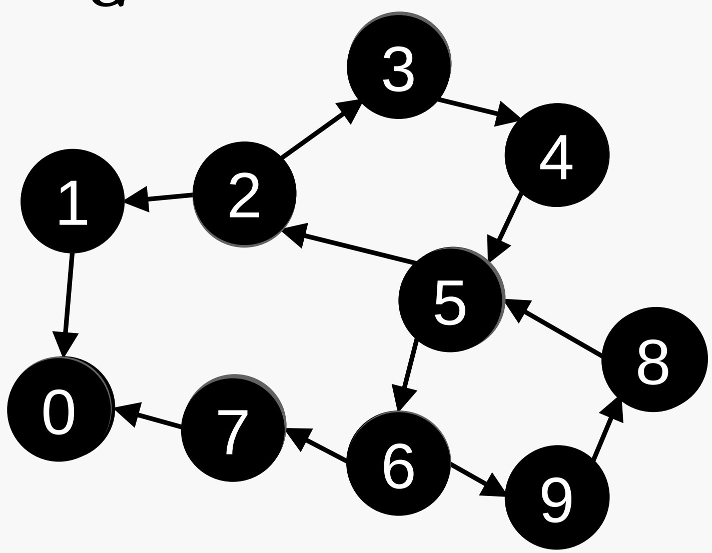
**Порядок обхода:** 3 4 5 2 1 0 6 7

# Алгоритм Косарайю

По сути в Order получилась топологическая сортировка

$leave_H: 9$

$G^T$

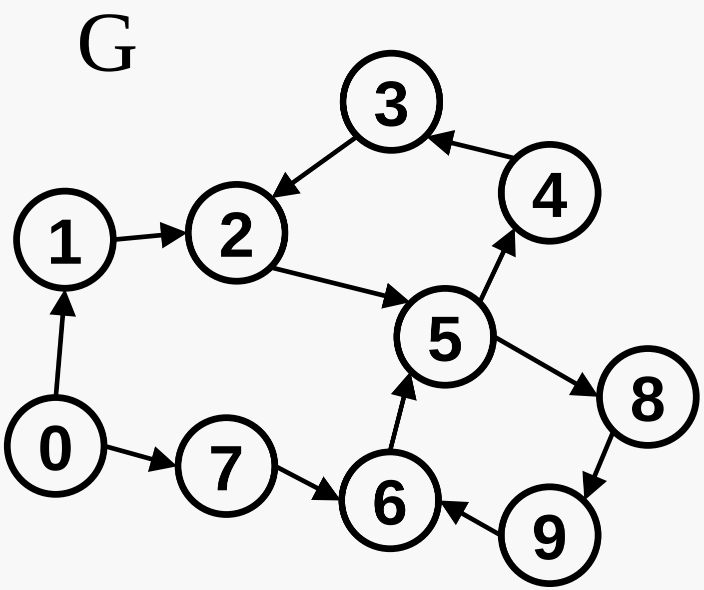



| | Visited | Order |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 1 | 8 |
| 5 | 1 | 9 |
| 6 | 1 | 6 |
| 7 | 1 | 5 |
| 8 | 1 | 4 |
| 9 | 1 | 3 |

**Порядок обхода:** 3 4 5 2 1 0 6 7 9 8

# Алгоритм Косарайю

3) Обходим в глубину исходный граф G перебирая вершины в MainDFS в порядке убывания $leave_H$.




| | Visited |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 0 |
| 4 | 0 |
| 5 | 0 |
| 6 | 0 |
| 7 | 0 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |

| | Order |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 7 |
| 4 | 8 |
| 5 | 9 |
| 6 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |
| 9 | 3 |

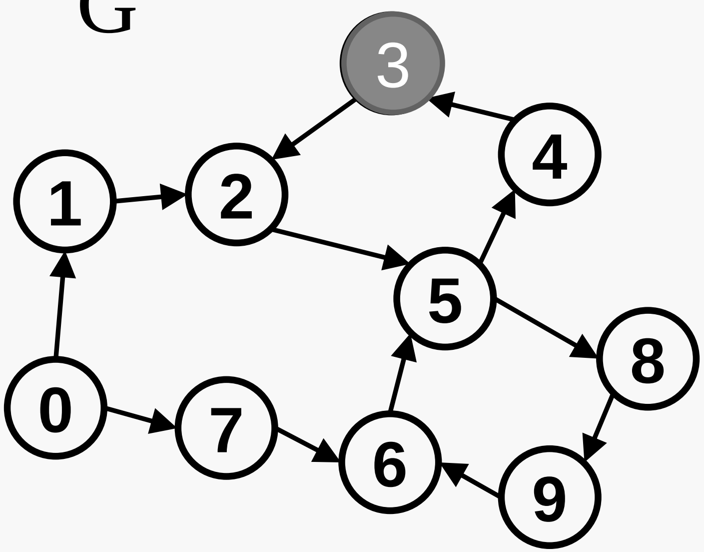
Порядок перебора вершин

**КСС**

# Алгоритм Косарайю

Начинаем с вершины 3, у нее самое большое $leave_H$

G




| | Visited | Order |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 0 | 8 |
| 5 | 0 | 9 |
| 6 | 0 | 6 |
| 7 | 0 | 5 |
| 8 | 0 | 4 |
| 9 | 0 | 3 |

Порядок перебора вершин

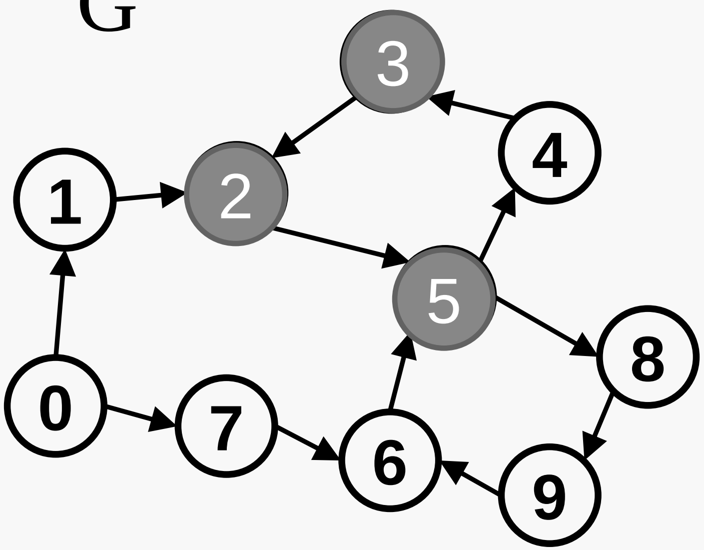
**КСС**

КСС1: 3

# Алгоритм Косарайю

Начинаем с вершины 3, у нее самое большое $leave_H$

G




| | Visited | Order |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 0 | 8 |
| 5 | 1 | 9 |
| 6 | 0 | 6 |
| 7 | 0 | 5 |
| 8 | 0 | 4 |
| 9 | 0 | 3 |

Порядок перебора вершин

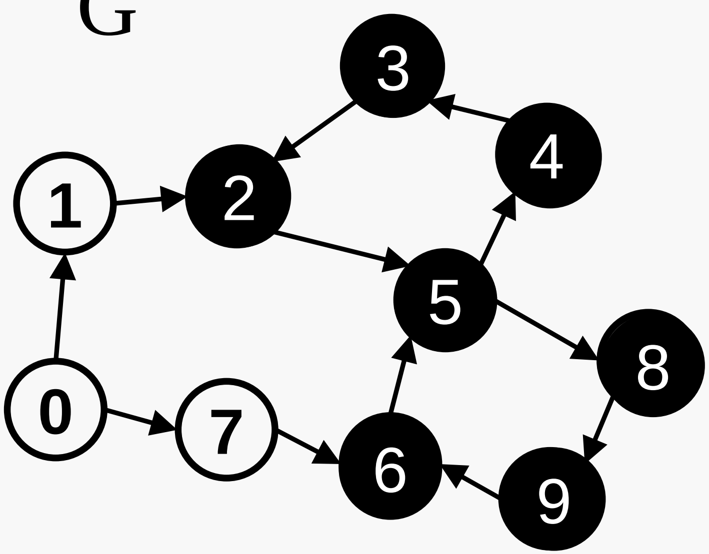
**КСС**

КСС1: 3 2 5

# Алгоритм Косарайю

Пропускаем вершины 4, 5, 6, 9, 8, так как уже посетили их.

G




| | Visited | | Order |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 7 |
| 4 | 1 | 4 | 8 |
| 5 | 1 | 5 | 9 |
| 6 | 1 | 6 | 6 |
| 7 | 1 | 7 | 5 |
| 8 | 1 | 8 | 4 |
| 9 | 1 | 9 | 3 |

Уже посетили

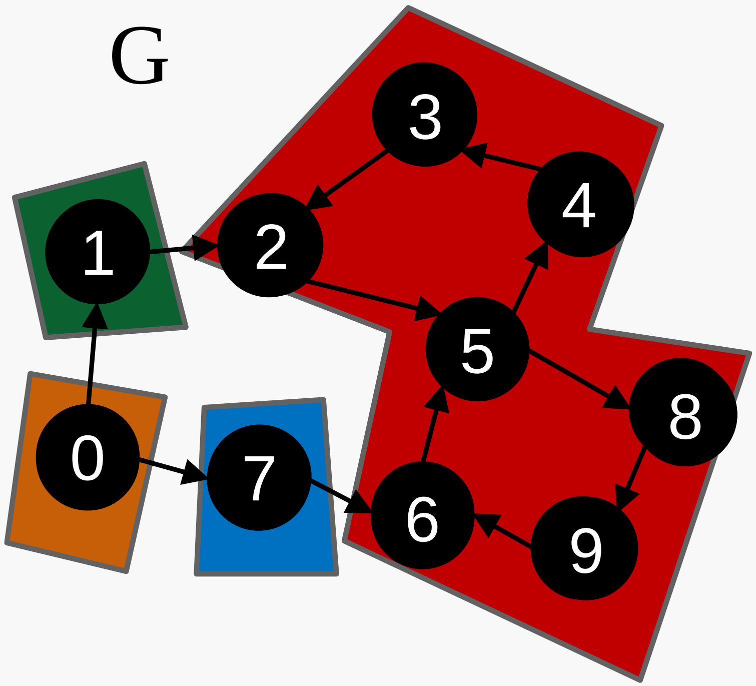
**КСС**

КСС1: 3 2 5 8 9 6 4

КСС2: 7

# Алгоритм Косарайю

В итоге получаем список КСС.




| | Visited |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| 6 | 1 |
| 7 | 1 |
| 8 | 1 |
| 9 | 1 |

| | Order |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 7 |
| 4 | 8 |
| 5 | 9 |
| 6 | 6 |
| 7 | 5 |
| 8 | 4 |
| 9 | 3 |

**КСС**

КСС1: 3 2 5 8 9 6 4

КСС2: 7

КСС3: 1

КСС4: 0

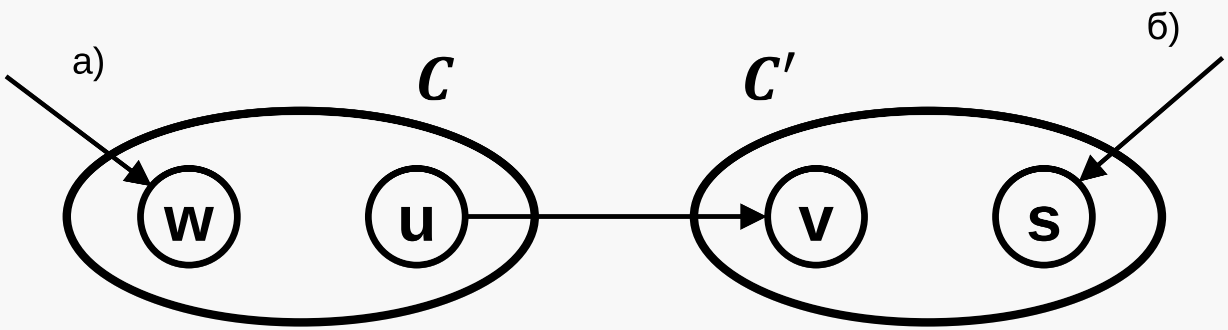
# Алгоритм Косарайю

Пусть C – КСС. Обозначим leave[C] – максимальное время выхода leave[v], $v \in C$.

<u>Лемма.</u> Пусть C, C’ – две различные КСС, и есть ребро (u, v) между ними, $u \in C, v \in C'$. Тогда $leave[C] > leave[C']$.

<u>Доказательство леммы.</u> а) Первой была достигнута КСС C – вершина $w$. Тогда в момент входа в C вся компонента C’ – белая и достижима из C. По лемме о белых путях в момент $leave[w] > leave[C']$.

б) Первой была достигнута КСС C’. В этом случае вся компонента C’ будет пройдена до обхода C, т.к. не существует пути из C’ в C. То есть $leave[C] > leave[C']$.



# Алгоритм Косарайю

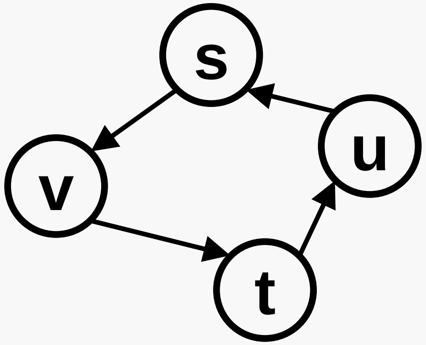
**Теорема.** Деревья, полученные в п. 3 алгоритма Косарайю, – КСС.

**Доказательство.** <=

Пусть вершины $s$ и $t$ из одной КСС.

Тогда существуют пути $s \rightsquigarrow t$ и $t \rightsquigarrow s$. Значит, вершины $s$ и $t$ попадут в одно дерево в шаге 3).

Это следует из следующего рассуждения:
Пусть $v$ – первая вершина из цикла $s \rightsquigarrow t \rightsquigarrow s$ в обходе DFS(G). Тогда в момент $entry[v]$ вершины $s$ и $t$ достижимы из $v$ по белым путям. По лемме о бп они будут обработаны в dfs($v$).



# Алгоритм Косарайю

*Продолжение доказательства теоремы.* =>

Рассмотрим дерево T – дерево обхода dfs на этапе 3.

Докажем, что T – компонента сильной связности.

Пусть T содержит два или более различных КСС и пусть C – первая КСС в обходе dfs. Существуют ребро $(v, u)$, пройденное dfs. $v \in C$ и $u \in C_2$. $C$, $C_2$ – различные КСС.

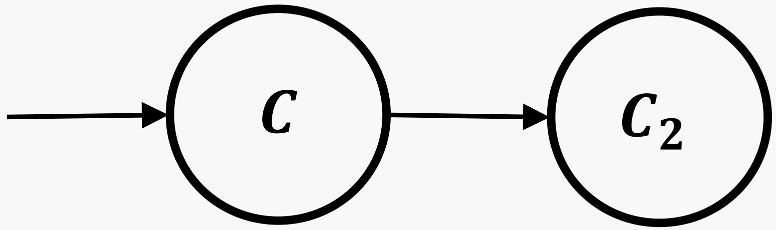
$leave_H[C] > leave_H[C_2]$ по построению T.

Но по лемме $leave_H[C] < leave_H[C_2]$, т.к. ребро $(u, v) \in H$.

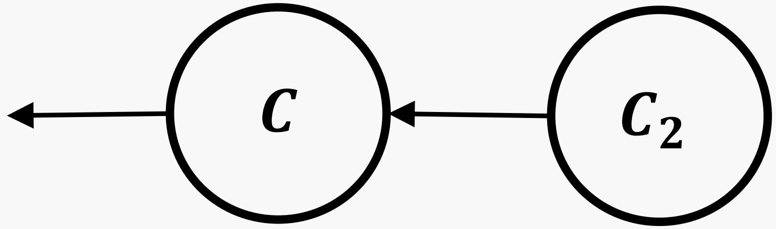
Противоречие.

# Алгоритм Косарайю

Если можем пройти по ребру при обходе dfs в п. 3, значит вершины из $C_2$ не отмечены как visited




Но такого быть не может, потому что при обходе инвертированного графа по лемме $leave_H[C] < leave_H[C_2]$




В п.3 перебираем вершины в порядке убывания $leave_H$. Следовательно, вершины из $C_2$ будут отмечены как visited до начала обхода C.

# Обход в ширину

BFS – Breadth First Search – обход в ширину.

Обход, при котором вершины обходятся в порядке увеличения расстояния от стартовой вершины.

Обход, при котором вершины обходятся «по слоям».

Как и в обходе в ширину деревьев используется очередь.

# Обход в ширину

**BFS** – Breadth First Search – обход в ширину.

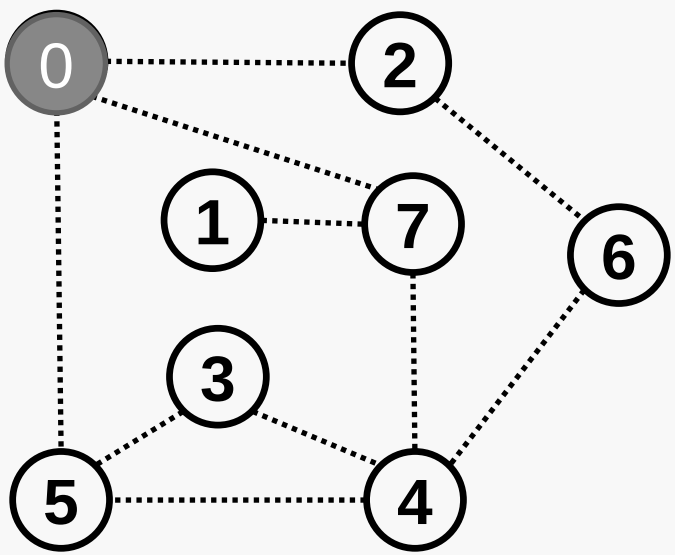
Обход, при котором вершины обходятся в порядке увеличения расстояния от стартовой вершины.

Обход, при котором вершины обходятся «по слоям».

Как и в обходе в ширину деревьев используется очередь.

```
vector<bool> visited;
void bfs( int u ) {
    std::queue<int> q;
    q.push( u ); visited[q] = true;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E ) {
            if( !visited[w] ) {
                visited[w] = true;
                q.push( w );
}   }   }   }
int MainBFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            bfs( i );
}
```

# Обход в ширину

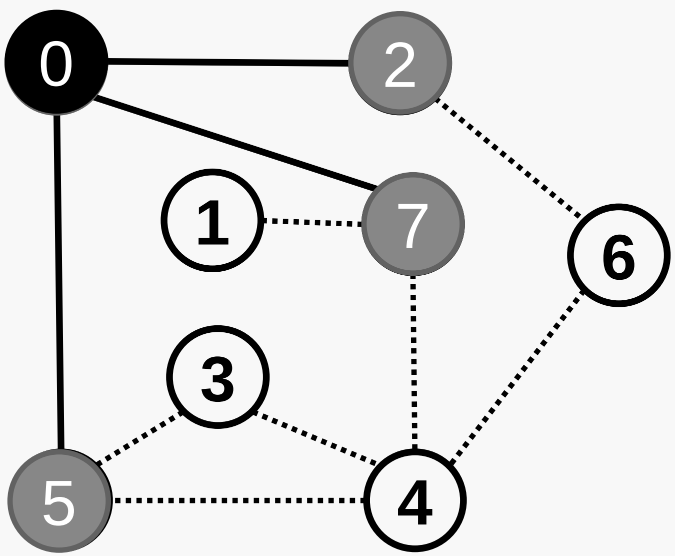



Queue: 0

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

```
vector<bool> visited;
void bfs( int u ) {
    std::queue<int> q;
    q.push( u ); visited[q] = true;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E ) {
            if( !visited[w] ) {
                visited[w] = true;
                q.push( w );
}   }   }   }
int MainBFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            bfs( i );
}
```

# Обход в ширину

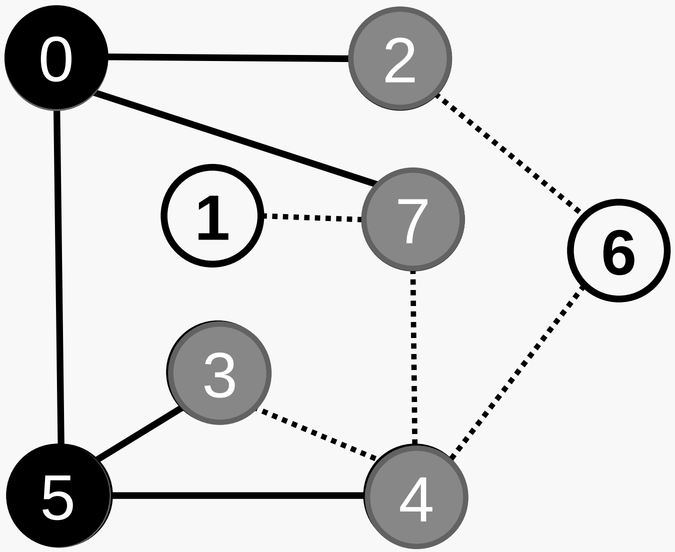



Queue: 5 7 2

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void bfs( int u ) {
    std::queue<int> q;
    q.push( u ); visited[q] = true;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E ) {
            if( !visited[w] ) {
                visited[w] = true;
                q.push( w );
}   }   }   }
int MainBFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            bfs( i );
}
```

# Обход в ширину

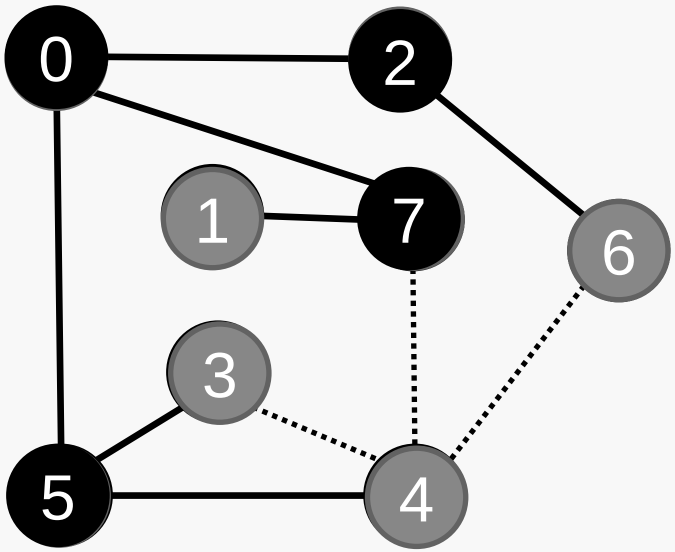



Queue: 7 2 3 4

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void bfs( int u ) {
    std::queue<int> q;
    q.push( u ); visited[q] = true;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E ) {
            if( !visited[w] ) {
                visited[w] = true;
                q.push( w );
}   }   }   }
int MainBFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            bfs( i );
}
```

# Обход в ширину



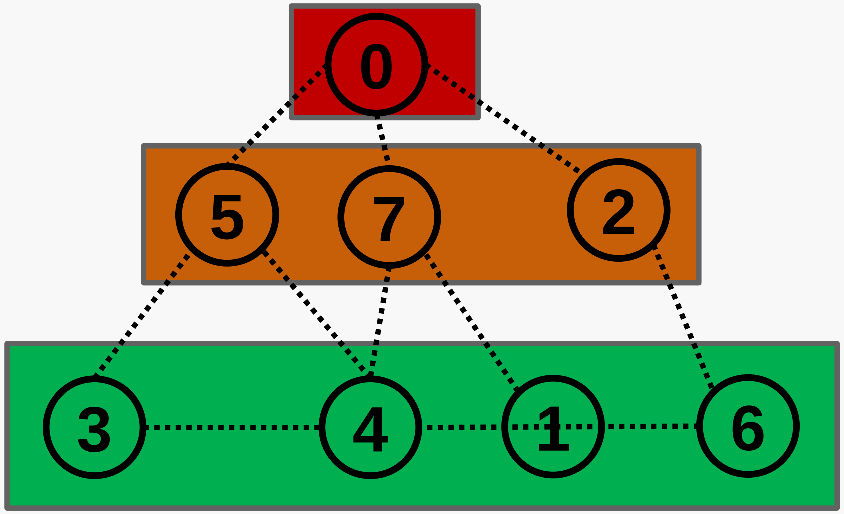

Queue: 3 4 1 6

| Индекс | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visited | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

```
vector<bool> visited;
void bfs( int u ) {
    std::queue<int> q;
    q.push( u ); visited[q] = true;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E ) {
            if( !visited[w] ) {
                visited[w] = true;
                q.push( w );
}   }   }   }
int MainBFS() {
    visited.assign( n, false );
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        if( !visited[i] )
            bfs( i );
}
```

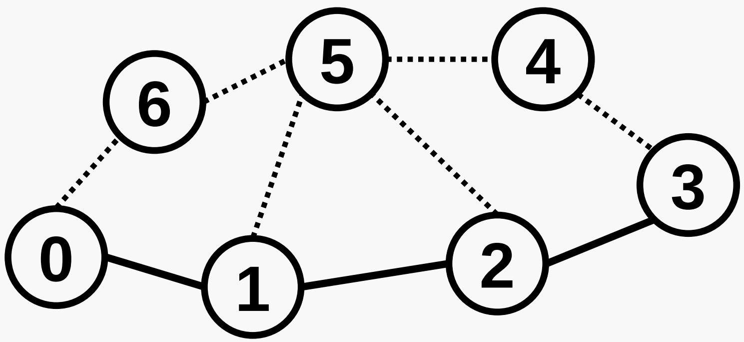
# Обход в ширину

BFS - обход по «слоям»




Вершины в одном слое, если у них одинаковое расстояние от стартовой вершины.

# Поиск кратчайших путей



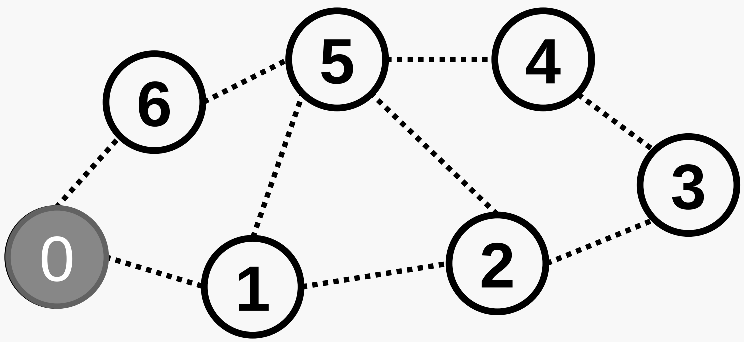

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

Алгоритм:

1. Обходим граф в ширину.
2. Для непосещенных вершин запоминаем кратчайший путь.

Сложность $O(V + E)$

# Поиск кратчайших путей





**r**

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

**pi**

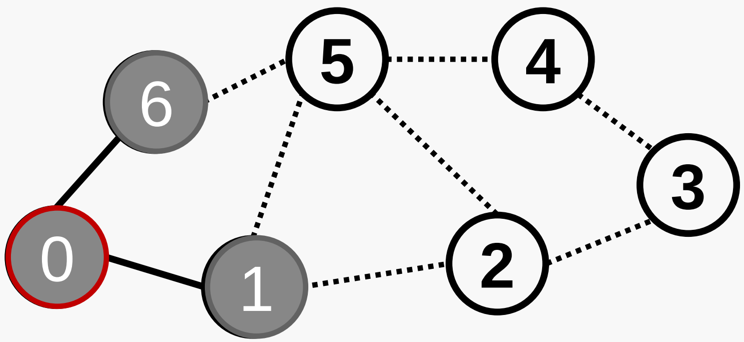
| | |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

**Queue**

0

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

# Поиск кратчайших путей




**r**

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | 1 |

**pi**

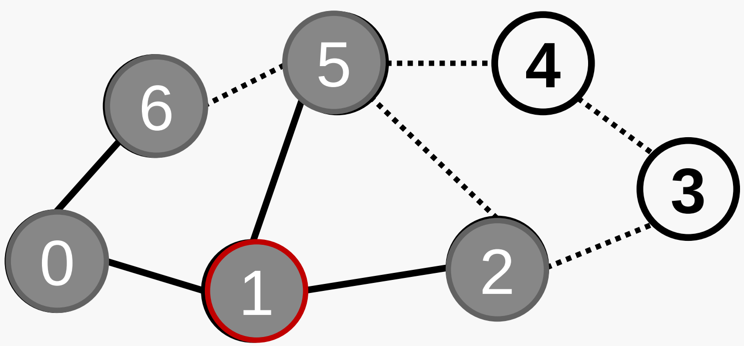
| | |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | 0 |

**Queue**

1 6

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

# Поиск кратчайших путей




**r**

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | 2 |
| 6 | 1 |

**pi**

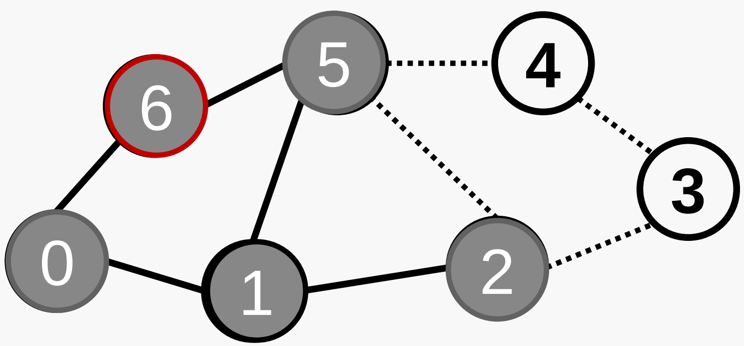
| | |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | 1 |
| 6 | 0 |

**Queue**

6 5 2

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

# Поиск кратчайших путей



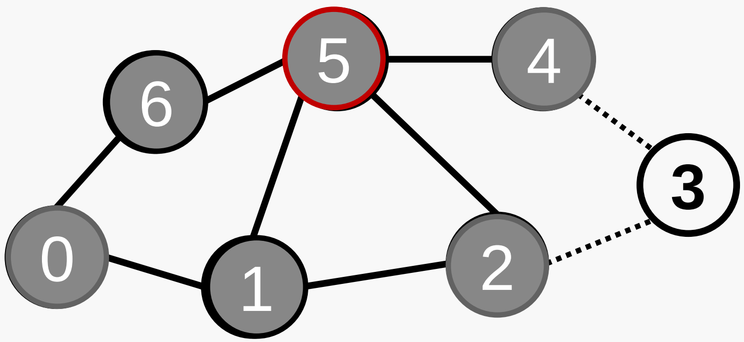

| | r | pi |
|---|---|---|
| 0 | 0 | -1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | 2 | 1 |
| 6 | 1 | 0 |

**Queue**

5 2

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

# Поиск кратчайших путей



| | r |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |
| 6 | 1 |

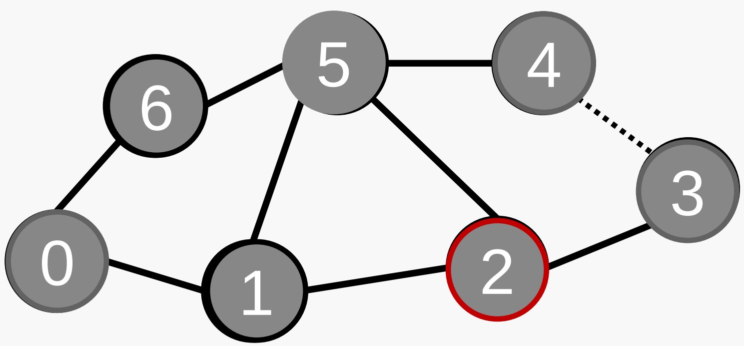
| | pi |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | |
| 4 | 5 |
| 5 | 1 |
| 6 | 0 |

**Queue**

2 4

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

# Поиск кратчайших путей




**r**

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |
| 6 | 1 |

**pi**

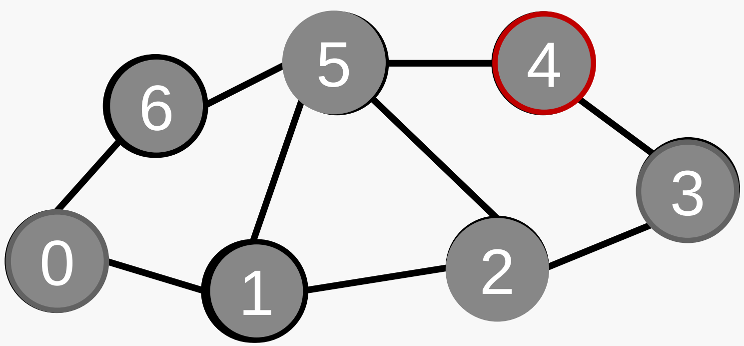
| | |
|---|---|
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 5 |
| 5 | 1 |
| 6 | 0 |

**Queue**

4 3

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

# Поиск кратчайших путей




| | r | | pi |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 2 | 5 | 1 |
| 6 | 1 | 6 | 0 |

**Queue**

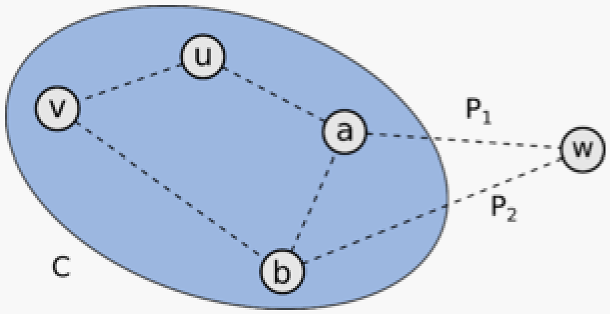
3

```
vector<int> r, pi;
void bfs( int s ) {
    r.assign( n, INT_MAX );
    std::queue<int> q;
    q.push( s ); r[s] = 0; pi[s] = -1;
    while( !q.empty() ) {
        v = q.front(); q.pop();
        for( w: (v, w) ∈ E )
            if( r[w] > r[v] + 1 ) {
                r[w] = r[v] + 1;
                pi[w] = v;
                q.push( w );
            }
    }
}
```

# Реберная двусвязность

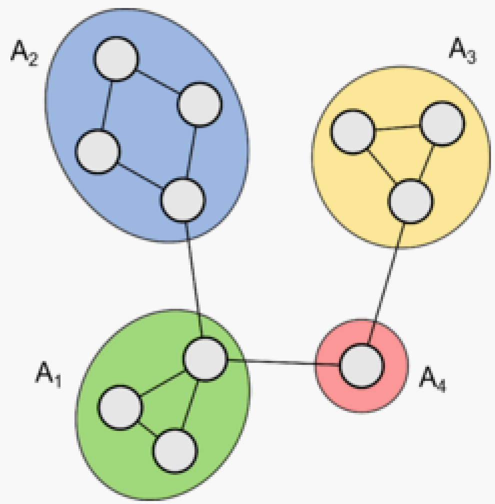
Вершины u и v в неориентированном графе G **реберно двусвязны**, если между этими вершинами существуют два реберно непересекающихся пути.

**Реберная двусвязность** – отношение эквивалентности.



# Реберная двусвязность

Вершины неориентированного графа разбиваются на **компоненты реберной двусвязности**.



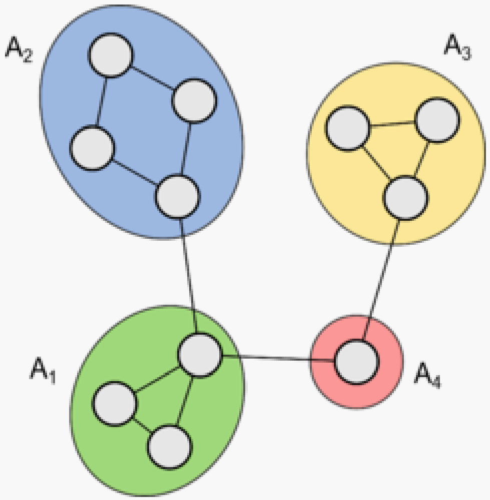
# Мост

**Мост** – ребро, связывающее две различные компоненты реберной двусвязности.

**Мост** – ребро, при удалении которого компонента связности распадается.

**Мост** – ребро (u, v), лежащее на любом пути, соединяющем u и v.

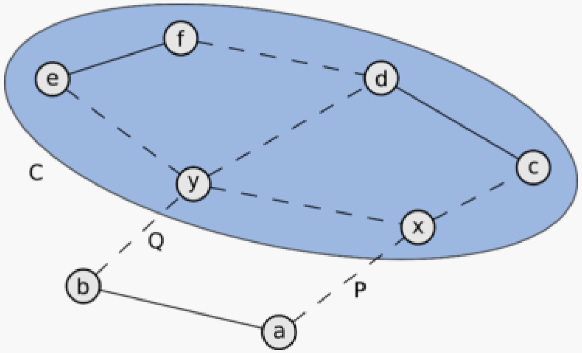
Все три определения эквивалентны.



# Вершинная двусвязность

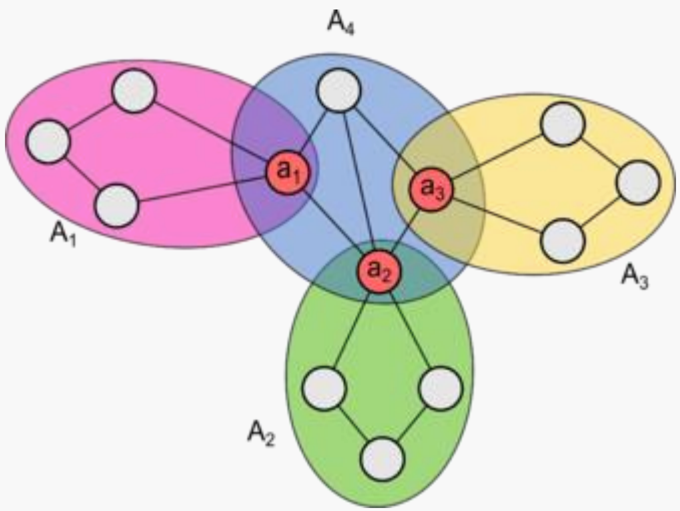
Два ребра в неориентированном графе G **вершинно двусвязны**, если существуют вершинно непересекающиеся пути, соединяющие их концы.

**Вершинная двусвязность** – отношение эквивалентности на ребрах.



# Вершинная двусвязность

Ребра неориентированного графа разбиваются на **компоненты вершинной двусвязности**.

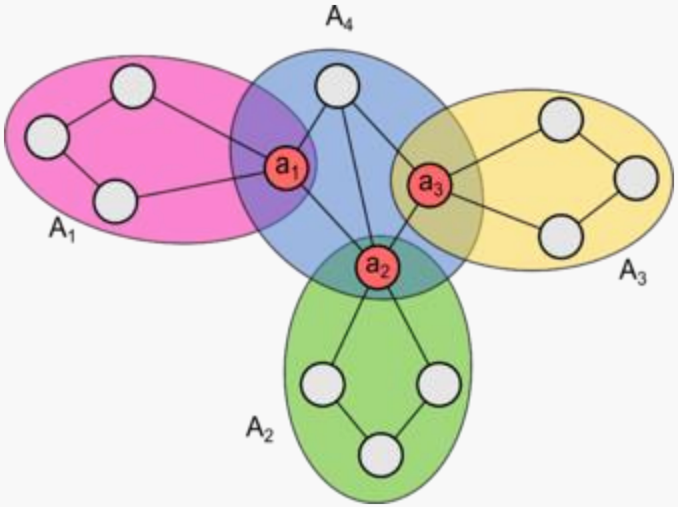


# Точка сочленения

**Точка сочленения** – вершина, при удалении которой вместе с инцидентными ей ребрами, компонента связности распадается.

**Точка сочленения** – вершина, инцидентная рёбрам, принадлежащим двум или более компонентам вершинной двусвязности.

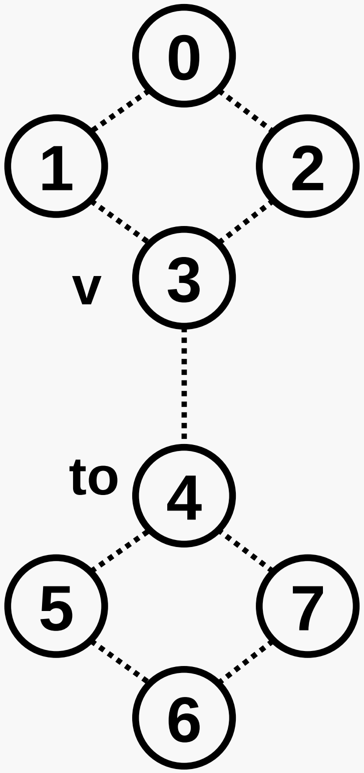
Эти определения эквивалентны.



# Поиск мостов

Если из вершины **to** или ее потомком нет ребра в вершину **v** или в ее родителей, то ребро **(v, to)** – мост.

Мы этим условием проверяем, нет ли другого пути из **v** в **to**, кроме как спуск по ребру **(v, to)** дерева обхода в глубину.



# Поиск мостов

**Проход по дереву поиска в обратную сторону**
Пропускаем ребро

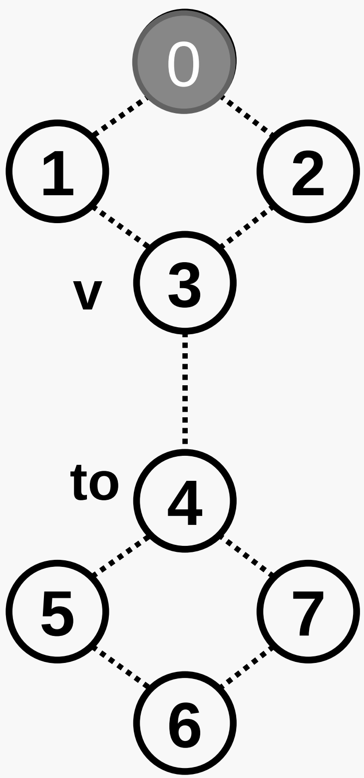
**Критерий обратного ребра**
Берем минимальное время захода

**Ребро дерева поиска**
Обрабатываем всех потомков вершины to
Берем минимальное время захода из всех потомков to

**Критерий моста**
Если время входа в to и в любого из её потомком больше времени входа в v.

```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    for( int i = 0; i < g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p )
            continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min( lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min( lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] > entry[v] )
                IS_BRIDGE( v, to );
        }
    }
}
void find_bridges() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

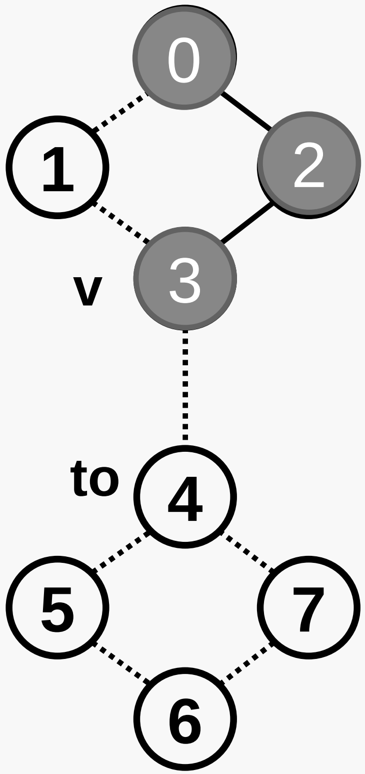
# Поиск мостов




| | used | | entry | | lowest |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 1 | |
| 2 | 0 | 2 | | 2 | |
| 3 | 0 | 3 | | 3 | |
| 4 | 0 | 4 | | 4 | |
| 5 | 0 | 5 | | 5 | |
| 6 | 0 | 6 | | 6 | |
| 7 | 0 | 7 | | 7 | |

```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    for( int i = 0; i <
g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p ) continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min(
lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min(
lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] >
entry[v] )
                IS_BRIDGE( v, to );
        }
    }
}
void find_bridges() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

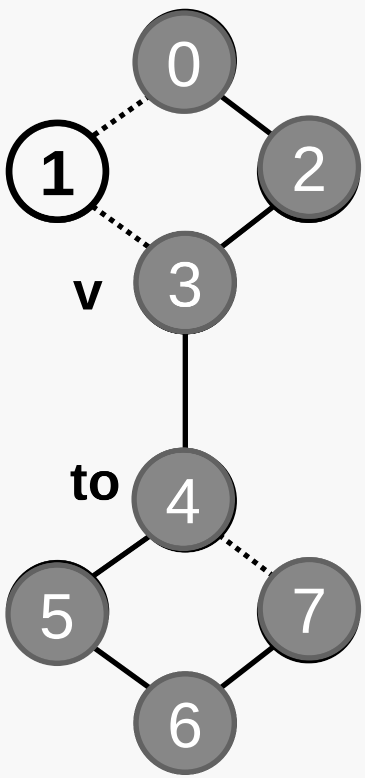
# Поиск мостов




| | used | entry | lowest |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 0 | | |
| 5 | 0 | | |
| 6 | 0 | | |
| 7 | 0 | | |

```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    for( int i = 0; i <
g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p ) continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min(
lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min(
lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] >
entry[v] )
                IS_BRIDGE( v, to );
        }
    }
}
void find_bridges() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

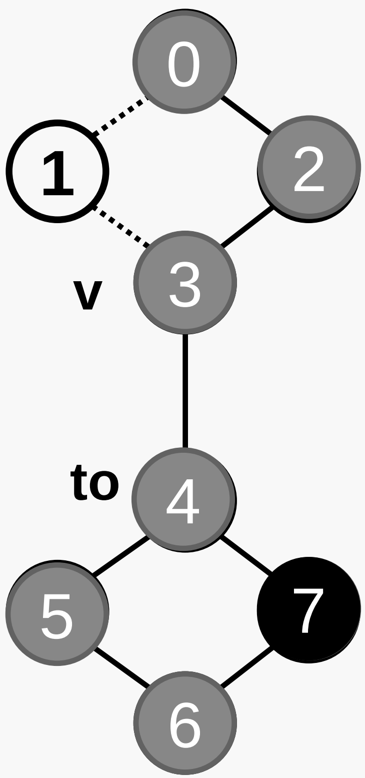
# Поиск мостов




| | used | entry | lowest |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 4 | 4 |
| 6 | 1 | 5 | 5 |
| 7 | 1 | 6 | 3 |

```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    for( int i = 0; i <
g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p ) continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min(
lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min(
lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] >
entry[v] )
                IS_BRIDGE( v, to );
        }
    }
}
void find_bridges() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

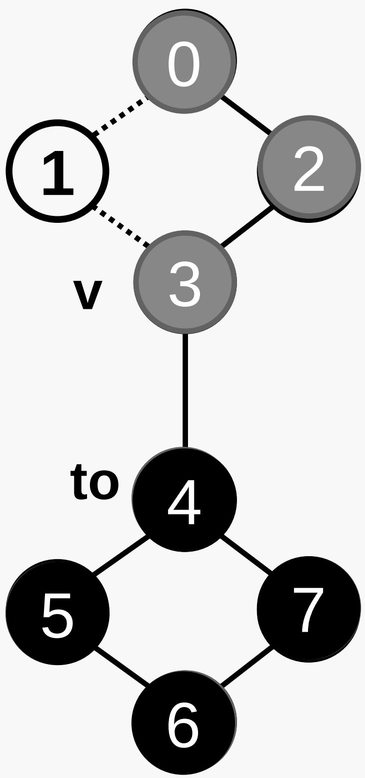
# Поиск мостов




| | used | | entry | | lowest |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 1 | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 5 | 1 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 6 | 1 | 6 | 5 | 6 | 3 |
| 7 | 1 | 7 | 6 | 7 | 3 |

```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    for( int i = 0; i <
g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p ) continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min(
lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min(
lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] >
entry[v] )
                IS_BRIDGE( v, to );
        }
    }
}
void find_bridges() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

# Поиск мостов



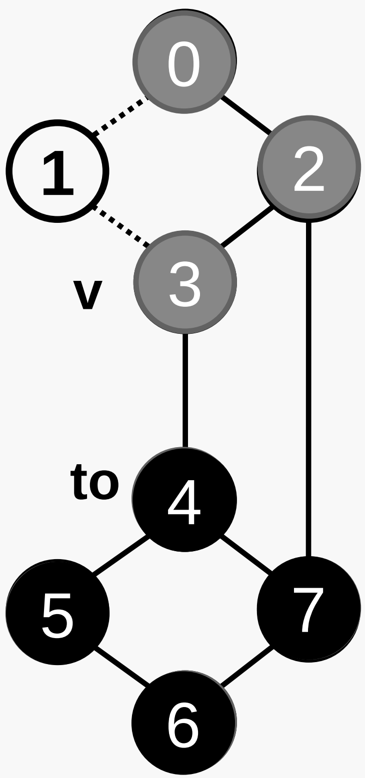

| | used | | entry | | lowest |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | 1 | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 1 | 4 | 3 | 4 | 3 |
| 5 | 1 | 5 | 4 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 6 | 4 | 6 | 3 |
| 7 | 1 | 7 | 5 | 7 | 3 |

```
lowest[to] = 3
entry[v] = 2
lowest[to] > entry[v]
```

Мост найден

```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    for( int i = 0; i <
g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p ) continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min(
lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min(
lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] >
entry[v] )
                IS_BRIDGE( v, to );
        }
    }
}
void find_bridges() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

# Поиск мостов




| | used | entry | lowest |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 1 |
| 6 | 1 | 5 | 1 |
| 7 | 1 | 6 | 1 |

```
lowest[to] = 1
entry[v] = 2
lowest[to] < entry[v]
```

Моста нет

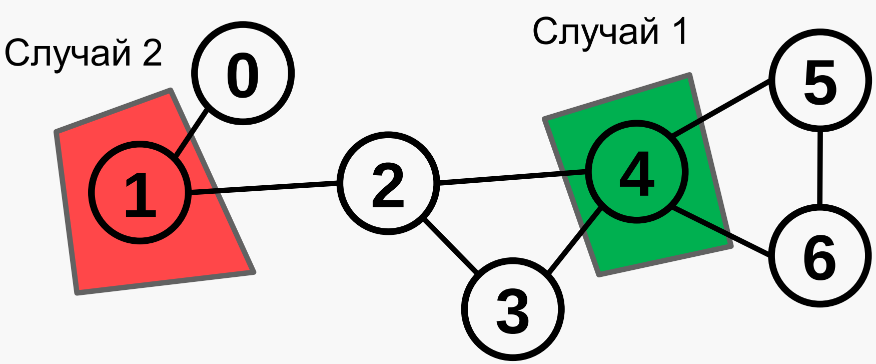
```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    for( int i = 0; i <
g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p ) continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min(
lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min(
lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] >
entry[v] )
                IS_BRIDGE( v, to );
        }
    }
}
void find_bridges() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

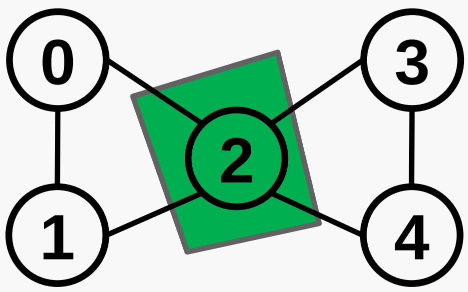
# Поиск точек сочленения

Рассматриваются два случая:

1) Вершина **v** не корень. Если из вершины **to** или ее потомком нет ребра в *родителей* **v**, то вершина **v** – **точка сочленения**.

2) Вершина **v** – корень. Тогда она является **точкой сочленения**, если в дереве обхода в глубину имеет более одного потомка.



# Поиск точек сочленения

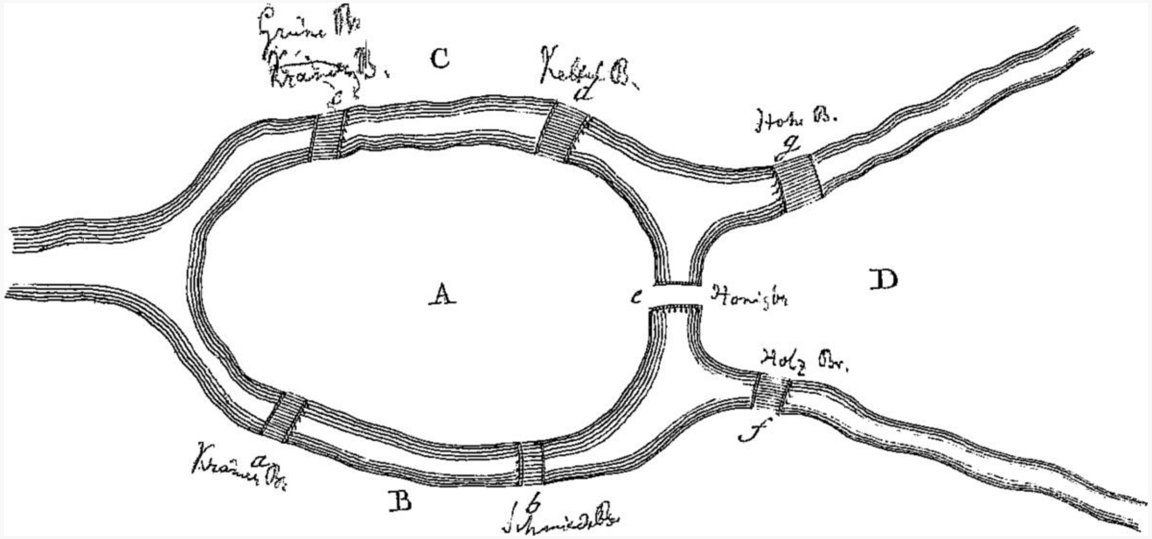
```
void dfs( int v, int p = -1 ) {
    used[v] = true;
    entry[v] = lowest[v] = time++;
    int children = 0;
    for( int i = 0; i < g[v].size(); ++i ) {
        int to = g[v][i];
        if( to == p )
            continue;
        if( used[to] )
            lowest[v] = min( lowest[v], entry[to] );
        else {
            dfs( to, v );
            lowest[v] = min( lowest[v], lowest[to]);
            if( lowest[to] >= entry[v] && p != -1 )
                IS_CUTPOINT( v, to );
            children++;
        }
    }
    if( children > 1 && p == -1 )
        IS_CUTPOINT( v );

}
void find_cutpoints() {
    time = 0;
    for( int i = 0; i < n; ++i )
        used[i] = false;
    for( int i = 0; i < n; ++I )
        if( !used[i] )
            dfs( i );
}
```

# Эйлеровы графы

**Задача Эйлера**: Найти путь (цикл), проходящий по всем ребрам графа один раз.

Кёнигсбергский мосты:



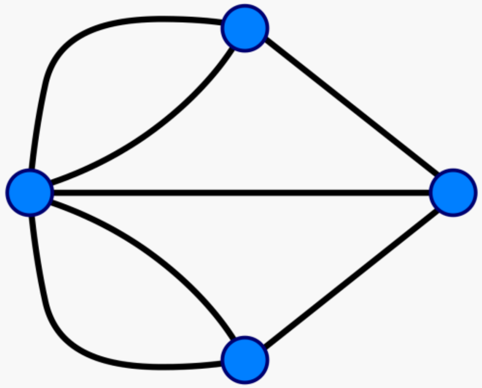
# Эйлеровы графы

**Эйлеров путь** – это путь, проходящий по всем ребрам графа, притом по одному разу.

**Эйлеров цикл** – это замкнутый эйлеров путь.

**Эйлеров граф** – это граф, содержащий эйлеров цикл.

**Полуэйлеров граф** – это граф, содержащий эйлеров путь.



G – связный неориентированный граф.

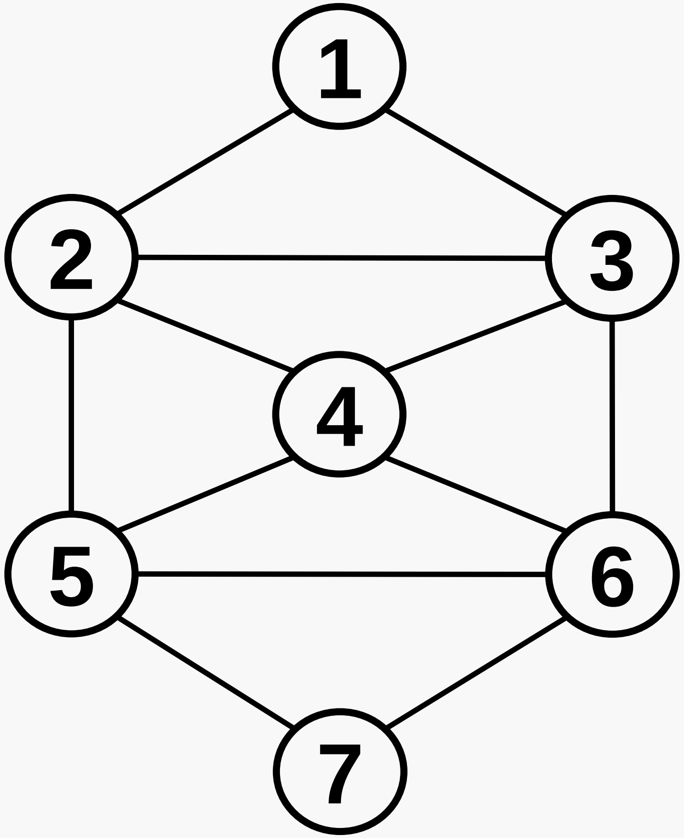
- Эйлеров путь существует тогда и только тогда, когда в G не более двух нечетных вершин и они являются началом и концом пути.
- Эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда в G все вершины четные.

# Эйлеровы графы

## Поиск эйлерова пути

Алгоритм запускаем из вершины с нечетной степенью

1. Перебираем все ребра, выходящие из V
   1. Удаляем это ребро из графа
   2. Вызываем п.1 для второго конца этого ребра
2. Добавляем V в ответ



МГТУ
им. Н. Э. Баумана
ТЕХНОПАРК
Mail.Ru Group

# Вопросы?

**Спасибо за внимание!**