**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA**

**FACULTAD DE PRODUCCIÓN Y SERVICIOS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA DE SISTEMAS**


**Curso:** Laboratorio – Estructuras de Datos y Algoritmos

**Grupo:** "A"

**Tema:** Grafos

**Docente:** Rivero Tupac de Lozano**,** Edith Pamela

**Alumno:** Hincho Jove, Angel Eduardo

Arequipa - Perú

Agosto 2021

# Ejercicios propuestos

## 1. Crear un repositorio en GitHub, donde incluyan la resolución de los ejercicios propuestos y el informe.

Enlace al repositorio en GitHub: https://github.com/aHinchoJove/EDA-Lab09-Grafos.git

## 2. Implementar el código para un Grafo cuya representación sea realizada mediante una Lista de Adyacencia.

Para poder dar solución a este primer ejercicio se crearon las Clases:

- Nodo: Representación en código de un Nodo que forma parte de una Lista Enlazada. Tiene como atributos su Dato y una referencia a otro Nodo. Posee setters y getters.

```java
public class Nodo<T> {

    // Atributos de la clase Nodo

    protected T data;
    protected Nodo<T> next;

    // Constructores de la clase Nodo

    public Nodo(T data) {
        this(data, null);
    }

    public Nodo(T data, Nodo<T> next) {
        setData(data);
        setNext(next);
    }
```

- ListaEnlazada: Representación en código de una Lista Enlazada que usa Nodos para poder enlazar elementos. Tiene como atributo un Nodo inicial donde se unen o insertan otros Nodos mediante la referencia 'next'. Posee setters y getters.

```java
public class ListaEnlazada<T> {

    // Atributos de la clase ListaEnlazada

    protected Nodo<T> first;

    // Constructor de la clase ListaEnlazada

    public ListaEnlazada() {
        setFirst(null);
    }
```

Así mismo, la clase ListaEnlazada posee algunos métodos resaltantes y que serán importantes para implementar las demás funcionalidades serán los siguientes.

a) Insert e InsertLast: Métodos que agregan elementos al inicio o al final de la ListaEnlazada. Esto se logra guardando la referencia hacia el primer Nodo e iterar según la posición en la cual se quiera insertar, al inicio o al final.

```java
// Insertar un Nodo al inicio
public void insert(T data) {
    setFirst(new Nodo<T>(data, getFirst()));
}

// Insertar al final de un Nodo
public void insertLast(T data) {
    Nodo<T> aux = getFirst();
    if(aux == null) {
        // Si el nodo auxiliar es nulo insertar al inicio
        insert(data);
    } else {
        // Recorrer el Nodo hasta llegar al final
        while(aux.getNext() != null) {
            aux = aux.getNext();
        }
        // Aux contiene el ultimo Nodo, insertar al siguiente
        aux.setNext(new Nodo<T>(data));
    }
}
```

b) Search: El método search recibe un tipo de dato genérico que se buscará dentro de toda la Lista, se retornará el mismo valor que se buscó si está dentro de la Lista y si no se encuentra dentro de la Lista se devuelve un valor ‘nulo’.

```java
// Buscar un elemento dentro de nuestra Lista Enlazada
public T search(T data) {
    // Rescatar la referencia al primer Nodo
    Nodo<T> aux = getFirst();
    // Recorrer la Lista Enlazada desde el primer Nodo
    while(aux != null && !aux.getData().equals(data)) {
        aux = aux.getNext();
    }
    // Evaluar el contenido y dar respuesta
    if(aux != null) {
        // Busqueda con exito
        return aux.getData();
    } else {
        // Busqueda sin exito
        return null;
    }
}
```

c) Remove: El método remove recibe un tipo de gato genérico que se eliminará de la Lista, se retornará el mismo valor que se eliminó y si no se pudo eliminar o no se encontró el elemento dentro de la Lista se devuelve un valor ‘nulo’.

```java
// Eliminar un elemento dentro de nuestra Lista Enlazada
public T remove(T data) {
    // Variable de apoyo para el retorno del metodo
    T retornar = null;
    // Rescatar el Nodo inicial de la Lista
    Nodo<T> aux = getFirst();
    if(getFirst().getData().equals(data)) {
        // Eliminar al inicio de la Lista
        setFirst(getFirst().getNext());
        retornar = null;
    } else {
        // Eliminar en medio de la Lista
        while(aux.getNext() != null) {
            if(aux.getNext().getData().equals(data)) {
                retornar = aux.getNext().getData();
                aux.setNext(aux.getNext().getNext());
            } else {
                aux = aux.getNext();
            }
        }
    }
    return retornar;
}
```

d) Copia: Método que es invocado por una Lista y devuelve otra Lista con el mismo contenido, el método copia la Lista en contenido.

```java
public ListaEnlazada<T> copiar() {
    // Rescatar el Nodo inicial
    Nodo<T> inicio = getFirst();
    // Crear una nueva Lista Enlazada
    ListaEnlazada<T> copia = new ListaEnlazada<T>();
    while(inicio != null) {
        copia.insertLast(inicio.getData());
        inicio = inicio.getNext();
    }
    return copia;
}
```

e) Incluye: Método que compara la Lista que lo llama con otra Lista. Recordar que la Lista que llama al método es la más grande y la que se envía como parámetro es la de menor tamaño.

```java
// Metodo para ver si una lista está incluida en otra
// OJO: La Lista que llama al metodo es la mas grande
public boolean incluye(ListaEnlazada<T> otraLista) {
    // Variable de apoyo para el retorno del metodo
    boolean retornar = false;
    // Rescatar el Nodo inicial de la Lista pequenia
    Nodo<T> inicioP = otraLista.getFirst();
    // Hacer una copia de Lista grande
    ListaEnlazada<T> copia = copiar();
    // Iterar mientras la Lista pequenia tenga Nodos
    while(inicioP != null) {
        // Buscar si inicioP esta dentro de la Lista grande
        T buscar = copia.search(inicioP.getData());
        // Si inicioP se encuentra en la Lista grande
        if(buscar != null) {
            System.out.println("El elemento " + inicioP.getData()
                + ", esta incluido");
            copia.remove(inicioP.getData());
            retornar = true;
        } else {
            System.out.println("El elemento " + inicioP.getData()
            + ", no esta incluido");
            retornar = false;
            break;
        }
        inicioP = inicioP.getNext();
    }
    return retornar;
}
```

- Vertice: Representación en código de un Vértice que forma parte de un Grafo. Esta representación tiene como atributos:
    - El contenido del Vértice de tipo genérico ‘data’
    - La Lista de Adyacencia para el Vértice que es una Lista de Aristas.
    - Una etiqueta ‘label’ la cual indica si el Vértice ha sido o no explorado.

```java
public class Vertice<T> {

    // Atributos de la clase Vertice

    protected T data;
    protected ListaEnlazada<Arista<T>> listaAdyacencia;
    protected int label; // 0 => Sin explorar, 1 => Explorada

    // Constructor de la clase Vertice

    public Vertice(T data) {
        setData(data);
        setLista();
    }
```

- Arista: Representación en código de una Arista que une dos Vértices dentro de un Grafo. La Arista cuenta a su vez con los siguientes atributos:
    - Un Vértice que será el opuesto o destino de la Arista.
    - Un Peso que será el costo para poder recorrer la Arista dentro del Grafo.
    - Una etiqueta la cual indica si la Arista ha sido o no visitada o si es de tipo Back / Cross, o sea, una Arista descubierta más no visitada.

```java
public class Arista<T> {

    // Atributos de la clase Arista

    protected Vertice<T> destino;
    protected int peso;
    protected int label; // 0 => Sin explorar, 1 => Descubierta, 2 => Back

    // Constructores de la clase Arista

    public Arista(Vertice<T> destino) {
        this(destino, -1);
    }

    public Arista(Vertice<T> destino, int peso) {
        setDestino(destino);
        setPeso(peso);
    }
```

- Grafo: Representación en código de un Grafo con sus Vértices y Aristas entre ellos. La clase Grafo tiene como único atributo una Lista de Vértices.

```java
// Representacion de un Grafo mediante una Lista de Adyacencia

public class Grafo<T> {

    // Atributos de la clase Grafo

    protected ListaEnlazada<Vertice<T>> listaVertices;

    // Constructor de la clase Grafo

    public Grafo() {
        setVertices();
    }
```

En la clase Grafo tenemos métodos que nos serán útiles para poder realizar operaciones tales como: Agregar vértices, aristas, etc.

a) InsertarVertice: Método que nos ayuda a insertar Vértices dentro del Grafo y verifica que no se ingrese dos veces el mismo Vértices.

```java
// Metodo para insertar Vertices en el Grafo
public void insertarVertice(T data) {
    Vertice<T> nuevo = new Vertice<T>(data);
    if(getVertices().search(nuevo) != null) {
        System.out.println("El Vertice ya existe ...");
        return;
    } else {
        getVertices().insertLast(nuevo);
    }
}
```

b) InsertarArista: Método que nos permite insertar Aristas entre los Vértices del Grafo No Ponderado, llama a un método auxiliar por si se quiere insertar un Grafo Ponderado donde las Aristas tienen un peso o costo definido.

```java
// Metodo para insertar Aristas en el Grafo
public void insertarArista(T origen, T destino) {
    insertarArista(origen, destino, -1);
}

// Metodo auxiliar para insertar Aristas en el Grafo
public void insertarArista(T origen, T destino, int peso) {

    // Buscar si existen los Vertices que se quieren unir
    Vertice<T> refOrigen = getVertices().search(new Vertice<T>(origen));
    Vertice<T> refDestino = getVertices().search(new Vertice<T>(destino));

    // En caso de no existir alguno de los dos Vertices mandar un mensaje
    if(refOrigen == null || refDestino == null) {
        System.out.println("El Vertice de origen y/o destino no existen ...");
        return;
    }

    // Buscar si existe una Arista ya registrada entre los dos Vertices
    if(refOrigen.getLista().search(new Arista<T>(refDestino)) != null) {
        System.out.println("Ya existe una Arista entre los Vertices ...");
        return;
    }

    // En otro caso, valido, insertar la Arista entre los Vertices
    refOrigen.getLista().insertLast(new Arista<T>(refDestino));
    refDestino.getLista().insertLast(new Arista<T>(refOrigen));

}
```

c) BuscarVertice: Método que busca un Vértice dentro del Grafo, devuelve el Vértice buscado si es que existe en la Lista de Vértices del Grafo o devuelve un valor 'nulo' en caso que el Vértice no se encuentre dentro de la Lista de Vértices del Grafo.

```java
// Metodo de apoyo para buscar un Vertice
public Vertice<T> buscarVertice(Vertice<T> buscar) {
    return getVertices().search(buscar);
}
```

- TestGrafo: Clase de apoyo en la cual se prueban los métodos que se implementan a la clase Grafo. En esta clase de apoyo creamos objetos de la clase Grafo y hacemos diferentes acciones como, por ejemplo, agregar Vértices, Aristas y mostrar la Lista de Adyacencia.

```java
public class TestGrafo {

    public static void main(String[] args) {

        // Creando un objeto de tipo Grafo
        Grafo<String> grafo = new Grafo<String>();

        // Insertando algunos Vertices
        grafo.insertarVertice("Lima");
        grafo.insertarVertice("Arequipa");
        grafo.insertarVertice("Cusco");
        grafo.insertarVertice("Piura");
        grafo.insertarVertice("Tarapoto");

        // Insertando algunas Aristas
        grafo.insertarArista("Lima", "Arequipa", 8);
        grafo.insertarArista("Cusco", "Arequipa", 4);
        grafo.insertarArista("Piura", "Lima", 5);
        grafo.insertarArista("Cusco", "Lima", 6);
        grafo.insertarArista("Piura", "Tarapoto", 3);

        // Imprimiendo el contenido del Grafo
        System.out.println("Grafo de ciudades:\n");
        System.out.println(grafo);
```

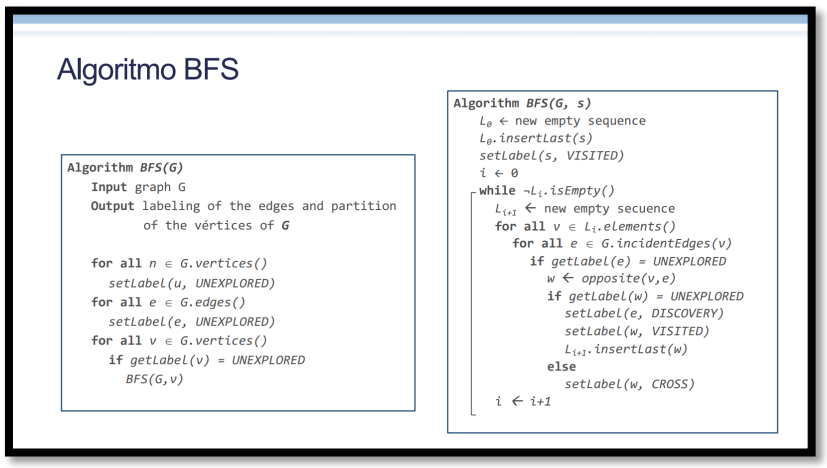
## 3. Implementar BSF, DFS y Dijkstra con sus respectivos casos de prueba

a) InicializarLabel: Método que nos será útil para los recorridos, el método 'inicializarLabel' establece las etiquetas de los Vértices del Grafo como No Visitados, es decir el atributo Label de cada Vértices se establecerá como 0.

```java
// Metodo de apoyo para inicializar las etiquetas

private void inicializarLabel() {
    Nodo<Vertice<T>> aux = getVertices().getFirst();
    for( ; aux != null; aux = aux.getNext()) {
        aux.getData().setLabel(0);
        Nodo<Arista<T>> auxA = aux.getData().getLista().getFirst();
        for( ; auxA != null; auxA = auxA.getNext()) {
            auxA.getData().setLabel(0);
        }
    }
}
```

b) Recorrido BSF: Para poder implementar el recorrido BFS se hará uso del Pseudo-Código visto en las clases de Teoría del curso de EDA.



Para ello tenemos el método ‘BFS’ que nos ayudará a verificar si el Vértice existe, inicializar las etiquetas de los Vértices y recorrer el Grafo mediante el recorrido ‘BFS’. Este se encuentra dentro de la clase Grafo y como se muestra en el Pseudo-Código de Teoría llama a otro método ‘BFSApoyo’.

```java
// Metodo para el recorrido BFS

public void BFS(T data) {
    Vertice<T> nuevo = new Vertice<T>(data);
    Vertice<T> auxiliar = getVertices().search(nuevo);
    // Verificar que el Vertice existe dentro del Grafo
    if(auxiliar == null) {
        System.out.println("El Vertice no existe ...");
        return;
    }
    // En caso existe el Vertice, inicializar las etiquetas
    inicializarLabel();
    BFSApoyo(auxiliar);
}
```

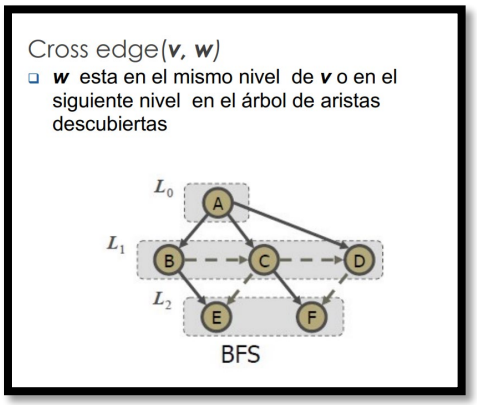
El método ‘BFSApoyo’ también está basado en el Pseudo-Código de Teoría. Primero marcaremos como ‘Visitado’ en Vértice donde empezaremos el recorrido BFS y crearemos una Lista de Listas de Vértices ya que el recorrido BFS se basa en recorrer el Grafo mediante niveles o Listas de Listas.

```java
// Metodo de apoyo para el recorrido BFS

private void BFSApoyo(Vertice<T> auxiliar) {
    // Creando una nueva Lista de Listas de Vertices
    ListaEnlazada<ListaEnlazada<Vertice<T>>> lista =
        new ListaEnlazada<ListaEnlazada<Vertice<T>>>();
    // Insertar el Vertice auxiliar al final
    ListaEnlazada<Vertice<T>> insertar = new ListaEnlazada<Vertice<T>>();
    insertar.insertLast(auxiliar);
    lista.insertLast(insertar);
    // Marcar como ya visitado
    auxiliar.setLabel(1);
    // Recorrer la Lista de Lista de Vertices
    Nodo<ListaEnlazada<Vertice<T>>> auxL = lista.getFirst();
    // Recorrer la primera lista de la Lista de Listas de Vertices
    while(auxL != null) {
        Nodo<Vertice<T>> auxV = auxL.getData().getFirst();
        ListaEnlazada<Vertice<T>> listaAux = new ListaEnlazada<Vertice<T>>();
        // Recorrer la Lista de Vertices
        while(auxV != null) {
            Nodo<Arista<T>> auxA = auxV.getData().getLista().getFirst();
            System.out.println(auxV.getData().getData() + ", ");
            // Recorrer la Lista de Aristas
            while(auxA != null) {
                // Verificar la Arista que aun no ha sido visitada
                if(auxA.getData().getLabel() == 0) {
                    // Rescatar su opuesto o destino
                    Vertice<T> opuesto = auxA.getData().getDestino();
                    // Verificar que el Vertice no se ha visitado
                    if(opuesto.getLabel() == 0) {
                        // Cambiar el valor del Vertice como visitado
                        opuesto.setLabel(1);
                        // Cambiar el valor de la Arista como visitada
                        auxA.getData().setLabel(1);
                        // Insertar el Vertice opuesto en la listaAux
                        listaAux.insertLast(opuesto);
                    } else {
```

Iteraremos entre las Listas de Vértices, luego en las Vértices y finalmente en las Aristas que contiene el Vértice de la iteración. Verificaremos si el Vértice de destino u opuesto de las Aristas todavía no ha sido visitado, si no ha sido visitado entonces la establecemos como visitado y también la Arista de la iteración.

```
                    } else {
                        // Si ya se ha visitado, establecerlo como Back / Cross
                        auxA.getData().setLabel(2);
                    }
                }
                auxA = auxA.getNext();
            }
            auxV = auxV.getNext();
        }
        // Asi mismo verificar si la listaAux es diferente de nulo
        if(listaAux.getFirst() != null) {
            // Si es diferente de nulo agregar otra en auxL
            auxL.setNext(new Nodo<ListaEnlazada<Vertice<T>>>(listaAux));
            // No olvidar avanzar para poder romper los ciclos
            auxL = auxL.getNext();
        } else {
            // Si es igual a nulo entonces no se agrego nada
            // Solo debemos avanzar en la Lista de Listas de Vertices
            auxL = auxL.getNext();
        }
    }
}
```




Si ya está visitado entonces establecerlo como Cross. Finalmente verificar que la Lista auxiliar de Vértices no está vacía, si la Lista de Vértices auxiliar no está vacía se agrega a la Lista de Listas de Vértices y en caso de estar vacía pasamos a la siguiente Lista de Vértices. Por último, en la clase TestGrafo tenemos un objeto de tipo Grafo de Strings, de nombre ‘grafo’. Este Grafo contiene nombre de ciudades del Perú y como estos se relacionan, veamos el Grafo y su Lista de Adyacencia.

```
Grafo de ciudades:

Contenido del Grafo:
Lima ==> Arequipa, Piura, Cusco,
Arequipa ==> Lima, Cusco,
Cusco ==> Arequipa, Lima,
Piura ==> Lima, Tarapoto,
Tarapoto ==> Piura,
```

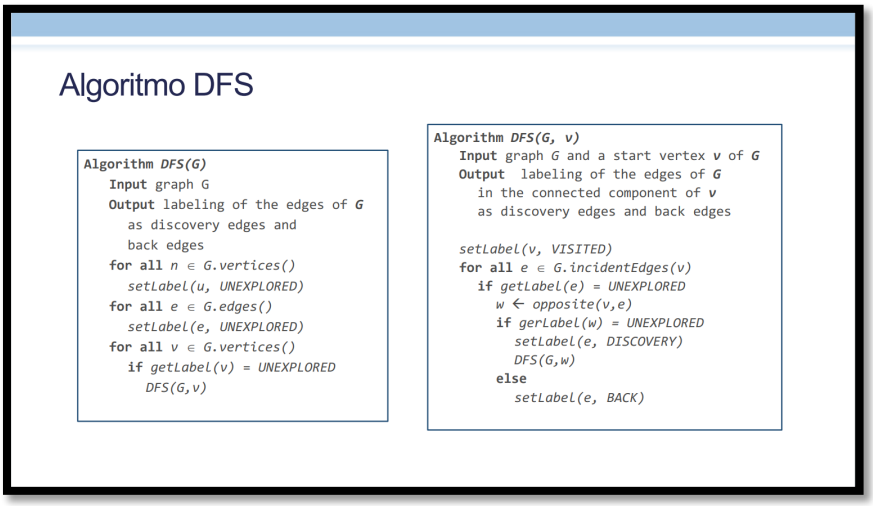
Probaremos el recorrido BFS en el objeto ‘grafo’ partiendo de la ciudad de Arequipa.

```
// Probando el recorrido BFS
System.out.println("Probando el recorrido BFS para Arequipa");
grafo.BFS("Arequipa");
```

Veamos el resultado por consola al utilizar el método BFS.

```
Probando el recorrido BFS para Arequipa
Arequipa,
Lima,
Cusco,
Piura,
Tarapoto,
```

c) Recorrido DFS: Para poder implementar el recorrido DFS se hará uso del Pseudo-Código visto en las clases de Teoría del curso de EDA.




Para ello tenemos el método ‘DFS’ que nos ayudará a verificar si el Vértice existe, inicializar las etiquetas de los Vértices y recorrer el Grafo mediante el recorrido ‘DFS’. Este se encuentra dentro de la clase Grafo y como se muestra en el Pseudo-Código de Teoría llama a otro método ‘DFSApoyo’.

```
// Metodo para el recorrido DFS

public void DFS(T data) {
    Vertice<T> nuevo = new Vertice<T>(data);
    Vertice<T> auxiliar = getVertices().search(nuevo);
    // Verificar que el Vertice existe dentro del Grafo
    if(auxiliar == null) {
        System.out.println("El Vertice no existe ...");
        return;
    }
    // En caso existe el Vertice, inicializar las etiquetas
    inicializarLabel();
    DFSApoyo(auxiliar);
}
```

El método ‘DFSApoyo’ también está basado en el Pseudo-Código de Teoría. Primero marcaremos como ‘Visitado’ en Vértice donde empezaremos el recorrido DFS en este caso no se requiere crear alguna estructura auxiliar. Debemos iterar por las Aristas que tenga el Vértice en el cual estamos trabajando o iterando. Dependiendo del Vértice opuesto o de destino de la Arista, de su etiqueta, si está no visitada entonces debemos marcarla como visitada mientras que en caso de estar vistada marcarla como Back.

```
// Metodo de apoyo para el recorrido DFS

private void DFSApoyo(Vertice<T> auxiliar) {
    // Marcarlo como ya visitado
    auxiliar.setLabel(1);
    // Mostrarlo por consola
    System.out.println(auxiliar.getData() + ", ");
    // Recorrer la lista de Aristas del Vertice
    Nodo<Arista<T>> auxA = auxiliar.getLista().getFirst();
    for( ; auxA != null; auxA = auxA.getNext()) {
        // Evaluar la etiqueta
        if(auxA.getData().getLabel() == 0) {
            Vertice<T> opuesto = auxA.getData().getDestino();
            // Verificar la etiqueta del vecino
            if(opuesto.getLabel() == 0) {
                // Cambiar la etiqueta a Descubierto
                auxA.getData().setLabel(1);
                // Llamar al metodo recursivamente con el opuesto
                DFSApoyo(opuesto);
            } else {
                // Si no es verdad la etiquera sera Back
                auxA.getData().setLabel(2);
            }
        }
    }
}
```

Como sabemos, en la clase TestGrafo está el objeto de tipo Grafo, ‘grafo’, que contiene nombre de ciudades del Perú. Realizaremos el recorrido DFS para el Grafo empezando desde la ciudad de Cusco.

```
// Probando el recorrido DFS
System.out.println("Probando el recorrido DFS para Cusco");
grafo.DFS("Cusco");
```

Veamos el resultado por consola al utilizar el método DFS.

```
Probando el recorrido DFS para Cusco
Cusco,
Arequipa,
Lima,
Piura,
Tarapoto,
```

d) Recorrido Dijkstra: Lamentablemente, no pude implementar el código para el algoritmo Dijkstra. Por favor, aceptar las disculpas del caso.

## 4. Solucionar, dibujar y mostrar la Lista de Adyacencia para el Grafo de palabras

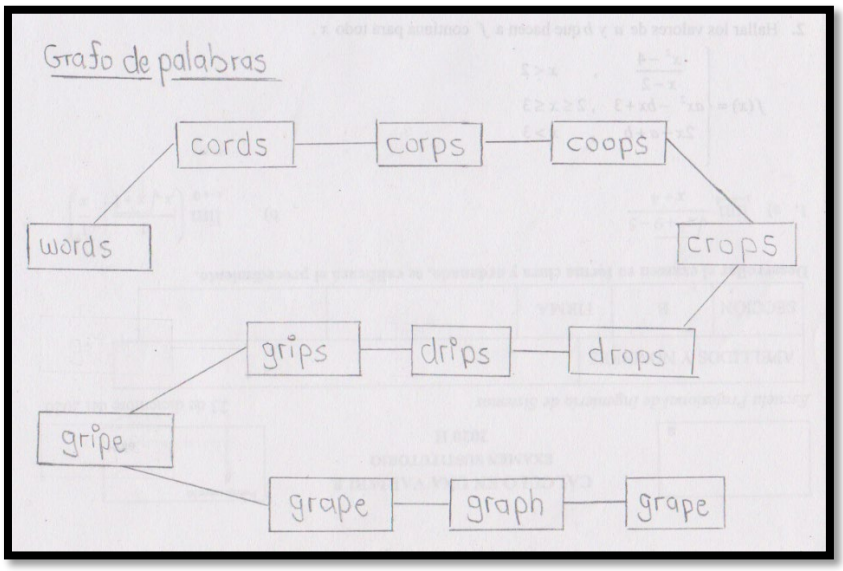
En este caso, se nos pone como 'condiciones' lo siguiente:

- Para que dos palabras sean adyacentes deben diferir exactamente en una posición.
- Las palabras o Vértices del Grafo son las siguientes: words, cords, corps, coops, crops, drops, drips, grips, gripe, grape, graph.

Para poder resolver este ejercicio, debemos en primer lugar identificar las palabras que son adyacentes según la regla establecida de solo diferir exactamente en una posición. Una vez identificado las palabras que son adyacentes podemos armar la Lista de Adyacencia para cada palabra de nuestro Grafo, en este caso se usó como apoyo una hoja de cálculo.

| Grafo de Palabras - Ejercicio 4 | | | |
|---|---|---|---|
| PALABRAS | Lista de Adyacencia | | |
| words | cords | | |
| cords | words | corps | |
| corps | cords | coops | |
| coops | corps | crops | |
| crops | coops | drops | |
| drops | crops | drips | |
| drips | drops | grips | |
| grips | drips | gripe | |
| gripe | grips | grape | |
| grape | gripe | graph | |
| graph | grape | | |

Una vez tenemos la Lista de Adyacencia de cada palabra podemos dibujar el Grafo, siendo sus Vértices las palabras y sus Aristas estando en la Lista de Adyacencia.



Con el código de Grafo ya implementado, podemos crear un Grafo de Strings e ingresar los Vértices y Aristas para el Grafo de Palabras. Este proceso está en la clase ‘GrafoPalabras’.

```
public class GrafoPalabras {

    public static void main(String[] args) {

        // Creando el Grafo de Palabras - Ejercicio4
        System.out.println("Creando el Grafo 'palabras'\n");
        Grafo<String> palabras = new Grafo<String>();

        System.out.println("Agregando los Vertices y Aristas\n");

        // Agregando los Vertices
        palabras.insertarVertice("words");
        palabras.insertarVertice("cords");
        palabras.insertarVertice("corps");
        palabras.insertarVertice("coops");
        palabras.insertarVertice("crops");
        palabras.insertarVertice("drops");
        palabras.insertarVertice("drips");
        palabras.insertarVertice("grips");
        palabras.insertarVertice("gripe");
        palabras.insertarVertice("grape");
        palabras.insertarVertice("graph");
```

Recordar que, como tenemos la Lista de Adyacencia para cada palabra, podemos establecer las Aristas según las Listas de Adyacencia de cada palabra registrada como Vértice. También podemos mostrar el Grafo y su Lista de Adyacencia por consola.

```
// Agregando las Aristas
palabras.insertarArista("words", "cords");
palabras.insertarArista("cords", "corps");
palabras.insertarArista("corps", "coops");
palabras.insertarArista("coops", "crops");
palabras.insertarArista("crops", "drops");
palabras.insertarArista("drops", "drips");
palabras.insertarArista("drips", "grips");
palabras.insertarArista("grips", "gripe");
palabras.insertarArista("gripe", "grape");
palabras.insertarArista("grape", "graph");

// Lista de Adyacencia para el Grafo 'palabras'
System.out.println("Lista de Adyacencia:\n");
System.out.println(palabras);
```

Finalmente, mostraremos la salida por consola. Esta concuerda con el trabajo realizado a mano y el Grafo graficado con sus Listas de Adyacencia con apoyo de la hoja de cálculo.

```
Creando el Grafo 'palabras'

Agregando los Vertices y Aristas

Lista de Adyacencia:

Contenido del Grafo:
words ==> cords,
cords ==> words, corps,
corps ==> cords, coops,
coops ==> corps, crops,
crops ==> coops, drops,
drops ==> crops, drips,
drips ==> drops, grips,
grips ==> drips, gripe,
gripe ==> grips, grape,
grape ==> gripe, graph,
graph ==> grape,
```

## 5. Realizar un método para ver si un Grafo incluye a otro.

Para poder realizar este método, el cual tendrá por nombre 'incluye' y se encontrará en la clase Grafo, debemos verificar los Vértices y sus Listas de Adyacencia del Grafo más pequeño o el que se quiere comprobar si está incluido dentro de otro más grande o igual.
El método incluye de clase Grafo recibe dos Grafos, uno que llama al método y es el más grande y otro que se envía como parámetro y es el más pequeño. El proceso que realiza el método es hacer una copia de la Lista de Vértices del Grafo más grande.

```java
// Metodo para ver si un Grafo incluye a Otro
// OJO: El Grafo que llama al metodo es el mas grande
// y el que enviamos por paramatro es el mas pequenio
public boolean incluye(Grafo<T> otroGrafo) {
    // Variable de apoyo para el retorno del metodo
    boolean retornar = false;
    // Rescatar los Vertices del Grafo grande
    ListaEnlazada<Vertice<T>> copiaG = getVertices().copiar();
    // Rescatar el Nodo inicial del Grafo pequeno
    Nodo<Vertice<T>> inicio = otroGrafo.getVertices().getFirst();
    // Mientras que haya Vertices, iteraremos
    while(inicio != null) {
        Vertice<T> buscar = copiaG.search(inicio.getData());
        // Si se encuentra entonces verificar la Lista de Adyacencia
        if(buscar != null) {
            System.out.println("El Vertice " + buscar.getData()
                + ", esta incluido");
            // Verificando Lista de Adyacencia esta incluida
            if(buscar.getLista().incluye(inicio.getData().getLista())) {
                // Si las Lista de Adyacencia esta incluida devolver true
                System.out.println("Las Listas de Adyacencia esta incluida");
                copiaG.remove(inicio.getData());
                retornar = true;
                inicio = inicio.getNext();
            } else {
                // Si las Lista de Adyacencia no esta incluida devolver false
                // y romper el ciclo ya que no es necesario revisar mas
                System.out.println("Las Listas de Adyacencia no esta incluida");
                retornar = false;
                break;
            }
        }
    }
    return retornar;
}
```

Luego guarda el primer Vértice del Grafo más pequeño en un Nodo para poder hacer las comparaciones, primero debemos verificar que el Vértice del Grafo pequeño existe dentro del Grafo grande. Si el Vértice existe, entonces debemos verificar si la Lista de Adyacencia del Vértice del Grafo pequeño está incluida en la del Vértice del Grafo grande. Si la Lista de Adyacencia está incluida entonces removemos ese Vértice de la copia del Grafo grande, establecemos el retorno como verdadero y pasamos al siguiente Vértice del Grafo más pequeño. En caso de estar incluida la Lista de Adyacencia, establecer el retorno como falso y romper el ciclo while ya que como difieren sus Listas de Adyacencia no es necesario verificar las demás. Finalmente devolver la variable auxiliar 'retorno'.

Para probar este método crearemos dos Grafos adicionales, sus nombres serán ‘otroGrafo’ y ‘otroGrafo2’. Veamos sus Vértices y Aristas de estos dos grafos respectivamente.

```
// Creando otro objeto de tipo Grafo para poder ver si este
// incluye al creado por primera vez objeto 'grafo'

Grafo<String> otroGrafo = new Grafo<String>();

// Insertando algunos Vertices
otroGrafo.insertarVertice("Lima");
otroGrafo.insertarVertice("Arequipa");
otroGrafo.insertarVertice("Cusco");
otroGrafo.insertarVertice("Piura");
otroGrafo.insertarVertice("Tarapoto");
otroGrafo.insertarVertice("Moquegua");
otroGrafo.insertarVertice("Callao");

// Insertando algunas Aristas
otroGrafo.insertarArista("Lima", "Arequipa", 8);
otroGrafo.insertarArista("Moquegua", "Callao", 10);
otroGrafo.insertarArista("Cusco", "Arequipa", 4);
otroGrafo.insertarArista("Piura", "Lima", 5);
otroGrafo.insertarArista("Lima", "Callao", 5);
otroGrafo.insertarArista("Cusco", "Lima", 6);
otroGrafo.insertarArista("Piura", "Tarapoto", 3);
```

```
Otro Grafo de ciudades:

Contenido del Grafo:
Lima ==> Arequipa, Piura, Callao, Cusco,
Arequipa ==> Lima, Cusco,
Cusco ==> Arequipa, Lima,
Piura ==> Lima, Tarapoto,
Tarapoto ==> Piura,
Moquegua ==> Callao,
Callao ==> Moquegua, Lima,
```

```
// Creando otro objeto de tipo Grafo

Grafo<String> otroGrafo2 = new Grafo<String>();

// Insertando algunos Vertices
otroGrafo2.insertarVertice("Lima");
otroGrafo2.insertarVertice("Arequipa");
otroGrafo2.insertarVertice("Cusco");
otroGrafo2.insertarVertice("Piura");
otroGrafo2.insertarVertice("Tarapoto");
otroGrafo2.insertarVertice("Moquegua");
otroGrafo2.insertarVertice("Callao");

// Insertando algunas Aristas
otroGrafo2.insertarArista("Lima", "Arequipa", 8);
otroGrafo2.insertarArista("Moquegua", "Callao", 10);
otroGrafo2.insertarArista("Cusco", "Arequipa", 4);
otroGrafo2.insertarArista("Lima", "Callao", 5);
otroGrafo2.insertarArista("Cusco", "Lima", 6);
otroGrafo2.insertarArista("Piura", "Tarapoto", 3);
```

```
'Otro Grafo 2' de ciudades:

Contenido del Grafo:
Lima ==> Arequipa, Callao, Cusco,
Arequipa ==> Lima, Cusco,
Cusco ==> Arequipa, Lima,
Piura ==> Tarapoto,
Tarapoto ==> Piura,
Moquegua ==> Callao,
Callao ==> Moquegua, Lima,
```

Finalmente pasaremos a comparar ambos Grafos adicionales creados. Se mostrará por consola las comparaciones hechas y el resultado si el Grafo incluye al Grafo creado inicialmente que lleva por nombre ‘grafo’ en la clase TestGrafo.

a) Comparando ‘otroGrafo’ con ‘grafo’: Recordar que el Grafo más grande llama al método incluye y el grafo más pequeño se envía como parámetro en el método. En este caso ‘otroGrafo’ incluye a ‘grafo’.

```
// Probando el metodo 'incluye' de la clase Grafo
// En este caso 'grafo' esta incluido en 'otroGrafo'
System.out.println("Compararando 'otroGrafo' con 'grafo'\n");
System.out.println("El Grafo 'otroGrafo' incluye a 'grafo'? : "
        + otroGrafo.incluye(grafo));
```

```
Compararando 'otroGrafo' con 'grafo'

El Vertice Lima, esta incluido
El elemento Arequipa, , esta incluido
El elemento Piura, , esta incluido
El elemento Cusco, , esta incluido
Las Listas de Adyacencia esta incluida
El Vertice Arequipa, esta incluido
El elemento Lima, , esta incluido
El elemento Cusco, , esta incluido
Las Listas de Adyacencia esta incluida
El Vertice Cusco, esta incluido
El elemento Arequipa, , esta incluido
El elemento Lima, , esta incluido
Las Listas de Adyacencia esta incluida
El Vertice Piura, esta incluido
El elemento Lima, , esta incluido
El elemento Tarapoto, , esta incluido
Las Listas de Adyacencia esta incluida
El Vertice Tarapoto, esta incluido
El elemento Piura, , esta incluido
Las Listas de Adyacencia esta incluida
El Grafo 'otroGrafo' incluye a 'grafo'? : true
```

b) Comparando ‘otroGrafo2’ con ‘grafo’: Recordar que el Grafo más grande llama al método incluye y el grafo más pequeño se envía como parámetro en el método. En este caso ‘otroGrafo2’ no incluye a ‘grafo’ ya que falta la Arista entre Lima y Piura.

```
// Probando el metodo 'incluye' de la clase Grafo
// En este caso 'grafo' NO esta incluido en 'otroGrafo'
// YA QUE FALTA LA ARISTA LIMA - PIURA QUE EXISTE EN 'GRAFO'
System.out.println("Compararando 'otroGrafo2' con 'grafo'\n");
System.out.println("El Grafo 'otroGrafo2' incluye a 'grafo'? : "
        + otroGrafo2.incluye(grafo));
```

```
Compararando 'otroGrafo2' con 'grafo'

El Vertice Lima, esta incluido
El elemento Arequipa, , esta incluido
El elemento Piura, , no esta incluido
Las Listas de Adyacencia no esta incluida
El Grafo 'otroGrafo2' incluye a 'grafo'? : false
```

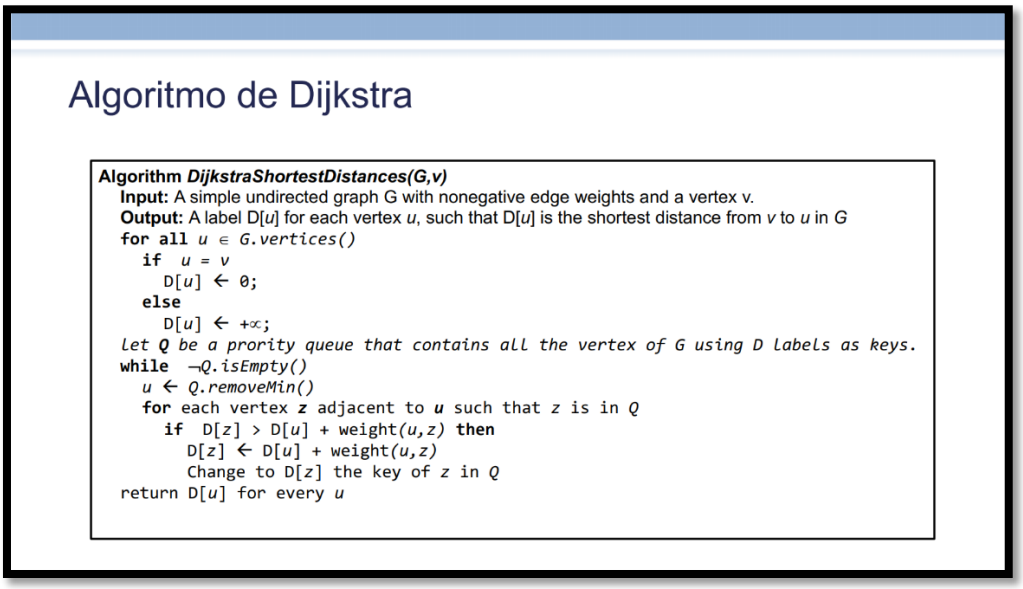
## 6. Cuestionario

En esta sección del informe se dará respuesta a las preguntas planteadas en el cuestionario para el presente Laboratorio 09 de EDA.

a) ¿Cuántas variantes del algoritmo de Dijkstra hay y cuál es la diferencia entre ellas?

El Algoritmo de Dijkstra trata de solucionar el problema de Caminos Mínimos, cabe resaltar que el Algoritmo de Dijkstra, creado por uno de los padres de la computación Edger W. Dijkstra.

El Algoritmo de Dijkstra calcula las distancias mínimas desde un nodo inicial hacia todos los demás. Para hacerlo, en cada iteración se toma el nodo más cercano a la inicial que aún no fue visitado. Así mismo cada nodo tiene como atributo un arreglo estándar que guarda los pesos hacia los demás nodos, desde ya vemos que el algoritmo tiene una demanda de memoria y ejecución igual o inclusive mayor a la cantidad de nodos contenido en el grafo. Se recalcula todos los caminos mínimos, teniendo en cuenta al nodo inicial o elegido como camino intermedio. De esta manera, en cada iteración tendremos un subconjunto de nodos que ya tiene calculada su distancia mínima hacia los demás y también los demás tienen sus distancias mínimas hacia el nodo inicial.




**El algoritmo de Dijkstra existe en muchas variantes y no se puede estableces una cantidad exacta, ya que se trata de optimizar cada día**. Mientras que el algoritmo original encontró la ruta más corta entre dos nodos dados **existe otra variante más común** que elige un solo nodo como 'fuente' o 'inicial' desde donde se encontrará la ruta más corta entre los demás nodos que conforma el grafo. Otra variante resaltante es el algoritmo de Johnson, que utilizar el algoritmo de Dijkstra como subrutina.

**Otra variante del algoritmo de Dijkstra es aquella que utiliza una Matriz de Adyacencia**, en el algoritmo original de Dijkstra debemos iterar sobre los vértices, luego sobre las aristas y finalmente sobre el arreglo interno que guarda cada vértice para ver el camino más corto hacia los otros. En sí el coste de Dijkstra es de $O(n^3)$.

**Así mismo tenemos la variante de Fredman y Tarjan**, los cuales proponen el uso de una Cola de Prioridad Mínimo para optimizar el tiempo de ejecución siendo este nuevo tiempo igual a O(|E| + |V|log|V|) siendo E la cantidad de aristas y V cantidad de vértices.

```
1   función Dijkstra ( Gráfico , fuente ):
2 dist [ fuente ] ← 0                              // Inicialización
3
4 crear cola de prioridad de vértice Q
5
6       para cada vértice v en Graph :
7           if  v ≠ source
8 dist [ v ] ← INFINITY                  // Distancia desconocida de la fuente a v
9 prev [ v ] ← UNDEFINED                 // Predecesor de v
10
11          Q .add_with_priority ( v , dist [ v ])
12
13
14      mientras  Q no está vacío:                        // El bucle principal
15          u ← Q .extract_min ()                      // Elimina y devuelve el mejor vértice
16          para cada vecino v de u :                 // solo v que todavía están en Q
17              alt ← dist [ u ] + longitud ( u , v )
18              si  alt v ]
19 dist [ v ] ← alt
20 prev [ v ] ← u
21                  Q .decrease_priority ( v , alt )
22
23      volver dist, anterior
```

**Las principales diferencias que existen entre el algoritmo de Dijkstra original y sus variantes implementadas**, radican en:

- La forma en la cual se quiere hallar los Caminos Mínimos, si se quiere hallar el camino mínimo entre un vértice específico y los demás contenidos en el grafo. O si se quiere establecer el Camino Mínimo para recorrer todo el grafo sin establecer un vértice inicial, sino encontrar ese vértice que ofrece el Camino Mínimo para todos los vértices del grafo.
- También las variantes difieren en la forma o estructura en la cual se guardan los Caminos Mínimos de cada vértice, sin tomar la forma de recorrer el grafo del punto anterior. El algoritmo original de Dijkstra implementaba un atributo extra en cada vértice, este era un arreglo estándar para guardar el coste para llegar a los demás vértices, algunas variantes prefieren usar una Matriz para guardar estos Caminos Mínimos, otras usan una Cola de Prioridad, inclusive hay variantes que aplican Programación Dinámica, entre otras estructuras.

b) Investigue sobre los Algoritmos de Caminos Mínimos e indique. ¿Qué similitudes encuentra, qué diferencias, en qué casos utilizar y por qué?

**El problema de los Caminos Mínimos** trata de descubrir los caminos con menor distancia o peso entre todas las parejas de nodos en un grafo de ‘n’ nodos. Con ello podremos hallar la mejor forma de ir desde un nodo hacia otro nodo (o inclusive a varios) minimizando la distancia o peso requerido, el tiempo invertido, entre otras posibilidades.

Entre los principales algoritmos para dar solución a esta problemática encontramos:

1) Algoritmo de Dijkstra: Recorre los vértices del grafo para encontrar el Camino Mínimo que recorre todo el grafo y sus vértices. Dependiendo de sus variantes, el vértice de inicio es elegido internamente o es elegido por el programador.
2) Algoritmo de Floyd: Hace uso de la Programación Dinámica y también una Matriz de Adyacencia, que es una tabla de resultados intermedios.

El **algoritmo de Floyd** para descubrir los caminos mínimos es el siguiente.

```
function floyd(lengths=[]){
    let n = lengths[0].length;
    let caminos = lengths.map(v => [...v]);
    let punteros = lengths.map((v,i) => v.
        map((w,j) => i===j || lengths[i][j]===Infinity ? -1 : i));
    for (let k=0; k<n; k++){
        for (let i=0; i<n; i++){
            for (let j=0; j<n; j++){
                if (caminos[i][k]+caminos[k][j] < caminos[i][j]) {
                    caminos[i][j] = caminos[i][k]+caminos[k][j];
                    punteros[i][j] = punteros[k][j];
                }
            }
        }
    }
    return {caminos, punteros};
}
```

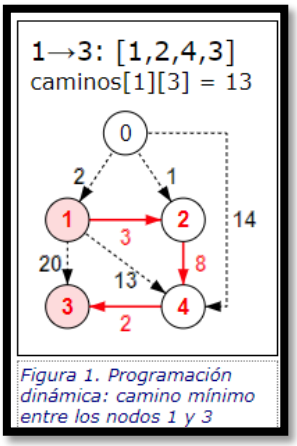
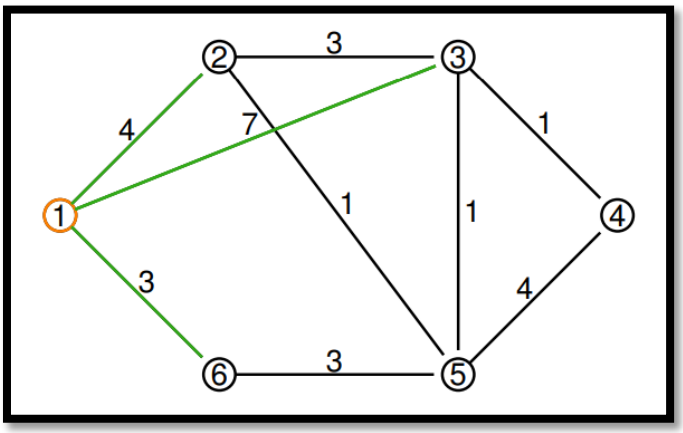
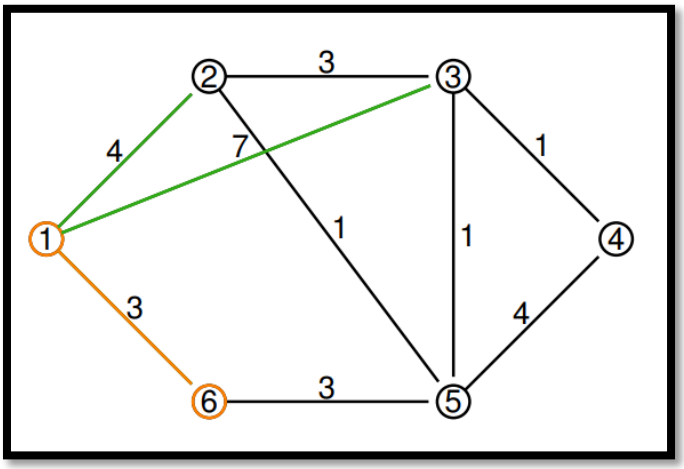


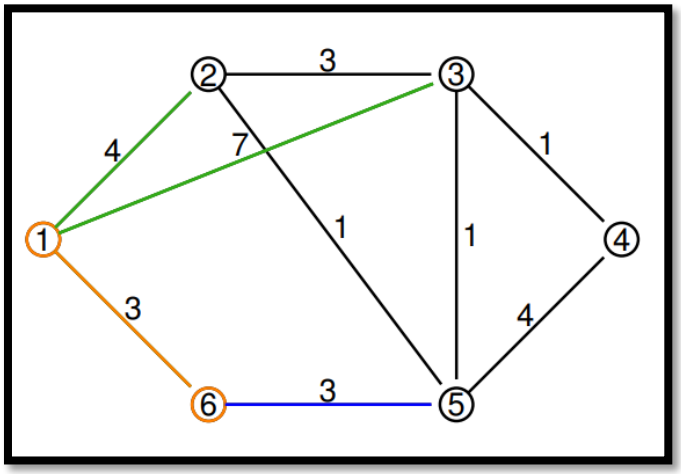

*Figura 1. Programación dinámica: camino mínimo entre los nodos 1 y 3*

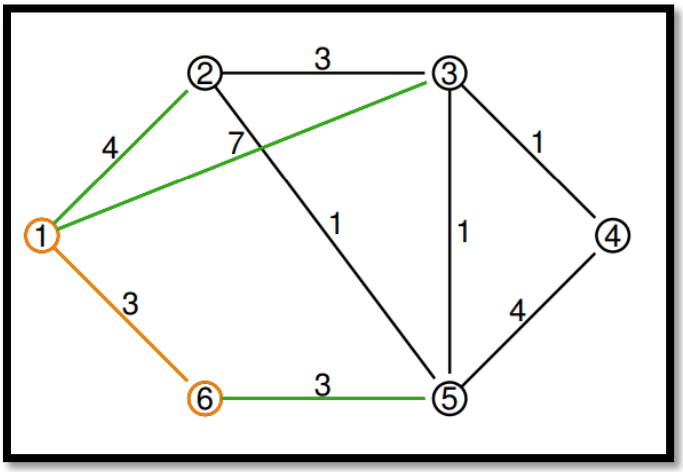
| i ↓ | j → 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | 2 | 1 | ∞ | 14 |
| 1 | ∞ | ∞ | 3 | 20 | 13 |
| 2 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | 8 |
| 3 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 4 | ∞ | ∞ | ∞ | 2 | ∞ |

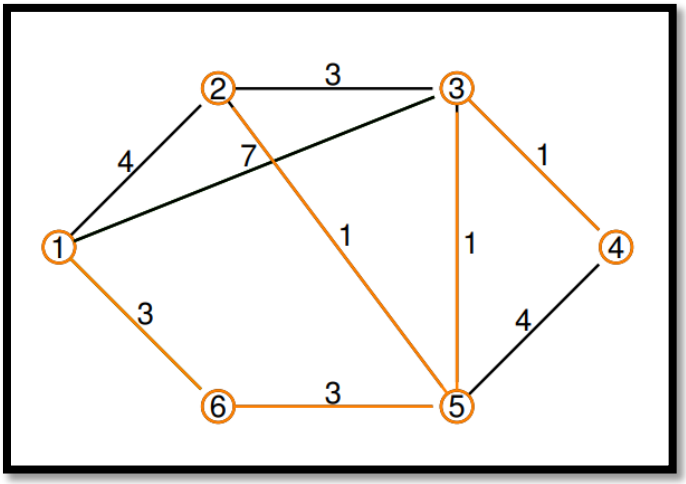
3) Algoritmo de Prim: El algoritmo de Prim mantiene un conjunto de nodos que son los nodos que ya fueron conectados, inicialmente es vacío. Luego, en cada iteración elige las aristas de menor peso y agrega los nodos de la arista al conjunto de nodos ya recorridos, de esta forma en cada iteración el conjunto de nodos conectados va creciendo y contendrá todos los nodos del grafo. Este algoritmo asegura que en 'n – 1' pasos, siendo 'n' la cantidad de nodo del grafo, habremos agregado todos los nodos de la manera más barata y se obtendrá el árbol generador mínimo.



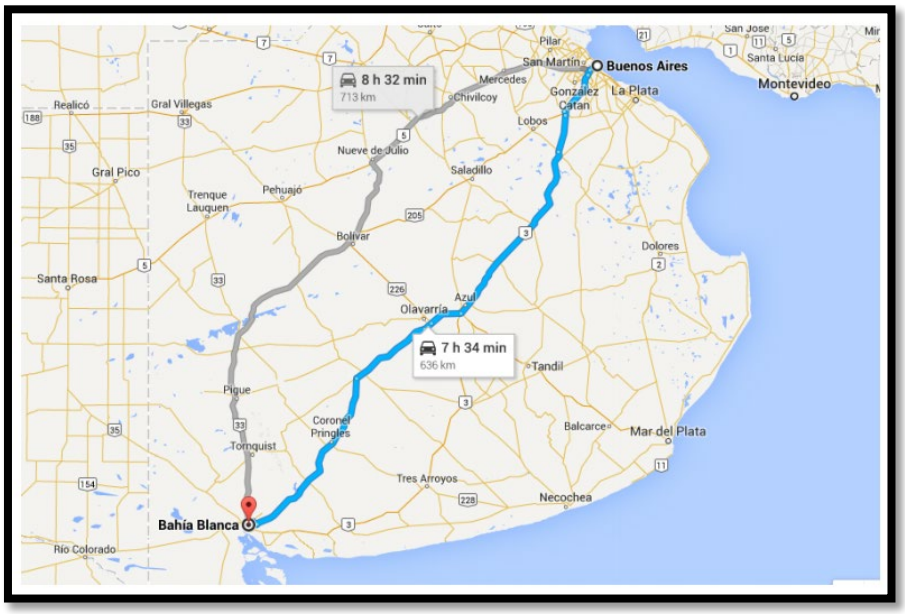

2
3
3
4
7
1
1
1
4
3
6
3
5

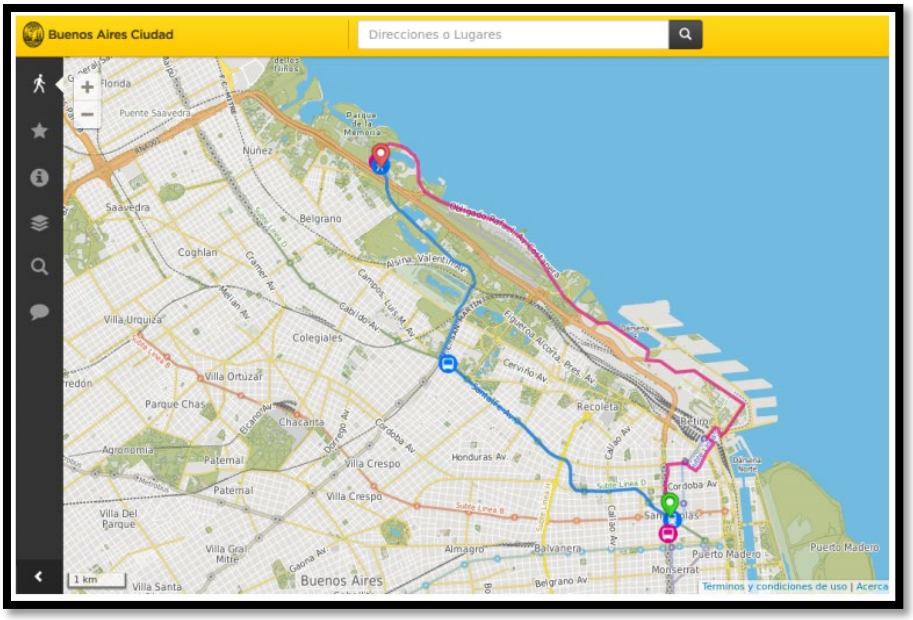

2
3
3
4
7
1
1
1
4
3
6
3
5


2
3
3
4
7
1
1
1
4
3
6
3
5

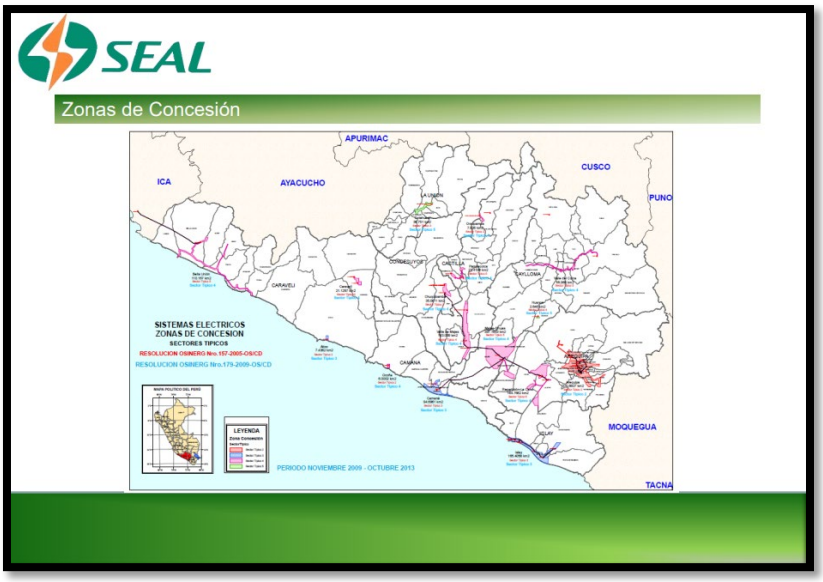

2
3
3
4
7
1
1
1
4
3
6
3
5

Entre las principales situaciones, casos y contextos en el cuales se presenta este problema, Caminos Mínimos, son por ejemplo cuando se quiere buscar la ruta o camino más corto entre dos países, ciudades, distritos, en general entre dos puntos geográficos. Esto se puede evidenciar cuando usamos Google Maps y queremos ver 'como llegar' desde un punto geográfico hacia otro. Google Maps tiene implementando internamente un algoritmo para Caminos Mínimos y nos puede mostrar, en pantalla, el Camino más corto o de coste Mínimo para llegar hacia nuestro destino.

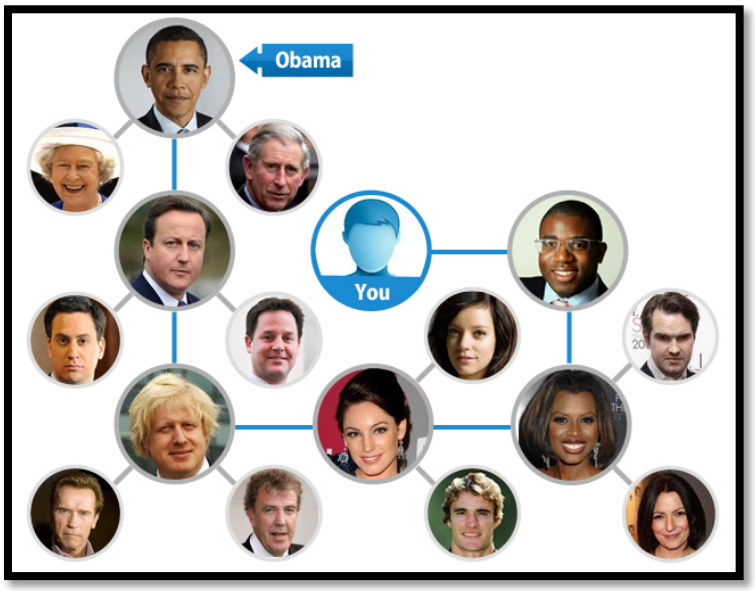



También se usa en el campo de las telecomunicaciones para poder establecer el Camino Mínimo entre el proveedor del servicio (puede ser telefonía fija, internet alámbrico, flujo eléctrico, entre otros) y nuestro cliente o la personas que contrata el servicio. De igual manera, se trata el problema de Camino Mínimo de manera interna, se encuentra la distancia más corta entre dos puntos geográficos y que sea accesible para poder instalar el servicio contratado.




Finalmente, y como aplicación un poco más curiosa y coloquial, tenemos su aplicación en la Teoría de los Seis Grados de Separación. La Teoría de los Seis Grados de Separación afirma que dos personas cualesquiera en el mundo están conectadas a través de una cadena que no tiene más de cinco intermediarios, es decir, ambas personas pueden ser unidas tan solo con seis enlaces. En este aspecto y considerando a las personas como nodos, podemos aplicar cualquier algoritmo que solucione el problema de Caminos Mínimos para poder conectar a estas dos personas del mundo.



## 7. Referencias

*Algoritmo de Dijkstra - gaz.wiki*. (s. f.). Gaz.Wiki. Recuperado 4 de agosto de 2021, de https://gaz.wiki/wiki/es/Dijkstra%27s_algorithm

De la Paz, A. (2020, 15 abril). *El problema de los caminos mínimos*. Copyright (c) 2020. https://www.wextensible.com/temas/programacion-dinamica/caminos-minimos.html

Ozón Górriz, F. J. (2000). Grado seis de separación. *Buran*, (16), 43-45.

Sclar, M. (2016). *Camino mínimo en grafos*. OIA - Olimpíada Informática de Argentina. http://www.oia.unsam.edu.ar/wp-content/uploads/2017/11/dijkstra-prim.pdf