



# PRISMA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA

código da coleção  
**0226P21202**  
código do volume  
**0226P21202136**  
PNLD 2021 • objeto 2 | Material de divulgação  
Versão submetida à avaliação

Bonjorno  
Giovanni Jr.  
Paulo Câmara

# Matemática

> ENSINO MÉDIO

Área do conhecimento:  
Matemática e suas Tecnologias

SISTEMAS, MATEMÁTICA FINANCEIRA  
E GRANDEZAS

MANUAL DO  
PROFESSOR

FTD

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA



## José Roberto Bonjorno

- Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras “Professor Carlos Pasquale”.
- Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
- Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1973.

## José Ruy Giovanni Júnior

- Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
- Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

## Paulo Roberto Câmara de Sousa

- Mestre em Educação pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB).
- Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE).
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
- Professor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1974.
- Professor de programas de formação continuada e pós-graduação desde 1990.
- Professor do Departamento de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste – UFPE.

MANUAL DO PROFESSOR





Copyright © José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e  
Paulo Roberto Câmara de Sousa, 2020

**Direção-geral** Ricardo Tavares de Oliveira

**Direção editorial adjunta** Luiz Tonolli

**Gerência editorial** Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita

**Edição** Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)

Alan Mazoni Alves, André Luiz Ramos de Oliveira, Bianca Cristina Fratelli,  
Carlos Eduardo Bayer Simões Esteves, Camila Silvestre, Cristina Silva dos Santos,  
João Alves de Souza Neto, Juliana Montagner, Líslas Cruz, Luciana Moura,  
Luís Felipe Porto Mendes, Marcos Antonio Silva, Teresa Christina Dias,  
Valéria Elvira Prete

**Preparação e Revisão** Maria Clara Paes (sup.)

Ana Lúcia P. Horn, Carolina Ramos Manley, Daniela Nanni, Danielle Costa,  
Desirée Araújo, Eliana Vila Nova de Souza, Jussara Rodrigues Gomes,  
Pedro Henrique Fandi, Priscilla Freitas, Yara Affonso

**Gerência de produção e arte** Ricardo Borges

**Design** Daniela Máximo (coord.), Sergio Cândido

**Imagen de capa** jovan vitanovski/Shutterstock.com

**Arte e Produção** Isabel Cristina Corandin Marques (sup.)

Adriana Maria Nery de Souza, Débora Jóia, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia,  
Kleber Bellomo Cavalcante, Nadir Fernandes Rachetti, Rodrigo Bastos Marchini,  
Maria Paula Santo Siqueira (assist.)

**Diagramação** VSA Produções

**Coordenação de imagens e textos** Elaine Bueno Koga

**Licenciamento de textos** Érica Brambila, Bárbara Clara (assist.)

**Iconografia** Priscilla Liberato Narciso, Ana Isabela Pithan Maraschin (trat. imagens)

**Ilustrações** Allmaps, Lucas Farauj

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Bonjorno, José Roberto

Prisma matemática : sistemas, matemática  
financeira e grandezas : ensino médio :  
área de conhecimento : matemática e suas  
tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy  
Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 1.  
ed. – São Paulo : Editora FTD, 2020.

Bibliografia.

ISBN 978-65-5742-022-5 (Aluno)

ISBN 978-65-5742-023-2 (Professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Júnior, José Ruy  
Giovanni. II. Sousa, Paulo Roberto Câmara de. III.

Título.

20-43448

CDD-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Aline Graziele Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

Em respeito ao meio ambiente, as folhas  
deste livro foram produzidas com fibras  
obtidas de árvores de florestas plantadas,  
com origem certificada.

Reprodução proibida: Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610  
de 19 de fevereiro de 1998. Todos os direitos reservados à

**EDITORIA FTD.**  
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP  
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300  
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970  
[www.ftd.com.br](http://www.ftd.com.br)  
[central.relacionamento@ftd.com.br](mailto:central.relacionamento@ftd.com.br)

**Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD**  
CNPJ 61.186.490/0016-33  
Avenida Antônio Bardella, 300  
Guarulhos-SP – CEP 07220-020  
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

# APRESENTAÇÃO

Este livro tem o objetivo de estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la em seu dia a dia e na continuação dos seus estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo e responsável. Na sociedade contemporânea é muito importante que você seja capaz de ler a realidade, enfrentar novos desafios e tomar decisões éticas e fundamentadas.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Desejamos que essa obra contribua para que você reflita e interfira na sociedade em que está inserido a partir de conhecimentos cientificamente fundamentados.

Bons estudos!

**Os Autores**

# CONHEÇA SEU LIVRO

## Ícones das Atividades



CALCULADORA



ATIVIDADE EM GRUPO



ATIVIDADE EM DUPLA

**CAPÍTULO**

## 3

**Matemática financeira**

**A BNCC NESTE CAPÍTULO:**

- Competências gerais da BNCC: 1, 2, 4, 6 e 7
- Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias:

  - Competência específica 1: EMTMAT01 e EMTMAT010
  - Competência específica 2: EMTMAT02 e EMTMAT020
  - Competência específica 3: EMTMAT03

- Competências específicas da área de Ciências Naturais e suas Tecnologias:

  - Competência específica 2
  - Competência específica 3

O texto na integração de competências gerais, específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se no final do livro.

Você já parou para pensar sobre a importância de controlar gastos, planejar despesas e poupar? Em diversas situações nos vemos diante de uma relação de venda e compra e precisamos decidir sobre o que fazer. Seja um lanche, uma roupa, uma mochila, um computador ou até mesmo um imóvel, enfim, analisamos a qualidade do que compramos, o valor, as condições de pagamento etc. O cuidado para manter uma vida financeira saudável é fundamental e alguns conceitos relacionados à Matemática Financeira podem nos auxiliar.

Atualmente, temos muitas formas de efetuar um pagamento: via depósito bancário, acessando uma caixa eletrônico, por cartão de crédito, cheques, boletos, por aplicativos de celular, entre outras. Em compras de grandes valores, também é oferecida a possibilidade de financiar a divida, pagando prestações durante determinado período. Entretanto, em todas as situações é fundamental o consumidor avaliar cuidadosamente o impacto da compra e da forma de pagamento em seu orçamento.

Em alguns casos, o pagamento à vista pode ser o melhor negócio, mas tudo depende do contexto em que o consumidor está inserido na hora da compra ou de adquirir um serviço. Estudaremos neste Capítulo algumas situações que podem nos ajudar a refletir sobre situações envolvendo o uso do dinheiro.

O uso de smartphones para a realização de compras on-line é cada vez mais frequente.

90

101

100

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

297

298

299

300

301

302

303

304

305

306

307

308

309

310

311

312

313

314

315

316

317

318

319

320

321

322

323

324

325

326

327

328

329

330

<div style="position: absolute; top: 10px; left: 2350px; writing-mode: vertical-

**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

Vimos que o estudo de matrizes contribui para ampliar as estratégias de resolução de sistemas lineares. Nesta seção, apresentamos uma informação histórica sobre um dos matemáticos que também estudaram esses conteúdos, inclusive dando indícios de uma teoria que posteriormente ficou popular para ampliar o estudo de matrizes e de sistemas lineares.

Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais sobre aspectos históricos associados ao conteúdo de matrizes e sistemas lineares.

**A notação de Leibniz**

O estudo de um sistema linear de equações como é conhecido hoje teve início em 1678, com Gottfried W. Leibniz (1646-1716). [...] conta que, em 1699, Leibniz usou um conjunto sistemático de índices como coeficiente de um sistema de três equações lineares. Ele também fez uso de notação para equações eliminadas de incógnitas e obteve uma regra para obter o que hoje conhecemos como determinante de um conjunto de equações lineares.

II. Leibniz sugeriu que, para resolver o problema da eliminação das incógnitas do sistema:

$$\begin{aligned} & a + bx + cy = 0 \\ & d + ex + fy = 0 \\ & g + hx + iy = 0 \end{aligned}$$

ele nos escreveria na forma:

$$\begin{aligned} & 10 \cdot 11x + 12y = 0 \\ & 20 \cdot 21x + 22y = 0 \\ & 30 \cdot 31x + 32y = 0 \end{aligned}$$

sendo o resultado eliminado os índices de linha do segundo membro do sistema e o segundo, da coluna. Essa forma de avaliar se o sistema teria solução, estabeleceu como condição necessária a igualdade

$$20 \cdot 31 - 30 \cdot 21 = 0$$

$$- 10 \times 22 + 31 \times 20 = 20 \times 32 - 12 \times 21 = 0$$

Este raciocínio é considerado [...] o princípio do determinante da teoria das determinantes, que combinava dois números, tal como no sistema cartesiano, dando a posição nas equações, do número ao qual se refira. [...]

Uma das primeiras aplicações de que se tinha conhecimento desse método é que se propôs quase 60 anos depois pelo matemático Gabriel Cramer. O trabalho que foi bastante dirigido à época, representa um avanço no estudo de algumas matrizes e levava ao que conhecemos hoje como Regra de Cramer. [...]

Fonte: N. S. G. & N. S. G. (2012). Breve história da desenvolvendo da teoria das determinantes e das matrizes. *Sinergia* (Sincronização em Matemática) – UFG São Paulo, p. 10-12. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/sincronizacao/v1n1/0001.pdf>.

55

## História da Matemática

Nesta seção você vai ter a oportunidade de ler textos de história da Matemática relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados no Capítulo.

**ATIVIDADES COMPLEMENTARES**

1. Considere as afirmações a seguir a respeito de sistemas de amortizações em um financiamento.

i. No caso de Amortização Constante (SAC) o valor das prestações é igual ao mesmo ao longo do tempo.

ii. No Sistema Padrão de Amortizações, o valor das prestações aumenta ao longo do período, do começo ao fim do período de pagamento, nos sistemas de amortizações SAC. Pode-se dizer que este sistema é mais vantajoso que o SAC.

iii. Considerando que este é o sistema de amortização mais utilizado no Sistema Piso-Pacto, podemos dizer que estádio (correto) a) afirmacões(i); b) i e II; c) II, biii, aiv e v. d) I e II.

2. Cláudio comprou um fogão que custava R\$ 1.350,00 à vista, mas como não tinha todo o dinheiro, deu uma entrada de R\$ 350,00 e financiou o restante em 36x, a taxa mensal de juros de 3% ao mês.

a)  a. maior do que R\$ 200,00 e menor do que R\$ 250,00.  
 b. maior do que R\$ 205,00 e menor do que R\$ 250,00.  
 c. maior do que R\$ 210,00 e menor do que R\$ 250,00.  
 d. maior do que R\$ 215,00 e menor do que R\$ 250,00.  
 e. maior do que R\$ 220,00 e menor do que R\$ 250,00.

112

## Atividades complementares

Nesta seção você vai encontrar questões de exames oficiais relacionadas aos conteúdos estudados. É uma oportunidade de você verificar seu conhecimento em relação ao que estudou no Capítulo.

**> EXPLORANDO A TECNOLOGIA**

**Planilha eletrônica e o cálculo de juros**

Cada vez mais comumente, como se que estudarem para a prova de matemática, se resolvem problemas com o uso de fórmulas adequadas.

Vamos utilizar a planilha eletrônica do LibreOffice, que pode ser baixada gratuitamente no endereço <https://pt-br.libreoffice.org/> (acesso em: 9 jul. 2020).

Após a instalação, leia o problema a seguir e observe uma maneira de usar a planilha eletrônica para resolvê-lo.

Sandro aplicou um capital (C) de R\$ 10.000,00 em dezembro de 2019 a uma taxa de juros (i) de 3% a.m. Ao final de dezembro de 2020, Sandro verificou seu extrato. Considerando os montantes obtidos do regime de juro composto e o regime de juro simples, qual foi a diferença, em reais, entre esses montantes?

Siga os passos que podem ser realizados para resolver esse problema.

I. Abra uma planilha no LibreOffice e organize as seguintes informações: planilha digitalizada, “Montante (M) a juro simples” e “Montante (M) a juro composto”, como indicado a seguir.

II. Digite o montante (C) e os meses (m) ou o número de meses correspondente a cada mês.

Conforme estudamos, existem duas formas de calcular o juro composto: a) taxa de juro simples, considerando uma taxa (i) e o tempo (t), o montante (M) pode ser obtido por meio da seguinte relação:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Já em regime de juro composto, considerando uma taxa (i) e o tempo (t), o montante (M) é dado por:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

56

## Explorando a tecnologia

Nesta seção você vai ter a oportunidade de aprofundar conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais.

**> CONEXÕES**

**Imposto de renda**

Todo trabalhador com registro em Carteira de Trabalho e Previdência Social (CTPS) tem diversos descontos em seu **sálario bruto** mensal. Dependendo do salário, uma dessas retenções corresponde ao Imposto sobre a Renda Retido na Fonte (IRRF).

O que são Imposto de Renda Retido na Fonte (IRRF) e Imposto de Renda sobre Provisão Pública (IRPP)?

O imposto de renda é um imposto sobre o rendimento bruto, ou seja, o que é gerado mensalmente, aplicado pela Receita Federal, sobre o salário bruto de alguns trabalhadores, de acordo com um valor chamado **base de cálculo**. O IRRF está relacionado com a Declaração de Ajuste Anual, também conhecida como a declaração do imposto de renda.

Quem precisa declarar o imposto de renda?

Existem algumas regras. Em geral, são pessoas que recebem rendimentos, ou seja, salários, férias, renda com aluguéis, pensões, entre outros, acima de determinado valor definido pelo Governo Federal.

Quando deve ser realizada essa declaração? Como ela deve ser feita?

Essa declaração deve ser realizada anualmente, até o último dia de abril. Em 2020, excepcionalmente, o prazo de entrega da declaração foi prorrogado para 30 de junho por causa da pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2. A declaração é feita por meio de um software da Receita Federal.

Caso o contribuinte não realize a declaração dentro do prazo estabelecido, é submetido a uma multa.



## Coxexões

Nesta seção você vai explorar temas diversos relacionados ao conteúdo em estudo, com a finalidade de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico por meio de atividades investigativas, pesquisas e discussão com os colegas.

**Glossário**

Explicação de termos matemáticos ou da língua portuguesa.

**Pense e responda**

Momentos que valorizam, por meio de questões, sua participação na construção de seu conhecimento para que você interaja, investigue e reflita sobre o conteúdo em estudo.

**Para ler • Para assistir  
Para acessar • Para ouvir**

Sugestões de livros, *links*, filmes, podcasts etc. a fim de complementar o conteúdo do livro.

**Saiba que...**

Apresentação de uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo.

**> PARA REFLETIR**

Neste Capítulo, você lembra alguns conceitos de Matemática Financeira que foram estudados em situações do dia a dia envolvendo o uso do dinheiro, possibilidades de organizar gastos e prever. Examinou também condições de pagamento e cálculos mais detalhados que nos permitem avaliar quanto gastamos pagando juros.

Estudamos o conceito de amortização, com destaque para dois sistemas de amortização oferecidos por instituições financeiras em contratos de empréstimos e financiamentos, analisando vantagens e desvantagens a elas associadas. Vimos também uma possibilidade de fazer um planejamento financeiro por meio de um simulador que mostra como a inflação pode afetar nossas vidas e prever o valor de nossos investimentos.

Nas páginas de abertura, foi apresentada uma discussão envolvendo formas e condições de pagamento em situações de venda e compra. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem ajudar-lo a ampliar a situação apresentada na abertura? Você já tinha essa percepção anteriormente?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo 3:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados? Qual é?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia que envolvem sistemas de amortização e inflação?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhece sobre situações relacionadas a venda e compra?
- Você utiliza os conceitos estudados para analisar situações antes de tomar decisões e de resolver problemas do dia a dia?

Respostas presentes

■ Refletir sobre o seu próprio aprendizado é uma oportunidade de desenvolver habilidades mentais e sociais.

113

## Para refletir

Neste momento você vai ter a oportunidade de refletir sobre o que estudou em cada um dos capítulos e fazer uma autoavaliação de seu desempenho.



# SUMÁRIO

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO

1

## Matrizes e sistemas lineares

10

» Introdução .....	12
» Matrizes .....	12
» Matriz quadrada .....	14
» Igualdade de matrizes .....	18
» Adição e subtração de matrizes .....	18
Matriz oposta .....	20
Propriedades da adição de matrizes .....	20
» Multiplicação de um número real por uma matriz .....	22
Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz .....	23
» Multiplicação de matrizes .....	23
Propriedades da multiplicação de matrizes .....	25
» Matriz inversa .....	28
» Equações matriciais .....	28
Conexões • Mobilidade urbana e matrizes .....	32
» Sistemas lineares .....	34
Equação linear .....	34
» Sistemas lineares $2 \times 2$ .....	37
Interpretação geométrica e classificação .....	39
» Sistemas lineares $m \times n$ .....	44
Sistemas equivalentes .....	44
» Matrizes associadas a um sistema linear .....	45
» Sistemas lineares escalonados .....	48
Classificação de sistemas lineares escalonados .....	49
Escalonamento de sistemas lineares .....	51
História da Matemática .....	55
• A notação de Leibniz	
Explorando a tecnologia .....	56
• Utilizando o Matrix calculator	
Atividades complementares .....	60
Para refletir .....	61

CAPÍTULO

2

## Porcentagem e juros

62

» Introdução .....	64
» Porcentagem .....	64
Aumentos e descontos .....	64
Lucro e prejuízo .....	67
» Juros .....	71
Juro simples .....	72
Juro composto .....	73
» Juros e funções .....	78
Juro simples e função afim .....	78
Juro composto e função exponencial .....	78
Explorando a tecnologia .....	82
• Planilha eletrônica e o cálculo de juros	
Conexões .....	84
• Os juros do cartão de crédito	
Atividades complementares .....	87
Para refletir .....	89



SHUTTERSTOCK.COM  
Foto: iStock



## CAPÍTULO 3 Matemática financeira ..... 90

» <b>Introdução</b> .....	92
» <b>Sistemas de amortização</b> .....	92
Sistema Price .....	93
Sistema de Amortização Constante (SAC) .....	94
<b>História da Matemática</b> .....	100
• Luca Pacioli – um dos precursores dos processos contábeis	
» <b>Orçamento familiar</b> .....	101
» <b>Inflação</b> .....	104
<b>Conexões</b> • Imposto de renda .....	108
<b>Explorando a tecnologia</b> .....	110
• Antecipar ou não a restituição do imposto de renda	
<b>Atividades complementares</b> .....	112
<b>Para refletir</b> .....	113



## CAPÍTULO 4 Grandezas ..... 114

» <b>Introdução</b> .....	116
» <b>O Sistema Internacional de Unidades [SI]</b> .....	116
Grandezas derivadas e unidades de medida derivadas .....	117

» <b>Medidas muito grandes e medidas muito pequenas</b> .....	122
Notação científica .....	122
Múltiplos e submúltiplos das unidades de medida .....	123
Unidades de medida astronômicas .....	124
» <b>Unidades de transferência e de armazenamento de dados</b> .....	125
Entendendo o <i>bit</i> e o <i>byte</i> .....	125
Os múltiplos do <i>bit</i> e do <i>byte</i> .....	125
Taxa de transferência .....	126
» <b>Utilizando as unidades de medida</b> .....	127
» <b>Precisão e instrumentos de medida</b> .....	132
Média e desvio padrão .....	134
Instrumentos de medida de precisão .....	136
» <b>Algarismos significativos e duvidosos</b> .....	137
Como reconhecer os algarismos significativos .....	139
Adição e subtração considerando algarismos significativos .....	140
Multiplicação e divisão considerando algarismos significativos .....	140
<b>Conexões</b> .....	144
• Construindo mapas: representando grandes regiões em pequenos espaços	
<b>Explorando a tecnologia</b> .....	146
• Conversão de medidas computacionais	
<b>Atividades complementares</b> .....	150
<b>Para refletir</b> .....	151
<b>Respostas das Atividades</b> .....	152
<b>Base Nacional Comum Curricular</b> .....	156
<b>Bibliografia comentada</b> .....	158
<b>Siglas de vestibulares</b> .....	160
Orientações para o professor .....	161

# NESTE VOLUME

Os conteúdos desenvolvidos neste Volume buscam proporcionar que você, estudante, exerce sua curiosidade intelectual, investigando diversas situações de forma reflexiva e crítica, seja no contexto da própria Matemática ou em outros contextos, interpretando dados para tomar decisões éticas e socialmente responsáveis.

O uso das tecnologias oferece recursos interativos que ampliam as possibilidades de estudo, permitindo melhor compreensão dos conceitos envolvidos, desenvolvem a autonomia e a curiosidade, contribuindo para que você seja protagonista do seu aprendizado.

## Objetivos do Volume:

- Compreender e fazer uso de diferentes linguagens matemáticas (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de se comunicar, ler e interpretar situações do dia a dia.
- Apropriar-se do conceito de matrizes, suas principais aplicações em diferentes áreas de conhecimento e em situações do cotidiano, suas propriedades e as operações que podem ser realizadas com esse tipo de representação.
- Consolidar a noção de sistemas de equações lineares para interpretar, modelar e resolver situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo.
- Analisar e compreender situações financeiras do dia a dia, incluindo temas como inflação, juros, orçamento, financiamento e empréstimo, refletindo sobre questões sociais relacionadas ao uso do dinheiro e alternativas como o uso de planilhas eletrônicas, que possibilitem controlar gastos e poupar.
- Compreender e utilizar unidades de medida envolvendo diferentes grandezas presentes em situações do dia a dia e em pesquisas de diferentes áreas de conhecimento, bem como refletir sobre os erros envolvidos nos processos de medição realizados por diferentes instrumentos.
- Refletir e debater sobre questões relacionadas a problemas enfrentados em ambientes urbanos, bem como sobre densidade demográfica e representações cartográficas, além de discutir sobre temas relacionados à tecnologia e à ordem de grandeza de medidas astronômicas e computacionais.
- Estimular discussões justas e respeitosas, a fim de promover a socialização de ideias e o respeito ao outro e às diferenças.

### **Justificativas dos objetivos:**

Por meio dos objetivos apresentados, pretende-se que você seja capaz de utilizar a linguagem matemática para se expressar, escolhendo a representação mais adequada para cada situação (algébrica, gráfica etc). Tal competência contribui para a formação de um cidadão capaz de ler, interpretar e comunicar informações em diversas áreas do conhecimento, em especial, utilizando a linguagem científica.

Além disso, as situações propostas visam contribuir com a sua capacidade de argumentação, sempre com base em fatos e dados para justificar suas escolhas e tomadas de decisão, de maneira ética e socialmente responsável.

O estudo de matrizes e sua aplicação na resolução de sistemas de equações lineares permite que você seja capaz de construir modelos, matemáticos ou não, para resolver problemas em diferentes contextos. A representação gráfica da solução de sistemas e o uso de tecnologias na resolução ampliam a sua capacidade de analisar a viabilidade de ações e a adequação das soluções propostas, desenvolvendo a construção de argumentos consistentes.

A relação entre conceitos matemáticos e termos como aumento e desconto, juro simples e juro composto, índices de inflação, sistemas de amortização de financiamento, empréstimo e orçamento familiar favorecem a reflexão e a análise crítica sobre questões ligadas à construção de nossa sociedade, bem como contribuem para a tomada de decisões. O uso de tecnologias digitais para fazer simulações envolvendo problemas do dia a dia relacionados a esse contexto favorece a compreensão e o trabalho com esses conceitos.

A análise e a reflexão sobre situações envolvendo temas das Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a partir de textos de divulgação científica e de dados expressos em diferentes escalas e unidades, propiciam uma visão mais ampla, contribuindo para que você alcance conclusões mais precisas, refletindo sobre a incerteza presente nas medições realizadas por instrumentos de medida e precisão.

As atividades que propõem discussões coletivas contribuem para a socialização de ideias e a colaboração, mobilizam a descoberta e a pesquisa como estratégia de aprendizagem, estimulam o respeito às diferenças e desenvolvem a capacidade de argumentação e tomada de decisões.

## CAPÍTULO

## 1

## &gt; A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- Competências gerais da BNCC: 1, 2, 4, 5 e 7
- Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:
  - Competência específica 1
  - Competência específica 3: EM13MAT301
  - Competência específica 4
- Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 1
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

# Matrizes e sistemas lineares

Em diversas situações do dia a dia podemos observar fenômenos físicos e químicos ou, ainda, identificar resultados associados a esses fenômenos.

Um cientista chamado Antoine-Laurent Lavoisier (1743-1794), com base em experimentos envolvendo reações químicas, enunciou a **lei de conservação de massa**. Ele concluiu que, em um recipiente fechado, as substâncias presentes em uma reação formam novas substâncias, mas os elementos que as constituem não se transformam em outros elementos, apenas se reorganizam. Em outras palavras, a massa de todas as substâncias no início da reação é igual à massa das substâncias no fim dela. Essa lei também ficou conhecida como **lei de Lavoisier**.

Nos laboratórios e na indústria química são realizados cálculos envolvendo a quantidade de reagentes e de produtos presentes em uma reação química. Esses cálculos são chamados de estequiométricos (palavra derivada do grego *stoikheion* = elemento e *metron* = medida ou medição) e envolvem o balanceamento de equações químicas que representam as reações. Um dos métodos empregados para realizar esse balanceamento utiliza equações e sistemas lineares, conteúdos que serão estudados neste Capítulo.



- TOTOJANG1977/SHUTTERSTOCK.COM
- A Matemática contribui para o desenvolvimento de outras ciências, como a Química e a Física, pois é utilizada para descrever estruturas, processos e fenômenos.



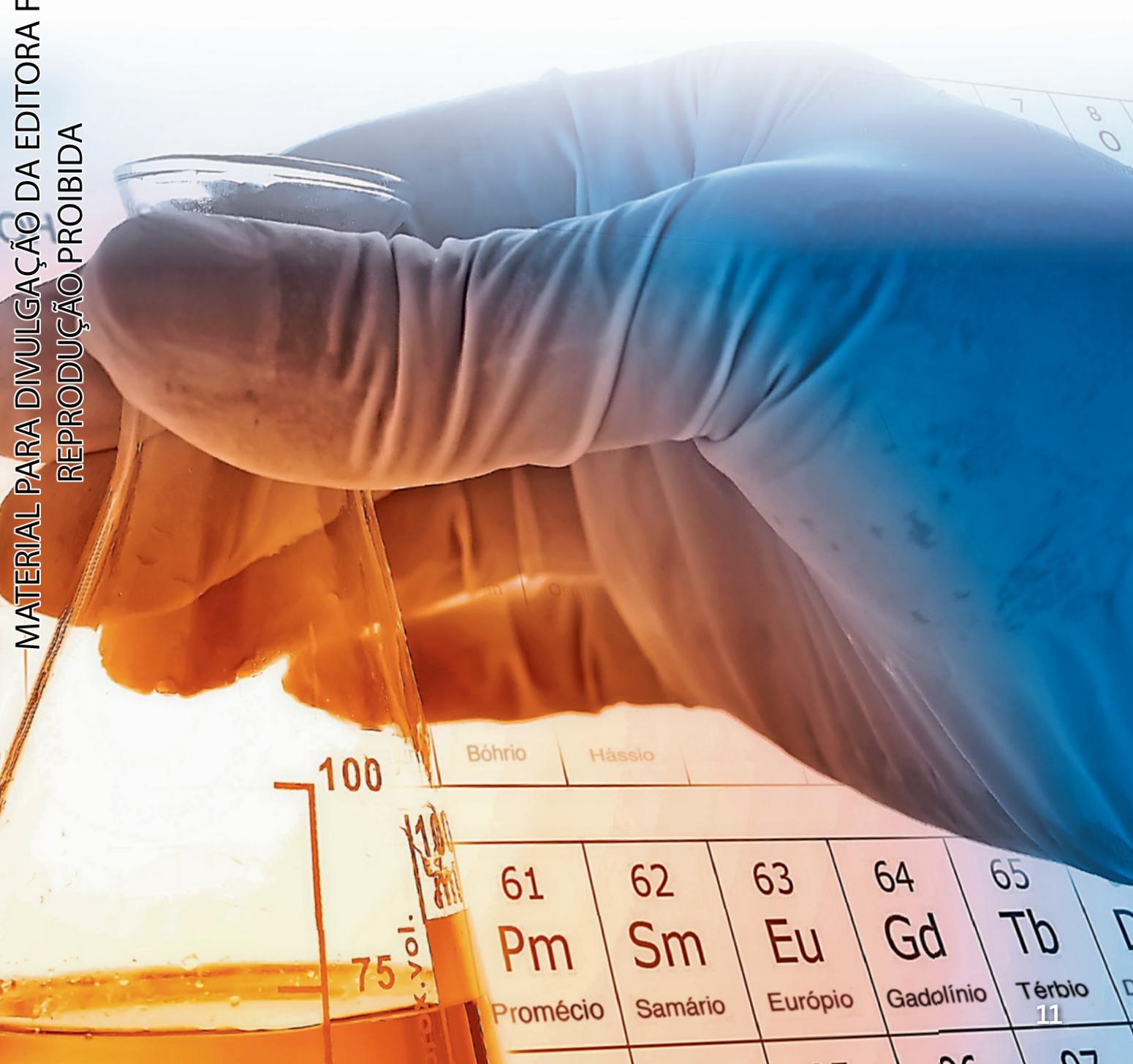
Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

[Ver as Orientações para o professor.](#)



NÃO ESCREVA  
NO LIVRO

1. Vocês já realizaram algum experimento envolvendo a observação de transformação de substâncias, em um laboratório, ou já assistiram a algum vídeo envolvendo esse tipo de experimento? Se sim, descrevam como foi para os outros colegas.
2. Expliquem por que as receitas culinárias costumam indicar a quantidade de ingredientes utilizando unidades de medida como xícaras, colheres, gramas, entre outras. O que acontece se não seguirmos a receita corretamente?
3. Vocês já ouviram falar em cálculo estequiométrico? Pesquisem sobre os principais métodos de balanceamento de equações químicas.



# Introdução

As matrizes são bastante utilizadas no campo da tecnologia, em especial, no desenvolvimento de animações por meio de computação gráfica e no trabalho com programação. Além disso, a resolução de televisores e monitores, bem como a de câmeras digitais, é um dos exemplos de aplicação envolvendo cálculos matriciais.



MIRAGE/MOMENT OPEN/GETTY IMAGES

- A resolução das fotografias obtidas por telefones celulares também depende de cálculos matriciais.

Situações que envolvem a resolução de equações lineares simultâneas, ou seja, sistemas lineares, estão associadas ao conceito de matriz e às operações relacionadas, que vamos estudar neste Capítulo.

## Matrizes

No dia a dia, informações relacionadas a determinado contexto, como o consumo de alimentos em determinado período, são organizadas em tabelas (linhas e colunas) para que se possa melhor analisar as variáveis.

Observe, por exemplo, uma tabela que mostra a quantidade mensal aproximada de quatro alimentos básicos, em quilograma, consumida por uma família durante um trimestre.

### > Consumo de alimentos – 2º trimestre

Mês Alimento	Abril	Maio	Junho
Arroz	10 kg	11,5 kg	9 kg
Feijão	4 kg	5 kg	6 kg
Carne	8,5 kg	7 kg	10 kg
Legumes	12 kg	11 kg	16,5 kg

Assim, para acessar uma informação, basta identificar a linha e a coluna correspondentes a ela. Por exemplo, o consumo de feijão (1<sup>a</sup> linha) no mês de abril (2<sup>a</sup> coluna) foi de 4 kg.

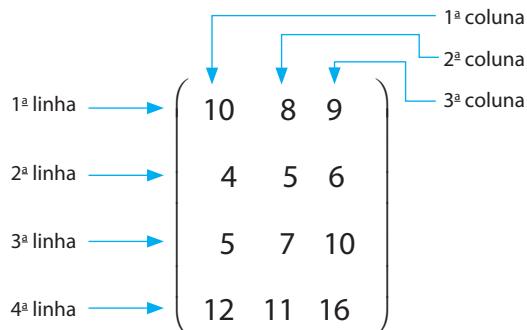
Fonte: Dados fictícios.

Em Matemática, as tabelas são representadas por matrizes nas quais os dados (também chamados elementos ou termos) são dispostos em filas horizontais (linhas) e filas verticais (colunas). Esses elementos, que geralmente são números, ficam entre parênteses ou entre colchetes como podemos observar, a seguir, na representação matricial da tabela anterior.

$$\left( \begin{array}{ccc} 10 & 11,5 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8,5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 16,5 \end{array} \right) \text{ ou } \left[ \begin{array}{ccc} 10 & 11,5 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8,5 & 7 & 10 \\ 12 & 11 & 16,5 \end{array} \right]$$

Uma **matriz**  $m \times n$  (lê-se  $m$  por  $n$ ) é composta de  $m \cdot n$  elementos dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas, em que  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

As linhas de uma matriz são numeradas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para a direita, como mostra o exemplo a seguir.



Essa matriz tem quatro linhas e três colunas. Dizemos, então, que é uma matriz **do tipo** ou **da ordem**  $4 \times 3$  (lê-se: quatro por três) e os números que a constituem são os seus **elementos** (ou **entradas**).

As matrizes geralmente são nomeadas com uma letra maiúscula e, para indicar os elementos dessa matriz, usamos a mesma letra, porém minúscula, acompanhada de dois índices que representam, respectivamente, a linha e a coluna em que o elemento está localizado.

Por exemplo, considerando a matriz  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 3 & \pi & 5,3 \end{bmatrix}$ , temos:

**PENSE E  
RESPONDA**

Qual é o elemento  $a_{21}$  da matriz  $A$ ? E o elemento  $a_{12}$  da matriz  $A$ ?  
4. -1

- o elemento que está na 1ª linha e na 1ª coluna é  $a_{11} = \frac{1}{3}$  (lê-se  $a$  um um é igual a um terço);
- o elemento que está na 2ª linha e na 3ª coluna é  $a_{23} = 5,3$ .

Assim, podemos representar genericamente a matriz  $A$  como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

De modo geral, uma matriz  $A$  com  $m$  linhas e  $n$  colunas ( $m \times n$ ) pode ser representada genericamente por:

$$A = \left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right), \text{ com } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

#### SAIBA QUE...

A matriz que tem todos os elementos iguais a zero é chamada **matriz nula**.

Indicamos por  $0_{m \times n}$  a matriz nula de ordem  $m \times n$ , em que  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

A matriz genérica  $A$  pode ser representada de forma abreviada por:  $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$  ou  $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ .

Na representação expandida e, também, na abreviada, o elemento  $a_{ij}$  está na linha  $i$  e na coluna  $j$ , em que  $i$  assume valores no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$  e  $j$  assume valores no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Por exemplo, se os elementos da matriz  $A_{2 \times 3} = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  obtidos pela lei de formação  $a_{ij} = 3i + j$ , podemos calcular o valor de cada elemento e determinar a matriz  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 \rightarrow a_{11} = 4$$

$$a_{12} = 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 \rightarrow a_{12} = 5$$

$$a_{13} = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 \rightarrow a_{13} = 6$$

$$a_{21} = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 \rightarrow a_{21} = 7$$

$$a_{22} = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 \rightarrow a_{22} = 8$$

$$a_{23} = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 \rightarrow a_{23} = 9$$

$$\text{Portanto, } A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

## Matriz quadrada

**Matriz quadrada** é aquela que possui o número de linhas igual ao número de colunas, ou seja,  $m = n$ . Nesse caso, chamamos de **matriz  $n \times n$**  ou, simplesmente, **matriz quadrada de ordem  $n$** .

Veja alguns exemplos:

a) A matriz  $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  é uma matriz quadrada de ordem 2.

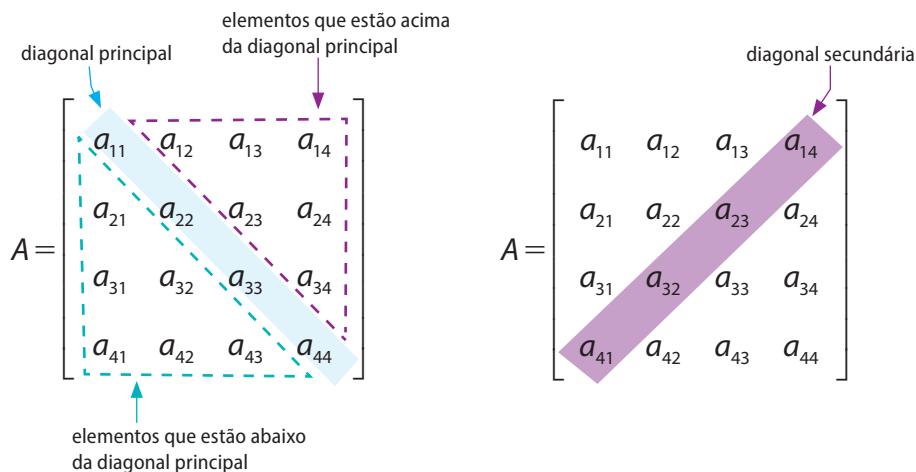
b) A matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & \frac{3}{5} & 6 \\ \sqrt{7} & 8 & 9 \end{pmatrix}$  é uma matriz quadrada de ordem 3.

Em uma matriz quadrada, os elementos  $a_{ij}$  para os quais  $i = j$  formam uma diagonal denominada **diagonal principal** da matriz. Os elementos  $a_{ij}$  para os quais  $i + j = n + 1$  formam uma diagonal chamada **diagonal secundária** da matriz.

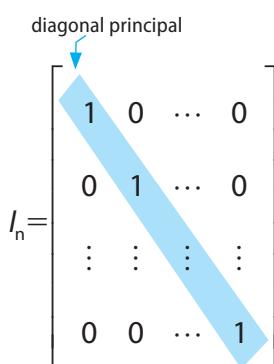
Quando  $i > j$ , o elemento  $a_{ij}$  está **abaixo** da diagonal principal.

Quando  $i < j$ , o elemento  $a_{ij}$  está **acima** da diagonal principal.

Por exemplo, para uma matriz quadrada de ordem 4, temos:



A matriz quadrada de ordem  $n$  na qual  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  e  $a_{ij} = 1$  para  $i = j$  é chamada **matriz identidade**. É também conhecida como **matriz unidade** de ordem  $n$  e é indicada por  $I_n$ .

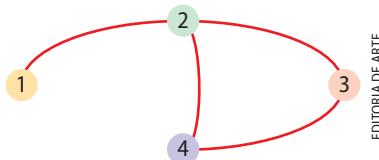


**PENSE E  
RESPONDA**

Na matriz identidade de ordem  $n$ , qual número real verificamos em todas as entradas que estão na diagonal principal? E em todas as entradas que não estão na diagonal principal? um. zero

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 1.** O diagrama a seguir representa um mapa rodoviário mostrando as estradas que ligam as cidades 1, 2, 3 e 4.



EDITORA DE ARTE

Podemos representar esse mapa rodoviário na matriz  $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$  definida do seguinte modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ está ligada diretamente a } j \\ 0, & \text{se } i = j \text{ ou se } i \text{ não tem ligação direta com } j \end{cases}$$

Sabendo que  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  referem-se às cidades do mapa, construa a matriz  $A$ .

### Resolução

A representação genérica da matriz  $A$  é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

De acordo com as regras do mapa rodoviário que será representado pela matriz  $A$ , temos:

- $a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{32}, a_{34}, a_{42}$  e  $a_{43}$  são iguais a 1, pois as cidades estão diretamente ligadas entre si.
- $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  e  $a_{44}$  são iguais a zero, pois  $i = j$ .
- $a_{13}, a_{14}, a_{31}$  e  $a_{41}$  são iguais a zero, pois as cidades não estão ligadas diretamente entre si.

$$\text{Portanto: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2.** Construa a matriz  $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ , em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 2i + j, & \text{se } i \geq j \\ 2j - i, & \text{se } i < j \end{cases}$$

### Resolução

Para construir a matriz  $B$ , é necessário calcular cada entrada, de acordo com os índices referentes à linha e à coluna, utilizando a expressão correspondente.

- Para determinar  $b_{11}$ , verificamos que  $i = 1$  e  $j = 1$  e, nesse caso,  $i = j$ . Assim,  $b_{11} = 2i + j = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ . Logo,  $b_{11} = 3$ .
- Para determinar  $b_{12}$ , verificamos que  $i = 1$  e  $j = 2$  e, nesse caso,  $i < j$ . Assim,  $b_{12} = 2j - i = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ . Logo,  $b_{12} = 3$ .
- Para determinar  $b_{13}$ , verificamos que  $i = 1$  e  $j = 3$  e, nesse caso,  $i < j$ . Assim,  $b_{13} = 2j - i = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ . Logo,  $b_{13} = 5$ .
- Para determinar  $b_{21}$ , verificamos que  $i = 2$  e  $j = 1$  e, nesse caso,  $i > j$ . Assim,  $b_{21} = 2i + j = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ . Logo,  $b_{21} = 5$ .
- Para determinar  $b_{22}$ , verificamos que  $i = 2$  e  $j = 2$  e, nesse caso,  $i = j$ . Assim,  $b_{22} = 2i + j = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ . Logo,  $b_{22} = 6$ .
- Para determinar  $b_{23}$ , verificamos que  $i = 2$  e  $j = 3$  e, nesse caso,  $i < j$ . Assim,  $b_{23} = 2j - i = 2 \cdot 3 - 2 = 4$ . Logo,  $b_{23} = 4$ .
- Para determinar  $b_{31}$ , verificamos que  $i = 3$  e  $j = 1$  e, nesse caso,  $i > j$ . Assim,  $b_{31} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ . Logo,  $b_{31} = 7$ .
- Para determinar  $b_{32}$ , verificamos que  $i = 3$  e  $j = 2$  e, nesse caso,  $i > j$ . Assim,  $b_{32} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ . Logo,  $b_{32} = 8$ .
- Para determinar  $b_{33}$ , verificamos que  $i = 3$  e  $j = 3$  e, nesse caso,  $i = j$ . Assim,  $b_{33} = 2i + j = 2 \cdot 3 + 3 = 9$ . Logo,  $b_{33} = 9$ .

Portanto, a matriz  $B$  é:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

## &gt; ATIVIDADES


 NÃO ESCREVA  
NO LIVRO

1. (Unimontes-MG) Ao associarmos as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

podemos afirmar que a palavra UNIMONTES pode ser codificada pela matriz  $3 \times 3$  dada por alternativa b

a)  $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

2. Obtenha a matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , sabendo que  $a_{ij} = 3i - j^2$ . Ver as Orientações para o professor.

3. Dizemos que uma matriz quadrada é um quadrado mágico se as somas dos elementos de cada linha, de cada coluna, das diagonais, principal e secundária, são todas iguais. Qual(is) das matrizes a seguir corresponde(m) a um quadrado mágico? A e B

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Determine cada matriz definida a seguir.

Ver as Orientações para o professor.

a)  $A = (a_{ij})_{1 \times 3}$ , tal que  $a_{ij} = 2i - j$

b)  $B = (b_{ij})_{4 \times 2}$ , tal que  $b_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i \leq j \\ i - j, & \text{se } i > j \end{cases}$

c)  $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ , tal que  $c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & \text{se } i \neq j \\ 0, & \text{se } i = j \end{cases}$

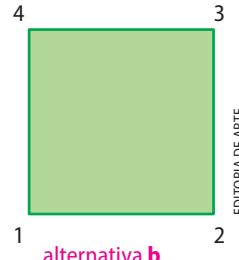
5. (UEPA) A tabela abaixo, regularmente disposta em linhas (atleta) e colunas (dia), representa os registros dos tempos de treinamento dos atletas A, B e C em 3 dias. Sendo  $i$  a ordem das linhas e  $j$  a ordem das colunas e  $a_{ij} = 30i + 10j$  o elemento genérico desta tabela, com  $i$  e  $j$  dados em minutos, o tempo de treinamento gasto pelo atleta B no terceiro dia foi de:

$$\begin{array}{l} \text{1º dia} \quad \text{2º dia} \quad \text{3º dia} \\ \hline A & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ B & \\ C & \end{array}$$

- a) 1 hora e 30 minutos. alternativa a  
 b) 1 hora e 50 minutos.  
 c) 2 horas.  
 d) 2 horas e 10 minutos.  
 e) 2 horas e 30 minutos.

6. Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  de ordem 4, em que  $a_{ij} = i - j$ . zero

7. (Unimep-SP) É dado um quadrado de lado medindo 1 unidade, numerado conforme a figura. A matriz  $4 \times 4$ , tal que  $a_{ij}$  é a distância entre os vértices de números  $i$  e  $j$ , é:



EDITORIA DE ARTE

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$       d)  $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

- e) nenhuma das alternativas anteriores.

## Igualdade de matrizes

Considerando-se duas matrizes de mesma ordem, os elementos que ocupam a mesma posição em cada uma delas, ou seja, que têm o mesmo índice, são denominados **elementos correspondentes**.

Por exemplo, nas matrizes  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$  os elementos  $a_{11}$  e  $b_{11}$  são

correspondentes, assim como os elementos  $a_{12}$  e  $b_{12}$ ,  $a_{21}$  e  $b_{21}$  e  $a_{22}$  e  $b_{22}$ .

Considere, agora, as matrizes  $A$  e  $B$  de ordem  $3 \times 2$  representadas a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4-1 & 5+3 \\ 2-2 & 5 \cdot 1 \\ 1-2 & 4:2 \end{pmatrix}$$

Nessas matrizes, todos os elementos correspondentes são iguais. Veja:

$$\begin{array}{ll} a_{11} = 3 \text{ e } b_{11} = 4 - 1 = 3, \text{ ou seja, } a_{11} = b_{11} & a_{22} = 5 \text{ e } b_{22} = 5 \cdot 1 = 5, \text{ ou seja, } a_{22} = b_{22} \\ a_{12} = 5 \text{ e } b_{12} = 5 + 3 = 8, \text{ ou seja, } a_{12} = b_{12} & a_{31} = -1 \text{ e } b_{31} = 1 - 2 = -1, \text{ ou seja, } a_{31} = b_{31} \\ a_{21} = 0 \text{ e } b_{21} = 2 - 2 = 0, \text{ ou seja, } a_{21} = b_{21} & a_{32} = 2 \text{ e } b_{32} = 4 : 2 = 2, \text{ ou seja, } a_{32} = b_{32} \end{array}$$

Quando isso acontece, dizemos que as matrizes  $A$  e  $B$  são iguais, ou seja,  $A = B$ . De modo geral, dizemos que:

Duas matrizes  $A$  e  $B$  de mesma ordem  $m \times n$  são **iguais** se cada elemento de  $A$  for igual ao elemento correspondente de  $B$ .

Em linguagem simbólica, se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , então:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

## Adição e subtração de matrizes

Uma livraria fez uma doação para as bibliotecas de duas escolas do bairro. Os títulos foram selecionados de acordo com a faixa etária, visando atender a estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF I), dos anos finais do Ensino Fundamental (EF II) e do Ensino Médio (EM). Nessa doação, os exemplares eram livros de autores internacionais (AI) e livros de autores brasileiros (AB).

Observe o número de livros doados para cada biblioteca do bairro.

> Livros doados para a Biblioteca Cecília Meireles

Autor \ Segmento	EF I	EF II	EM
AI	36	45	75
AB	60	72	120

Fonte: Dados fictícios.

> Livros doados para a Biblioteca Rachel de Queiroz

Autor \ Segmento	EF I	EF II	EM
AI	24	60	54
AB	52	98	100

Fonte: Dados fictícios.

PENSE E  
RESPONDA

Quantos livros de autores brasileiros destinados a estudantes do Ensino Médio foram doados por essa livraria na situação apresentada? Como você fez para descobrir?

220 livros. Resposta esperada: Adicionar os números das células do cruzamento da linha AB e da coluna EM nas duas tabelas.

Para obter a quantidade de livros doados pela livraria, de acordo com cada característica especificada na tabela, basta adicionar os valores correspondentes às células das duas tabelas.

Considerando a matriz  $A$ , formada pelos números de livros doados para a Biblioteca Cecília Meireles, e a matriz  $B$ , formada pelos números de livros doados para a Biblioteca Rachel de Queiroz, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 45 & 75 \\ 60 & 72 & 120 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 24 & 60 & 54 \\ 52 & 98 & 100 \end{pmatrix}$$

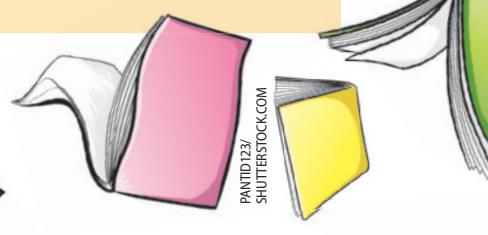
Nesse caso, para obter o total de livros doados pela livraria às duas bibliotecas, de acordo com as características especificadas nas tabelas, basta adicionar os elementos correspondentes das matrizes  $A$  e  $B$ , ou seja, determinar a matriz  $C = A + B$  da seguinte maneira:

$$C = \begin{pmatrix} 36 & 45 & 75 \\ 60 & 72 & 120 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 60 & 54 \\ 52 & 98 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+24 & 45+60 & 75+54 \\ 60+52 & 72+98 & 120+100 \end{pmatrix}$$

A matriz  $C = \begin{pmatrix} 60 & 105 & 129 \\ 112 & 170 & 220 \end{pmatrix}$  é o resultado da adição das matrizes  $A$  e  $B$ , que, de modo

geral, definimos a seguir.

Dadas as matrizes de mesma ordem  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , a **matriz soma** de  $A$  com  $B$ , indicada por  $A + B$ , é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , tal que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  e todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .



PANTID123/  
SHUTTERSTOCK.COM

Em relação à subtração de matrizes, temos a seguinte definição.

Dadas as matrizes de mesma ordem  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , a **matriz diferença** de  $A$  e  $B$ , indicada por  $A - B$ , é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , tal que  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  e todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

**PENSE E  
RESPONDA**

Pensando na situação real, qual é uma possível interpretação para o resultado negativo dos elementos  $d_{12}$  e  $d_{22}$ ?  
Ver as Orientações para o professor.

Considerando as matrizes  $A$  e  $B$  associadas aos números de livros doados pela livraria para as bibliotecas, vamos calcular a matriz  $D = A - B$ .

Nesse caso, temos:

$$D = \begin{pmatrix} 36 & 45 & 75 \\ 60 & 72 & 120 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 60 & 54 \\ 52 & 98 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-24 & 45-60 & 75-54 \\ 60-52 & 72-98 & 120-100 \end{pmatrix}$$

Logo,  $D = \begin{pmatrix} 12 & -15 & 21 \\ 8 & -26 & 20 \end{pmatrix}$ .

## Matriz oposta

A **matriz oposta** de uma matriz  $A$ , indicada por  $-A$ , é aquela que, adicionada à matriz  $A$ , resulta na matriz nula.

Por exemplo, a matriz oposta da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$  é a matriz  $-A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ , pois  $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}}_{A_{2 \times 2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}}_{(-A)_{2 \times 2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{0_{2 \times 2}}$

Observe que a matriz  $-A$ , oposta da matriz  $A$ , pode ser obtida multiplicando-se por  $-1$  todos os elementos de  $A$ . Utilizando-se o conceito de matriz oposta, a subtração de duas matrizes  $A$  e  $B$  pode ser obtida adicionando-se a matriz  $A$  à matriz oposta de  $B$ .

$$A - B = A + \underbrace{(-B)}_{\text{oposta de } B}$$

## Propriedades da adição de matrizes

Dadas as matrizes  $A, B, C$  e  $0$  (matriz nula) de mesma ordem  $m \times n$ , valem as propriedades seguintes:

**1<sup>a</sup>) Propriedade comutativa:**  $A + B = B + A$

**2<sup>a</sup>) Propriedade associativa:**  $(A + B) + C = A + (B + C)$

**3<sup>a</sup>) Propriedade do elemento neutro:**  $A + 0 = 0 + A = A$

**4<sup>a</sup>) Propriedade do elemento oposto:**  $A + (-A) = (-A) + A = 0$

## &gt; ATIVIDADE RESOLVIDA

3. Dada a matriz  $A(a_{ij})_{3 \times 3}$ , em que  $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i=j \\ 1, & \text{se } i>j \\ -1, & \text{se } i<j \end{cases}$ , calcule  $A + I_3$ .

**Resolução**

Inicialmente, escrevemos a representação genérica da matriz  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Com base na definição da matriz  $A$ , temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $I_3$  é a matriz identidade de ordem 3, a soma  $A + I_3$  é calculada da seguinte maneira:

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Portanto, } A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## &gt; ATIVIDADES



8. Uma escola fez um levantamento para identificar a quantidade de estudantes matriculados, por sexo e por turno. Observe os resultados obtidos, considerando dois segmentos: Ensino Fundamental e Ensino Médio.

## &gt; Quantidade de estudantes matriculados

Sexo Turno	Ensino Fundamental		Ensino Médio	
	Masculino	Feminino	Masculino	Feminino
Manhã	340	410	180	152
Tarde	105	87	64	36
Noite	96	134	113	88

Fonte: Dados fictícios.

- a) Organize esses dados em duas matrizes  $A_{3 \times 2}$  e  $B_{3 \times 2}$ , de modo que a matriz  $A$  represente os estudantes do Ensino Fundamental por turno e sexo, e a matriz  $B$  represente os estudantes do Ensino Médio por turno e sexo.

- b) Determine a matriz  $C = A + B$ , em que  $C$  representa o total de estudantes da escola de acordo com o turno e o sexo.

Ver as Orientações para o professor.

9. Considerando  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

e  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , verifique que:

Ver as Orientações para o professor.

a)  $A + B = B + A$

b)  $A + (B + C) = (A + B) + C$

c)  $B + 0_{2 \times 2} = B$

d)  $C + (-C) = 0_{2 \times 2}$

10. Considere as seguintes matrizes:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 3}, \text{ definida por } a_{ij} = i + j$$

$$B = (b_{ij})_{2 \times 3}, \text{ definida por } b_{ij} = i - j$$

Determine o elemento  $c_{23}$  da matriz  $C = A + B$ .

$c_{23} = 4$

# Multiplicação de um número real por uma matriz

Em parceria com a livraria que fez a doação dos livros para as bibliotecas, uma gráfica doou cadernos para as duas escolas próximas a essas bibliotecas. Para cada exemplar de livro doado, essa gráfica doou dois cadernos.

**PENSE E**

**RESPOSTA** Ver as [Orientações para o professor](#).

Como você faria para descobrir quantos cadernos essa gráfica doou para as duas escolas juntas?

Observe uma maneira de calcular o número de cadernos doados por essa gráfica.

> Cadernos doados pela gráfica, de acordo com o total de livros

Autor \ Segmento	EF I	EF II	EM
AI	$60 \cdot 2 = 120$	$105 \cdot 2 = 210$	$129 \cdot 2 = 258$
AB	$112 \cdot 2 = 224$	$170 \cdot 2 = 340$	$220 \cdot 2 = 440$

Fonte: Dados fictícios.

Perceba que esse cálculo equivale a multiplicar por 2 cada elemento da matriz que representa o número de livros doados para as bibliotecas Cecília Meireles e Rachel de Queiroz juntas. Assim, temos:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 60 & 105 & 129 \\ 112 & 170 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 60 & 2 \cdot 105 & 2 \cdot 129 \\ 2 \cdot 112 & 2 \cdot 170 & 2 \cdot 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 210 & 258 \\ 224 & 340 & 440 \end{pmatrix}$$

Adicionando os elementos da última matriz, temos a quantidade de cadernos doados pela gráfica, ou seja, 1592 cadernos.

De modo geral, definimos:

Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e um número real  $k$ , o produto de  $k$  por  $A$ , indicado por  $k \cdot A$ , é a matriz  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , em que  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ , para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  e todo  $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Ou seja, para multiplicar um número real por uma matriz, multiplicamos esse número por todos os elementos da matriz, e o resultado será uma matriz de mesma ordem.



GEEKSTOCK/SHUTTERSTOCK.COM

■ Modelos de cadernos doados pela gráfica.

# Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz

Dadas as matrizes  $A$  e  $B$  de mesma ordem  $m \times n$  e  $\alpha$  e  $\beta$  números reais, valem as propriedades:

**1<sup>a</sup> propriedade:**  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

**2<sup>a</sup> propriedade:**  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

**3<sup>a</sup> propriedade:**  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

**4<sup>a</sup> propriedade:**  $1 \cdot A = A$

## Multiplicação de matrizes

Uma organização não governamental (ONG) oferece mensalmente alimentos a dois abrigos. Para o abrigo 1, são doados 25 kg de arroz, 20 kg de feijão, 30 kg de carne e 32 kg de batata. Para o abrigo 2, são doados 30 kg de arroz, 24 kg de feijão, 35 kg de carne e 38 kg de batata.

Uma equipe é responsável por fazer a cotação de preços, em reais, em dois supermercados e realizar as compras. Observe uma das cotações realizadas.

Resposta esperada: Considerando o objetivo de economizar, comprando arroz e batata no supermercado 2 e feijão e carne no supermercado 1.

### > Cotação de preços

Alimento (1 kg)	Supermercado 1	Supermercado 2
Arroz	5,10	4,80
Feijão	6,30	8,50
Carne	16,50	23,90
Batata	4,60	3,80

Fonte: Dados fictícios.

Vamos determinar o valor mensal que essa ONG gasta, por abrigo, supondo que todas as mercadorias sejam adquiridas no mesmo estabelecimento e que ele represente a melhor opção de compra.

Inicialmente, escrevemos a matriz  $A$ , que representa a quantidade de alimentos, em quilograma, a ser comprada para os dois abrigos:

$$A = \begin{bmatrix} \text{arroz} & \text{feijão} & \text{carne} & \text{batata} \\ 25 & 20 & 30 & 32 \\ 30 & 24 & 35 & 38 \end{bmatrix}$$

abrigo 1      abrigo 2

Por meio da matriz  $B$ , representamos os preços, por quilograma, dos alimentos cotados nos dois supermercados:

$$B = \begin{bmatrix} \text{supermercado 1} & \text{supermercado 2} \\ 5,10 & 4,80 \\ 6,30 & 8,50 \\ 16,50 & 23,90 \\ 4,60 & 3,80 \end{bmatrix}$$

arroz      feijão      carne      batata

Vamos calcular o gasto mensal da ONG com essas doações considerando as seguintes situações.

**1<sup>a</sup>) Alimentos para o abrigo 1**

- supermercado 1:  $25 \cdot 5,10 + 20 \cdot 6,30 + 30 \cdot 16,50 + 32 \cdot 4,60 = 895,70$
- supermercado 2:  $25 \cdot 4,80 + 20 \cdot 8,50 + 30 \cdot 23,90 + 32 \cdot 3,80 = 1128,60$

**2<sup>a</sup>) Alimentos para o abrigo 2**

- supermercado 1:  $30 \cdot 5,10 + 24 \cdot 6,30 + 35 \cdot 16,50 + 38 \cdot 4,60 = 1056,50$
- supermercado 2:  $30 \cdot 4,80 + 24 \cdot 8,50 + 35 \cdot 23,90 + 38 \cdot 3,80 = 1328,90$

Esses resultados podem ser representados por meio de uma matriz  $C$ , quadrada de ordem 2, de modo que cada coluna corresponda a um supermercado:

$$C = \begin{bmatrix} \text{supermercado 1} & \text{supermercado 2} \\ \downarrow & \downarrow \\ 895,70 & 1128,60 \\ 1056,50 & 1328,90 \end{bmatrix}$$

Comparando as somas dos números das colunas na matriz  $C$ , temos:

$$\bullet \quad 895,70 + 1056,50 = 1952,20 \qquad \bullet \quad 1128,6 + 1328,90 = 2457,50$$

Portanto, podemos verificar que se a ONG optar por comprar no supermercado 1, gastará menos do que no supermercado 2 e economizará R\$ 505,30.

A matriz  $C$  obtida acima é denominada **matriz produto** de  $A$  por  $B$ , ou seja,  $C = A \cdot B$ .

Para realizar a multiplicação de matrizes  $A \cdot B$ , é necessário que a quantidade de colunas da matriz  $A$  seja igual ao número de linhas da matriz  $B$ . O resultado será uma matriz com tantas linhas quanto a matriz  $A$  e tantas colunas quanto a matriz  $B$ , ou seja:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = (A \cdot B)_{m \times p}$$

↑  
iguais

Por exemplo, dadas as matrizes  $A_{3 \times 4}$  e  $B_{4 \times 2}$ , temos:

$$A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2} = (A \cdot B)_{3 \times 2}$$

↑  
iguais

$$B_{4 \times 2} \cdot A_{3 \times 4}$$

↑  
diferentes

Nesse caso, não existe  $B \cdot A$ , pois não é possível realizar a multiplicação definida.

De modo geral, temos:

Dadas uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e uma matriz  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , denomina-se **produto de  $A$  por  $B$** , indicado por  $A \cdot B$  ou  $AB$ , a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times p}$ , tal que  $c_{ij}$  é a soma dos produtos dos elementos da  $i$ -ésima linha de  $A$  pelos elementos correspondentes (na mesma ordem) da  $j$ -ésima coluna de  $B$ .

# Propriedades da multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de modo que as somas e os produtos estejam definidos, valem as propriedades:

**1<sup>a</sup>) Propriedade associativa:**  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

**2<sup>a</sup>) Propriedade distributiva:**  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$  (à esquerda)

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  (à direita)

## SAIBA QUE...

O produto  $A \cdot A$  também pode ser indicado por  $A^2$ .

### Observações:

**a)** A multiplicação de matrizes **não é comutativa**, ou seja, pode não valer a propriedade  $AB = BA$ .

Por exemplo, se  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , então  $AB \neq BA$ , pois  $AB = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ .

**b)** Se ocorrer  $AB = BA$ , dizemos que as **matrizes  $A$  e  $B$  comutam**.

Por exemplo:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  comutam, pois:  $AB = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$  e  $BA = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$ .

Observe que é necessário que as matrizes  $A$  e  $B$  sejam quadradas para que existam tanto o produto  $AB$  como o produto  $BA$ .

**c)** Ao contrário do que ocorre com os números reais, na multiplicação de matrizes **não vale a lei do anulamento do produto** ( $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$  ou  $b = 0$ ). Nesse caso, quando consideramos matrizes, podemos ter  $AB = 0$ , mesmo com  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$ .

Por exemplo: considerando  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , temos  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  e  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**d)** Na multiplicação de matrizes **não vale a lei do cancelamento** (se  $a \neq 0$ ,  $ab = ac \Rightarrow b = c$ ).

Nesse caso, mesmo que tenhamos uma matriz  $A$  não nula, podemos ter  $AB = AC$  e  $B \neq C$ .

Por exemplo: considerando as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$  e  $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,

poderemos verificar que  $AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$ , com  $A \neq 0$  e  $B \neq C$ .

**e)** Dada uma matriz  $A$  quadrada de ordem  $n$ , temos  $AI_n = I_n A = A$ , em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

## &gt; ATIVIDADES RESOLVIDAS

4. Sendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ ,

determine, se possível:

a)  $A \cdot B$       b)  $B \cdot A$

**Resolução**

a) Como  $A$  é uma matriz de ordem  $2 \times 2$  e  $B$ , de ordem  $2 \times 3$ , existe a matriz  $C$  tal que  $C = AB$ . A matriz  $C$  é de ordem  $2 \times 3$ . Nesse caso, temos:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) = 5$$

$$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 = 1$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = 15$$

$$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 = -11$$

$$\text{Logo, } C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 15 & -11 \end{bmatrix}.$$

b) Como  $B$  é uma matriz de ordem  $2 \times 3$  e  $A$ , de ordem  $2 \times 2$ , temos a quantidade de colunas de  $B$  diferente da quantidade de linhas de  $A$ . Nesse caso, não existe a matriz produto  $B \cdot A$ .

5. (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para decodificar uma palavra de

cinco letras, dada por uma matriz  $A$ , de ordem  $5 \times 1$ , formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e, usando-se a}$$

tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

- a) DIEGO      d) RENAN  
 b) SHUME      e) RAMON  
 c) SADAN

**Resolução**

De acordo com as informações do enunciado, calculamos o produto  $C \cdot A$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{5 \times 5} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 11 + 9 \\ 3 + 4 \\ 14 \\ 1 \\ 2 + 6 \end{bmatrix}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} 20 \\ 7 \\ 14 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}_{5 \times 1}$$

Com base na linguagem de códigos utilizada pelas agências, decodificam-se os elementos da matriz obtida:

20 corresponde à letra R;

7 corresponde à letra A;

14 corresponde à letra M;

1 corresponde à letra O;

8 corresponde à letra N.

Logo, o nome do espião é RAMON, resposta da alternativa e.

## &gt; ATIVIDADES

NÃO ESCREVA  
NO LIVRO

Ver as Orientações para o professor.

11. Considerando as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcule:

- a)  $2A$       b)  $-3B$       c)  $\frac{1}{2}B$       d)  $3A + 2B$

12. Sendo
- $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- ,
- $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- ,
- $\alpha = 2$
- e

 $\beta = 3$ , verifique que: Ver as Orientações para o professor.

- a)  $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$   
 b)  $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$   
 c)  $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$   
 d)  $1 \cdot Y = Y$

13. Dadas as matrizes
- $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
- e
- $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & -6 & 15 \end{bmatrix}$
- , determine, se possível:

- a)  $\frac{1}{2}(A + B)$       b)  $-4A - \frac{2}{3}B$

Ver as Orientações para o professor.

14. Sejam as matrizes:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 2}, \text{ em que } a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{2 \times 2}, \text{ em que } b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 2i - j, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Calcule:

- a)  $C = 2A - 3B$       b)  $D = \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}B$

Ver as Orientações para o professor.

15. Determine, quando possível, a matriz que resulta das multiplicações indicadas a seguir.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Não é possível determinar este produto.}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (2, 4, -1) \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

16. Dados
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
- e
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- , calcule

 $AB$  e  $BA$ . As matrizes  $A$  e  $B$  comutam?

Ver as Orientações para o professor.

17. (UFSC) Sejam
- $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$
- e
- $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$
- duas matrizes definidas por
- $a_{ij} = i + j$
- e
- $b_{ij} = 2i + j$
- , respectivamente. Se
- $A \cdot B = C$
- , então qual é o elemento
- $c_{32}$
- da matriz
- $C$
- ?
- $c_{32} = 94$

18. Uma fábrica de mochilas utiliza três tamanhos de zíper na confecção de dois modelos de mochilas, conforme indicado no quadro a seguir.

	Modelo X	Modelo Y
Pequeno	4	2
Médio	2	3
Grande	1	2

Essa fábrica recebeu a seguinte encomenda para o último trimestre do ano.

	Outubro	Novembro	Dezembro
Mochila X	50	100	200
Mochila Y	50	150	100

NIKITA BUDA/  
SHUTTERSTOCK.COMPRILL/  
SHUTTERSTOCK.COM

■ Os dois modelos fabricados têm compartimentos internos nos quais também são utilizados zíperes.

- a) Escreva a matriz  $T_{3 \times 2}$  que representa a quantidade de zíperes, por tamanho, utilizada em cada modelo de mochila.

Ver as Orientações para o professor.

- b) Escreva a matriz  $E_{2 \times 3}$  para representar a quantidade de mochilas, por modelo, encomendada para o último trimestre do ano.

Ver as Orientações para o professor.

- c) Calcule o produto  $T \cdot E$  e responda: quantos zíperes de tamanho médio serão necessários para confeccionar as mochilas encomendadas no mês de novembro?

650 zíperes

- d) Elabore um problema que possa ser respondido com as informações apresentadas nesta atividade. Resposta pessoal.

# Matriz inversa

Sabemos que o inverso do número 3 é o número  $\frac{1}{3}$ , pois  $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$  e o inverso do número  $\frac{5}{4}$  é  $\frac{4}{5}$ , pois  $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$ .

Por definição, o inverso de um número real  $a$ ,  $a \neq 0$ , é o número  $\frac{1}{a}$ , que também pode ser indicado por  $a^{-1}$ , tal que:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

No estudo de matrizes, em especial para matrizes quadradas de mesma ordem, é possível estabelecer um conceito análogo a esse. Veja a seguir o conceito de matriz inversa.

**PENSE E  
RESPONDA**

A matriz  
 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  é

inversa da matriz

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ?

Por quê?

Sim. Resposta esperada:  
 $A \cdot B = B \cdot A = I_2$ .

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Se existe uma matriz  $B$ , quadrada de ordem  $n$ , tal que  $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ , dizemos que a matriz  $B$  é a **matriz inversa** de  $A$ . Indicamos a matriz inversa de  $A$  por  $A^{-1}$ .

Diferentemente do que acontece com os números reais não nulos, nem sempre uma matriz quadrada possui inversa. Quando existe a matriz inversa de  $A$  ( $A^{-1}$ ), dizemos que a matriz  $A$  é **invertível**.

**Observações:**

- Se a matriz quadrada  $A$  é invertível, então a sua inversa é única.
- Quando uma matriz quadrada não possui inversa, dizemos que ela é **não invertível**.

## Equações matriciais

Vimos como resolver operações envolvendo matrizes. Agora, vamos utilizar essas operações e algumas propriedades para resolver equações envolvendo matrizes. Essas equações são chamadas **equações matriciais**.

Observe o exemplo a seguir.

Considerando as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ , vamos determinar

a matriz  $X_{2 \times 2}$  tal que  $X + A = B$ .

Para determinar a matriz  $X$  na equação  $X + A = B$ , adicionamos a ambos os membros da igualdade a matriz oposta de  $A$ .

$$X + A + (-A) = B + (-A)$$

Vimos que a soma de uma matriz  $A$  com a sua matriz oposta,  $-A$ , é igual à matriz nula, ou seja,  $A + (-A) = 0$ . Assim, temos:

$$X + 0 = B - A$$

Pela propriedade do elemento neutro, temos:

$$X = B - A$$

Utilizando os elementos das matrizes  $A$  e  $B$ , obtemos a matriz  $X$ :

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & -2 \\ 4 & -(-1) & -3 & -5 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } X = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

### > ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 6.** Em cada caso, verifique se a matriz apresentada é invertível e, em caso afirmativo, determine a matriz inversa.

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

#### Resolução

Para verificar se existe a inversa da matriz apresentada, vamos supor que exista e resolver os sistemas de equações associados. Caso algum dos sistemas não tenha solução, concluímos que a matriz inicial não é invertível.

- a) Sendo  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  e indicando a inversa de  $A$  como  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , temos pela definição:

$$A \cdot A^{-1} = I_2$$

Com isso, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo, } \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ a+5c & b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando a igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 2a+4c=1 \\ a+5c=0 \end{cases}, \text{ cujas soluções são } a = \frac{5}{6} \text{ e}$$

$$c = -\frac{1}{6};$$

$$\begin{cases} 2b+4d=0 \\ b+5d=1 \end{cases}, \text{ cujas soluções são } b = -\frac{2}{3}$$

$$\text{e } d = \frac{1}{3}.$$

Como esses sistemas possuem solução, a matriz  $A$  é invertível e a matriz inversa de

$$A \text{ é dada por } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- b) Sendo  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e indicando a inversa de  $B$  como  $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , temos pela definição:

$$B \cdot B^{-1} = I_2$$

Com isso, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo, } \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como essa igualdade não é verdadeira, a matriz  $B$  não é invertível e, portanto, não admite matriz inversa.

**7.** Considerando  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ , determine a matriz  $X$ , tal que  $2X + A - B = 0$ .

### Resolução

Adicionando a ambos os lados da igualdade a matriz  $B$  e a matriz oposta de  $A$ , temos:

$$2X + A - B + B + (-A) = 0 + B + (-A)$$

Utilizando a propriedade associativa da adição de matrizes, temos:

$$2X + A + (-A) + B + (-B) = 0 + B + (-A)$$

Utilizando a propriedade do elemento oposto da adição de matrizes, temos:

$$2X + 0 + 0 = 0 + B + (-A)$$

Utilizando a propriedade do elemento neutro, temos:

$$2X = B - A$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\frac{1}{2}$ , e utilizando a 3ª propriedade da multiplicação de números reais por matrizes, temos:

$$X = \frac{1}{2}(B - A)$$

Utilizando os elementos das matrizes  $A$  e  $B$ , obtemos a matriz  $X$ :

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{Logo, } X = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Portanto, } X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

**8.** Sendo  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  e

$B = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$ , resolva a equação matricial  $AX = B$ .

### Resolução

Precisamos determinar a matriz  $X$ , mas não conhecemos a matriz  $A$ .

Como sabemos que a matriz  $A$  é invertível, multiplicamos os dois membros da equação  $AX = B$  por  $A^{-1}$  à esquerda. Assim, temos:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$$

Utilizando a propriedade associativa da multiplicação de matrizes, temos:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Mas  $A^{-1} \cdot A = I_3$ , e com isso, temos:

$$I_3 \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Logo,  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Perceba que para determinar a matriz  $X$ , não precisamos conhecer a matriz  $A$ , apenas a sua inversa  $A^{-1}$ .

Substituindo as matrizes dadas, obtemos:

$$X = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo, } X = \begin{pmatrix} -15 \cdot (-1) + (-8) \cdot (-18) + (-3) \cdot 52 \\ -9 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-18) + (-2) \cdot 52 \\ 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-18) + 1 \cdot 52 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Portanto, } X = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

## > ATIVIDADES



Ver as Orientações para o professor.

- 19.** Determine a inversa das matrizes, quando possível:

a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- 20.** Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$  e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Calcule } AB + A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

- 21.** Considere as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Sabendo que } A \cdot B^{-1} = C, \text{ calcule } A - B + C. A - B + C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- 22.** Sejam as matrizes  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  e

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}. \text{ Sabendo que } N \text{ é a matriz}$$

inversa de  $M$ , calcule  $(p + q)$ .  $(p + q) = 0$

- 23.** Se  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ obtenha a matriz } X, \text{ sabendo}$$

que:  $\frac{X - A}{2} = \frac{B + X}{3} + C$ . Ver as Orientações para o professor.

- 24.** (Udesc-SC) Sejam  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  e

$$B = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 17 & 7 \end{pmatrix} \text{ duas matrizes e } I \text{ a matriz identidade de ordem dois. Encontre a matriz } X \text{ tal que } AX + I = B. X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

**25.** (UFRN) Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

e  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,

determine a matriz  $X$  que satisfaz a equação matricial:  $AX + B = C$ .

- 26.** (UMC-SP)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  e  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calcule a matriz  $X$  tal que  $A \cdot X = I_2$ .  $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

- 27.** Sendo  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$ , calcule a matriz  $X$ , tal que  $A \cdot X = B$ .  $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

- 28.** (UFPR) Calcule o valor de  $a$  de modo que exista somente uma matriz  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , tal que o produto  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -a \\ a & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  seja igual a  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  $a = 2$

- 29.** (UEG-GO) Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes  $A$  e  $B$ , ambas de ordem  $2 \times 2$ , onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é,  $a = 1, b = 2, c = 3, \dots, z = 26$ . Por exemplo, se

a resolução de  $A \cdot B$  for igual a  $\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$ , logo

a mensagem recebida é amor. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi flor e a

matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , então a matriz  $A$  é alternativa b

a)  $\begin{bmatrix} -8 & 7 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$

## &gt; CONEXÕES

## Mobilidade urbana e matrizes

Leia o texto a seguir.

[...]

O transporte veicular é um artifício indispensável para a mobilidade humana, do qual a maioria da população mundial usufrui para se deslocar de forma rápida e segura, sendo estas características as mais importantes para se classificar um bom meio de transporte. As crescentes facilidades em adquirir um meio de transporte próprio, o desenvolvimento econômico, a má qualidade do transporte público e o aumento populacional constituem-se em fatores decisórios para o acúmulo de veículos nos centros urbanos. Em razão do aumento contínuo da frota veicular, os sistemas de trânsito atuais da maioria das cidades acabam não comportando o grande número de veículos existentes. Por consequência, surgem os inevitáveis congestionamentos e, com esses, vários problemas à sociedade, como alto nível de estresse, poluição, acidentes e prejuízos econômicos, sendo estes últimos decorrentes do alto consumo de combustível e desperdício de tempo. [...]

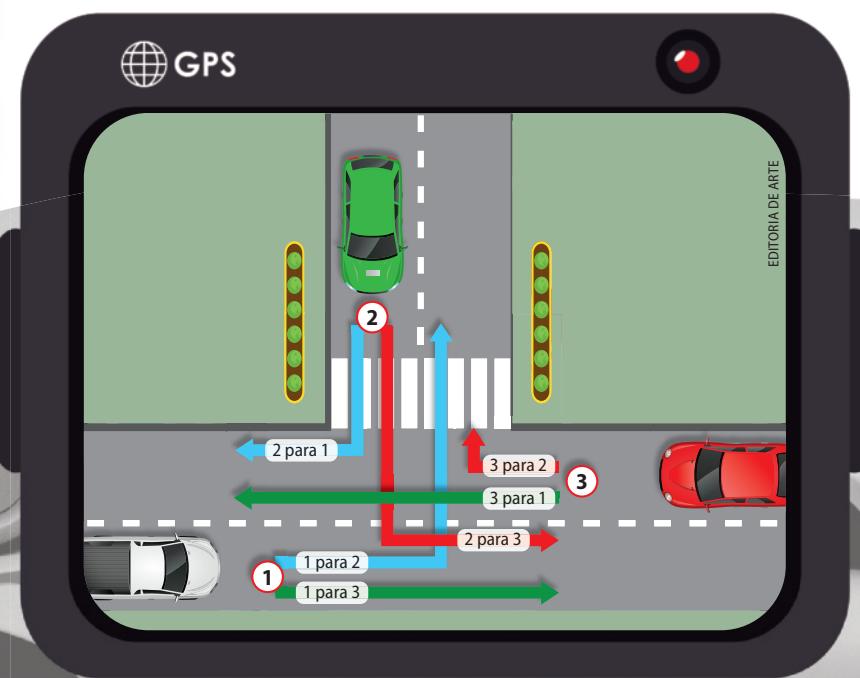
[...]

LACORTT, M.; KRIPKA, M.; KRIPKA, R. M. L. Modelos matemáticos para otimização do tráfego urbano semaforizado. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 14, n. 3, p. 359, 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/tema/v14n3/a08v14n3.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2020.

Uma preocupação crescente no planejamento das cidades são as estratégias de como organizar o fluxo de veículos. Isso mobiliza engenheiros de tráfego e órgãos reguladores de trânsito, que utilizam alguns modelos matemáticos para otimizar o tráfego urbano.

Observe a seguir uma situação envolvendo o fluxo de carros em um cruzamento, analisada por meio de matrizes.

Em um cruzamento de ruas de **mão dupla**, o fluxo de automóveis nos pontos **1, 2 e 3** é organizado por três conjuntos de semáforos, de modo que o ciclo desses semáforos dura 4 minutos. Os engenheiros de tráfego fizeram um modelo para descobrir quantos carros passam por hora, em cada semáforo, nesse cruzamento.



Nesse modelo, foram construídas inicialmente as matrizes  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , que indicam o tempo  $m_{ij}$ , em minuto, em que alguns semáforos se mantêm simultaneamente abertos, permitindo o fluxo de  $i$  para  $j$ .

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Durante os primeiros dois minutos do ciclo, ficam verdes os semáforos de (1) para (2), de (1) para (3) e de (2) para (1).

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, durante um minuto ficam verdes os semáforos de (2) para (1), de (2) para (3) e de (3) para (2).

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, durante o último minuto do ciclo, ficam verdes os semáforos de (3) para (1), de (3) para (2) e de (1) para (3).

Para saber o tempo no qual cada semáforo fica aberto no ciclo de 4 minutos, adicionamos  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , obtendo a matriz  $M$ .

Com base nessa matriz, que corresponde a um ciclo de 4 minutos, é possível fazer uma estimativa da quantidade de veículos que podem passar nesse cruzamento, considerando determinados períodos, e buscar resolver problemas de engarrafamento.

Por exemplo: se considerarmos que em 1 minuto passam cerca de 15 veículos pelo cruzamento, para saber quantos veículos passam em 1 hora, fazemos:

$$15 \cdot 15 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 450 & 675 \\ 675 & 0 & 225 \\ 225 & 450 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, se o número de carros em alguma das direções for maior do que a quantidade calculada, teremos um engarrafamento, que pode ou não ser resolvido alterando-se os tempos de abertura dos semáforos, isto é, modificando-se os valores nas matrizes  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ .



 Agora, reúna-se a mais colegas e façam o que se pede nas atividades a seguir.

[Ver as Orientações para o professor.](#)

1. No município onde vocês moram há congestionamentos? Se sim, descrevam as possíveis causas e pensem em uma alternativa que possibilite diminuir o tráfego de veículos nessas vias. Pesquisem sobre mobilidade urbana e cidades que têm apresentado propostas inovadoras nesse sentido.
2. Vocês já tinham ouvido falar sobre engenharia de tráfego? Pesquisem sobre essa área de trabalho e verifiquem instituições que oferecem esse tipo de curso. Indiquem qual é o órgão responsável pela engenharia de tráfego de sua cidade.
3. Utilizando o exemplo apresentado, pesquisem um cruzamento na sua cidade, que seja de mão dupla. Elaborem um problema considerando ciclos de semáforos, utilizando a matriz que representa o tempo em que cada semáforo fica aberto em cada um dos sentidos. Troquem os problemas entre os grupos.

# Sistemas lineares

Você, provavelmente, estudou sistemas de equações no Ensino Fundamental. Vamos agora dar sequência a esse estudo, explorando também sistemas com mais de duas equações e envolvendo mais de duas incógnitas. Quando possível, vamos estabelecer relações com problemas do dia a dia, explorando diferentes maneiras de resolução, inclusive utilizando o trabalho com matrizes.

## Equação linear

Acompanhe a situação a seguir.

Andréa percebeu que o saldo de seu cartão escolar de transporte era de R\$ 120,00. Na cidade onde mora, os estudantes pagam R\$ 3,00 na viagem de ônibus, R\$ 2,50 na de metrô, e a viagem de trem custa R\$ 2,00. Com esse saldo do cartão, quantas viagens ela pode fazer utilizando esses meios de transporte?

Uma situação como essa pode ser traduzida para a linguagem matemática. Para isso, podemos utilizar **incógnitas** (valores desconhecidos), representadas por meio de letras, relacionando-as com as informações apresentadas na situação analisada.

Considerando  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, o número de viagens de ônibus, de metrô e de trem, podemos escrever a seguinte sentença:  
 $3,00 \cdot x + 2,50 \cdot y + 2,00 \cdot z = 120,00$  ou  $3x + 2,5y + 2z = 120$

Toda equação que pode ser escrita na forma geral  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ , em que  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  e  $b$  são números reais e  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são incógnitas, é denominada **equação linear**.

Na equação linear  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ :

- $a_1, a_2, \dots, a_n$  são números reais chamados **coeficientes** (ou **parâmetros**);
  - $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as **incógnitas**;
  - $b$  é o termo (ou parâmetro) independente.
- O sistema de transporte de alguns municípios brasileiros utiliza cartões nos quais é possível carregar o crédito das viagens. O valor de cada viagem realizada é debitado de acordo com o uso.

JOÃO SOUZA/SHUTTERSTOCK.COM


**FÓRUM**

## Benefício em passagem estudantil

Você já ouviu falar em benefícios que dão descontos em passagem estudantil nos transportes coletivos públicos? Segundo a Agência Nacional de Transportes Terrestres (ANTT), existem alguns benefícios como esse em alguns estados brasileiros, mas não há uma regulamentação que garanta a sua obrigatoriedade.

No município de São Paulo, por exemplo, todo estudante regularmente matriculado em uma instituição de ensino paga meia tarifa no transporte público. Além disso, estudantes de escola pública, cuja renda familiar é de até 1 salário mínimo e meio por pessoa, cadastrados no Cadastro Único para Programas Sociais do Governo Federal, têm direito ao passe livre estudantil.

Fonte dos dados: UNIÃO BRASILEIRA DOS ESTUDANTES SECUNDARISTAS. **Bilhete Único SPtrans estudante, tire suas dúvidas.** São Paulo, 11 dez. 2018. Disponível em: <http://ubes.org.br/2018/bilhete-unico-sptrans-estudante/>. Acesso em: 4 jul. 2020.

Após ler o texto, faça o que se pede a seguir.



- 1.** No município onde você mora existe esse tipo de benefício para estudantes? Conhece alguma pessoa que não pode estudar por dificuldade de acesso?  
*Resposta pessoal. A resposta depende de onde o estudante mora.*
- 2.** Em sua opinião, qual é a importância desse tipo de benefício considerando o orçamento das famílias? *Ver as Orientações para o professor.*



SVINKA/SHUTTERSTOCK.COM

Uma ênupla, ou seja, uma sequência ordenada de  $n$  números reais  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  que, substituídos respectivamente no lugar de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tornam verdadeira a igualdade  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , é uma **solução da equação**.

A sentença  $3x + 2,5y + 2z = 120$  é uma equação linear em que 3; 2,5 e 2 são os coeficientes;  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as incógnitas; 120 é o termo independente. Essa equação apresenta várias soluções, entre as quais as ternas ordenadas  $(20, 20, 5)$ ,  $(16, 16, 16)$  e  $(25, 18, 0)$ , pois cada uma delas torna verdadeira a igualdade  $3x + 2,5y + 2z = 120$ .

**PENSE E  
RESPONDA**

Imagine que Andréa não vai utilizar o metrô e que a quantidade de viagens de ônibus que vai fazer será o dobro da quantidade de viagens de trem. Qual é a solução da equação  $3x + 2,5y + 2z = 120$  considerando essa condição?  
 $S = \{(30, 0, 15)\}$

Quando o termo independente  $b$  de uma equação linear é igual a zero, ela é denominada **equação linear homogênea**. Nesse caso, temos:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

A ênupla  $(0, 0, \dots, 0)$  é uma das soluções de qualquer equação linear homogênea.

Por exemplo: a equação  $2x - y + 3z = 0$  é homogênea e  $(0, 0, 0)$  é uma de suas soluções, pois:  $2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$ .

Quando duas ou mais equações lineares têm o mesmo conjunto solução, elas são denominadas **equações equivalentes**.

Por exemplo: as equações lineares  $4x + y - 2z = -7$  e  $-8x - 2y + 4z = 14$  são equações equivalentes, pois qualquer solução de uma também é solução da outra.

Observe outros exemplos de equações lineares:

a)  $2x - y = 4$

Nessa equação, 2 e  $-1$  são os coeficientes;  $x$  e  $y$  são as incógnitas; e 4 é o termo independente.

Duas das soluções dessa equação são, por exemplo, os pares ordenados  $(2, 0)$  e  $(3, 2)$ , pois, substituindo, respectivamente, os valores de  $x$  e  $y$  na equação, obtemos uma sentença verdadeira.

- para  $x = 2$  e  $y = 0$ , temos:

$2 \cdot 2 - 0 = 4$ , ou seja, o par ordenado  $(2, 0)$  torna verdadeira a sentença  $2x - y = 4$ .

- para  $x = 3$  e  $y = 2$ , temos:

$2 \cdot 3 - 2 = 4$ , ou seja, o par ordenado  $(3, 2)$  torna verdadeira a sentença  $2x - y = 4$ .

b)  $x + 2y - z = 0$

Não são exemplos de equações lineares:

c)  $xy = 15$

d)  $x^2 + y^2 = 1$

Algumas respostas possíveis:  $(0, 0, 0)$  e  $(-1, 1, 1)$ .

PENSE E  
RESPONDA

- Determine duas das possíveis soluções da equação  $x + 2y - z = 0$ .
- A terna ordenada  $[2, 3, 0]$  é solução da equação  $x + 2y - z = 0$ ? Justifique sua resposta.

Ver Orientações para o professor.

# Sistemas lineares 2 × 2

Em uma feira, as tapiocas têm preço único e os copos de suco também. Uma cliente pagou R\$ 31,50 por 5 tapiocas e 3 copos de suco, e outro cliente pagou R\$ 19,50 por 3 tapiocas e 2 copos de suco.

Quais são os preços da tapioca e do copo de suco?

Para representar essa situação, identificamos como  $x$  o preço de cada tapioca e como  $y$  o preço de cada copo de suco e montamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 31,50 \\ 3x + 2y = 19,50 \end{cases}$$

Esse tipo de sistema de equações, que é formado por duas equações lineares com duas incógnitas, você provavelmente já estudou nos anos finais do Ensino Fundamental. Vamos retomar esse tipo de sistema e as maneiras de resolvê-lo.

Para determinar o valor de  $x$  e o de  $y$  que satisfazem as duas equações desse sistema, vamos aplicar o método da adição, que consiste em adicionar membro a membro as equações com o objetivo de obter uma equação equivalente, em que o coeficiente de uma das incógnitas é zero.

Inicialmente multiplicamos ambas as equações por números específicos, que nos permitam em um segundo momento adicionar, membro a membro, as equações, de modo a anular o coeficiente de uma das incógnitas.

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 31,50 \\ 3x + 2y = 19,50 \end{array} \right. & \xrightarrow{\cdot(3)} & 15x + 9y = 94,50 \\ & \xrightarrow{\cdot(-5)} & -15x - 10y = -97,50 \\ & & \hline & & -y = -3,00 \\ & & & & y = 3,00 \end{array}$$

Substituindo  $y$  por 3,00 na primeira equação, determinamos o valor de  $x$ .

$$5x + 3 \cdot 3,00 = 31,50 \Rightarrow 5x + 9,00 = 31,50$$

Logo,  $x = 4,50$ .

Assim, a tapioca custa R\$ 4,50 e o suco custa R\$ 3,00.

Observe que os valores  $x = 4,50$  e  $y = 3,00$  satisfazem às duas equações do sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 5 \cdot (4,50) + 3 \cdot (3,00) = 22,50 + 9,00 = 31,50 \\ 3x + 2y = 3 \cdot (4,50) + 2 \cdot (3,00) = 13,50 + 6,00 = 19,50 \end{cases}$$

Portanto, o par ordenado  $(4,50; 3,00)$  é a solução do sistema, ou seja, o conjunto solução desse sistema é  $S = \{(4,50; 3,00)\}$ .



FLAVIO COELHO/MOMENT/GETTY IMAGES

- A tapioca é um alimento de origem indígena, feita de fécula extraída da mandioca, e está cada vez mais presente na alimentação dos brasileiros em todas as regiões do país.

## PENSE E RESPONDA

- Justifique por que a primeira equação foi multiplicada por 3 e a segunda equação por  $-5$ . *Ver as Orientações para o professor.*
- Se quisermos resolver o sistema anulando o coeficiente da incógnita  $y$  ao adicionar as duas equações, por quais números devemos multiplicar, respectivamente, a primeira e a segunda equações? Compare a sua resposta com a de um colega.  
*Uma resposta possível:  
Multiplicar a primeira equação por 2 e a segunda por  $-3$ .*

PENSE E  
RESPONDA

- Observando as equações (I) e (II) do sistema, você identifica o motivo de se ter escolhido a equação (II) para, inicialmente, isolar a incógnita  $x$  e posteriormente, fazer a substituição na equação (I)? Qual?
- Como você faria se fosse resolver esse sistema pelo método da adição? Compare sua resposta com a de um colega.

**Ver as Orientações para o professor.**

Um sistema linear  $2 \times 2$  também pode ser resolvido pelo método da substituição, que consiste em expressar uma incógnita em função da outra, utilizando uma das equações e, posteriormente, substituir a expressão na outra equação, para que ela fique com apenas uma incógnita e possa ser resolvida.

Observe, por exemplo, a resolução do sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (I) \\ x + 2y = 4 & (II) \end{cases}$$

Isolando a incógnita  $x$  da equação (II), obtemos  $x = 4 - 2y$ .

Substituindo  $x$  por  $4 - 2y$  na equação (I), temos:

$$\begin{aligned} 2(4 - 2y) + 3y &= 7 \\ 8 - 4y + 3y &= 7 \\ -y &= -1 \end{aligned}$$

Logo,  $y = 1$ .

Agora, para determinar o valor de  $x$ , utilizamos a relação  $x = 4 - 2y$ , obtida da equação (II), substituindo  $y$  por 1.

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2(1) \\ x &= 4 - 2 \end{aligned}$$

Logo,  $x = 2$ .

Observe que o par ordenado  $(2, 1)$  é, ao mesmo tempo, solução das duas equações desse sistema:

Equação (I): $2x + 3y = 7$	Equação (II): $x + 2y = 4$
$2 \cdot (2) + 3 \cdot (1) = 7$	$(2) + 2 \cdot (1) = 7$

Assim, o conjunto solução desse sistema é  $S = \{(2, 1)\}$ .

Denomina-se **sistema linear  $2 \times 2$**  o conjunto de duas equações lineares em duas incógnitas que pode ser representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \text{ em que } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 \text{ e } b_2 \text{ são}$$

números reais.

Observe outros exemplos de sistemas lineares  $2 \times 2$  nas incógnitas  $x$  e  $y$ .

a) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = \frac{7}{5} \\ x + 5y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x - y = 2x - 5 \\ 6y = \sqrt{3} \end{cases}$$

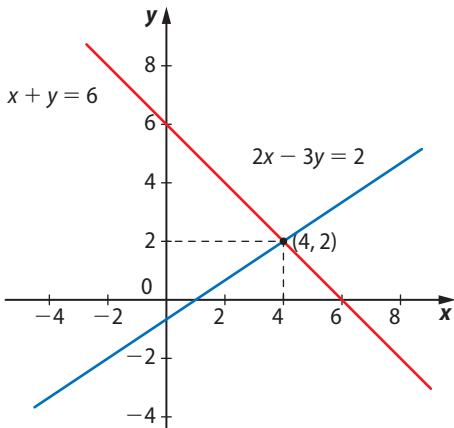
## Interpretação geométrica e classificação

A interpretação geométrica de um sistema de duas equações lineares nas incógnitas  $x$  e  $y$  pode ser feita por meio da representação gráfica das retas correspondentes a essas equações. Caso haja ponto de intersecção entre essas retas, as coordenadas desses pontos representam a solução do sistema.

Observe os exemplos a seguir.

- a) Considere o sistema linear  $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ .

Cada equação linear desse sistema pode ser reescrita na forma  $y = ax + b$ , que pode ser associada à lei de formação de uma função afim. Esboçando em um mesmo sistema cartesiano o gráfico das funções afins associadas às equações desse sistema, obtemos a representação gráfica a seguir.



Podemos observar que essas retas são **concorrentes**, ou seja, elas se cruzam em um único ponto. Isso indica que há um único par ordenado, nesse caso  $(4, 2)$ , que é a solução do sistema.

### PENSE E RESPONDA

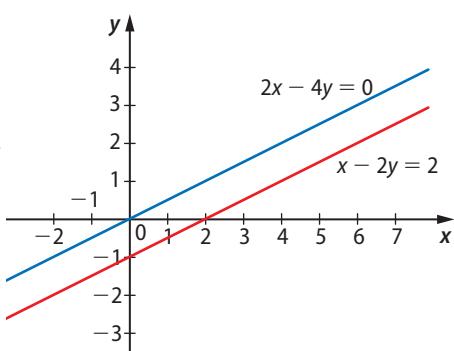
Substitua os números do par ordenado  $(4, 2)$  nas equações do sistema do exemplo a e verifique que é uma solução das duas equações.

[Ver as Orientações para o professor.](#)

Nesse exemplo, temos um **sistema possível e determinado (SPD)** porque esse sistema possui **uma** única solução.

- b) Considere o sistema linear  $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ .

Utilizando raciocínio análogo ao do exemplo anterior, representamos em um mesmo sistema cartesiano o gráfico das funções afins associadas às equações desse sistema.

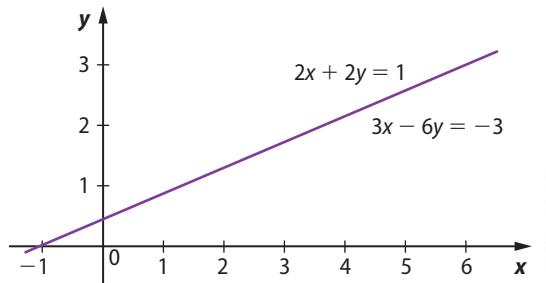


Podemos observar que essas retas são **paralelas**, ou seja, elas não se cruzam. Isso indica que **não existe** um par ordenado que seja solução do sistema.

Nesse exemplo, temos um sistema que não possui solução e, por isso, dizemos que é um **sistema impossível (SI)**.

- c) Considere o sistema linear  $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$ .

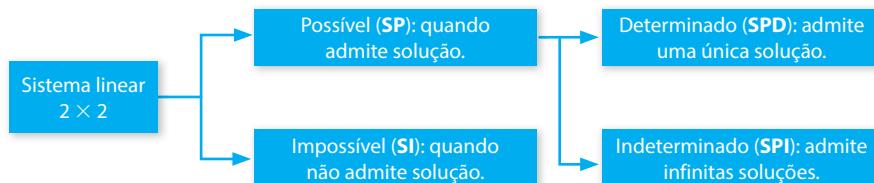
Utilizando raciocínio análogo, representamos em um mesmo sistema cartesiano o gráfico das funções afins associadas às equações desse sistema.



Podemos observar que essas retas são **coincidentes**, ou seja, possuem infinitos pontos de intersecção. Isso indica que há infinitos pares ordenados que são soluções do sistema.

Nesse exemplo, temos um sistema que tem infinitas soluções e o chamamos de **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

De maneira geral, os sistemas lineares  $2 \times 2$  podem ser classificados, quanto ao número de soluções, como esquematizado a seguir.



## > ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Verifique se a terna ordenada  $(3, -2, 4)$  é solução da equação linear  $4x - 3y + 5z = 36$ .

### Resolução

Substituindo  $x = 3$ ,  $y = -2$  e  $z = 4$  no primeiro membro da equação, temos:

$$4 \cdot 3 - 3(-2) + 5 \cdot 4 = 12 + 6 + 20 = 38$$

Como  $38 \neq 36$ , a terna ordenada  $(3, -2, 4)$  não é uma solução da equação linear  $4x - 3y + 5z = 36$ .

10. Calcule o valor de  $\alpha$  sabendo que  $(1, -1, \alpha, \alpha + 1)$  é solução da equação

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 12.$$

### Resolução

Substituindo cada incógnita pelo seu valor correspondente na solução dada, temos:

$$2 \cdot 1 - 3(-1) + \alpha - 5(\alpha + 1) = 12$$

$$2 + 3 + \alpha - 5\alpha - 5 = 12$$

$$-4\alpha = 12$$

$$\alpha = -3$$

Portanto,  $\alpha = -3$ .

- 11.** Calcule  $m$  e  $n$ , de modo que os sistemas  $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$  e  $\begin{cases} mx - ny = -1 \\ nx + my = 2 \end{cases}$  tenham o mesmo conjunto solução.

### Resolução

Empregando o método da adição, vamos resolver o primeiro sistema.

$$\begin{cases} x - y = 1 & \text{(I)} \\ 2x + y = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as equações (I) e (II), obtemos:  $3x = 6$ .  
 Logo,  $x = 2$ .

Substituindo  $x$  por 2 na equação (I), temos  $y = 1$ .

Como os sistemas devem ter o mesmo conjunto solução, constituído de uma única solução, o par ordenado  $(2, 1)$  é também solução do segundo sistema. Substituindo as incógnitas do segundo sistema por esses valores, determinamos  $m$  e  $n$ .

$$\begin{cases} 2m - n = -1 & \text{(III)} \\ 2n + m = 2 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando por  $-2$  a equação (IV) e adicionando, membro a membro, temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2m - n = -1 \\ -2m - 4n = -4 \end{cases} \\ \hline -5n = -5 \end{array}$$

Logo,  $n = 1$ .

Substituindo  $n$  por 1 na equação (III), obtemos  $m$ .

$$2m - 1 = -1 \Rightarrow 2m = 0$$

Logo,  $m = 0$ .

Para que esses sistemas tenham o mesmo conjunto solução, devemos ter  $m = 0$  e  $n = 1$ .

- 12.** Resolva e classifique os sistemas a seguir.

a)  $\begin{cases} 2a - b = 5 \\ 4a - 2b = 10 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$

### Resolução

- a) Vamos resolver esse sistema usando o método da substituição.

$$\begin{cases} 2a - b = 5 & \text{(I)} \\ 4a - 2b = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando  $b$  na equação (I), temos  $b = 2a - 5$ .

Substituímos  $b$  por  $2a - 5$  em (II):

$$4a - 2 \cdot (2a - 5) = 10 \Rightarrow 4a - 4a + 10 = 10$$

Logo,  $0a = 0$ .

Observe que qualquer número real colocado no lugar de  $a$  torna verdadeira a sentença. Isso significa que o sistema tem infinitas soluções, ou seja, ele é **possível e indeterminado**.

Cada uma das infinitas soluções é um par ordenado cujo 1º elemento é um número real qualquer e cujo 2º elemento é o dobro do 1º menos 5, ou seja, as soluções são pares ordenados da forma  $(k, 2k - 5)$ , para qualquer número real  $k$ .

Algumas das soluções desse sistema são  $(1, -3)$ ,  $(-3, -11)$ ,  $(0, -5)$  e  $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ .

Como estamos trabalhando com números reais, temos:

$$S = \{(k, 2k - 5) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

- b)** Vamos resolver o sistema utilizando o método da adição. Multiplicando a primeira equação por  $(-2)$ , temos:

$$\begin{cases} -4x - 6y = -18 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, essas equações, temos:  $0x + 0y = -8$

Observe que não há valores reais de  $x$  e de  $y$  que tornam verdadeira essa sentença. Por isso, dizemos que não existe solução e nesse caso temos um sistema impossível.

O conjunto solução é vazio e indicamos  $S = \emptyset$ .

De fato, observando as duas equações do sistema, é possível perceber que não há solução, pois as equações  $2x + 3y = 9$  e  $4x + 6y = 10$  são incompatíveis: multiplicando por 2 a primeira equação, obtemos  $4x + 6y = 18$ , ou seja,  $4x + 6y$  não pode simultaneamente ser igual a 10 e a 18.

## ATIVIDADES



NÃO ESCREVA NO LIVRO

$$m = -\frac{10}{3}$$

- 30.** Considerando  $x$ ,  $y$  e  $z$  as incógnitas, qual(is) das seguintes equações são lineares?

a)  $4x - y + \frac{z}{2} = 0$  alternativa a

b)  $5x + 2yz = 0$

c)  $2x + 3y - z^2 = 0$

d)  $xyz = 1$

- 31.** Dos pares ordenados  $(0, -3)$ ,  $(1, 2)$ ,  $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

e  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ , quais são soluções da equação

$$2x - 3y = 9? (0, -3) \text{ e } \left(4, -\frac{1}{3}\right)$$

- 32.** Considere a equação  $4x - 2y + z = 8$ .

- a) Verifique se a terna ordenada  $(0, -3, 2)$  é uma solução dessa equação. É solução.

- b) Obtenha uma solução dessa equação cujo valor de  $z$  seja zero. Uma resposta possível:  $(3, 2, 0)$ .

- 33.** A equação linear  $0x + 0y = 4$  possui solução? Justifique. Resposta esperada: Não, pois qualquer que seja o par ordenado  $(a, b)$  temos  $0a + 0b \neq 4$ .

- 34.** Determine  $m$ , de modo que  $(-1, 2, -3)$  seja solução da equação linear:  $2a - 4b + mc = 0$ .

- 35.** Determine os valores de  $m$  para que a equação  $x - 4y + z = m^2 - 4$  seja homogênea.

$$m = 2 \text{ ou } m = -2$$

- 36.** Sendo  $a$  um número real qualquer, mostre que  $(a, 6 - 2a)$  é solução da equação  $2x + y = 6$ .

Ver as Orientações para o professor.

- 37.** Verifique se  $(-1, 2)$  é solução do sistema

$$\begin{cases} a - 4b = -9 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$$

É solução.

- 38.** Determine o conjunto solução do sistema a seguir.  $S = \{(10, 5)\}$

$$\begin{cases} 2x - y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases}$$

**39.** (UFG-GO) Para se deslocar de casa até o seu trabalho, um trabalhador percorre 550 km por mês. Para isso, em alguns dias, ele utiliza um automóvel e, em outros, uma motocicleta. Considerando que o custo do quilômetro rodado é de 21 centavos para o automóvel e de 7 centavos para a motocicleta, calcule quantos quilômetros o trabalhador deve andar em cada um dos veículos para que o custo total mensal seja de R\$ 70,00.  
motocicleta: 325 km; automóvel: 225 km

**40.** Um caminhão-baú pode transportar em uma mesma viagem, no máximo, 58 caixas. Essas caixas podem ser de um tipo A ou de um tipo B, de modo que elas têm, respectivamente, 56 kg e 72 kg. Sabendo que a carga máxima que esse caminhão pode transportar por viagem é de 3,84 toneladas, responda às questões a seguir.

a) Quais equações representam essa situação, considerando o caminhão com a capacidade máxima ocupada?  $\begin{cases} x + y = 58 \\ 56x + 72y = 3840 \end{cases}$

b) Quantas caixas de cada tipo são transportadas por esse caminhão quando ele viaja com a capacidade máxima ocupada?  
21 caixas do tipo A e 37 do tipo B

**41.** Resolva os sistemas a seguir e responda: esses sistemas têm o mesmo conjunto solução?

$$S = \{(4, 3)\}; \text{ sim}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 5y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

**42.** Utilizando o **GeoGebra**, interprete geometricamente cada sistema a seguir e o classifique em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

a)  $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$  possível e determinado

b)  $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x - 8y = 7 \end{cases}$  impossível

c)  $\begin{cases} 2a + 4b = 2 \\ 4a + 8b = 4 \end{cases}$  possível e indeterminado

**43.** Considere o sistema de equações:  $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x + my = 8 \end{cases}$ .

Qual é o valor de  $m$  para que esse sistema seja possível e determinado?  $\{m \in \mathbb{R} \mid m \neq -9\}$

**44.** Qual é o valor de  $k$  para que o sistema

$$\begin{cases} x\sqrt{3} + y = 5 \\ 2x\sqrt{3} + 2y = k \end{cases}$$
 tenha infinitas soluções?  $k = 10$

**45.** (FESP) Uma pessoa alimenta seu cão combinando o conteúdo de duas marcas de rações preparadas pelos fabricantes X e Y. A tabela abaixo discrimina a quantidade de unidades de vitaminas e de sais minerais em cada saco de ração e a quantidade mínima de unidades que o cão deve consumir.

	Ração X	Ração Y	Mínimo
Vitaminas	40	20	200
Sais minerais	20	40	200

Se o saco da ração X custa R\$ 10,00 e o da Y, R\$ 15,00, determine o inteiro mais próximo do total de sacos a serem comprados de modo a minimizar os custos e satisfazer as quantidades mínimas requeridas. 7

**46.** Sabendo que  $a$  e  $b$  representam números reais, resolva e classifique o sistema:

$$\begin{cases} \frac{a-2}{4} + \frac{1-b}{2} = a - 3b \\ \frac{a+2}{3} = \frac{a+2b}{4} \end{cases}$$
  $a = 10$  e  $b = 3$ . O sistema é possível e determinado.

**47.** (UFRGS-RS) O sistema de equações

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$$
 possui: alternativa b

- a) nenhuma solução.
- b) uma solução.
- c) duas soluções.
- d) três soluções.
- e) infinitas soluções.

# Sistemas lineares $m \times n$

De maneira geral, denominamos **sistema linear**  $m \times n$ , de  $m$  equações com  $n$  incógnitas a todo conjunto de  $m$  equações lineares que pode ser representado como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Nesse caso:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as **incógnitas**;
- $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{mn}$  são números reais chamados **coeficientes**;
- $b_1, b_2, \dots, b_m$  são os **termos independentes**.

Quando uma ênupla ordenada  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é solução de cada uma das equações de um sistema linear, ou seja, torna simultaneamente verdadeiras todas as sentenças que o compõem,  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é **solução do sistema linear**.

Observe que os sistemas  $2 \times 2$  estudados anteriormente são um caso particular de sistemas lineares, com  $m = 2$  e  $n = 2$ .

## PENSE E RESPONDA

Substitua os números da terna ordenada  $(1, 2, 3)$  nas equações dos sistemas do exemplo anterior e verifique que essa terna ordenada é uma solução de ambos.

Ver as **Orientações para o professor**.

## Sistemas equivalentes

Quando dois sistemas lineares admitem o mesmo conjunto solução, dizemos que são **sistemas equivalentes**.

Por exemplo:  $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$  e  $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$  são sistemas equivalentes, pois ambos os sistemas lineares  $3 \times 3$  têm o mesmo conjunto solução  $S = \{(1, 2, 3)\}$ .

# Matrizes associadas a um sistema linear

Considere o sistema linear de  $m$  equações com  $n$  incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A matriz  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ , na qual cada linha é formada, ordenadamente, pelos coeficientes e termos independentes de cada equação, é denominada **matriz completa** do sistema.

A matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , formada pelos coeficientes ordenados de cada equação, é denominada **matriz dos coeficientes** do sistema.

Consideremos ainda as seguintes matrizes associadas ao sistema:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , formada pelas incógnitas.  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ , formada pelos termos independentes.

Multiplicando a matriz dos coeficientes pela matriz das incógnitas, obtemos a matriz dos termos independentes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dizemos que essa é a **forma matricial** do sistema linear considerado.

Em notação simplificada, temos:  $A \cdot X = B$ , em que  $A$  é a matriz de ordem  $m \times n$  formada por todos os coeficientes do sistema,  $X$  é a matriz de ordem  $n \times 1$ , formada por todas as incógnitas, e  $B$  é a matriz de ordem  $m \times 1$  formada por todos os termos independentes.

Quando um sistema linear tem o número de equações igual ao número de incógnitas, a matriz dos coeficientes do sistema é uma **matriz quadrada**.

## &gt; ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 13.** (UFPE) Uma fábrica de automóveis utiliza três tipos de aço,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , na construção de três tipos de carros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ . A quantidade dos três tipos de aço, em tonelada, usados na confecção dos três tipos de carro está na tabela a seguir.

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A_1$	2	3	4
$A_2$	1	1	2
$A_3$	3	2	1

Se foram utilizadas 26 toneladas de aço do tipo  $A_1$ , 11 toneladas do tipo  $A_2$  e 19 toneladas do tipo  $A_3$ , qual o total de carros construídos dos tipos  $C_1$ ,  $C_2$  ou  $C_3$ ?

**Resolução**

Considerando  $x$ ,  $y$  e  $z$  os respectivos números de carros dos tipos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  que foram construídos e utilizando as informações fornecidas, representamos a situação por meio de um sistema linear  $3 \times 3$  (3 equações e 3 incógnitas), como indicado a seguir.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 26 & \text{(I)} \\ x + y + 2z = 11 & \text{(II)} \\ 3x + 2y + z = 19 & \text{(III)} \end{cases}$$

Isolando  $x$  na equação (II), temos:

$$x = 11 - y - 2z \quad \text{(IV)}$$

Substituindo  $x$  por  $11 - y - 2z$  na equação (I) temos:

$$2 \cdot (11 - y - 2z) + 3y + 4z = 26$$

$$22 - 2y - 4z + 3y + 4z = 26$$

Logo,  $y = 4$ .

Substituindo  $x$  por  $11 - y - 2z$  na equação (III), temos:

$$3 \cdot (11 - y - 2z) + 2y + z = 19$$

$$33 - 3y - 6z + 2y + z = 19$$

$$y + 5z = 14 \quad \text{(V)}$$

Substituindo  $y$  por 4 na equação (V), obtemos  $z$ .

$$4 + 5z = 14$$

Logo,  $z = 2$ .

Substituindo  $y$  por 4 e  $z$  por 2 na equação (IV), determinamos  $x$ .

$$x = 11 - 4 - 2 \cdot 2$$

Logo,  $x = 3$ .

Portanto, foram construídos 3 carros do tipo  $C_1$ , 4 carros do tipo  $C_2$  e 2 carros do tipo  $C_3$ , em um total de 9 carros.

- 14.** Represente o sistema linear a seguir na forma matricial e verifique se a terna ordenada  $(1, -2, 0)$  é solução desse sistema.

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 4x - 3y + 6z = -1 \\ 7x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

**Resolução**

Considerando  $A$  a matriz dos coeficientes do sistema,  $X$  a matriz das incógnitas e  $B$ , a matriz dos termos independentes, podemos escrever a forma matricial do sistema, ou seja,  $A \cdot X = B$ . Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para verificar se a terna  $(1, -2, 0)$  é solução do sistema, podemos substituir os respectivos valores na matriz  $X$ , efetuar a multiplicação e posteriormente comparar a matriz obtida com a matriz  $B$ .

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 6 \cdot 0 \\ 7 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Como a matriz resultante é diferente da matriz  $B$ , a terna ordenada  $(1, -2, 0)$  não é solução do sistema considerado.

## &gt; ATIVIDADES



**48.** Considere o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Verifique se as ternas ordenadas a seguir são soluções desse sistema.

- a)  $(2, -1, 1)$  É solução.
- b)  $(0, 0, 0)$  Não é solução.

**49.** (UECE) Um hotel possui exatamente 58 unidades de hospedagem assim distribuídas:  $m$  quartos duplos,  $p$  quartos triplos e  $q$  suítes para quatro pessoas. A capacidade máxima de lotação do hotel é 166 pessoas, sendo que, dessas, 40 lotam completamente todas as suítes. A diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos é:

alternativa c

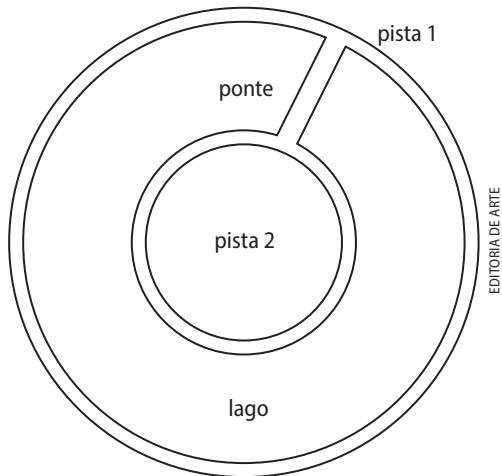
- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 14

**50.** (UFPE) Um nutricionista pretende misturar três tipos de alimentos (**A**, **B** e **C**) de forma que a mistura resultante contenha 3 600 unidades de vitaminas, 2 500 unidades de minerais e 2 700 unidades de gorduras. As unidades por grama de vitaminas, minerais e gorduras dos alimentos constam da tabela a seguir:

	Vitaminas	Minerais	Gordura
A	40	100	120
B	80	50	30
C	120	50	60

Quantos gramas do alimento C devem compor a mistura? **20 gramas**

**51.** (UFG-GO) Em um determinado parque, existe um circuito de caminhada, como mostra a figura a seguir.



EDITORIA DE ARTE

Um atleta, utilizando um podômetro, percorre em um dia a pista **1** duas vezes, atravessa a ponte e percorre a pista **2** uma única vez, totalizando 1157 passos. No dia seguinte, percorre a pista **1** uma única vez, atravessa a ponte e percorre a pista **2**, também uma única vez, totalizando 757 passos. Além disso, percebe que o número de passos necessários para percorrer sete voltas na pista **1** equivale ao número de passos para percorrer oito voltas na pista **2**. Diante do exposto, conclui-se que o comprimento da ponte, em passos, é:

- a) 5.
- b) 6.
- c) 7. alternativa c
- d) 8.
- e) 15.

**52.** Reescreva os sistemas a seguir na forma matricial. Ver as Orientações para o professor.

a)  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + c = 0; \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} -x + y + z - t = 2 \\ 2x - y + t = 0 \\ y - z + 3t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = -5 \end{cases}$

**53.** (FGV-SP) Para trabalhar na feira internacional do livro, a editora contratou três funcionários: Ana, Beto e Carlos, com salários  $x$ ,  $y$  e  $z$  reais, respectivamente. O salário de Ana é igual à soma dos salários de Beto e Carlos. No final da feira, a editora pagou uma gratificação, de valor igual ao salário de Beto, a cada um dos três. Assim, Ana recebeu no total R\$ 2.300,00, e a soma dos valores que os três receberam foi de R\$ 5.400,00. Qual foi o valor da gratificação que receberam? R\$ 800,00

**54.** Em cada caso, escreva as equações do sistema linear expresso na forma matricial.  
 Ver as Orientações para o professor.

a)  $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

**55.** Determine o conjunto solução do sistema linear representado na forma matricial indicada a seguir.  $S = \{(-2, 3, 0)\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**56.** Em um concurso público, foram realizadas três provas, com 10 questões em cada uma. Cada questão valia um ponto, mas os pesos  $x$ ,  $y$  e  $z$  das provas, nessa ordem, eram diferentes. O primeiro classificado no concurso, que acertou 8 questões na primeira prova, 9 na segunda e 10 na terceira, obteve, no final, um total de 93 pontos. O segundo classificado acertou, nessa mesma ordem, 9, 9 e 7 questões, totalizando 80 pontos. O terceiro classificado acertou 8, 8 e 7 questões, respectivamente, atingindo a soma de 75 pontos no final. Para calcular os pesos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , podemos descrever a situação por meio de um sistema de equações. Escreva esse sistema e dê sua representação matricial.  
 Ver as Orientações para o professor.

#### PENSE E RESPONDA

- Compare a forma em que o sistema foi representado e a matriz correspondente. O que você percebe?
- Como você resolveria esse sistema linear? Qual é a solução desse sistema?
- Comparando com os sistemas que você já resolveu neste Capítulo, resolver esse sistema foi mais prático? Por quê?  
 Ver as Orientações para o professor.

## Sistemas lineares escalonados

Vimos até agora como utilizar sistemas lineares para interpretar algumas situações, assim como algumas maneiras de resolver e classificar esses sistemas, além de representá-los em sua forma matricial.

Estudaremos agora um processo conhecido como **escalonamento**, que nos permite também resolver e classificar sistemas lineares. Antes, porém, vamos definir o que é um sistema escalonado e observar quais são as vantagens desse procedimento.

Observe o sistema linear a seguir e a matriz completa desse sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 5z + 2w = 4 \\ 3y + 8z - 2w = 1 \\ -z - 4w = 0 \\ 2w = -1 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Dizemos que esse sistema está escalonado.

Um sistema linear de  $m$  equações com  $n$  incógnitas está **escalonado** quando cada linha da matriz dos coeficientes desse sistema tiver o seu primeiro elemento não nulo à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte. Além disso, se houver linhas com todos os elementos iguais a zero, elas devem estar abaixo de todas as outras. Podemos também dizer que um sistema está escalonado quando os elementos  $a_{ij}$ , com  $i > j$ , da matriz dos coeficientes desse sistema, são nulos.

Observe outros exemplos de sistema linear escalonado e a matriz completa correspondente.

a)  $\begin{cases} 4x + y - 6z = -9 \\ 2y + 3z = 8 \\ 5z = 10 \end{cases}$

$$\left( \begin{array}{cccc} 4 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

b)  $\begin{cases} a - b + c = 4 \\ 5b - 2c = -12 \end{cases}$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

c)  $\begin{cases} 4x - y + 2z - w = 5 \\ 2w = -1 \end{cases}$

$$\left( \begin{array}{ccccc} 4 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

#### SAIBA QUE...

Para decidir se o sistema está escalonado, é muito importante considerar todas as incógnitas, na "mesma ordem", e lembrar que, quando a incógnita não aparece explicitamente, é porque seu coeficiente é zero.

## Classificação de sistemas lineares escalonados

Quando temos um sistema linear escalonado de  $m$  equações com  $n$  incógnitas, a última linha desse sistema será a enésima linha, que, se não estiver expressa no sistema, deve ser considerada totalmente nula. Na matriz completa do sistema isso fica mais evidente, como pode ser verificado nos exemplos **b** e **c** anteriores.

Considerando a última linha de um sistema escalonado, dada por  $a_{mn}x_n = b_m$ , em que  $a_{mn}$  é o coeficiente,  $x_n$  é a incógnita e  $b_m$  é o termo independente, temos três situações possíveis:

- $a_{mn} \neq 0 \rightarrow$  nesse caso, temos uma única solução e o sistema é **possível e determinado (SPD)**;
- $a_{mn} = 0$  e  $b_m = 0 \rightarrow$  nesse caso, temos infinitas soluções e o sistema é **possível e indeterminado (SPI)**;
- $a_{mn} = 0$  e  $b_m \neq 0 \rightarrow$  nesse caso, não temos solução e o sistema é **impossível (SI)**.

Veja a seguir alguns exemplos:

a) 
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & \text{(I)} \\ 5y + z = 1 & \text{(II)} \\ -z = 7 & \text{(III)} \end{cases}$$

Temos, nesse caso, um sistema possível e determinado. Iniciamos a resolução pela equação (III), determinando  $z$ .

Como  $-z = 7$ , temos  $z = -7$ .

Substituindo  $z$  por  $-7$  na equação (II), obtemos  $y$ :

$$5y + (-7) = 1 \Rightarrow 5y = 8.$$

$$\text{Logo, } y = \frac{8}{5}.$$

Substituindo  $y$  por  $\frac{8}{5}$  e  $z$  por  $-7$  na equação (I), obtemos  $x$ :

$$x + 2 \cdot \left(\frac{8}{5}\right) - (-7) = 2 \Rightarrow x = 2 - \frac{51}{5}$$

$$\text{Logo, } x = -\frac{41}{5}.$$

Portanto, o conjunto solução desse sistema é  $S = \left\{ \left( -\frac{41}{5}, \frac{8}{5}, -7 \right) \right\}$ .

b) 
$$\begin{cases} 7a - b + 5c = 0 \\ b - 2c = -1 \end{cases}$$

Como esse sistema tem três incógnitas, a matriz dos coeficientes tem que ter 3 linhas; observando que as incógnitas, nessa ordem, são  $a, b, c$ , essa terceira e última linha tem que ser  $0c = 0$ .

$$\begin{cases} 7a - b + 5c = 0 \\ b - 2c = -1 \\ 0c = 0 \end{cases}$$

Da terceira linha, podemos concluir que  $c$  pode ser qualquer número real, o que significa que  $c$  é uma **incógnita livre** e o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado.

Nesse caso, a solução geral do sistema pode ser obtida se fizermos  $c = \alpha$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Substituindo  $c$  por  $\alpha$ , na segunda equação, determinamos  $b$  em função de  $\alpha$ .

$$b - 2\alpha = -1 \Rightarrow b = -1 + 2\alpha$$

Substituindo  $c$  por  $\alpha$  e  $b$  por  $-1 + 2\alpha$  na primeira equação, determinamos  $a$  em função de  $\alpha$ .

$$7a - (-1 + 2\alpha) + 5\alpha = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 - 3\alpha}{7}$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é  $S = \left\{ \left( \frac{-1 - 3\alpha}{7}, -1 + 2\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ .

c) 
$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - w = 0 \\ 3y - 8z - 5w = 4 \\ z - 7w = -2 \\ 0w = 6 \end{cases}$$

Esse sistema não tem solução porque não existe nenhum valor real para  $w$  que torne a última linha (ou a quarta equação) verdadeira; portanto, é um sistema impossível.

## Escalonamento de sistemas lineares

Sempre é possível escalarizar um sistema linear transformando o sistema inicial em um sistema escalonado equivalente, ou seja, que possui o mesmo conjunto solução. Para isso, podem ser realizadas algumas operações que indicaremos a seguir, estabelecendo a relação com a matriz completa do sistema, que utilizaremos no processo de escalonamento.

- Podemos trocar de lugar duas ou mais equações de um sistema linear. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

Na matriz completa do sistema, podemos trocar de lugar a primeira com a segunda linha, como indicamos a seguir.

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- A fim de alinhar as incógnitas correspondentes, podemos trocar de lugar suas posições na mesma equação. Por exemplo:

$$\begin{cases} 3y - z + 2x = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Na matriz completa do sistema, isso equivale a reorganizar os coeficientes, de acordo com a modificação realizada no sistema.

$$\left( \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Podemos multiplicar ambos os membros de uma equação por qualquer número real não nulo. Observe que isso só é possível porque não alteramos o conjunto solução da equação. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \cdot (-2) \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -2x - 4y - 2z = -4 \end{cases}$$

Na matriz completa do sistema, isso equivale a multiplicar por  $-2$  os elementos da linha correspondente.

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_2} \left( \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Depois de multiplicar uma equação por um número real não nulo, podemos adicionar, membro a membro, os resultados a outra equação do sistema, obter uma nova equação e colocá-la no lugar de uma das equações do sistema. Essa “nova” equação não altera o conjunto solução do sistema. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \cdot (-2) \rightarrow \begin{cases} \cancel{2x} + 3y - z = 5 \\ -\cancel{2x} - 4y - 2z = -4 \end{cases} \oplus \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ -y - 3z = 1 \\ -y - 3z = 1 \end{cases}$$

Observe que a primeira equação foi mantida e só a segunda foi substituída.

Na matriz completa do sistema, isso equivale a multiplicar por  $-2$  os elementos da segunda linha e adicionar os resultados com os elementos correspondentes da primeira linha.

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_2 + L_1} \\ \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 + 2 & -4 + 3 & -2 + (-1) & -4 + 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

- Quando uma incógnita não está explícita, quer dizer que seu coeficiente é zero e podemos completar o sistema. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 0y - z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Esse elemento nulo aparece na matriz completa do sistema, independentemente de não estar expresso, assim como a última linha desse sistema linear, que é nula. Nesse caso, a matriz completa desse sistema é:

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

#### SAIBA QUE...

Se no processo de escalonamento da matriz for obtida uma matriz com uma linha na qual as entradas correspondentes aos coeficientes das incógnitas são nulas e a entrada correspondente ao termo independente é não nula, podemos afirmar que temos um sistema impossível.

Por exemplo:  $\left( \begin{array}{cccc} 5 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$

## &gt; ATIVIDADE RESOLVIDA

15. Resolva o sistema:  $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$

**Resolução**

Vamos determinar a forma escalonada desse sistema. Para isso, vamos escalar a matriz completa do sistema:

Antes de iniciar as operações entre as linhas da matriz, vamos trocar a posição da primeira e da segunda linha.

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{array} \right)$$

Multiplicamos por  $-2$  os elementos da primeira linha da matriz e adicionamos aos elementos correspondentes da segunda. Além disso, multiplicamos por  $-3$  os elementos da primeira linha e adicionamos aos elementos correspondentes da terceira.

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_1 + L_2} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{-3L_1 + L_3} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{array} \right)$$

Agora, multiplicamos por  $-\frac{9}{5}$  os elementos da segunda linha da matriz e adicionamos aos elementos correspondentes da terceira e obtemos a matriz escalonada do sistema.

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & -9 & -13 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{9}{5}L_2 + L_3} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{22}{5} \end{array} \right)$$

Com isso, obtemos o sistema linear escalonado, ao lado, equivalente ao inicial.

Esse sistema é possível e determinado. Resolvendo de baixo para cima as equações, obtemos:

$$-\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \Rightarrow z = 2$$

Substituindo  $z$  por  $2$  na segunda equação, obtemos:

$$-5y - 6 \cdot 2 = -2 \Rightarrow y = -2$$

Substituindo  $y$  por  $-2$  e  $z$  por  $2$  na primeira equação, obtemos:

$$x + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 = 5 \Rightarrow x = 1.$$

Portanto,  $S = \{(1, -2, 2)\}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 5 \\ -5y - 6z = -2 \\ -\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \end{array} \right.$$

## &gt; ATIVIDADES



**57.** Em cada caso, resolva os sistemas escalonados.

a)  $\begin{cases} 3x + 2y = 70 \\ 4y = 80 \end{cases}$

$$S = \{(10, 20)\}$$

b)  $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 4 \\ 7z = 21 \end{cases}$

$$S = \{(-12, 7, 3)\}$$

c)  $\begin{cases} a - 3b + 2c - d = -1 \\ 5b - 3c + d = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 1 \\ \frac{1}{5}d = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$S = \{(1, 1, 1, 1)\}$$

d)  $\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 3y - 5z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$

$$S = \emptyset$$

**58.** Determine o conjunto solução dos sistemas a seguir.

a)  $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ 0y = 0 \end{cases} \quad S = \left\{ \left( \frac{13 - \lambda}{2}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

b) 
$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \left( \lambda, \frac{-8 + 4\lambda}{5} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

**59.** Resolva os sistemas a seguir.

a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \quad S = \emptyset$$

b) 
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S = \{(-7, -2, 2)\}$$

**60.** O sistema seguinte tem o número de equações menor do que o número de incógnitas. Determine a solução geral desse sistema.

$$\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ -y + 5z - 4t = 5 \\ 6z - t = 2 \end{cases}$$

*Ver as Orientações para o professor.*

**61.** Resolva os sistemas a seguir por escalonamento e classifique-os.

a) 
$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + z - t = 2 \\ -x + y + z - t = -4 \\ x - y - z - t = -4 \end{cases}$$

$S = \{(1, -2, 3, 4)\};$  sistema possível e determinado

b) 
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 4y + 2z = 7 \end{cases}$$

$S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\};$  sistema possível e indeterminado

**62.** Determine o valor de  $t$  no sistema:  $t = 8$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + t = 1 \\ y + z - 2t = 0 \\ 4y + 3z = 7 \end{cases}$$

**63.** Verifique se o sistema a seguir tem ou não solução. Em caso afirmativo, resolva-o.

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x + 3y + 5z - t = 50 \\ 2x + 3y + 4z + t = 64 \\ 3x + 5y - 7z + t = 4 \end{cases} \quad S = \{(5, 6, 7, 8)\}$$

**64.** (Vunesp-SP) Em relação ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + my = 10 \end{cases}$$

a) resolva o sistema para  $m = 4;$   $S = \left\{ \left( \frac{13}{4}, \frac{7}{8} \right) \right\}$

b) encontre o conjunto de valores de  $m,$  em relação aos reais, para que o sistema seja possível e determinado.  $m \neq -\frac{4}{3}$

## HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Vimos que o estudo de matrizes contribui para ampliar as estratégias de resolução de sistemas lineares. Nesta seção, apresentamos uma informação histórica sobre um dos matemáticos que também estudaram esses conteúdos, inclusive dando indícios de uma teoria que posteriormente ficaria conhecida como **teoria do determinante de uma matriz**, assunto que você pode pesquisar para ampliar o estudo de matrizes e de sistemas lineares.

Leia o texto a seguir para conhecer um pouco mais sobre aspectos históricos associados ao conteúdo de matrizes e sistemas lineares.

### A notação de Leibniz

[...]

O estudo de um sistema linear de equações como é conhecido hoje teve início em 1678, com Gottfried W. Leibniz (1646-1716). [...] conta que, em 1693, Leibniz usou um conjunto sistemático de índices como coeficiente de um sistema de três equações lineares em duas incógnitas,  $x$  e  $y$ . Ele reescreveu as equações eliminando as incógnitas e obteve uma regra para obter o que hoje conhecemos como determinante de um conjunto de equações lineares.

[...] Leibniz explicou que, para resolver o problema da eliminação das incógnitas do sistema

$$\begin{cases} a + bx + cy = 0 \\ d + ex + fy = 0 \\ g + hx + ky = 0 \end{cases}$$

ele as reescreveu na forma

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

- Leibniz também desenvolveu trabalhos em Direito, Religião, Política, História, Literatura, Lógica, Metafísica e Filosofia.

sendo o primeiro número o índice da linha da posição do coeficiente no sistema e o segundo, da coluna. Como forma de avaliar se o sistema teria solução, estabeleceu como condição necessária a igualdade

$$10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 = \\ = 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30$$

Este marco é considerado [...] o primeiro do desenvolvimento da teoria dos determinantes. [...] uma das principais contribuições de Leibniz foi justamente a notação, que combinava dois números, tal como no sistema cartesiano, dando a posição, nas equações, do número ao qual se referia. [...]

Uma aplicação mais precisa e abrangente do que seria conhecido como determinante seria proposta quase 60 anos depois pelo matemático Gabriel Cramer. O trabalho, que foi bastante divulgado à época, representa um avanço no estudo de álgebra linear e levaria ao que conhecemos hoje como Regra de Cramer. [...]

[...]

SANTOS, R. N. dos. **Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes**. Dissertação (Licenciatura em Matemática) – USP, São Paulo, 2007. p. 10-12. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/imath/files/1/43.pdf>. Acesso em: 5 jul. 2020.



NICKLUSSHUTTERSTOCK.COM, GILLMARSHUTTERSTOCK.COM

# > EXPLORANDO A TECNOLOGIA

## Utilizando o Matrix calculator

Nesta seção, você vai explorar o site **Matrix calculator** e utilizá-lo como suporte para conferir de forma prática o escalonamento de uma matriz. Aproveite também para explorar suas funcionalidades e ampliar o estudo de matrizes e de sistemas lineares.

Você pode acessar o site utilizando o link <[matrixcalc.org/pt](http://matrixcalc.org/pt)> (acesso em: 18 jul. 2020). A vantagem de utilizar essa plataforma está no fato de que todo o processo que envolve a resolução é apresentado em etapas, permitindo que a revisão da resolução seja mais rápida.

Digitando esse link no navegador, você terá acesso à seguinte página inicial.

The screenshot shows the homepage of the Matrix calculator. It features two main input fields for matrices, labeled 'Matriz A:' and 'Matriz B:', each with a 3x3 grid for input. Below each matrix input are several buttons: 'Células' (Cells), 'Limpar' (Clear), '+', and '-'. Underneath these are additional buttons for 'Determinante' (Determinant), 'Matriz Inversa' (Inverse Matrix), 'Matriz Transposta' (Transpose Matrix), 'Posto' (Rank), 'Multiplicar por' (Multiply by) with a value input field set to 2, 'Matriz Triangular' (Triangular Matrix), 'Matriz Diagonal' (Diagonal Matrix), 'Elevado a' (Power) with a value input field set to 2, 'Decomposição LU' (LU Decomposition), and 'Fatoração de Cholesky' (Cholesky Factorization). To the right of the page, there is a small logo for 'MATRIX CALCULATOR'.

Inicialmente, acompanhe a resolução de um sistema linear de três equações com três incógnitas por escalonamento da matriz completa. Nesse escalonamento, em uma das passagens, foi cometido um erro que posteriormente vamos identificar e corrigir com o auxílio do **Matrix calculator**.

O sistema a ser resolvido é o seguinte:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

A matriz completa desse sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por  $-2$  os elementos da primeira linha da matriz e adicionando aos elementos correspondentes da segunda e da terceira linhas, temos:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-2L_1 + L_2} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-2L_1 + L_3} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Multiplicando por  $\frac{3}{5}$  os elementos da segunda linha da matriz e adicionando aos elementos correspondentes da terceira linha, temos:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{3}{5}L_2 + L_3} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} & 9 \end{array} \right)$$

Assim, com base na matriz escalonada, temos o sistema escalonado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -2 \\ 5y + 4z = 9 \\ \frac{27}{5}z = 9 \end{array} \right.$$

Resolvendo as equações do sistema, de baixo para cima, temos:

$$z = \frac{5}{3}, y = \frac{7}{15} \text{ e } x = -\frac{19}{15}.$$

Por outro lado, ao verificarmos se os resultados obtidos tornam verdadeiras as sentenças que formam o sistema, observamos que isso não acontece, o que indica que há erro na resolução.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{19}{15} + 2\left(\frac{7}{15}\right) - \left(\frac{5}{3}\right) = -2 \\ 2\left(-\frac{19}{15}\right) - \left(\frac{7}{15}\right) + 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ 2\left(-\frac{19}{15}\right) + \left(\frac{7}{15}\right) + \frac{5}{3} = \frac{2}{5} \end{array} \right.$$

Como em geral essas verificações são muito trabalhosas, vamos utilizar o **Matrix calculator** para nos auxiliar na verificação da resolução.

Para isso, siga os passos a seguir.

- I. Digite o *link* apresentado anteriormente em um navegador e clique na opção **Solução de Sistemas de Equações Lineares**, conforme o destaque em vermelho.
- II. O site apresenta a seção desejada, onde você vai entrar com os coeficientes das equações do sistema. Mas, antes, verifique se a ordem do sistema é a que você precisa. Você pode aumentar ou diminuir clicando nos botões destacados em azul, como na imagem a seguir.

### Matrix calculator

Operações envolvendo matrizes ✓

**Soluções de Sistemas de Equações Lineares**

Calculadora de determinantes

Cálculo dos autovalores próprios e vectores próprio

Teoria necessária

MATRIXCALCULATOR

O sistema de equações:

$x_1 +$	$x_2 +$	$x_3 +$	$x_4 =$
$x_1 +$	$x_2 +$	$x_3 +$	$x_4 =$
$x_1 +$	$x_2 +$	$x_3 +$	$x_4 =$
$x_1 +$	$x_2 +$	$x_3 +$	$x_4 =$

[Análise de existência de soluções](#)

[Solução utilizando a Regra de Cramer](#)

[Solução utilizando o Método de la Matriz Inversa](#)

[Método de Montante](#)

[Solução utilizando o Método de Gauss](#)

[Solução utilizando o Método de Gauss-Jordan](#)

MATRIXCALCULATOR

- III. Ajuste para que o sistema fique com três equações e três incógnitas e complete os quadrinhos, na parte destacada em verde na imagem anterior, com os coeficientes das equações. Caso a equação linear tenha algum coeficiente nulo, preencha o quadrinho da incógnita correspondente com o número 0. Depois de completar o sistema com os coeficientes, clique em **Solução utilizando o Método de Gauss**, destacado em vermelho na imagem anterior, que também é conhecido como o método de escalonamento de matrizes.

- IV.** O site apresenta o escalonamento da matriz completa do sistema e o sistema linear escalonado equivalente ao sistema inicial, como pode ser verificado na imagem a seguir.

Solução utilizando o **Método de Gauss** 

(Algorítmico) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 - 2 \times L_1 \rightarrow L_2]{\times(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 - 2 \times L_1 \rightarrow L_3]{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\equiv$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \cancel{-5} & 4 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\times\left(\frac{-3}{5}\right)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

$$\equiv$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2 \times x_2 - x_3 = -2 \\ -5 \times x_2 + 4 \times x_3 = 9 \\ \frac{3}{5} \times x_3 = \frac{3}{5} \end{array} \right. \quad (1)$$

**Limpar**

MATRIX CALCULATOR

- V.** Explore o site, lendo as explicações sobre cada passo e compare com o escalonamento apresentado no início desta seção. Observe que o sistema linear escalonado corretamente é este:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -2 \\ -5y + 4z = 9 \\ \frac{3}{5}z = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

Resolvendo as equações do sistema, tem-se as soluções  $z = 1$ ,  $y = -1$  e  $x = 1$ .

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.



- Qual foi o erro cometido no escalonamento da matriz no início da seção?  
*Ver as Orientações para o professor.*
- Determine o sistema linear escalonado equivalente ao sistema a seguir. Utilize o **Matrix calculator** para conferir a sua resolução.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \quad S = \{(1, 2, 3)\} \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{array} \right.$$

## &gt; ATIVIDADES COMPLEMENTARES



- 1.** (Cesupa-PA) Aproveitando o recesso do mês de julho, o Cesupa pretende alterar parte do sistema de refrigeração em 3 de seus prédios, num período de uma semana. Para tanto, convida 3 firmas para submeter orçamentos para o trabalho envolvido em cada um dos prédios. As propostas recebidas estão representadas na matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

onde  $a_{ij}$  é o orçamento em unidades de mil reais da firma  $i$  para o prédio  $j$ .

Como cada firma, no período previsto de uma semana, só consegue fazer o serviço em um dos prédios, será preciso então contratar uma firma diferente para cada prédio. A contratação firma/prédio, dentre as abaixo apresentadas, que levará o Cesupa à uma despesa mínima é: alternativa a

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| <b>a)</b> $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ | <b>c)</b> $a_{12}, a_{23}, a_{31}$ |
| <b>b)</b> $a_{11}, a_{23}, a_{32}$ | <b>d)</b> $a_{13}, a_{22}, a_{31}$ |
- 2.** (Unicruz-RS) Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , a matriz que resulta da operação  $2A - B$  é: alternativa b

- |  |  |
|--|--|
| <b>a)</b> $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$ | <b>d)</b> $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$ |
| <b>b)</b> $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$  | <b>e)</b> $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ |
| <b>c)</b> $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ |  |

- 3.** (Vunesp-SP) Considere três lojas,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , e três tipos de produtos,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento  $a_{ij}$  da matriz indica a quantidade do produto  $P_i$  vendido pela loja  $L_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . alternativa e

$$\begin{array}{c} L_1 \quad L_2 \quad L_3 \\ P_1 \left[ \begin{array}{ccc} 30 & 19 & 20 \end{array} \right] \\ P_2 \left[ \begin{array}{ccc} 15 & 10 & 8 \end{array} \right] \\ P_3 \left[ \begin{array}{ccc} 12 & 16 & 11 \end{array} \right] \end{array}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

- a)** a quantidade de produtos do tipo  $P_2$  vendidos pela loja  $L_2$  é 11.
- b)** a quantidade de produtos do tipo  $P_1$  vendidos pela loja  $L_3$  é 30.
- c)** a soma das quantidades de produtos do tipo  $P_3$  vendidos pelas três lojas é 40.
- d)** a soma das quantidades de produtos do tipo  $P_i$  vendidos pelas lojas  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  é 52.
- e)** a soma das quantidades dos produtos dos tipos  $P_1$  e  $P_2$  vendidos pela loja  $L_1$  é 45.

- 4.** (UCDB-MS) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

tem-se que o produto  $A \cdot B$  é igual a:

- |  |                      |  |
|--|----------------------|--|
| <b>a)</b> $\begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$ | <b>alternativa a</b> | <b>d)</b> $\begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$ |
| <b>b)</b> $\begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ |                      | <b>e)</b> $\begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$ |
| <b>c)</b> $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$ |                      |  |

**5.** (UFC-CE) O valor de  $2A^2 + 4B^2$  quando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é igual a: **alternativa b**

a)  $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$    c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$    e)  $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$    d)  $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

**6.** (UFABC-SP) Duas bicicletas desenvolvem movimentos retilíneos e uniformes sobre a mesma trajetória, com suas grandezas em unidades do Sistema Internacional. Suas funções horárias estão representadas matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Nessas condições, as duas bicicletas se encontrarão no instante: **alternativa c**

- |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| a) 1,0 s. | c) 2,0 s. | e) 5,0 s. |
| b) 1,4 s. | d) 3,5 s. |           |

**7.** (Enem/MEC) Diante de um sanduíche e de uma porção de batatas fritas, um garoto, muito interessado na quantidade de calorias que pode ingerir em cada refeição, analisa os dados de que dispõe. Ele sabe que a porção de batatas tem 200 g, o que equivale a 560 calorias, e que o sanduíche tem 250 g e 500 calorias. Como ele deseja comer um pouco do sanduíche e um pouco das batatas, ele se vê diante da questão: “Quantos gramas de sanduíche e quantos gramas de batata eu posso comer para ingerir apenas 462 calorias permitidas para esta refeição?”

Considerando que  $x$  e  $y$  representam, respectivamente, em grama, as quantidades do sanduíche e das batatas que o garoto pode ingerir, indique a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente essas quantidades. **alternativa a**

- a)  $2x + 2,8y = 462$   
 b)  $2,8x + 2y = 462$   
 c)  $1,8x + 2,3y = 1060$   
 d)  $\frac{1}{2}x + 0,4y = 462$   
 e)  $0,4x + \frac{1}{2}y = 462$

## PARA REFLETIR

Neste Capítulo, vimos que algumas situações podem ser resolvidas por meio de equações lineares simultâneas e ampliamos um pouco o estudo de sistemas de equações, iniciado nos anos finais do Ensino Fundamental.

Estudamos o conceito de matrizes, operações envolvendo matrizes, sistemas lineares e como as matrizes podem ser utilizadas no processo de escalonamento de sistemas. Vimos também como podemos classificar os sistemas lineares. **Respostas pessoais.**

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo 1:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia que podem ser resolvidas utilizando sistemas de equações lineares?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhecia sobre o conceito de sistemas de equações?

## CAPÍTULO

## 2

## &gt; A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- Competências gerais da BNCC: 1, 2, 5, 6 e 7
  - Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
    - Competência específica 1: EM13MAT104
    - Competência específica 2: EM13MAT203
    - Competência específica 3: EM13MAT303
  - Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:
    - Competência específica 2
- O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

# Porcentagem e juros



BLACK Friday

"Corre, que agora o preço baixou!", "30%, 40% e 50% de desconto em toda a loja!", "Aproveite a *Black Friday*!".

É bem provável que você já tenha visto alguma dessas frases em propagandas de televisão, na internet ou até mesmo em vitrines de lojas, pois o comércio tenta, constantemente, atrair consumidores por meio de promoções, ofertas e diferentes formas de pagamento.

Atualmente, uma data que se destaca pelos seus descontos é a da *Black Friday*, um evento mundial que ocorre, normalmente, na última sexta-feira de novembro, em que os preços de diversos produtos diminuem, sobretudo eletrônicos e eletrodomésticos. Os valores oferecidos na *Black Friday* têm como base os preços dos produtos durante todo o ano, considerando taxas e impostos.

Os consumidores, porém, devem ficar atentos às supostas promoções pois algumas lojas podem agir de forma desonesta e, às vezes, ilícita. E precisam acompanhar, ao longo do ano, o histórico de preços dos produtos que pretendem comprar na temporada da *Black Friday*, pois assim garantem a aquisição da mercadoria por um valor realmente menor. Alguns estabelecimentos praticam a manobra de aumentar os preços de seus produtos alguns dias ou semanas antes desse evento e aplicam descontos atrativos quando, na verdade, estão vendendo pelo preço original.





■ Vitrine preparada para divulgar as promoções da *Black Friday*, Curitiba (PR). O uso de propagandas grandes e vistosas nas vitrines das lojas é umas das maneiras de chamar a atenção dos consumidores. Essas propagandas buscam destacar os descontos e as formas de pagamento. Fotografia de 2019.



Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.  
[Ver as Orientações para o professor.](#)



NÃO ESCREVA  
NO LIVRO

1. De acordo com o texto, como os descontos são comumente divulgados? Por que você acha que utilizam essa maneira de indicá-los?
2. Uma prática cada vez mais frequente no e-commerce (comércio eletrônico) é o anúncio de um produto cuja compra pode ser efetuada de duas formas: parcelada sem juro ou à vista com desconto. Uma venda que siga esse modelo é realmente isenta de juro? Justifique.
3. O texto destaca um tipo de cuidado que o consumidor deve ter no momento de realizar as compras durante a *Black Friday*. Que outros cuidados devemos ter ao comprar em eventos como esse?

# Introdução

Muitas situações do nosso cotidiano envolvem Matemática financeira: compras de produtos à vista ou a prazo, aplicações financeiras, assim como negociações diversas que envolvam financiamentos, pagamento de dívidas, preço de aluguel, reajuste de salário, entre outras. Conhecer os conceitos relacionados a situações como essas nos ajuda a analisar se determinada proposta é vantajosa ou não.

## Porcentagem

No Ensino Fundamental, muito provavelmente você estudou porcentagem. Vamos retomar esse assunto para aplicá-lo, com outros conceitos, em situações que veremos mais adiante.

**Porcentagem** é uma maneira de indicar uma razão de denominador 100 ou qualquer representação equivalente a ela.

Exemplos:

$$\text{a)} \underline{\underline{60\%}} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$$

↑  
Lê-se: sessenta por cento.

$$\text{b)} 28\% = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} = 0,28$$

$$\text{c)} 0,12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} = 12\%$$

$$\text{d)} 1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = 125\%$$

A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "dividido por cem". Quando utilizamos o sufixo *agem*, indicamos que se trata de um substantivo.

O termo  $x\%$ , em que  $x$  é um número real qualquer, representa a **razão centesimal**  $\frac{x}{100}$  e é chamado de **porcentagem** ou **taxa percentual** ou, simplesmente, **percentual**.

Observe que  $\frac{x}{100}$  também quer dizer que, em cada grupo de 100 objetos considerados, estamos dando destaque a  $x$  desses objetos.

## Aumentos e descontos

Um *smartphone* custa R\$ 1.000,00 em determinada loja. Se o cliente optar pelo pagamento à vista, a loja concede um desconto de 5% sobre esse valor.

Para calcular o preço do *smartphone* à vista, precisamos determinar 5% de R\$ 1.000,00 e subtraí-lo do valor inicial.

Nesse caso, temos:

$$5\% \text{ de R\$ } 1.000,00 \rightarrow 0,05 \cdot 1000 = 50, \text{ ou seja, R\$ } 50,00$$

$$\text{R\$ } 1.000,00 - \text{R\$ } 50,00 = \text{R\$ } 950,00$$

Portanto, o preço do *smartphone* à vista é R\$ 950,00.

- Na compra de um *smartphone*, além do preço e condições de pagamento, devemos ficar atentos a especificações técnicas como memória, duração da bateria, entre outras.





## FÓRUM

### À vista ou a prazo?

No Brasil, existem duas modalidades de compra: com pagamento à vista e com pagamento a prazo. Resumindo, a compra à vista significa que o valor total da mercadoria, ou do serviço, é pago no momento da compra; já a compra a prazo significa que o valor total não é pago no ato da compra, ou seja, é parcelado em prestações ou pago integralmente após um tempo.

A compra a prazo pode vir acompanhada de juro, de modo que o valor a ser pago ao final pode ser maior do que o valor à vista. Além disso, é necessário tomar cuidado com esse tipo de compra, pois as prestações de diversas delas podem se acumular e virar uma grande dívida.

Após ler o texto, faça o que se pede a seguir



- A compra a prazo é uma modalidade que não existe em muitos lugares, como nos Estados Unidos e na Europa, por exemplo. Faça um fórum com seus colegas, e debatam sobre o porquê de esse tipo de compra existir. Debatam, também, as vantagens de comprar a prazo. [Ver as Orientações para o professor.](#)

Também podemos calcular diretamente o valor, da seguinte maneira:

$$1000 - 0,05 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 - 0,05) = 1000 \cdot 0,95 = 950$$

Para calcular o valor de algo após um **desconto de  $p\%$** , devemos multiplicar o valor original por  $1 - \frac{p}{100}$ .

Agora, imagine que essa mesma loja, na semana seguinte, resolveu aplicar um aumento de 3% em todos os seus produtos. Para determinarmos o valor do smartphone após o reajuste, calculamos 3% de R\$ 1.000,00 e adicionamos esse resultado ao valor inicial.

$$3\% \text{ de R\$ } 1.000,00 \rightarrow 0,03 \cdot 1000 = 30, \text{ ou seja, R\$ } 30,00$$

$$\text{R\$ } 1.000,00 + \text{R\$ } 30,00 = \text{R\$ } 1.030,00$$

Portanto, o preço do celular após o aumento é R\$ 1030,00.

Também podemos calcular diretamente o valor, da seguinte maneira:

$$1000 + 0,03 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 + 0,03) = 1000 \cdot 1,03 = 1030$$

Para calcular o valor de algo após um **aumento de  $p\%$** , devemos multiplicar o valor original por  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ .

## Aumentos e descontos sucessivos

Considere, agora, a situação a seguir.

O preço de um produto sofreu um aumento de 8% em março e, em abril, foi reajustado em 12%. Podemos dizer que aplicar esses dois aumentos sucessivos equivale a aplicar um único aumento de 20% sobre o preço inicial?

Para responder à pergunta da situação, vamos calcular um único aumento de 20% sobre o preço de um produto e, em seguida, aumentos sucessivos de 8% e 12% sobre esse preço, e comparar os resultados obtidos. Suponhamos que o preço inicial do produto seja R\$ 500,00.

**I.** Aplicando um único aumento de 20% sobre o preço do produto, temos:

$$(1 + 0,2) \cdot 500 = 1,2 \cdot 500 = 600$$

Considerando um único aumento de 20%, obtemos R\$ 600,00.

**II.** Aplicando os aumentos sucessivos, temos:

- Preço do produto após o primeiro aumento (reajuste em março):

$$(1 + 0,08) \cdot 500 = 1,08 \cdot 500 = 540, \text{ ou seja, R\$ 540,00}$$

- Preço do produto após o segundo aumento (reajuste em abril):

$$(1 + 0,12) \cdot 540 = 1,12 \cdot 540 = 604,80$$

Portanto, o preço do produto após os dois aumentos será R\$ 604,80.

Observe que os valores obtidos nas verificações I e II não são iguais. Isso nos permite exemplificar que aumentos percentuais sucessivos **não equivalem** a um único aumento representado pela soma das porcentagens correspondentes. Analogamente, podemos verificar o mesmo para descontos, ou seja, descontos percentuais sucessivos **não equivalem** a um único desconto percentual, representado pela soma das porcentagens correspondentes.

Para determinar o percentual acumulado envolvendo aumentos ou descontos sucessivos, podemos multiplicar todos os percentuais. Observe, por exemplo, a situação apresentada anteriormente.

- Primeiro reajuste:  $(1 + 0,08) \cdot 500$
- Segundo reajuste:  $(1 + 0,12) \cdot (1 + 0,08) \cdot 500 = (1 + 0,08 + 0,12 + 0,0096) \cdot 500 =$   
**= (1 + 0,2096) · 500**

O produto destacado anteriormente indica um aumento correspondente a um percentual acumulado de 20,96%. Assim, aplicar um aumento de 8% sucedido por um aumento de 12% é o mesmo que aplicar um aumento único de 20,96%.

### SAIBA QUE...

Para facilitar alguns cálculos, podemos utilizar a calculadora. Veja uma maneira de realizar o cálculo referente à taxa acumulada de aumento apresentada anteriormente:



## Lucro e prejuízo

Nas transações comerciais e financeiras é comum o uso de termos como **custo**, que corresponde aos gastos envolvidos na produção de um produto e a outras despesas, e **receita** (ou **preço**), que é o valor arrecadado com a venda de um produto.

Quando calculamos a diferença entre a receita e o custo de um produto, temos duas situações:

- se o valor obtido for um número positivo, dizemos que a transação gerou **lucro**;
- se o valor obtido for um número negativo, dizemos que a transação gerou **prejuízo**.

É usual o uso das expressões “preço de custo” ( $C$ ) para nos referirmos aos custos e “preço de venda” ( $V$ ) para nos referirmos às receitas. Assim, podemos escrever a seguinte relação para expressar o lucro ( $L$ ):

$$L = V - C$$

O lucro também pode ser expresso como um percentual em relação ao preço de custo ou ao preço de venda. Por exemplo: uma mercadoria, cujo preço de custo é R\$ 280,00, foi vendida por R\$ 320,00, gerando um lucro de R\$ 40,00. Assim:

- o percentual de lucro sobre o preço de custo é:  $\frac{L}{C} = \frac{40}{280} = \frac{1}{7} \approx 0,1428 \approx 14,3\%$
- o percentual de lucro sobre o preço de venda é:  $\frac{L}{V} = \frac{40}{320} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$

### ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 1.** Um vestido que custa R\$ 540,00 tem desconto de 20% se comprado à vista. Qual é o preço à vista do vestido?

#### Resolução

Para determinar o preço do vestido à vista, podemos multiplicar o valor inicial por  $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ :

$$540 \cdot (1 - 0,2) = 540 \cdot 0,8 = 432$$

Portanto, o preço do vestido à vista é R\$ 432,00.

- 2.** Edgar teve um aumento salarial de 10% e passou a receber R\$ 1.650,00. Qual era o salário de Edgar antes do reajuste?

#### Resolução

O salário anterior correspondia a 100%. Como houve um aumento de 10%, o novo salário passou a corresponder a  $100\% + 10\% = 110\%$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{percentual } 100\% &\rightarrow 110\% \\ \text{salário } x &\rightarrow 1650 \end{aligned}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{110}{1650} \Rightarrow 110x = 100 \cdot 1650 \Rightarrow x = 165\,000 : 110 \Rightarrow x = 1500$$

O salário de Edgar antes do reajuste era R\$ 1.500,00.

- 3.** A população atual de uma cidade é de aproximadamente 50 000 habitantes. Sabendo que essa população cresce 10% ao ano, qual será a população dessa cidade daqui a três anos?

#### Resolução

Sabendo que a população cresce 10% ao ano, obtemos o percentual acumulado ao considerarmos três anos:

$$(1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,10) = 1,331$$

Aplicando esse percentual acumulado sobre 50 000, temos:

$$50\,000 \cdot 1,331 = 66\,550$$

Portanto, em três anos essa população será de aproximadamente 66 550 habitantes.

- 4.** Sobre o valor de uma mercadoria foram aplicados dois descontos sucessivos, um de 10% e outro de 12%. Calcule o percentual acumulado de descontos correspondente a esses dois descontos sucessivos.

#### Resolução

Representando o preço inicial da mercadoria por  $x$  e aplicando os dois descontos sucessivos, temos:

$$(1 - 0,1) \cdot (1 - 0,12) \cdot x = 0,9 \cdot 0,88 \cdot x = 0,792x \text{ ou } 79,2\% \text{ de } x.$$

Como o valor inicial representa 100%, podemos concluir que o desconto equivalente é de  $100\% - 79,2\% = 20,8\%$ .

- 5.** Um produto, cujo preço de custo é R\$ 420,00, é vendido com um lucro de 30% sobre o preço de venda. Qual é o preço de venda desse produto?

#### Resolução

Considerando  $C$  o preço de custo,  $L$  o lucro e  $V$  o preço de venda, temos:  $L = V - C$ . (I)

Do enunciado, temos:

$$\frac{L}{V} = 30\% \Rightarrow \frac{L}{V} = 0,30 \Rightarrow L = 0,30V \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$0,30V = V - C \Rightarrow C = V - 0,30V \Rightarrow C = 0,70V$$

Substituindo  $C = 420$ , determinamos  $V$ :

$$420 = 0,70V \Rightarrow V = 600$$

Portanto, o preço de venda é R\$ 600,00.

- 6.** Um produto, cujo preço de custo era R\$ 800,00, foi vendido por R\$ 980,00. Qual foi o percentual de lucro sobre o preço de custo?

#### Resolução

Sendo  $L$  o lucro,  $C$  o preço de custo e  $V$  o preço de venda, temos:

$$L = V - C \Rightarrow L = 980 - 800 \Rightarrow L = 180$$

Logo, o lucro foi R\$ 180,00.

$$\text{Assim, temos: } \frac{L}{C} = \frac{180}{800} = 0,225 = 22,5\%$$

Portanto, o percentual de lucro sobre o preço de custo foi de 22,5%.



## &gt; ATIVIDADES



1. Copie o quadro a seguir e complete com os valores que estão faltando.

Fração	Representação decimal	Porcentagem
$\frac{9}{10}$	0,9	90%
$\frac{1}{4}$	0,25	25%
$\frac{13}{200}$	0,065	6,5%
$\frac{47}{100}$	0,47	47%
$\frac{2}{25}$	0,08	8%

2. Calcule.

- a) 14% de 3000 420      c) 0,6% de 300 1,8  
 b) 9% de 250 22,5      d) 24% de 1000 240

3. A população de uma cidade, com cerca de 90 000 habitantes, cresce anualmente 2,5%. Quantos habitantes essa cidade terá:  
 aproximadamente 92 250 habitantes  
 a) ao fim de 1 ano?      b) ao fim de 2 anos?  
 aproximadamente 94 556 habitantes

4. (ESPM-SP) Deseja-se obter cópia reduzida de um documento. A fotocopiadora opera reduzindo proporcionalmente as dimensões do documento original. Sabendo-se que, para cópias comuns, o equipamento indica em seu visor: "Dimensão = 100%", qual deverá ser o valor digitado no painel de comandos, para que a área do documento reduzido seja igual a um quarto de área do documento original? 25%

5. (UFPE) Em um exame de vestibular, 30% dos candidatos eram da área de Ciências Sociais. Dentre estes candidatos, 20% optaram pelo curso de Administração. Indique a porcentagem, relativa ao total de candidatos, dos que optaram por Administração. 6%

6. Uma mercadoria tem seu preço reajustado anualmente com um acréscimo de 5%. Supondo que o preço atual seja R\$ 200,00, qual será o preço dessa mercadoria daqui a 3 anos?  
 aproximadamente R\$ 231,53

7. (UFV-MG) A viação *No Leito do Asfalto* faz a linha entre duas cidades que distam 800 km uma da outra. Por questão de segurança, foram determinadas duas paradas obrigatórias para o revezamento dos motoristas. O primeiro trecho da viagem corresponde a 40% de todo o trajeto e o segundo trecho, a 55% do restante. Calcule:

- a) A distância que é percorrida no primeiro trecho da viagem. 320 km  
 b) A distância que é percorrida no segundo trecho da viagem. 264 km  
 c) O tempo de percurso do terceiro trecho, caso o motorista mantenha uma velocidade média de 90 km/h. 2,4 h ou 2h24

8. Em uma loja, um aparelho de ar-condicionado custa R\$ 8.000,00 à vista.



DISKSHUTTERSTOCK.COM

- A potência de refrigeração dos aparelhos de ar condicionado é indicada em BTU, que significa Unidade Térmica Britânica. Essa especificação deve ser escolhida de acordo com o ambiente no qual o aparelho será instalado.

Vendido a prazo, o valor desse aparelho sofre um acréscimo de 8%, e o total é dividido em duas prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação? R\$ 4.320,00

**9.** (UFPel-RS) Uma raquete custa na loja A R\$ 15,00 mais caro que na loja B. O proprietário da loja A, percebendo a diferença, lança uma promoção oferecendo desconto de 10% para que o preço de sua mercadoria se torne o mesmo preço da loja B. Quanto custa a raquete na loja B? **R\$ 13,50**

**10.** (FGV-SP) Uma mercadoria, cujo preço de tabela é R\$ 8 000,00, é vendida à vista com desconto de  $x\%$ , ou em duas parcelas iguais de R\$ 4 000,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês após a compra. Suponha que o comprador dispõe do dinheiro necessário para pagar à vista e que ele sabe que a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela pode ser aplicada no mercado financeiro a uma taxa de 25% ao mês. Nessas condições:

- a) se  $x = 15$ , será vantajosa para ele a compra a prazo? Explique. **não**
- b) Qual é o valor de  $x$  que torna indiferente comprar à vista ou a prazo? Explique.  **$x = 10$**

**11.** (UFPR) Numa loja de automóveis usados, a comissão paga a cada um dos vendedores consiste num percentual sobre o total de vendas do vendedor mais um bônus por meta atingida, conforme a tabela abaixo:

Total de vendas no mês	Percentual sobre o total de vendas	Bônus por meta atingida
Até R\$ 80.000,00	0,8%	R\$ 0,00
Entre R\$ 80.000,00 e R\$ 200.000,00	1,0%	R\$ 600,00
Acima de R\$ 200.000,00	1,2%	R\$ 900,00

- a) Qual é a comissão paga a um vendedor que consegue vender R\$ 120.000,00 em um mês? **R\$ 1.800,00**
- b) Quanto um vendedor precisará vender em um mês para receber uma comissão de R\$ 3.900,00? **R\$ 250.000,00**
- c) Um dos vendedores apresentou uma reclamação ao gerente da loja porque havia recebido R\$ 1.000,00 de comissão. Explique por que esse valor está errado.

**12.** Uma mercadoria teve seu preço majorado em 18%. A pedido de um cliente, foi dado um desconto de 5% sobre o novo preço, passando a mercadoria a custar R\$ 302,50 a mais que seu preço inicial. Qual era o preço inicial dessa mercadoria? **R\$ 2.500,00**

**13.** Amélia fixou em 18% o lucro sobre o preço de custo de uma mercadoria que comprou para revender. Sabendo que o custo dessa mercadoria foi de R\$ 250,00, por quanto deverá ser revendida? **R\$ 295,00**

**14.** Certa mercadoria foi comprada por R\$ 860,00. Por quanto deve ser revendida para que o lucro seja de 20% sobre o preço de custo? **R\$ 1.032,00**

**15.** Um comerciante comprou dez sacas de batatas por R\$ 210,00. Por quanto ele deve revender cada saca para obter um lucro de 20% sobre o preço de venda? **R\$ 25,20**

**16.** (PUCCamp-SP) O preço pedido pelos 18 volumes da enciclopédia **Tesouro da Juventude** em um *sebo* é uma verdadeira “pechincha”. Com os 17% de desconto já embutidos no preço, a enciclopédia toda pode ser comprada por R\$ 478,08. Supondo que cada volume tenha o mesmo preço, conclui-se que o preço que o sebo anunciou, por volume, antes do desconto, era de

- a) R\$ 28,00.      c) R\$ 38,00.      e) R\$ 32,00.
- b) R\$ 26,00.      d) R\$ 36,00.      alternativa e

**17.** O preço de um produto em uma loja é R\$ 39,00. O dono da loja, mesmo pagando um imposto de 20% sobre o preço de venda, obtém lucro de 30% sobre o preço de custo. Qual é o preço de custo desse produto? **R\$ 24,00**

**18.** Qual é o preço de custo de um produto vendido por R\$ 240,00, sabendo que, na transação, o comerciante teve um lucro de 20% sobre a venda? **R\$ 192,00**

**19.** (Vunesp-SP) A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a R\$ 2 000,00. Se essa mercadoria for vendida com um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determine seu preço de custo. **R\$ 6.000,00**

**11. c)** Uma resposta possível: Porque o valor máximo de comissão correspondente à primeira faixa do total de vendas é R\$ 640,00, e o valor mínimo de comissão correspondente à segunda faixa é R\$ 1.400,00.

# Juros

Acompanhe a situação a seguir.

O preço à vista de uma geladeira é R\$ 1.450,00. Bruno comprou essa geladeira e pagará todo o valor daqui a 30 dias, ou seja, um mês após a compra. Nessas condições, a loja cobrou juros de 8% sobre o preço à vista.

Ao fazer essa compra, Bruno assumiu o compromisso de pagar um valor adicional chamado de **juro**, que corresponde a uma porcentagem do preço à vista e depende do prazo para pagamento.

**Juro (J)** é uma compensação financeira que se paga pela utilização de uma quantia por determinado período.

Observe, por exemplo, uma maneira de calcular o valor adicional que Bruno vai pagar na compra da geladeira. Podemos usar uma calculadora para fazer esse cálculo.



Ou seja, a loja cobrou R\$ 116,00 de juros na venda dessa geladeira a prazo.

Além da palavra **juro**, os termos apresentados a seguir são muito frequentes no estudo de Matemática financeira:

- **Capital (C)**: quantia monetária investida ou disponível para investimento, também denominada valor presente ou principal.
- **Taxa de juros (i)**: taxa percentual que se paga ou se recebe pela compensação da aplicação de um capital. Essa taxa deve vir acompanhada da unidade de tempo a que se refere. Exemplo:  
5% ao dia, que pode ser escrita como 5% a.d.; 2% ao mês ou 2% a.m.; 8% ao ano ou 8% a.a.
- **Tempo (t)**: período que decorre desde o início até o fim de uma operação financeira.
- **Montante (M)**: investimento rentabilizado, ou seja, é o capital acrescido dos juros acumulados em determinado período (capital + juros). Também é denominado valor futuro.

Assim, o juro ( $J$ ) é o valor obtido ao se aplicar uma taxa percentual ( $i$ ) sobre um capital ( $C$ ) em determinado período de tempo ( $t$ ).

É importante observar que, se a taxa  $i$  for mensal, o tempo  $t$  deverá ser expresso em meses. Se  $i$  for uma taxa anual,  $t$  deverá ser expresso em anos.



IFH/SHUTTERSTOCK.COM, HOLYLAND/SHUTTERSTOCK.COM

- Na compra de eletroeletrônicos, podemos verificar os mais eficientes e que consomem menos energia observando o Selo Procel de Economia de Energia.

## SAIBA QUE...

O tempo pode ser classificado como:

- exato: que usa o ano civil de 365 ou 366 (ano bissexto) dias, em que os dias dos meses são contados pelo calendário (28, 29, 30 ou 31 dias).
- comercial: que usa o ano comercial, no qual o mês tem sempre 30 dias, e o ano, 360 dias.

## Juro simples

Nos tempos atuais, raramente é adotado o regime de juro simples em transações. Quando utilizado, ele é praticado em operações de curtíssimos prazos, como em cálculos de multas por atraso de pagamento, por exemplo, de faturas ou duplicatas.

Denominamos **juro simples** aquele calculado sempre sobre o capital inicial.

Suponha, por exemplo, que uma quantia de R\$ 2.000,00 foi aplicada a juro simples, segundo uma taxa de 4,5% ao mês, durante 3 meses. Para obter o valor correspondente aos juros nesse período, calculamos:

$$\text{juros} = \underbrace{4,5\% \text{ de } 2000}_{\text{juros do 1º mês}} + \underbrace{4,5\% \text{ de } 2000}_{\text{juros do 2º mês}} + \underbrace{4,5\% \text{ de } 2000}_{\text{juros do 3º mês}}$$

$$\text{juros} = 0,045 \cdot 2000 + 0,045 \cdot 2000 + 0,045 \cdot 2000$$

$$\text{juros} = (2000 \cdot 0,045) \cdot 3 = 270$$

Portanto, nesse período, o capital de R\$ 2.000,00 gerou R\$ 270,00 de juros.

Como o juro simples ( $J$ ) é diretamente proporcional ao capital ( $C$ ), à taxa ( $i$ ) e ao tempo ( $t$ ), podemos usar a seguinte relação:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Para determinar o **montante**, ou valor total obtido pela aplicação, adicionamos o juro ao capital, ou seja, utilizamos a relação:

$$M = C + J \quad \text{ou} \quad M = C + C \cdot i \cdot t$$

Aplicando essas relações à situação anterior, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 2000 \cdot 0,045 \cdot 3 = 270$$

Logo,  $M = C + J$ , ou seja,  $M = 2000 + 270 = 2270$ .

Portanto, ao final da aplicação, o montante será de R\$ 2.270,00.



### ATIVIDADE RESOLVIDA

7. Uma pessoa aplicou R\$ 3.000,00 à taxa de 2% a.m. durante 5 meses no regime de juro simples.

- a) Quanto receberá de juros ao final desse período?
- b) Que montante terá ao final dessa aplicação?

#### Resolução

- a) Sendo  $C = 3000$ ,  $i = 2\% = 0,02$  e  $t = 5$ , temos:  $J = 3000 \cdot 0,02 \cdot 5 \Rightarrow J = 300$

Portanto, a pessoa receberá R\$ 300,00 de juros.

- b) O montante é a soma do capital com os juros:  $M = 3000 + 300 \Rightarrow M = 3300$

Logo, o montante será R\$ 3.300,00.

## &gt; ATIVIDADES



- 20.**(Unimontes-MG) A que taxa mensal de juros simples um capital de R\$ 500,00, aplicado durante 10 meses, produz R\$ 150,00 de juros? **3% a.m.**
- 21.**(Ufop-MG) José deposita mensalmente em um fundo, a partir de 1º de janeiro, a quantia de 200 reais, a juros simples de 1,5% ao mês. Calcule o seu montante no fim de um ano, para um total de 12 depósitos. **R\$ 2.634,00**
- 22.**(Fuvest-SP) No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha 300 melões, que ele começou a vender ao preço unitário de R\$ 2,00. A partir das dez horas, reduziu o preço em 20% e, a partir das onze horas, passou a vender cada melão por R\$ 1,30. No final da manhã havia vendido todos os melões e recebido o total de R\$ 461,00.
- Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas? **R\$ 1,60**
  - Sabendo que  $\frac{5}{6}$  dos melões foram vendidos após as dez horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas. **antes das dez horas: 50; entre dez horas e onze horas: 120; após onze horas: 130**
- 23.**A que taxa mensal deve ser aplicado um capital de R\$ 48.000,00 durante 3 meses e 20 dias para produzir R\$ 440,00 de juro simples? **0,25% a.m.**
- 24.**(ITA-SP) Uma loja oferece um computador e uma impressora por R\$ 3 000,00 à vista ou por 20% do valor à vista como entrada e mais um pagamento de R\$ 2760,00 após 5 meses. Qual é a taxa de juro simples cobrada? **3% a.m.**
- 25.**Qual é o juro simples que um capital de R\$ 7.000,00 rende quando aplicado:
- durante 4 meses, a uma taxa de 2,5% a.m.? **R\$ 700,00**
  - durante 1 ano, a uma taxa de 3% a.m.? **R\$ 2.520,00**
  - durante 3 meses, a uma taxa de 0,15% a.d.? **R\$ 945,00**
- 26.**Calcule o juro simples que um capital de R\$ 1.800,00 rende à taxa de 2,7% a.m., quando aplicado durante 2 meses. **R\$ 97,20**
- 27.**Calcule o capital que se deve empregar à taxa de 6% a.m., a juro simples, para obter R\$ 6.000,00 de juros em 4 meses. **R\$ 25.000,00**
- 28.**Determine o montante obtido na aplicação de um capital de R\$ 12.000,00, à taxa de 1,5% ao mês, a juro simples, pelo prazo de 9 meses. **R\$ 13.620,00**
- 29.**Um capital de R\$ 8.000,00, aplicado durante 6 meses, resulta em um montante de R\$ 9.200,00. Determine a taxa mensal de juro simples dessa aplicação. **2,5% a.m.**

## Juro composto

A maioria das operações financeiras como compras a médio e a longo prazo, compras com cartão de crédito, aplicações financeiras, empréstimos bancários, entre outras, utiliza o regime de juro composto, também conhecido como juro sobre juro.

Denominamos **juro composto** o valor de juro gerado em um período e incorporado ao capital, passando a participar da composição de juro no período seguinte.



- Ao contratar um empréstimo é importante analisar os juros envolvidos, prazos e se são cobradas taxas adicionais.

**PENSE E  
RESPONDA**

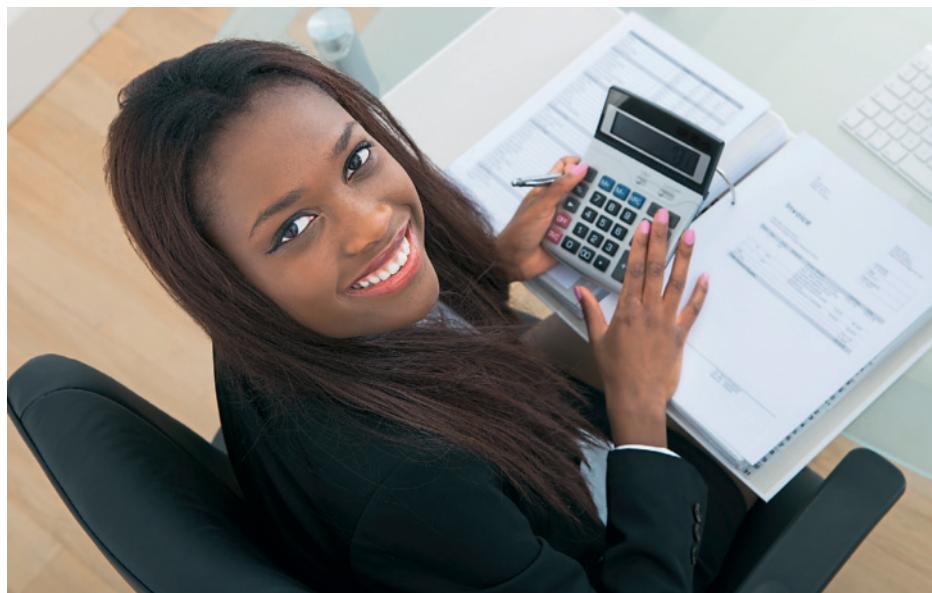
Observe o cálculo do montante de Mariana no **2º mês**. Veja que o juro obtido é um valor aproximado e, mesmo assim, afirmamos que Mariana terá uma quantia inteira. Pense na situação real e explique por que isso acontece.

Ver as **Orientações para o professor**.

- Poupar dinheiro para fazer uma reserva financeira é algo que permite maior tranquilidade para lidar com imprevistos. Existem opções seguras de investimentos que podem ser uma alternativa para alocar essa reserva.

Acompanhe a situação a seguir.

Mariana investiu R\$ 800,00 à taxa de 0,8% ao mês, durante 4 meses, no regime de juro composto. Quanto Mariana terá ao final dessa aplicação?



No regime de juro composto, devemos considerar o juro calculado em cada período e adicioná-lo ao capital anterior para constituir um novo capital, sobre o qual será calculado o juro do período posterior. Nesse exemplo, temos o seguinte.

- Cálculo do juro obtido no 1º mês:

$$0,8\% \text{ de } 800 = 0,008 \cdot 800 = 6,40$$

$$800 + 6,40 = 806,40 \text{ (montante do 1º mês)}$$

Ao final do 1º mês, Mariana terá R\$ 806,40.

- Cálculo do juro obtido no 2º mês:

$$0,8\% \text{ de } 806,40 = 0,008 \cdot 806,40 \approx 6,45$$

$$806,40 + 6,45 = 812,85 \text{ (montante do 2º mês)}$$

Ao final do 2º mês, Mariana terá R\$ 812,85.

- Cálculo do juro obtido no 3º mês:

$$0,8\% \text{ de } 812,85 = 0,008 \cdot 812,85 \approx 6,50$$

$$812,85 + 6,50 = 819,35 \text{ (montante do 3º mês)}$$

Ao final do 3º mês, Mariana terá R\$ 819,35.

- Cálculo do juro obtido no 4º mês:

$$0,8\% \text{ de } 819,35 = 0,008 \cdot 819,35 \approx 6,56$$

$$819,35 + 6,56 = 825,91 \text{ (montante do 4º mês)}$$

Assim, ao final do 4º mês, Mariana terá R\$ 825,91.

Observe que a maneira apresentada para resolver esse problema é trabalhosa e necessita de muitos passos para obter a resposta. Imagine realizar esse cálculo se Mariana deixar essa quantia aplicada por um período de 36 meses.

Vamos, agora, obter uma fórmula que deixará a resolução mais prática.

Considere  $M$  o montante de um capital  $C$  aplicado em um regime de juro composto a uma taxa  $i$ .

Como  $M = C + J = C + C \cdot i$ , temos:

- Montante obtido no 1º período:  $M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i)$

$$M_1 = C(1 + i)$$

- Montante obtido no 2º período:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

$$M_2 = C(1 + i)^2$$

- Montante obtido no 3º período:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$$

$$M_3 = C(1 + i)^3$$

- Montante obtido no 4º período:

$$M_4 = M_3 + M_3 \cdot i = M_3(1 + i) = C(1 + i)^3(1 + i) = C(1 + i)^4$$

$$M_4 = C(1 + i)^4$$

Considerando uma quantidade de períodos  $t$ , o montante obtido nesse período pode ser calculado pela expressão:

$$M = C(1 + i)^t$$

Utilizando a fórmula apresentada para calcular o montante obtido na aplicação feita por Mariana, temos:

$$M = 800 \cdot (1 + 0,008)^4 \Rightarrow M = 800 \cdot (1,008)^4$$

Podemos realizar esse cálculo utilizando uma calculadora científica, como indicado a seguir.



Logo, o montante obtido por Mariana ao final dessa aplicação será de aproximadamente R\$ 825,91.

Lembre-se de que, quando fazemos aproximações, podemos obter diferentes resultados para um mesmo problema. Compare, por exemplo, o resultado obtido por meio da expressão com os cálculos anteriores.

Muitas vezes temos o capital e o montante e desejamos saber o juro obtido na aplicação. Se necessário, podemos calcular o valor do juro utilizando a fórmula  $M = C + J$ , pela qual temos:

$$J = M - C$$

### PENSE E RESPONDA

Suponha essa mesma quantia aplicada em regime de juro simples, considerando uma taxa de 0,8% ao mês, durante 4 meses. Use uma calculadora para determinar o montante obtido nessa situação e o compare com o valor obtido na aplicação feita por Mariana. O que você observa?

R\$ 825,60. É um valor menor quando comparado ao montante obtido, considerando a mesma taxa e o mesmo período em regime de juro composto.

### SAIBA QUE...

Utilizar uma calculadora científica em situações envolvendo juro composto torna os cálculos mais práticos. Em alguns modelos de calculadora científica, é necessário realizar primeiro o cálculo envolvendo a potenciação e, posteriormente, multiplicar o resultado pelo capital.

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 8.** Um investidor aplicou R\$ 500.000,00 a juros compostos de 2% ao mês. Quantos reais ele terá após 5 meses de aplicação? Qual será o valor dos juros obtidos?

### Resolução

Utilizando a expressão apresentada, determinamos o montante obtido pelo investidor após 5 meses de aplicação.

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 500\,000(1 + 0,02)^5 \Rightarrow M \approx 552\,040,40$$

Para calcular o juro obtido, utilizamos a expressão  $J = M - C$ .

$$J \Rightarrow 552\,040,40 - 500\,000,00$$

$$J \Rightarrow 52\,040,40$$

Assim, após 5 meses, o investidor terá R\$ 552.040,40, e os juros obtidos serão de R\$ 52.040,40.

- 9.** (Vunesp-SP) Um capital de R\$ 1000,00 é aplicado durante 4 meses.

- a) Encontre o rendimento de aplicação, no período, considerando a taxa de juro simples de 10% ao mês.
- b) Determine o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juro composto de 10% ao mês.

### Resolução

Do enunciado, temos  $C = 1000$ ,  $t = 4$  meses, e a taxa, em ambos os casos, é  $i = 10\%$ .

- a) Para o cálculo do rendimento no regime de juro simples, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 1000 \cdot 0,1 \cdot 4 = 400$$

O rendimento da aplicação ao final de 4 meses no regime de juro simples será de R\$ 400,00.

- b) Para o cálculo do montante no regime de juro composto, temos:

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 1000(1 + 0,1)^4 = 1000 \cdot 1,1^4 = 1464,1$$

Porém, como devemos encontrar o rendimento, temos:

$$J = M - C \Rightarrow J = 1464,1 - 1000 = 464,1$$

O rendimento da aplicação ao final de 4 meses no regime de juro composto será de R\$ 464,10.

- 10.** Calcule o valor dos juros compostos que será obtido na aplicação de R\$ 25.000,00 a 25% ao ano, durante 72 meses.



### Resolução

Inicialmente, vamos calcular o montante dessa aplicação. Do enunciado, temos:

$$C = 25\,000; i = 25\% \text{ a.a.} = 0,25 \text{ a.a.}; t = 72 \text{ meses} = 6 \text{ anos}$$

Usando a fórmula do montante, temos:

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 25\,000 \cdot (1 + 0,25)^6 \Rightarrow M = 25\,000 \cdot (1,25)^6 \Rightarrow M \approx 95\,367,43$$

Como o montante é igual ao capital mais os juros, temos:

$$J = M - C \Rightarrow J = 95\,367,43 - 25\,000 \Rightarrow J = 70\,367,43$$

Será obtido R\$ 70.367,43 de juros compostos.

## &gt; ATIVIDADES



- 30.** Um investidor aplicou a quantia de R\$ 200.000,00 à taxa de juro composto de 0,7% ao mês. Que montante esse capital vai gerar após 6 meses? **R\$ 208.548,38**
- 31.** Um capital de R\$ 20.000,00 foi aplicado a juro composto durante oito meses à taxa mensal de 0,6% ao mês. Que montante será obtido ao final dessa aplicação? (Use:  $1,006^8 = 11,0490$ ) **R\$ 20.980,00**
- 32.** Hilda aplicou R\$ 10.000,00 a juros compostos de 20% a.a., capitalizados semestralmente. Que montante terá ao final de 3 anos e 6 meses? **R\$ 19.487,17**
- 33.** Qual é o valor a ser aplicado hoje, a uma taxa de juro composto de 2% a.m., para que uma pessoa receba R\$ 8.000,00 ao final de 6 meses? **R\$ 7.103,77**
- 34.** João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é R\$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R\$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juro composto de 2% ao mês, e escolhe deixar todo seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. **alternativa c**  
Para ter o carro, João deverá esperar:  
 a) dois meses e terá a quantia exata.  
 b) três meses e terá a quantia exata.  
 c) três meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 225,00.  
 d) quatro meses e terá a quantia exata.  
 e) quatro meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 430,00.
- 35.** (UEPG-PR) Pedro comprou um fogão e uma televisão. Tendo que pagar uma dívida, resolveu se desfazer desses aparelhos vendendo-os por R\$ 300,00 cada um. Na venda o fogão deu um lucro de 20% sobre o custo e a televisão, um prejuízo de 25%. Nesse contexto, assinale o que for correto. **01 + 02 + 04 + 08 = 15**  
 01) O preço de custo da televisão foi de R\$ 400,00.  
 02) O preço de custo do fogão foi de R\$ 250,00.  
 04) Os dois objetos custaram, juntos, R\$ 650,00.  
 08) Após a venda Pedro teve, no total, um prejuízo de R\$ 50,00.
- 36.** Celina aplicou R\$ 40.000,00 em um banco, a juros compostos de 16% a.a., capitalizados anualmente. Qual é o valor dos juros obtido ao final de 2 anos? **R\$ 13.824,00**
- 37.** Qual é o montante que um capital de R\$ 4.000,00 produz quando aplicado:  
 a) durante 3 meses, a uma taxa de 4% a.m. de juro composto? **R\$ 4.499,46**  
 b) durante 10 anos, a uma taxa de 2% a.m. de juro composto? **R\$ 43.060,65**  
 c) durante 15 meses, a uma taxa de 0,02% a.d. de juro composto? **R\$ 4.376,64**
- 38.** Cláudio aplicou R\$ 5.000,00 à taxa de 3% ao mês durante 5 meses. Que montante esse capital vai gerar, se o regime for de juro composto? Quantos reais de juro ele obterá nessa operação? **R\$ 5.796,35; R\$ 796,35**
- 39.** João aplicou seu capital durante 3 anos, à taxa de 12% a.a., no regime de juro simples. Caso houvesse aplicado a juro composto, à mesma taxa, com capitalização semestral, teria recebido R\$ 2.633,36 a mais. Quantos reais João recebeu de juros? **R\$ 16.345,00**
- 40.** Observe no quadro a seguir os juros do cartão de crédito e do cheque especial vigentes em 27 de fevereiro de 2019. **Resposta pessoal.**

Modalidade	Taxa (em % ao ano)
Cartão de crédito	286,9
Cheque especial	315,6

Fonte dos dados: FERRARI, H. Juros do cartão de crédito e cheque especial sobem pelo 3º mês consecutivo. **Correio Braziliense**, Brasília, 27 fev. 2019. Disponível em: [www.correobraziliense.com.br/app/noticia/economia/2019/02/27/internas\\_economia,740129/juros-do-cartao-de-credito-e-cheque-especial-sobem-pelo-3-mes-consecu.shtml](http://www.correobraziliense.com.br/app/noticia/economia/2019/02/27/internas_economia,740129/juros-do-cartao-de-credito-e-cheque-especial-sobem-pelo-3-mes-consecu.shtml). Acesso em: 4 nov. 2019.

De acordo com o conteúdo estudado, elabore um problema utilizando os dados desse quadro. Depois, troque com um colega para que ele resolva seu problema, enquanto você resolve o problema elaborado por ele. Compare as taxas apresentadas e converse com familiares, colegas e professor sobre o cuidado que devemos ter ao usar essas modalidades de crédito.

# Juros e funções

Existe uma inter-relação entre o juro simples e a função afim e, também, entre o juro composto e a função exponencial, como veremos a seguir.

Um capital de R\$ 1.000,00 foi aplicado a uma taxa de 12% ao ano. Vamos calcular o montante obtido, ano a ano, para os regimes de juro simples e de juro composto e analisar os resultados.

## Juro simples e função afim

Para calcular o montante, ano a ano, da aplicação em regime de juro simples, vamos utilizar a relação  $M = C + C \cdot i \cdot t$ , na qual, ao substituirmos os valores  $C = 1000$  e  $i = 0,12$ , obtemos:

$$M = 1000 + 1000 \cdot 0,12 \cdot t, \text{ ou seja, } M = 1000 + 120t$$

Observamos que a expressão obtida é a lei de uma função afim, com variável dependente  $M$  e variável independente  $t$ . Atribuindo a  $t$  os valores 1, 2, 3, 4, 5, ..., obtemos os valores correspondentes de  $M$ :

<b><i>t</i> (anos)</b>	1	2	3	4	5	...
<b><i>M</i> (reais)</b>	1120	1240	1360	1480	1600	...

Nesse caso, os valores do montante obtidos, ano a ano, são termos da progressão aritmética (1120, 1240, 1360, 1480, 1600, ...), de razão  $r = 120$ , com termo geral  $a_n = 1000 + 120n$ , correspondente a uma função afim cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

Assim, dados o capital e a taxa de juros, o montante obtido pelo regime de juro simples é uma função afim do tempo de aplicação. Como isso ocorre para todos os casos em que há regime de juro simples, podemos associar o cálculo do montante à função afim dada por  $M = C + C \cdot i \cdot t$ .

## Juro composto e função exponencial

Considerando a situação enunciada, na qual o capital de R\$ 1.000,00 é aplicado à taxa de 12% ao ano, o montante, a juro composto, pode ser obtido pela relação:

$$M = 1000(1 + 0,12)^t, \text{ ou seja, } M = 1000 \cdot 1,12^t$$

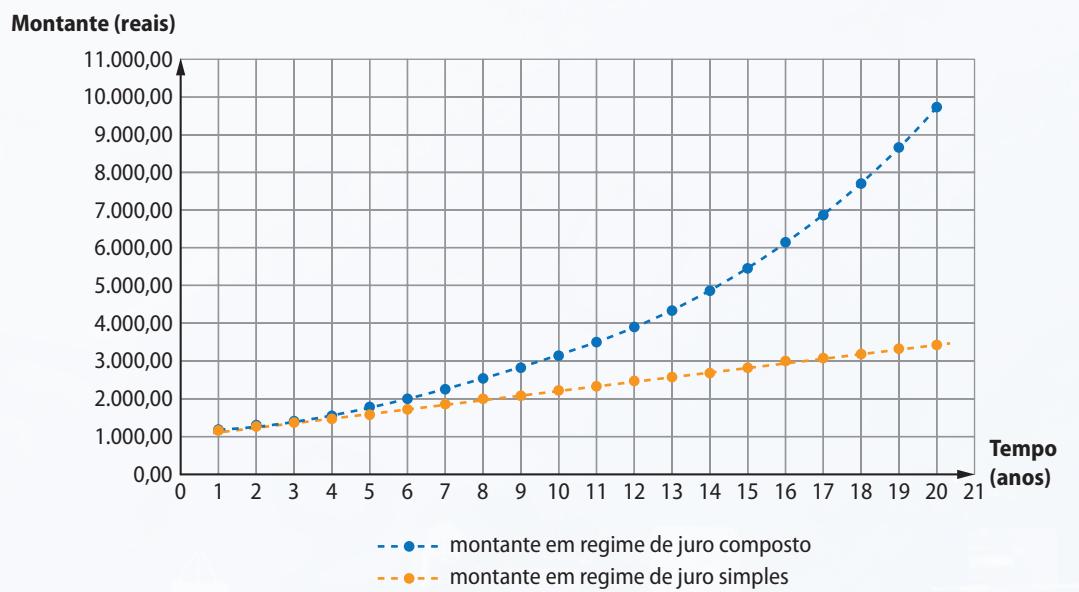
Observamos que a expressão obtida é a lei de uma função exponencial, com variável dependente  $M$  e variável independente  $t$ . Atribuindo a  $t$  os valores 1, 2, 3, 4, 5, ..., obtemos os valores correspondentes de  $M$ :

<b><i>t</i> (anos)</b>	1	2	3	4	5	...
<b><i>M</i> (reais)</b>	1120	1254,40	1404,93	1573,52	1762,34	...

Nesse caso, os valores do montante obtido, ano a ano, são termos da progressão geométrica (1120; 1254,40; 1404,93; 1573,52; 1762,34; ...), de razão  $q = 1,12$ , com termo geral  $a_n = 1000 \cdot (1,12)^n$ , correspondente a uma função exponencial cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

Assim, dados o capital e a taxa de juros, o montante obtido pelo regime de juro composto é uma função exponencial do tempo de aplicação. Como isso ocorre para todos os casos em que há regime de juro composto, podemos associar o cálculo do montante a uma função exponencial dada por  $M = C(1 + i)^t$ .

Vamos, agora, analisar o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano e analisar os valores obtidos.



TIPPAPATT / SHUTTERSTOCK.COM

No gráfico estão indicados os pontos pertencentes aos gráficos das funções. Note que não traçamos a reta nem a curva da função exponencial contínuas, pois o domínio de ambas as funções é  $\mathbb{N}^*$ . O tracejado apenas indica a tendência da curva e auxilia na visualização dos resultados.

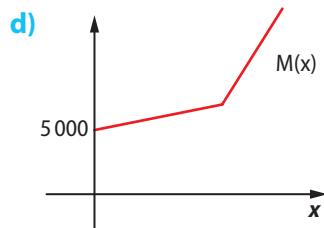
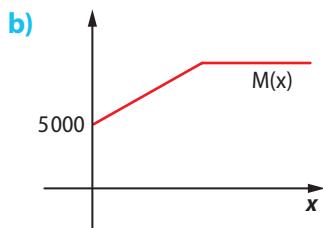
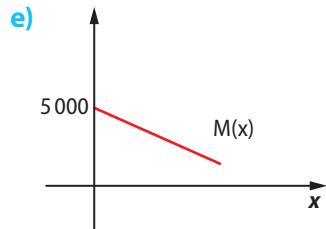
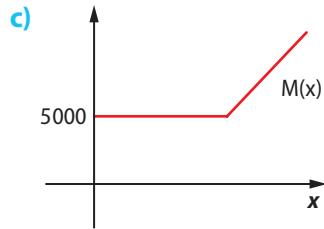
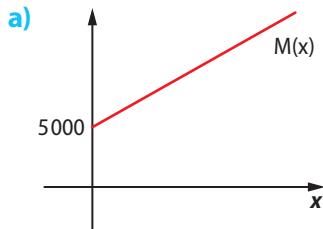
Observando os gráficos, percebemos que para  $t = 1$ , o montante obtido é o mesmo para os dois regimes de juro. A partir daí, quanto maior o tempo de aplicação, maior a diferença entre os montantes obtidos no regime de juro composto e no de juro simples.

Assim, para o caso de um investimento, a rentabilidade em regime de juro composto será maior do que a rentabilidade em regime de juro simples a partir do segundo período de investimento. Se a situação for de empréstimo, a dívida aumenta mais a cada período, a partir do segundo, no regime de juro composto em relação ao mesmo empréstimo em regime de juro simples.

Observe que essa diferença aumenta à medida que o tempo passa.

## &gt; ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 11.** (Enem/MEC) Paulo emprestou R\$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere  $x$  o número de meses do empréstimo e  $M(x)$  o montante a ser devolvido para Paulo no final de  $x$  meses. Nessas condições, a representação gráfica correta de  $M(x)$  é:

**Resolução**

Sabemos que  $M = C + J$ .

Do enunciado, percebemos que o montante  $M(x)$  é uma função do tempo  $x$ .

Sendo  $i = 3\%$  a.m. e  $C = 5\,000$ , temos:

$$M(x) = C + C \cdot i \cdot t$$

$$\text{Logo, } M(x) = 5\,000 + 5\,000 \cdot \frac{3}{100} \cdot x$$

Portanto,  $M(x) = 5\,000 + 150x$ .

Essa é uma função afim crescente ( $a = 150$  e  $a > 0$ ) e seu gráfico intersecta o eixo vertical dado pelo par ordenado  $(0, 5\,000)$ .

Logo, seu gráfico é parte de uma reta crescente, com  $x \geq 0$ .

Portanto, a representação gráfica de  $M(x)$  está mostrada na alternativa a.

- 12.** Jorge quer aplicar R\$ 6.000,00 com o objetivo de, após 15 meses, obter um montante de R\$ 9.348,00. A que taxa mensal de juro composto deve aplicar esse capital?

**Resolução**

Os dados do problema são:  $C = 6\,000$ ,  $M = 9\,348$  e  $t = 15$  meses.

Usando a fórmula do montante, temos:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$\text{Logo, } 9\,348 = 6\,000(1 + i)^{15}$$

$$\text{Assim, } (1 + i)^{15} = \frac{9\,348}{6\,000} \Rightarrow (1 + i)^{15} = 1,558$$

Usando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

$$\log(1 + i)^{15} = \log 1,558 \Rightarrow 15 \cdot \log(1 + i) = \log 1,558$$

Fazendo a aproximação de  $\log 1,558 = 0,19257$ , temos:

$$\begin{aligned} 15 \cdot \log(1 + i) &= 0,19257 \Rightarrow \log(1 + i) = 0,01284 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + i = 10^{0,01284} \Rightarrow 1 + i = 1,03 \Rightarrow i = 0,03 \text{ ou seja, } i = 3\% \end{aligned}$$

Jorge deve aplicar seu capital à taxa de 3% a.m.

## &gt; ATIVIDADES

NÃO ESCREVA  
NO LIVRO

- 41.** Uma pessoa aplicou R\$ 18.000,00 à taxa de juro composto de 2,8% ao mês e obteve um rendimento de R\$ 6.390,00. Qual é o prazo dessa aplicação? **12 meses**
- 42.** (UFS-SE) Para analisar a veracidade das afirmações abaixo, considere que para estimar o crescimento populacional dos municípios de certo Estado é usada a expressão  $P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t$ , em que  $P(0)$  é a população considerada em certo ano,  $P(t)$  a população observada  $t$  anos depois e  $i$  a taxa anual de crescimento da população.
- F.I.** Se em 2004 um município desse Estado tinha 50 000 habitantes e, a partir desse ano, a população aumentou anualmente à taxa de 2%, então em 2007 tal município deverá ter 50 604 habitantes.
- F.II.** Sabe-se que, anualmente, a população de um município X cresce à taxa de 2%, enquanto que a de um município Y cresce à taxa de 5%. Se hoje X e Y têm, respectivamente, 19 600 e 28 900 habitantes, daqui a dois anos a razão entre seus respectivos números de habitantes será  $\frac{2}{5}$ .
- VIII.** Atualmente, os municípios X e Y têm 129 600 e 122 500 habitantes, respectivamente. Supondo que a população de X cresça a uma taxa anual de 5% e a de Y cresça a uma taxa anual de 8%, então daqui a dois anos X e Y terão o mesmo número de habitantes.
- FI.** A taxa anual de crescimento da população de um município pode ser calculada pela expressão
- $$i = \frac{\log P(t) - \log P(0)}{t} - 1.$$
- V.** Se atualmente um município tem 44 100 habitantes e nos últimos cinco anos sua população cresceu à taxa anual de 5%, então há dois anos o seu número de habitantes era menor que 42 000.
- 43.** Qual é o tempo necessário para que um capital aplicado a juros compostos de 5% ao mês:
- a)** duplique? **14 meses e 6 dias**
- b)** triplique? **22 meses e 16 dias**
- 44.** Um investidor aplicou R\$ 80.000,00 a juros compostos de 2,2% ao mês.
- a)** Daqui a quantos meses terá um montante de R\$ 85.400,00? **3 meses**
- b)** Após quantos anos terá um montante de R\$ 134.868,80? **2 anos**
- 45.** Qual é a taxa mensal de juro composto que, aplicada ao capital de R\$ 24.000,00, o transforma em um montante de R\$ 36.087,00 em 7 meses? **6% ao mês**
- 46.** (Cespe/UnB-DF) Um cliente tomou R\$ 20.000,00 emprestados de um banco que pratica juros compostos mensais e, após 12 meses, pagou R\$ 27.220,00. Nesse caso, considerando  $1,026^{\frac{1}{12}}$  como valor aproximado para  $1,361^{\frac{1}{12}}$ , é correto afirmar que a taxa de juros nominal, anual, praticada pelo banco foi igual a: **alternativa b**
- a)** 30,2%.      **c)** 32,2%.      **e)** 34,2%.
- b)** 31,2%.      **d)** 33,3%.
- 47.** (UFPel-RS) Um dos motivos que leva as pessoas a enfrentarem o problema do desemprego é a busca, por parte das empresas, de mão de obra qualificada, dispensando funcionários não habilitados e pagando a indenização a que têm direito. Um funcionário que vivenciou tal problema recebeu uma indenização de R\$ 57 000,00 em três parcelas, em que a razão da primeira para a segunda é de  $\frac{4}{5}$  e a razão da segunda para a terceira, de  $\frac{6}{12}$ .  
(Dados:  $\log 1,06 = 0,0253$ ;  $\log 1,01 = 0,0043$ .) Com base no texto e em seus conhecimentos, determine:
- a)** o valor de cada parcela; **R\$ 12.000,00; R\$ 15.000,00; R\$ 30.000,00**
- b)** o tempo necessário para que o funcionário aplique o valor da primeira parcela, a juro composto, a uma taxa de 1% ao mês, para acumular um montante de R\$ 12 738,00; **aproximadamente 6 meses**
- c)** a taxa mensal que deve ser aplicada, a juro simples, à segunda parcela, para que o funcionário, no final de 2 anos, obtenha o montante de R\$ 25 800,00. **3% a.m.**

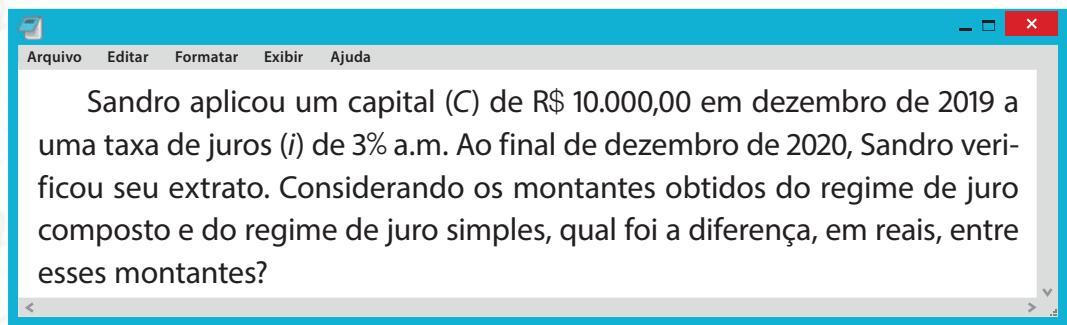
# > EXPLORANDO A TECNOLOGIA

## Planilha eletrônica e o cálculo de juros

Cálculos recorrentes, como os que envolvem juros, podem ser feitos rapidamente em uma planilha eletrônica com o uso de fórmulas adequadas.

Vamos utilizar a planilha eletrônica do **LibreOffice**, que pode ser baixada gratuitamente no endereço <<https://pt-br.libreoffice.org/>> (acesso em: 9 jul. 2020).

Após a instalação, leia o problema a seguir e observe uma maneira de usar a planilha eletrônica para resolvê-lo.



Sandro aplicou um capital ( $C$ ) de R\$ 10.000,00 em dezembro de 2019 a uma taxa de juros ( $i$ ) de 3% a.m. Ao final de dezembro de 2020, Sandro verificou seu extrato. Considerando os montantes obtidos do regime de juro composto e do regime de juro simples, qual foi a diferença, em reais, entre esses montantes?

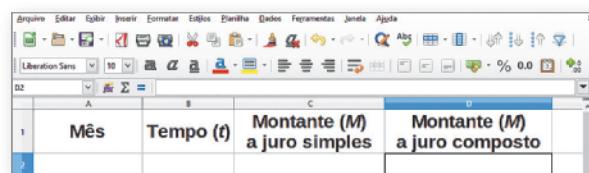
EDITORIA DE ARTE

Siga os passos que podem ser realizados para resolver esse problema.

- I. Abra uma planilha no **LibreOffice** e organize as colunas da planilha, digitando "Mês", "Tempo ( $t$ )", "Montante ( $M$ ) a juro simples" e "Montante ( $M$ ) a juro composto", como indicado a seguir.
- II. Digite o nome dos meses do ano e o número correspondente a cada mês.

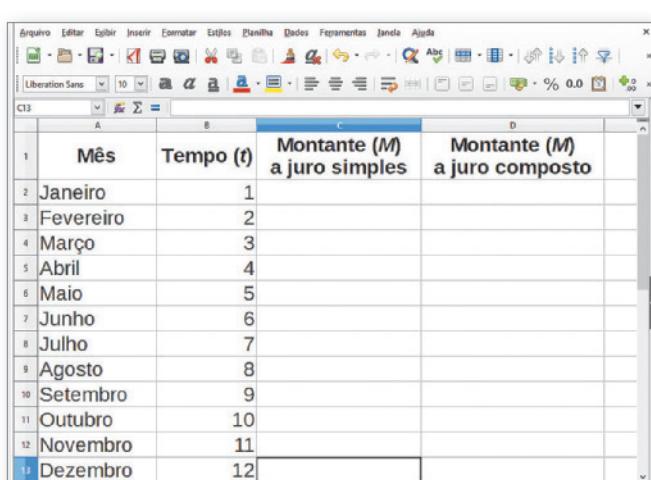
Conforme estudamos, em regime de juro simples, considerando uma taxa ( $i$ ) e o tempo ( $t$ ), o montante ( $M$ ) pode ser obtido por meio da seguinte relação:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$



	Mês	Tempo ( $t$ )	Montante ( $M$ ) a juro simples	Montante ( $M$ ) a juro composto
--	-----	---------------	---------------------------------	----------------------------------

LIBREOFFICE



	Mês	Tempo ( $t$ )	Montante ( $M$ ) a juro simples	Montante ( $M$ ) a juro composto
1	Janeiro	1		
2	Fevereiro	2		
3	Março	3		
4	Abril	4		
5	Maio	5		
6	Junho	6		
7	Julho	7		
8	Agosto	8		
9	Setembro	9		
10	Outubro	10		
11	Novembro	11		
12	Dezembro	12		

LIBREOFFICE

Já em regime de juro composto, considerando uma taxa ( $i$ ) e o tempo ( $t$ ), o montante ( $M$ ) é dado por:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Vamos utilizar essas fórmulas para realizar os cálculos, lembrando que  $C$  é o capital, que nesse caso é R\$ 10.000,00, a taxa de juros ( $i$ ) é 3% ou 0,03 e o tempo ( $t$ ) será representado pelo número correspondente ao mês.

- III.** Para calcular o montante ( $M$ ) em janeiro, em regime de juro simples, digite na célula C2:  $=10000*(1+0,03*B2)$  e tecle **enter**.

LIBREOFFICE			
Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Estilos Planilha Dados Ferramentas Ajuda			
SOMA	$=10000*(1+0,03*B2)$	C	Montante ( $M$ ) a juro simples Montante ( $M$ ) a juro composto
		Mês	Tempo ( $t$ )
		Janeiro	
			$=10000*(1+0,03*B2)$

- IV.** Para calcular o montante ( $M$ ) em janeiro, em regime de juro composto, digite na célula D2:  $=10000*(1 + 0,03)^B2$  e tecle **enter**.

LIBREOFFICE			
Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Estilos Planilha Dados Ferramentas Ajuda			
SOMA	$=10000*(1 + 0,03)^B2$	C	Montante ( $M$ ) a juro simples Montante ( $M$ ) a juro composto
		Mês	Tempo ( $t$ )
		Janeiro	
			$10300=10000*(1+0,03)^B2$

- V.** Para obter o montante ( $M$ ) gerado nos demais meses, selecione as células C2 e D2 e, em seguida, clique na parte destacada em vermelho, arrastando até a linha de dezembro. Ainda com as células dos valores de montante selecionadas, para deixar os valores em formato monetário, clique em .

Observe a planilha com os valores obtidos nesse passo a passo.

Repare que, pelo regime de juro composto, o montante obtido é maior do que o obtido considerando o regime de juro simples, ainda que o período e a taxa sejam iguais em ambos os casos.

LIBREOFFICE			
Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Estilos Planilha Dados Ferramentas Ajuda			
C2:D13	$=10000*(1+0,03)^B2$	C	Montante ( $M$ ) a juro simples Montante ( $M$ ) a juro composto
		Mês	Tempo ( $t$ )
		Janeiro	1
		Fevereiro	2
		Março	3
		Abri	4
		Maio	5
		Junho	6
		Julho	7
		Agosto	8
		Setembro	9
		Outubro	10
		Novembro	11
		Dezembro	12
		R\$ 10.300,00	R\$ 10.300,00
		R\$ 10.600,00	R\$ 10.609,00
		R\$ 10.900,00	R\$ 10.927,27
		R\$ 11.200,00	R\$ 11.255,09
		R\$ 11.500,00	R\$ 11.592,74
		R\$ 11.800,00	R\$ 11.940,52
		R\$ 12.100,00	R\$ 12.298,74
		R\$ 12.400,00	R\$ 12.667,70
		R\$ 12.700,00	R\$ 13.047,73
		R\$ 13.000,00	R\$ 13.439,16
		R\$ 13.300,00	R\$ 13.842,34
		R\$ 13.600,00	R\$ 14.257,61

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.



- Na situação apresentada, qual é a diferença, em reais, entre o montante obtido em dezembro, em regime de juro composto, e o obtido em regime de juro simples? **R\$ 657,61**
- No mês de janeiro, os valores do montante gerado em regime de juro simples e em regime de juro composto são iguais. Explique o motivo. **Resposta possível: Como o mês de janeiro corresponde a  $t = 1$ , ao substituirmos  $t$  por 1 na fórmula, em ambos os casos, obtemos  $M = C \cdot (1 + i)$ .**
- Reproduza os passos anteriores, mas agora considere um capital de R\$ 20.000,00, aplicado a uma taxa de 2% a.m. Calcule o montante obtido ao final de um ano, considerando os dois sistemas: juro simples e juro composto.  
**juro simples: R\$ 24.800,00; juro composto: aproximadamente R\$ 25.364,84**
- Nas situações cotidianas, qual é o regime de juro comumente aplicado? Em sua opinião, por que isso ocorre? **Resposta esperada: É mais comum a aplicação em regime de juro composto, pois maximiza o lucro.**

## &gt; CONEXÕES

## Os juros do cartão de crédito

Você já viu alguém utilizando um cartão de crédito? Sabe como funciona a compra por meio desse método e como é feito o respectivo pagamento? Leia a seguir algumas informações a respeito.

[...]

### O que é um cartão de crédito?

É um meio de pagamento pós-pago que possui um limite de crédito predefinido, que permite que o consumidor adquira bens e/ou serviços, mediante pagamento do valor devido em uma ou mais parcelas aos estabelecimentos comerciais que aceitam cartão como forma de pagamento.

[...]

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EMPRESAS DE CARTÕES DE CRÉDITO E SERVIÇOS. **Cartão:** a dica é saber usar. 2. São Paulo, 2018. Disponível em: <https://api.abecs.org.br/wp-content/uploads/2019/09/Carta%CC%83o-A-dica-e-%CC%81-saber-usar.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2019.

Observe, na parte inferior destas páginas, algumas informações em uma representação ilustrativa de cartão.



Leia a seguir como funciona a opção de crédito rotativo oferecida por alguns cartões de crédito.

[...]

**Funciona assim:** você pode pagar qualquer valor a partir do valor mínimo informado na fatura e deixar o saldo restante para o próximo mês.

Mas, atenção: haverá incidência de juros, tarifas e impostos sobre o saldo devedor que não foi pago.

Utilize o crédito rotativo somente em situações de emergência, quando você tiver algum imprevisto no mês e faltar dinheiro para pagar toda a fatura. **Prefira sempre pagar o valor total da fatura na data de vencimento.**

[...]

O percentual de pagamento mínimo da fatura pode variar conforme o emissor do cartão e também conforme o perfil de cada cliente. O emissor é quem define esse percentual e é responsável por informá-lo ao cliente. [...]

[...]

Caso você tenha feito o rotativo no mês anterior, o saldo que ficou em aberto também fará parte do pagamento mínimo da fatura atual, assim como as prestações de eventuais parcelamentos de fatura que você tenha contratado anteriormente.

[...]

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EMPRESAS DE CARTÕES DE CRÉDITO E SERVIÇOS. **Cartão:** a dica é saber usar. 2. São Paulo, 2018.

Disponível em: <https://api.abecs.org.br/wp-content/uploads/2019/09/Carta%CC%83o-A-dica-e%CC%81-saber-usar.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2019.

Nesse local, conhecido como **tarja magnética**, são gravadas as principais informações do cartão.

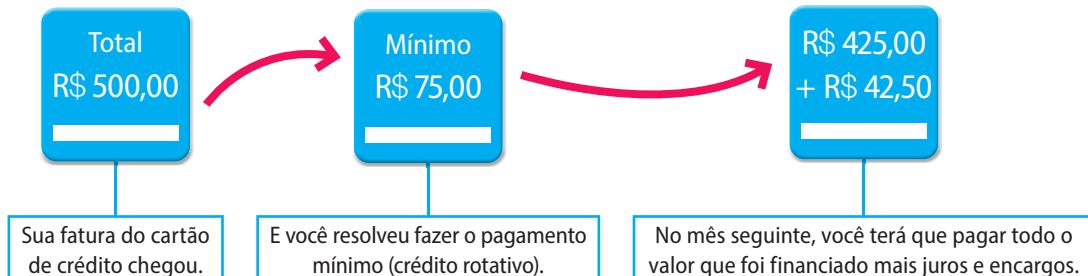
Neste espaço, o portador do cartão deve fazer sua **assinatura** assim que recebe-o.

**Código de segurança:** sequência de 3 ou 4 algarismos que completa o número do cartão.



Fonte dos dados: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EMPRESAS DE CARTÕES DE CRÉDITO E SERVIÇOS. **Cartão:** a dica é saber usar. 2. São Paulo, 2018. Disponível em: <https://api.abecs.org.br/wp-content/uploads/2019/09/Carta%CC%83o-A-dica-e%CC%81-saber-usar.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2019.

Imagine que o total da sua fatura em determinado mês é de R\$ 500,00 e você resolve fazer o pagamento mínimo, fixado em 15% pelo emissor do cartão, que será de R\$ 75,00. Vamos considerar que a taxa de juros do rotativo e os demais encargos sejam, no total, de 10%.



Para saber um pouco mais sobre a história do cartão de crédito, acesse o site do Museu do cartão de crédito, disponível em <http://www.museudocartao.com.br/museu.php> [acesso em: 26 nov. 2019].

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.



- 1.** Você já conhecia cartão de crédito? Já ouviu falar a respeito do pagamento mínimo e do crédito rotativo? converse com os colegas e o professor. **Respostas pessoais.**
  - 2.** De acordo com o texto, o que é o crédito rotativo?
  - 3.** Supondo que o percentual mínimo da fatura do cartão de crédito de um banco seja 15% do total, e a taxa de juros mensal seja 15,90% ao mês, responda:
    - a)** Qual é o valor mínimo de uma fatura de R\$ 850,00? **R\$ 127,50**
    - b)** Imaginando que foi pago o valor mínimo da fatura do item anterior, qual será o valor da próxima fatura, supondo que não há outras compras ou taxas a serem cobradas?  
**R\$ 837,38**
  - 4.** Reúna-se a dois colegas para pesquisar sobre taxas de cartão de crédito dos principais bancos de seu município. Compartilhem as informações obtidas, comparando os valores e discutindo a respeito das taxas. Em seguida, elaborem um problema utilizando essas informações e troquem o problema com outro grupo para que cada grupo resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, confirmaram as resoluções.  
**Resposta pessoal.**
  - 5.** Quais conceitos matemáticos você utilizou para realizar as atividades desta seção?  
**Resposta esperada:** Juros, taxas, porcentagem.
- 2. Resposta esperada:** É uma modalidade de crédito em que se pode pagar qualquer valor a partir do valor mínimo informado na fatura e deixar o saldo restante para ser pago no próximo mês.

## &gt; ATIVIDADES COMPLEMENTARES



- 1.** (IFFar-RS) O tabagismo está relacionado com diversas doenças. Em 2015, um hospital gastou R\$ 500 000,00 com doenças relacionadas ao consumo de cigarro. Se no próximo ano houver um aumento de 15% com estes gastos, qual será, em reais, o valor do aumento com as despesas em 2016? **alternativa a**
- a) 75 000,00      d) 575 000,00  
b) 250 000,00      e) 750 000,00  
c) 425 000,00
- 2.** (IFSC) O Produto Interno Bruto (PIB) é uma representação da soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em uma determinada região em um determinado espaço de tempo. O Balinsky (país fictício) tinha em 2016 um PIB que em comparação com o PIB de 2015 cresceu 2%. Já em 2017 o PIB de Balinsky diminui 5% em relação a 2016. A previsão para 2018 é de um crescimento de 3% em relação a 2017. Dessa forma, se a previsão para 2018 se confirmar, podemos afirmar que a variação do PIB de Balinsky do período de 2015 a 2018 foi:  
Assinale a alternativa **CORRETA**. **alternativa a**
- a) Um decrescimento de aproximadamente 0,2%.  
b) Não cresceu nem diminuiu.  
c) Um aumento de aproximadamente 1,8%.  
d) Um decrescimento de mais de 2%.  
e) Um acréscimo de menos de 1%.
- 3.** (UEA-AM) Ricardo comprou uma bicicleta e conseguiu revendê-la por um preço 20% maior do que pagou, o que correspondeu a um lucro de R\$ 150,00. O valor que Ricardo recebeu pela venda dessa bicicleta foi **alternativa e**
- a) R\$ 700,00.      d) R\$ 850,00.  
b) R\$ 750,00.      e) R\$ 900,00.  
c) R\$ 800,00.
- 4.** (Epcar-MG) À taxa anual de 15%, em que tempo, aproximadamente, o capital R\$ 8 000,00 produz R\$ 3 600,00 de juros simples? **alternativa b**
- a) 2 anos      d) 5 anos  
b) 3 anos      e) 6 anos  
c) 4 anos
- 5.** (IFSul-RS) O cálculo de juros compostos pode ser definido pela função exponencial  $J = C[(1 + i)^t - 1]$ , onde  $J$  é o valor dos juros,  $C$  é o capital inicial,  $i$  é a taxa de juro na forma unitária e  $t$  é o tempo, que deve ter a mesma unidade da taxa. Supondo que uma instituição financeira pague juro a uma taxa de 0,78% ao mês, ao aplicar um capital de R\$ 8 500,00, o valor do juro acumulado, após um ano da aplicação, será de **alternativa c**
- a) R\$ 66,30      c) R\$ 830,63  
b) R\$ 663,00      d) R\$ 12 433,61
- 6.** (ESPM-SP) O sr. Paulo aplicou um certo capital à taxa de juros simples de 4% ao mês durante 3 meses. O montante dessa aplicação, ele re-aplicou à taxa de juros simples de 3% ao mês durante 9 meses. Se ele tivesse feito uma única aplicação desse capital a juros simples durante 1 ano, para obter o mesmo rendimento final, a taxa mensal deveria ser de: **alternativa d**
- a) 3,28%      d) 3,52%  
b) 3,36%      e) 3,64%  
c) 3,43%
- 7.** (UFPE) Uma loja de eletrônicos oferece duas opções de pagamento:
- à vista, com 10% de desconto no preço anunciado;
  - em duas prestações mensais iguais, sem desconto sobre o preço anunciado, sendo a primeira prestação paga no momento da compra.
- Qual a taxa de juros mensais embutida nas vendas a prazo? **alternativa a**
- a) 25%      c) 10%      e) 20%  
b) 30%      d) 15%
- 8.** (Ufersa-RN) Qual foi o capital aplicado a 6% ao mês, juros simples, que deu origem ao montante de R\$ 1960,00 de 1 ano e 4 meses?
- a) R\$ 1000,00 **alternativa a**      c) R\$ 1200,00  
b) R\$ 1400,00      d) R\$ 1900,00

**9.** (UEPA) Um carro *flex* de R\$ 30 000,00 foi vendido por essa concessionária da seguinte forma: 60% de entrada e o restante em 5 prestações mensais iguais com juro simples de 2% ao mês. O valor de cada prestação será de:

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| <b>a)</b> R\$ 2 400,00 | <b>d)</b> R\$ 2 860,00 |
| <b>b)</b> R\$ 2 500,00 | <b>e)</b> R\$ 3 960,00 |
| <b>c)</b> R\$ 2 640,00 | <b>alternativa c</b>   |

**10.** (Unit-SE) Eudes recebeu R\$ 150 000,00 como parte da herança de seu avô. Gastou 30% dessa quantia na reforma de sua casa e aplicou o restante em um investimento a juros simples, à taxa anual de 20%. Nessas condições, quanto tempo Eudes deverá aguardar até que o valor investido produza o montante de R\$ 136 500,00? **alternativa b**

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| <b>a)</b> 1 ano.           | <b>d)</b> 2 anos.           |
| <b>b)</b> 1 ano e 6 meses. | <b>e)</b> 2 anos e 6 meses. |
| <b>c)</b> 1 ano e 8 meses. |                             |

**11.** (Saresp-SP) Um negociante pediu empréstimos R\$ 2 000,00 por três meses, sendo R\$ 1 000,00 de um amigo e R\$ 1 000,00 de uma casa bancária. O amigo lhe propôs cobrar juros simples, à taxa de 10% ao mês. A casa bancária impôs a cobrança de juros compostos à taxa de 10% ao mês.

Veja, na tabela abaixo, a evolução mensal da dívida, com valores em reais. **alternativa d**

	Capital	Dívida após 1 mês	Dívida após 2 meses	Dívida após 3 meses
Amigo	1000	1100	1200	1300
Banco	1000	1100	1210	1331

É correto afirmar que esses valores formam uma progressão:

- a)** aritmética de razão R\$ 100,00 na casa bancária e geométrica de razão R\$ 100,00 com seu amigo.
- b)** geométrica de razão 10 na casa bancária e aritmética de razão 10 com seu amigo.
- c)** geométrica de razão 10 com seu amigo e aritmética de razão 10 na casa bancária.
- d)** aritmética de razão R\$ 100,00 com seu amigo e geométrica de razão 1,1 na casa bancária.

**12.** (UERN) Uma pessoa possui uma quantia aplicada a juros compostos de 1% ao mês, da qual, em meses alternados, ela retira R\$ 100,00 e doa a uma instituição de caridade.

Sabendo-se que, no início de certo mês, a quantia aplicada era de R\$ 10.000 e, no final daquele mês, ela fez a doação, pode-se concluir que a quantia aplicada após 3 meses era igual a **alternativa b**

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| <b>a)</b> R\$ 10 100,00 | <b>d)</b> R\$ 10 200,00 |
| <b>b)</b> R\$ 10 101,00 | <b>e)</b> R\$ 10 201,00 |
| <b>c)</b> R\$ 10 110,00 |                         |

**13.** (EsPCEx-SP) O valor de revenda de um carro é dado  $V(t) = V_0(0,8)^t$ , em que  $V_0$  é o valor inicial e  $V(t)$  é o valor após  $t$  anos de uso. A alternativa que mais se aproxima do percentual de desvalorização desse carro, em relação ao valor inicial, após 3 anos exatos de uso, é:

- |               |               |                      |
|---------------|---------------|----------------------|
| <b>a)</b> 24% | <b>d)</b> 50% | <b>alternativa c</b> |
| <b>b)</b> 47% | <b>e)</b> 51% |                      |
| <b>c)</b> 49% |               |                      |

**14.** (Unifor-CE) A expressão  $M = A \cdot (1 + i)^n$  permite o cálculo do montante produzido por um capital  $A$ , aplicado a juros compostos e à taxa unitária  $i$ , ao final de  $n$  períodos. Assim, se o capital de R\$ 1370,00 for aplicado à taxa anual de 25%, ao final de quantos anos ele produzirá o montante de R\$ 5 480,00? (Use:  $\log 2 = 0,30$ )

- |                                  |             |             |
|----------------------------------|-------------|-------------|
| <b>a)</b> 6 <b>alternativa a</b> | <b>c)</b> 4 | <b>e)</b> 2 |
| <b>b)</b> 5                      | <b>d)</b> 3 |             |

**15.** (Acafe-SC) Uma pequena fábrica de tubos de plástico calcula a sua receita em milhares de reais, através da função  $R(x) = 3,8x$ , onde  $x$  representa o número de tubos vendidos. Sabendo que o custo para a produção do mesmo número de tubos é 40% da receita mais R\$ 570,00. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de tubos de plástico que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo: **alternativa b**

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| <b>a)</b> [240; 248] | <b>c)</b> [252; 258] |
| <b>b)</b> [248; 260] | <b>d)</b> [255; 260] |

**16.** (Vunesp-SP) Cássia aplicou o capital de R\$ 15 000,00 a juros compostos, pelo período de 10 meses e à taxa de 2% a.m. (ao mês). Considerando a aproximação  $(1,02)^5 = 1,1$ , Cássia computou o valor aproximado do montante a ser recebido ao final da aplicação. Esse valor é: alternativa **b**

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| <b>a)</b> R\$ 18 750,00 | <b>d)</b> R\$ 17 150,00 |
| <b>b)</b> R\$ 18 150,00 | <b>e)</b> R\$ 16 500,00 |
| <b>c)</b> R\$ 17 250,00 |                         |

**17.** (Uesc-BA) Em uma aplicação financeira a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, em que foram efetuados três depósitos mensais de R\$ 2 300,00 cada, o valor acumulado na data do último depósito é igual a: alternativa **c**

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| <b>a)</b> R\$ 6 900,00. | <b>d)</b> R\$ 7 178,76. |
| <b>b)</b> R\$ 7 038,00. | <b>e)</b> R\$ 7 178,80. |
| <b>c)</b> R\$ 7 038,92. |                         |

**18.** (FGV-SP) César aplicou R\$ 10 000,00 num fundo de investimentos que rende juros compostos a uma certa taxa de juro anual positiva  $i$ . Após um ano, ele saca desse fundo R\$ 7 000,00 e deixa o restante aplicado por mais um ano, quando verifica que o saldo é R\$ 6 000,00. O valor de  $(4i - 1)^2$  é: alternativa **d**

- |                |                |
|----------------|----------------|
| <b>a)</b> 0,01 | <b>d)</b> 0,04 |
| <b>b)</b> 0,02 | <b>e)</b> 0,05 |
| <b>c)</b> 0,03 |                |

**19.** (IFCE) Um capital foi aplicado a uma taxa anual de juros compostos e rende um montante de R\$ 2 012,85 em 2 anos e um montante de R\$ 2 314,77 em 3 anos. Indique o valor aproximado do capital investido. alternativa **c**

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| <b>a)</b> R\$ 1102,00 | <b>d)</b> R\$ 1933,00 |
| <b>b)</b> R\$ 1237,00 | <b>e)</b> R\$ 1252,00 |
| <b>c)</b> R\$ 1522,00 |                       |

### PARA REFLETIR



Nas páginas de abertura, apresentamos a *Black Friday* com o intuito de mostrar como a Matemática financeira contribui para o consumo consciente. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual é a importância dela? Se não, retome o texto de abertura do Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros, revistas, jornais e sites sobre o assunto.

Fizemos, neste Capítulo, um retrospecto sobre porcentagem, assunto que você já deve ter visto no Ensino Fundamental, o qual é importante para os outros temas tratados.

Vimos, também, juro simples e juro composto e como eles se relacionam com as funções afim e exponencial, respectivamente.

Por fim, vimos como utilizar uma planilha eletrônica para fazer a projeção do montante de uma aplicação financeira e estudamos os juros do cartão de crédito.

Vamos refletir sobre as aprendizagens desse Capítulo: Ver as Orientações para o professor.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados? Qual?
- Dado um valor inicial, fazer dois aumentos consecutivos de  $x\%$  não é o mesmo que fazer um único aumento de  $2x\%$  sobre esse mesmo valor inicial. Explique com suas palavras essa afirmação.
- Imagine se você tivesse um capital de  $X$  reais para fazer uma aplicação e pudesse escolher entre duas opções com o mesmo rendimento mensal: uma sob o regime de juro simples, e a outra, sob o regime de juro composto. Qual das duas aplicações você escolheria? Justifique.

## CAPÍTULO

## 3

## &gt; A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- Competências gerais da BNCC: 1, 2, 4, 6 e 7
  - Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
    - Competência específica 1: EM13MAT104
    - Competência específica 2: EM13MAT203
    - Competência específica 3: EM13MAT303
  - Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:
    - Competência específica 2
    - Competência específica 3
- O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

PANUWAT PHIMPHA/SHUTTERSTOCK.COM;  
PIXELDREAMS/EU/SHUTTERSTOCK.COM

# Matemática financeira

Você já parou para pensar sobre a importância de controlar gastos, planejar despesas e poupar? Em diversas situações nos vemos diante de uma relação de venda e compra e precisamos decidir sobre o que fazer. Seja um lanche, uma roupa, uma mochila, um computador ou até mesmo um imóvel, enfim, analisamos a qualidade do que compramos, o valor, as condições de pagamento etc. O cuidado para manter uma vida financeira saudável é fundamental e alguns conceitos relacionados à Matemática Financeira podem nos auxiliar.

Atualmente, temos muitas formas de efetuar um pagamento: via depósito bancário, acessando um caixa eletrônico, por cartão de crédito, cheques, boletos, por aplicativos de celular, entre outras. Em compras de grandes valores, também é oferecida a possibilidade de financiar a dívida, pagando prestações durante determinado período. Entretanto, em todas as situações é fundamental o consumidor avaliar cuidadosamente o impacto da compra e da forma de pagamento em seu orçamento.

Em alguns casos, o pagamento à vista pode ser o melhor negócio, mas tudo depende do contexto em que o consumidor está inserido na hora da compra ou de adquirir um serviço. Estudaremos neste Capítulo algumas situações que podem nos ajudar a refletir sobre situações envolvendo o uso do dinheiro.



- O uso de *smartphones* para a realização de compras *on-line* é cada vez mais frequente.



Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.



[Ver as Orientações para o professor.](#)

1. Vocês já conheciam as formas de pagamento apresentadas no texto? Conhecem outras?
2. Como vocês fazem para verificar qual é a condição de pagamento mais vantajosa? O pagamento à vista é mais vantajoso em relação ao parcelamento? Isso acontece sempre?
3. Algumas lojas oferecem pagamento facilitado para clientes que utilizam o cartão da loja. Vocês conhecem algum exemplo? Pesquisem a respeito de uma loja que adote essa prática e os tipos de vantagens que os clientes podem ter. Descrevam também as condições para o uso desse cartão.
4. Vocês sabem o que é um orçamento? Como um orçamento pode nos ajudar a usar o dinheiro de forma mais consciente?



PENSE E  
RESPONDA

Você já presenciou alguma situação na qual o pagamento de um bem foi feito em prestações? Já parou para pensar sobre como essas prestações são calculadas?

Respostas pessoais.  
Ver as [Orientações para o professor](#).

## Introdução

Estudaremos neste Capítulo alguns conceitos que, embora presentes na vida financeira das pessoas, podem não ser identificados de maneira explícita. Temas como amortização, orçamento e inflação serão discutidos, de modo que possamos refletir um pouco sobre questões envolvendo o uso do dinheiro e alternativas que possibilitem controlar gastos e poupar.



ANDRÉ NEVY/SHUTTERSTOCK.COM

- Reduzir despesas é um dos maiores desafios para poupar.

## Sistemas de amortização

Quando adquirimos um bem de maior valor, como um automóvel ou um imóvel, é comum fazer um empréstimo ou financiamento por meio de uma instituição financeira. O valor negociado nesse tipo de transação é chamado **capital**, e deve ser restituído à instituição financeira acrescido de **juro**.

Uma vez contratado o financiamento, o processo para saldar a dívida se dá por meio de pagamentos periódicos conhecidos como **parcelas**, ou **prestações**, que são pagas em intervalos de tempo constantes, normalmente mensais. Alguns financiamentos também incluem o pagamento de quantias preestabelecidas e que são feitas em datas combinadas previamente.

Em um empréstimo ou financiamento, o valor de cada prestação é composto de uma parte do capital adquirido e do juro calculado sobre o saldo devedor. Essa parte do capital adquirido é também chamada de **amortização** ou **valor amortizado**.

Assim, considerando  $P$  o valor da prestação,  $A$  o valor amortizado e  $J$  o juro sobre o saldo devedor, podemos escrever:

$$P = A + J$$

As diferentes maneiras de se realizar esse cálculo caracterizam o que chamamos de **sistema de amortização**. Alguns dos sistemas mais utilizados são: Sistema Price ou Francês, Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Misto (SAM), entre outros.

Vamos estudar o Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante, que costumam ser os mais praticados no mercado consumidor.

## Sistema Price

O Sistema Price, ou Sistema de Amortização Francês, é aquele que prevê o pagamento em **prestações iguais**, de valor fixo, durante todo o período de quitação do valor emprestado ou financiado. Normalmente é mais utilizado em contratos de curto prazo, como na compra de automóveis.

Acompanhe a situação a seguir.

Aline vai comprar um carro no valor de R\$ 39.500,00 e pretende pagar R\$ 7.500,00 como valor de entrada e financiar o restante da dívida em 36 prestações.

Elá conseguiu uma proposta de financiamento em um banco, a uma taxa de 2,5% ao mês, considerando o Sistema Price de amortização. O gerente enviou a elá uma planilha com algumas informações sobre as prestações. Observe as primeiras linhas dessa planilha.

Mês	Prestação	Amortização	Juros	Saldo devedor
0				R\$ 32.000,00
1	R\$ 1.358,45	R\$ 558,45	R\$ 800,00	R\$ 31.441,55
2	R\$ 1.358,45	R\$ 572,41	R\$ 786,04	R\$ 30.869,14
3	R\$ 1.358,45	R\$ 586,72	R\$ 771,73	R\$ 30.282,42

Esclarecer aos estudantes que o mês 0 indica a ocasião em que o contrato foi celebrado.

### PENSE E RESPONDA

- Compare as quantias correspondentes à amortização e aos juros que compõem a parcela a ser paga no primeiro mês. O que você verifica?
- Sabendo que os juros são calculados sobre o saldo devedor, quantos reais Aline vai pagar de juros na quarta prestação? Utilize uma calculadora para obter o resultado. **Resposta possível: A quantia correspondente aos juros é maior do que o valor amortizado no saldo devedor.**

Acompanhe uma situação em que deduzimos o valor da prestação  $P$  no sistema Price, considerando um valor  $V$ , financiado a uma taxa de juro  $i$ , que será pago em 3 prestações.

Ao fim do primeiro mês, deve-se à instituição financiadora:  $V \cdot (1 + i)$ ; e paga-se  $P$ . Assim, o saldo devedor é:

$$V(1 + i) - P$$

Ao fim do segundo mês, deve-se à instituição financiadora  $[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i)$  e paga-se  $P$ . Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i) - P] \cdot (1 + i) - P = V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P$$

Ao fim do terceiro mês, deve-se à instituição financiadora  $[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i)$  e paga-se  $P$ . Assim, o saldo devedor é:

$$[V(1 + i)^2 - (1 + i)P - P] \cdot (1 + i) - P = V(1 + i)^3 - (1 + i)^2P - (1 + i)P - P$$

- Conhecer o valor a ser pago todo mês e o fato de a primeira parcela não ser tão alta quando comparada a outros sistemas de amortização influenciam as pessoas a optar por esse sistema.



Como a terceira prestação é a última, o saldo devedor ao fim do terceiro mês é igual a zero. Logo,  $V(1+i)^3 - (1+i)^2P - (1+i)P - P = 0$ .

$$\text{Isolando o valor de } P, \text{ obtemos: } P = \frac{V(1+i)^3}{(1+i)^2 + (1+i) + 1}$$

$$\text{Substituindo } (1+i)^2 + (1+i) + 1 \text{ por } \frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i) - 1}, \text{ temos: } P = \frac{V(1+i)^3}{\frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i) - 1}} = \frac{V(1+i)^3 \cdot i}{(1+i)^3 - 1}$$

#### SAIBA QUE...

No Sistema Price, observando os valores que compõem a prestação, verifica-se, com o passar do tempo, que o valor correspondente à amortização aumenta e o juro diminui.

Generalizando esse resultado, apresentamos a seguir uma forma de calcular o valor da prestação nesse sistema de amortização.

O valor  $P$  da prestação no Sistema Price pode ser calculado utilizando-se a expressão  $P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$ , em que  $V$  é o valor financiado,  $i$  a taxa de juro ao mês e  $n$  a quantidade de prestações a serem quitadas.

Atualmente os *softwares* de planilhas eletrônicas apresentam funções que permitem criar uma tabela com os valores envolvidos em todo o financiamento, que é também conhecida como **Tabela Price**.

## Sistema de Amortização Constante [SAC]

Assim como o nome sugere, o Sistema de Amortização Constante (SAC) é aquele no qual a amortização  $A$  é constante, caracterizando um sistema mais agressivo de amortização, quando comparado ao Price. Com isso, as parcelas iniciais costumam ser mais altas.

Nesse sistema, a amortização de uma dívida é calculada pela razão entre o capital  $C$  contratado e a quantidade  $n$  de parcelas, indicada por:

$$A = \frac{C}{n}$$

Normalmente esse sistema é mais utilizado em contratos de longo prazo, envolvendo quantias muito grandes, como na compra de imóveis.

Acompanhe a situação a seguir.

Pedro e Amanda são sócios em uma loja de móveis e aproveitaram uma oportunidade para investir em um imóvel onde a loja funciona atualmente, que é um local alugado. Para isso, precisaram fazer um empréstimo de R\$ 70.000,00, a juros de 7,8% ao ano, pelo SAC.

- Situações envolvendo empréstimos requerem cuidado e planejamento, não apenas considerando taxas de juro, mas também os sistemas de amortização.

TIRACHARD KUMTANOM/  
SHUTTERSTOCK.COM



Quando analisaram as possibilidades e a proposta da instituição financeira, optaram por um período de 10 anos de financiamento.

Como a amortização é um valor fixo que compõe parte do valor de cada prestação, o saldo devedor diminuirá a cada mês, de acordo com o pagamento das parcelas. Consequentemente, o valor do juro que será calculado sobre o saldo devedor também diminuirá, fazendo o valor da próxima parcela ser inferior ao valor da parcela anterior.

Nesse caso, o valor amortizado em cada prestação é R\$ 583,33:

$$R\$ 70.000,00 : 120 = R\$ 583,33.$$

O valor de juro pago na primeira parcela é calculado sobre o saldo devedor, que corresponde a todo o valor emprestado. Nesse caso, como a taxa é de 7,8% ao ano, isso equivale a 0,65% ao mês. Assim temos:

$$J = 0,0065 \cdot R\$ 70.000,00 = R\$ 455,00$$

A primeira prestação é obtida adicionando a amortização e o juro correspondentes:

$$P_1 = R\$ 583,33 + R\$ 455,00 = R\$ 1.038,33$$

A segunda prestação é obtida adicionando a amortização (R\$ 583,33) com o juro correspondente, que é calculado sobre o saldo devedor (R\$ 69.416,67), ou seja,  $69\,416,67 \cdot 0,0065 = 451,21$ . Assim:

$$P_2 = R\$ 583,33 + R\$ 451,21 = R\$ 1.034,54$$

O saldo devedor, para o cálculo de  $P_3$  é:

$$R\$ 69.416,67 - R\$ 583,33 = R\$ 68.833,34.$$

Observe como podemos organizar esses valores em uma planilha e calcular os valores das cinco primeiras prestações.

Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	R\$ 70.000,00			
1	R\$ 69.416,67	R\$ 583,33	R\$ 455,00	R\$ 1.038,33
2	R\$ 68.833,34	R\$ 583,33	R\$ 451,21	R\$ 1.034,54
3	R\$ 68.250,01	R\$ 583,33	R\$ 447,42	R\$ 1.030,75
4	R\$ 67.666,68	R\$ 583,33	R\$ 443,62	R\$ 1.026,95
5	R\$ 67.083,35	R\$ 583,33	R\$ 439,83	R\$ 1.023,16

#### SAIBA QUE...

No SAC, o saldo devedor sofre redução mais acelerada em comparação com o Sistema Price. Como o juro é calculado sobre esse valor, o montante de juro gerado por um capital financiado no SAC será menor do que o montante de juro gerado pelo mesmo capital ao fim de um mesmo financiamento no Sistema Price, considerando o mesmo período.

## ATIVIDADES RESOLVIDAS

 1. Marília vai fazer um empréstimo de R\$ 50.000,00 para uma reforma em seu estúdio de fotografia e está analisando qual sistema de amortização vai utilizar, de acordo com as propostas de uma agência financeira, que trabalha com uma taxa de 0,95% ao mês. Ela pretende saldar a dívida em 6 anos.

- Qual será o valor amortizado em cada parcela se Marília decidir pelo SAC? De quanto será a primeira prestação nesse caso?
- Se decidir pelo Sistema Price, qual será o valor de cada prestação? Qual será o valor amortizado na primeira prestação?

TUTTI FRUTTI/SHUTTERSTOCK.COM

- Marília vai usar 70% do empréstimo na compra de novos equipamentos.



### Resolução

- a) Como no SAC o valor amortizado é constante em todo o período de quitação, dividimos o capital pela quantidade de prestações. Assim, temos:

$$A = \frac{50\,000}{72} = 694,4444\dots$$

Utilizando duas casas decimais, por se tratar de valor monetário, arredondamos para 694,44. Assim, o valor amortizado em cada parcela será de R\$ 694,44.

O juro pago na primeira prestação é calculado considerando todo o capital emprestado, pois ainda não houve amortização. Nesse caso, temos:

$$J = 0,0095 \cdot R\$ 50.000,00 = R\$ 475,00$$

Logo,  $P_1 = R\$ 694,44 + R\$ 475,00 = R\$ 1.169,44$ .

No SAC, a primeira prestação será de R\$ 1.169,44.

- b) No Sistema Price, o valor da prestação é constante em todo o período de quitação, e pode ser obtido por meio da expressão:

$$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

Substituindo  $V$  por 50 000,  $i$  por 0,0095 e  $n$  por 72, e utilizando uma calculadora científica, obtemos o valor de  $P$ .

$$P = 50\,000 \cdot \frac{(1+0,0095)^{72} \cdot 0,0095}{(1+0,0095)^{72} - 1} \simeq 961,979186$$

Utilizando duas casas decimais, por se tratar de valor monetário, como a terceira casa decimal é maior do que 5, arredondamos para 961,98. Assim, o valor de cada prestação será de R\$ 961,98 no sistema Price.

Como no SAC, o juro pago na primeira prestação é calculado sobre todo o valor tomado como empréstimo. Recuperando o valor calculado no item a, temos  $J = R\$ 475,00$ .

Logo,  $A = R\$ 961,98 - R\$ 475,00 = R\$ 486,98$ .

Portanto, o valor amortizado na primeira prestação é R\$ 486,98.

- 2.** Construa uma planilha eletrônica simulando os valores das prestações de amortização e dos juros cobrados pela agência financiadora da atividade anterior para auxiliar Marília a analisar a situação proposta.

### Resolução

Vamos utilizar o **Calc**, que faz parte do **LibreOffice**, para construir a planilha. Ele é um software de uso gratuito que pode ser baixado em <<https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/>> (acesso em: 15 jul. 2020). Inicialmente, vamos construir uma tabela considerando o Sistema Price, utilizando o passo a passo a seguir.

- I.** Depois de entrar no **Calc**, preparamos o local onde entrarão as variáveis (valor emprestado, taxa de juro e número de meses) e digitamos o título de cada coluna, como na imagem.

Valor emprestado				
Taxa				
Número de meses				
Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor

FOTOS: LIBREOFFICE

- II.** Com o botão formatamos as células que terão valores monetários. Também formatamos a célula que vai receber a taxa, clicando em , para indicar a porcentagem, e em duas vezes, para considerar duas casas decimais.
- III.** Na primeira célula das colunas **Mês**, **Prestação**, **Amortização** e **Juro**, digitamos "0" (zero). Na primeira célula da coluna **Saldo devedor**, digitamos "=B\$1" e pressionamos **Enter** (o \$ serve para deixar fixa a célula indicada). Essa linha corresponde ao início do contrato.

Outra possibilidade de fixar a célula **B1** é pressionar a tecla **F4** depois de digitar "B1".

Valor emprestado	R\$ 50.000,00			
Taxa	0,95%			
Número de meses	72			
Mês	Prestação	Amortização	Juro	Saldo devedor
0	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 50.000,00

- IV.** Na célula **A7**, digitamos "=A6+1" e tecemos **Enter**, para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.
- V.** Em **B7**, vamos usar a função **PGTO** do **Calc**. Digitamos "=PGTO(\$B\$2;\$B\$3:-\$B\$1)" e pressionamos **Enter**. Atenção: precisamos digitar o sinal de menos antes de "\$B\$1".
- VI.** Na célula **C7**, digitamos "=B7-D7" e **Enter**, mas alertamos que o resultado ainda não está correto. É necessário calcular o juro e, para isso, digitamos, na célula **D7**, "=B\$2\*E6" e pressionamos **Enter**.
- VII.** Por fim, na célula **E7**, digitamos "=E6-C7" e pressionamos **Enter**. Para obter as próximas linhas, selecionamos todas as células da linha que começa em 1, posicionamos o cursor por meio do mouse no ponto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos para baixo, até obter a linha do mês 72.

Vamos construir agora uma tabela considerando o SAC, utilizando o passo a passo a seguir.

- I. Vamos construir à direita da primeira tabela, utilizando as colunas **G a K** do **Calc**. Preparamos o local onde entrarão as variáveis (**Valor emprestado**, **Taxa de juro** e **Número de meses**) e digitamos o título de cada coluna, como na imagem.

G	H	I	J	K
Valor emprestado				
Taxa				
Número de meses				
Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação

Observe que invertemos a ordem das colunas, apenas por uma questão de organização.

- II. Repetimos o passo II da construção anterior para formatar as células.
- III. Na primeira célula das colunas **Mês**, **Amortização**, **Juro** e **Prestação**, digitamos "0" (zero). Na primeira célula da coluna **Saldo devedor**, digitamos " $=\$H\$1$ " e pressionamos **Enter**. Essa linha corresponde ao início do contrato.

G	H	I	J	K
Valor emprestado	R\$ 50.000,00			
Taxa	0,95%			
Número de meses	72			
Mês	Saldo devedor	Amortização	Juro	Prestação
0	R\$ 50.000,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00

FOTOS: LIBREOFFICE

- IV. Na célula **G7**, digitamos " $=G6+1$ " e teclamos **Enter** para indicar o mês 1, ou seja, a primeira prestação.
- V. Em **I7**, vamos calcular a amortização, que é constante nesse sistema, digitando " $=\$H\$1/\$H\$3$ " e pressionando **Enter**. Voltamos na célula **H7** e digitamos " $=H6-I7$ ", pressionando **Enter** na sequência, para obter o **Saldo devedor** depois de realizado o pagamento da primeira prestação.
- VI. Para calcular o juro, digitamos, na célula **J7**, " $=\$H\$2*\$H6$ " e pressionamos **Enter**.
- VII. Por fim, na célula **K7**, digitamos " $=I7+J7$ " e pressionamos **Enter**, para obter o valor da primeira prestação. Para obter as próximas linhas, selecionamos as células dessa tabela partindo da linha que começa em 1, posicionamos o cursor por meio do *mouse* no ponto inferior direito da última célula, clicamos e arrastamos para baixo, até obter a linha do mês 72.

## &gt; ATIVIDADES



**1.** Responda às questões a seguir, com base em alguns resultados das atividades resolvidas na seção anterior.

- Em qual dos sistemas de amortização a primeira prestação é mais alta? Em sua opinião isso pode influenciar a decisão de Marília? *A primeira prestação é mais alta no SAC. Resposta pessoal.*
  - Comparando os valores amortizados nas primeiras prestações, o que você percebe? Esse fato interfere no montante de juro pago em todo o período de quitação da dívida?  
*Resposta possível: Nas primeiras prestações, o valor amortizado no SAC é maior do que no Sistema Price. Sim.*
  - Em cada situação a seguir, considerando o SAC, calcule o valor amortizado a cada prestação.
- Em um empréstimo de R\$ 25.000,00 que deve ser pago em 8 prestações.  
*R\$ 3.125,00*
  - Em um financiamento de R\$ 40.000,00 que deve ser pago em 10 prestações, porém considerando uma entrada de R\$ 12.000,00. *R\$ 2.800,00*

**3.** Um veículo no valor de R\$ 75.000,00 está à venda de acordo com as seguintes condições.

**Entrada de 25% do valor;  
O restante em 48 prestações  
com juros de 2% a.m.**

De acordo com essas informações, responda.

- Qual é o valor a ser financiado? *R\$ 56.250,00*
- Se o financiamento for feito sob o Sistema Price de amortização, qual será o valor da prestação? *R\$ 1.833,85*
- Caso a opção seja pelo financiamento segundo o SAC, qual será o valor amortizado em cada prestação? *R\$ 1.171,88*
- Utilizando uma planilha eletrônica para simular os valores do financiamento no Sistema Price e no SAC, qual será o montante de juro pago em todo o período? *Sistema Price: R\$ 31.774,96; SAC: R\$ 27.562,50*

**4.** Sandro vai comprar uma geladeira e se interessa pelo modelo seguinte.

Sabendo que a loja trabalha com o Sistema Price de amortização, se Sandro comprar essa geladeira deverá pagar 10 prestações de:

*alternativa c*

- R\$ 176,80.
- R\$ 206,80.
- R\$ 209,59.
- R\$ 229,59.
- R\$ 249,49.

**R\$ 2.100,00**

**À VISTA**

ou R\$ 400,00 de  
entrada + o restante  
em 10 vezes iguais a  
juros de 4% ao mês.

- Antes de comprar um produto à prazo é importante negociar as condições de pagamento de modo a não pagar juros ou reduzir o quanto possível essa taxa.



## HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

### Luca Pacioli – um dos precursores dos processos contábeis

O Renascimento foi um período importante na história da humanidade por favorecer o desenvolvimento da criatividade humana em diversas áreas. Considerando as inúmeras ideias que surgiram nesse período, podemos destacar as novas concepções na Astronomia, a noção da perspectiva nas Artes, estudos sobre o comportamento da luz, o desenvolvimento da Álgebra e dos processos contábeis, entre outros.

Nessa perspectiva, o papel do frade Luca Pacioli foi importante pelas inúmeras contribuições para a Matemática e para a área contábil.



■ Retrato de Luca Pacioli (1445-1514), frade franciscano nascido na região da Toscana, onde hoje é território italiano.

#### SAIBA QUE...

Embora o método de partidas dobradas seja um pensamento aparentemente simples, no qual, em síntese, não existe devedor sem credor, é aplicado até hoje em instituições financeiras, no comércio e em empresas em geral, sendo a base teórica que desenvolve as Ciências Contábeis.

[...]

[...] Pacioli, que foi professor de matemática e colaborador de Leonardo da Vinci, publicou em 1494 o livro *Summa de Arithmeticā, Geometriā, Proporzioni di Proporzionalità* (Compêndio de Aritmética, Geometria, Proporções e Proporcionalidade), escrito em idioma vernacular. A obra abordava quatro assuntos: aritmética, álgebra, geometria euclidiana elementar e contabilidade. O livro, síntese de boa parte do conhecimento matemático de então, foi o primeiro livro impresso a tratar de álgebra, retomando a classificação das equações de segundo grau dos árabes. No que diz respeito à contabilidade, introduziu o chamado *método das partidas dobradas*, também conhecido como método veneziano. Esse é o sistema padrão usado em empresas e outras organizações para registrar transações financeiras, em que todos os movimentos são lançados em pelo menos duas contas, com o total de débitos devendo se igualar ao total de créditos. A contribuição de Pacioli veio a atender algumas necessidades de técnicas aritméticas surgidas com o desenvolvimento do sistema bancário nas cidades mercantis italianas.

[...]

MOL, R. S. *Introdução à história da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 90. Disponível em: [http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao\\_a\\_historia\\_da\\_matematica.pdf](http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf). Acesso em: 13 jul. 2020.

# Orçamento familiar

Vimos até agora como a escolha da forma de amortização de um empréstimo ou financiamento influencia na quantia de juro que é paga em determinada situação, lembrando que o valor amortizado é parte do capital devido, ou seja, uma quantia sobre a qual incide juro. Agora, pense e converse com os colegas e o professor sobre a questão ao lado.

Uma maneira de visualizar todos os ganhos e gastos é fazer um **orçamento**, reunindo as informações referentes à quantia recebida e à quantia gasta em determinado período.

O **orçamento familiar** bem organizado possibilita que as pessoas de uma família tenham o conhecimento e o controle de suas finanças, para que possam avaliar se a compra de um bem ou serviço pode ser realizada de modo que não prejudique financeiramente o grupo e o torne inadimplente.

Para a elaboração do orçamento familiar, é importante conhecer alguns de seus componentes, bem como envolver os membros da família capazes de compreender as decisões relacionadas ao uso do dinheiro naquele grupo.

Chamamos de **receita** os rendimentos da família, ou seja, todo o valor que se recebe em determinado período.

Compõem a receita: salário, aposentadoria, rendimentos de aplicações, presentes; qualquer valor em dinheiro que se agrega ao saldo da família.

Chamamos de **despesa** qualquer valor que a família gasta em determinado período.

Como despesa, podemos destacar: alimentação, serviços e taxas (água, luz, telefone, TV por assinatura etc.), vestuário, assistência médica, entre outros.

**Saldo** é o valor que se tem após subtrair a despesa da receita.

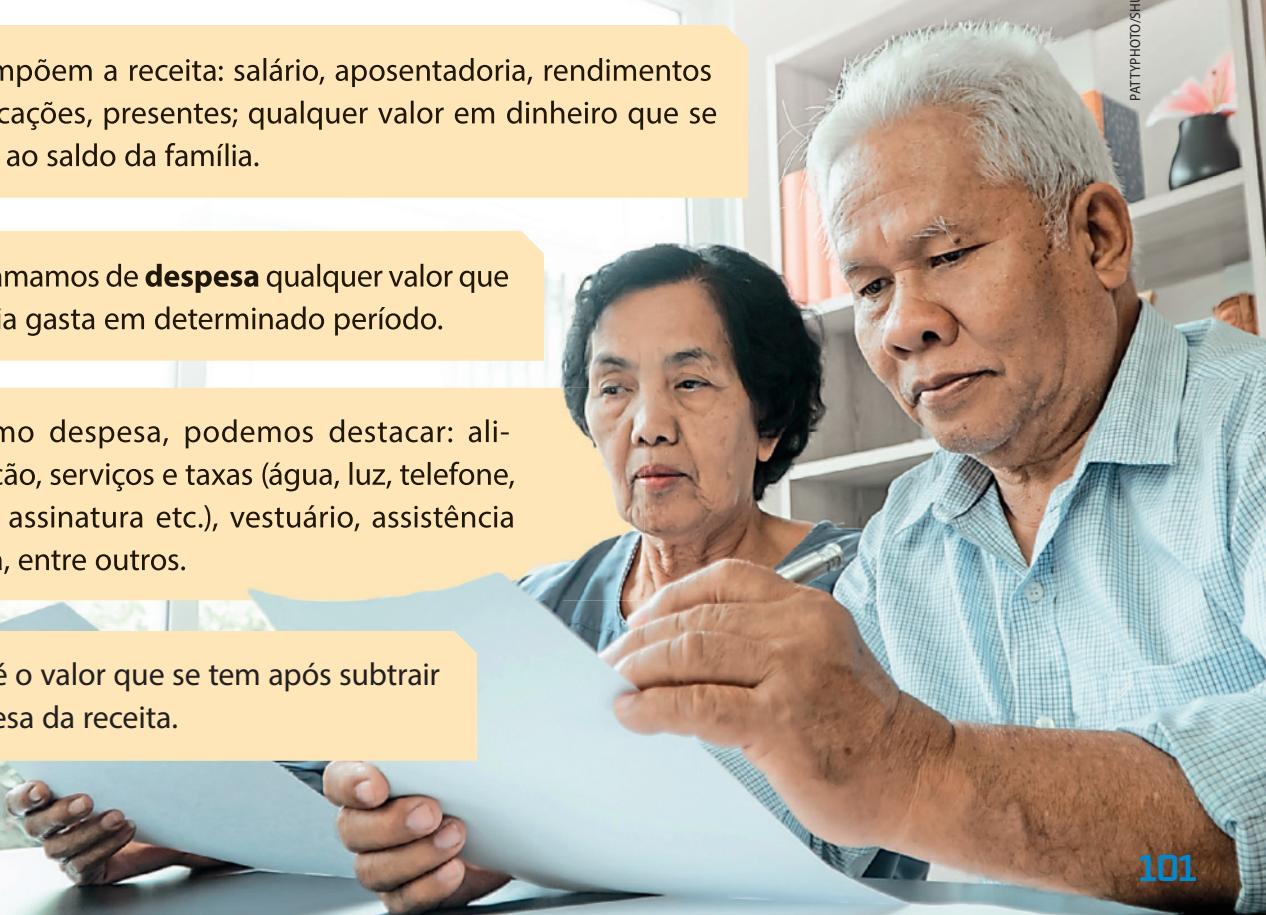
## PENSE E RESPONDA

Como as pessoas ou grupos familiares sabem quando são capazes de arcar financeiramente com a parcela de um financiamento ou com a prestação de um empréstimo?

*Ver as Orientações para o professor.*

- O planejamento financeiro deve estar organizado de forma clara e ser de fácil compreensão.

PATTYPHOTO/SHUTTERSTOCK.COM



**PENSE E  
RESPONDA**

Se fosse necessário fazer algum ajuste no orçamento familiar por conta de um imprevisto financeiro, o que você faria?

Resposta pessoal.

Para saber o total de receita da família, Bruna digitou " $=B2+B3$ " na célula **B14** e pressionou **Enter**.

**PENSE E  
RESPONDA**

O saldo pode ser um valor negativo? Em que situação isso acontece? **Sim. Quando a despesa é maior do que a receita.**

Quando elaboramos um orçamento familiar, consideramos algumas despesas que são fixas e outras que são variáveis.

As **despesas fixas**, como aluguel, prestação do imóvel, mensalidade escolar, entre outras, são aquelas cujo valor não depende da quantidade consumida.

As **despesas variáveis**, como a conta de água e a de energia elétrica, a alimentação, o transporte, entre outras, são aquelas cujo valor depende da quantidade consumida.

Acompanhe a situação a seguir.

Alice mora com o filho, Sérgio, e a neta, Bruna. Essa família paga suas despesas juntando a aposentadoria de Alice, no valor líquido de R\$ 2.258,00, e o salário de Sérgio, no valor líquido de R\$ 1.725,00.

Conversando com a avó, Bruna propôs que fizessem juntas uma planilha para reunir as informações sobre os gastos mensais da família de modo a fazer um orçamento e planejar uma viagem. Elas construíram uma planilha como a indicada a seguir.

Para saber o total de despesas da família, Bruna digitou " $=SOMA(C4:C13)$ " na célula **C14** e pressionou **Enter**.

	A	B	C
1	<b>Descrição</b>	<b>Receita</b>	<b>Despesas</b>
2	Aposentadoria	R\$ 2.258,00	
3	Salário	R\$ 1.725,00	
4	Conta de água		R\$ 78,00
5	Conta de luz		R\$ 145,60
6	Telefone		R\$ 289,90
7	Conta de gás		R\$ 91,50
8	Faculdade		R\$ 1.098,00
9	Transporte		R\$ 480,00
10	Supermercado		R\$ 965,00
11	Outros gastos		R\$ 430,00
12			
13			
14	<b>Total</b>	R\$ 3.983,00	R\$ 3.578,00
15	<b>Saldo</b>		R\$ 405,00

Para obter o saldo do mês, Bruna digitou " $=B14-C14$ " na célula **C15** e pressionou **Enter**.

## FÓRUM

**Será que precisamos de tudo o que compramos?**

Atualmente somos muito incentivados a consumir e muitas vezes compramos algo de que não precisamos.

Será que apenas o fato de um produto ter um preço menor do que o preço de costume é um fator decisivo para ele ser adquirido? Leia o texto a seguir e reflita sobre a informação apresentada.

[...]

O Consumo Sustentável envolve a escolha de produtos que utilizaram menos recursos naturais em sua produção, que garantiram o emprego decente aos que os produziram, e que serão facilmente reaproveitados ou reciclados. Significa comprar aquilo que é realmente necessário, estendendo a vida útil dos produtos tanto quanto possível. Consumimos de maneira sustentável quando nossas escolhas de compra são conscientes, responsáveis, com a compreensão de que terão consequências ambientais e sociais – positivas ou negativas.

[...]

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Consumo sustentável**: o que é consumo sustentável. Brasília, DF, 2020. Disponível em: <https://www.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/producao-e-consumo-sustentavel/conceitos/consumo-sustentavel.html>. Acesso em: 17 jul. 2020.



- Muitos dos resíduos gerados pelos produtos que consumimos têm origem nas embalagens desses produtos.



Converse com os colegas e o professor sobre a questão a seguir.



- No município onde você mora há iniciativas no sentido de reciclar e de reaproveitar produtos? Como a sua turma ou a escola poderiam se organizar e pensar em um projeto que valorize e divulgue práticas de consumo sustentável? Ver as **Orientações para o professor**.

# Inflação

Você já deve ter ouvido ou lido notícias sobre inflação. Ou, ainda, presenciado conversas nas quais esse era o tema principal; mas você sabe o que essa palavra significa?

De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), **inflação** é o nome dado ao aumento dos preços de bens e serviços. Ela é calculada pelos índices de preços, comumente chamados de **índices de inflação**.

Existem diferentes índices que relacionam os preços de uma cesta de produtos, obtendo-se uma média deles para analisar como foi a variação de seus valores em determinado período.

Um dos índices mais importantes da economia brasileira é o **Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)**. Esse índice, que mede a inflação oficial no Brasil, indica a variação de preços de alguns produtos do mercado para o consumidor final. Esse monitoramento é realizado mês a mês pelo IBGE: os dados são coletados diariamente, do 1º ao 30º dia, por meio de uma pesquisa de preços em estabelecimentos comerciais, em residências, com pessoas prestadoras de serviços e em estabelecimentos que prestam serviços.

Há alguns critérios que precisam ser levados em consideração para a finalidade de cada índice. O IPCA, por exemplo, avalia o custo de vida de famílias que possuem renda entre 1 e 40 salários mínimos, e esse monitoramento é realizado em nove regiões metropolitanas do país e no Distrito Federal.

Para analisar o custo de vida, são considerados grupos como: moradia, alimentação e bebidas, saúde e higiene pessoal, despesas pessoais, educação, comunicação, transporte e vestuário, e cada uma delas tem um peso diferente para a base de cálculo.

Diversos fatores podem gerar a inflação. Em situações em que as pessoas consomem mais, um dos efeitos é o aumento do preço do produto, ou seja, quando há uma disponibilidade das pessoas para comprar mais, os produtos têm uma tendência ao aumento de preços. Os aspectos climáticos também afetam a inflação. Por exemplo, quando a produção é reduzida por causa de muita chuva ou por uma situação de escassez de chuva, o valor do produto aumenta no mercado, contribuindo para a elevação do índice de inflação.

Em relação ao IPCA, podemos considerar que quando esse índice aumenta, há um reflexo nos itens de consumo do dia a dia, pois nesses casos é comum uma alta nos preços, gerando inflação. Mas, se no mês seguinte o índice diminui, mas não é negativo, isso não significa que haverá redução nos preços. Somente ocorre a deflação se o IPCA for negativo, situação em que, provavelmente, os preços vão diminuir.

**PENSE E  
RESPONDA**

Você já pensou de que forma a inflação afeta nossa vida? **Resposta pessoal.**

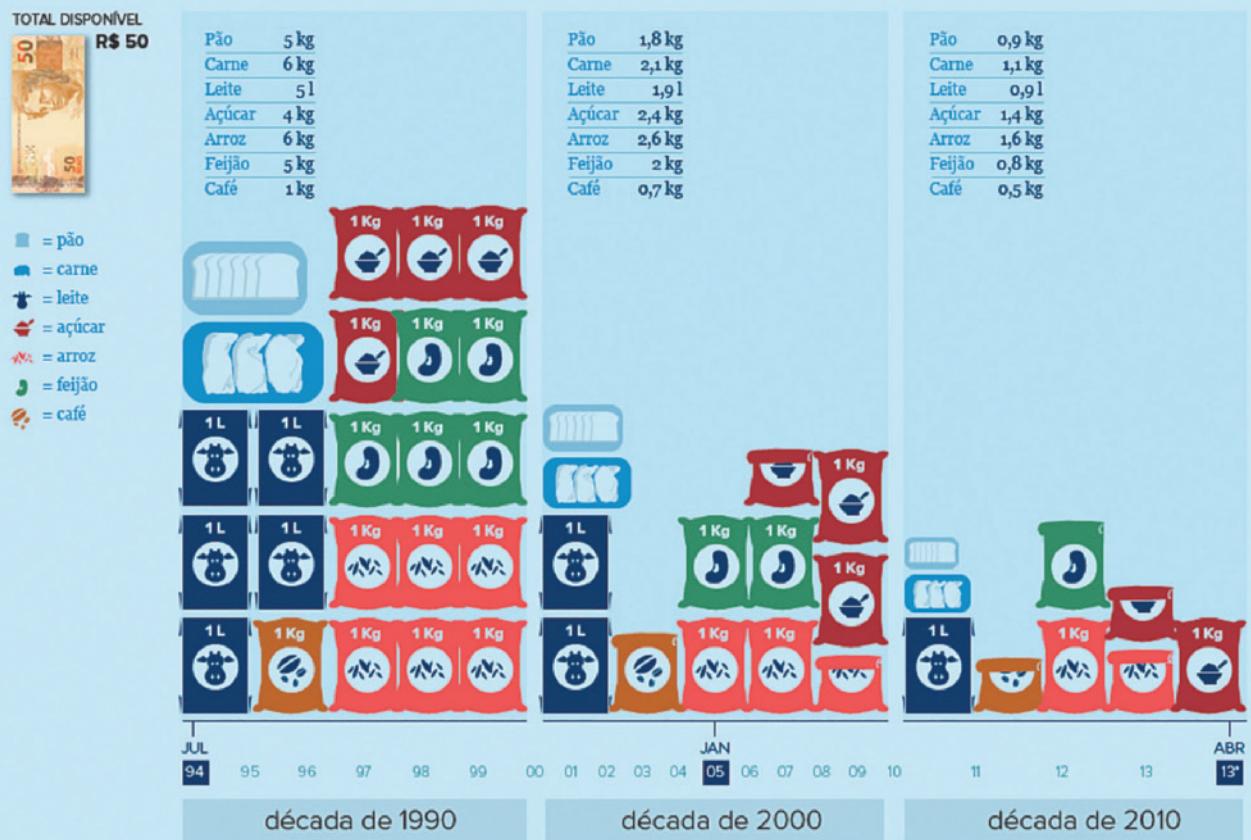
Observe a seguir a diferença entre o que era possível comprar com R\$ 50,00 em três períodos determinados.

### A comida “encolhe”

Veja o que você podia comprar com R\$ 50

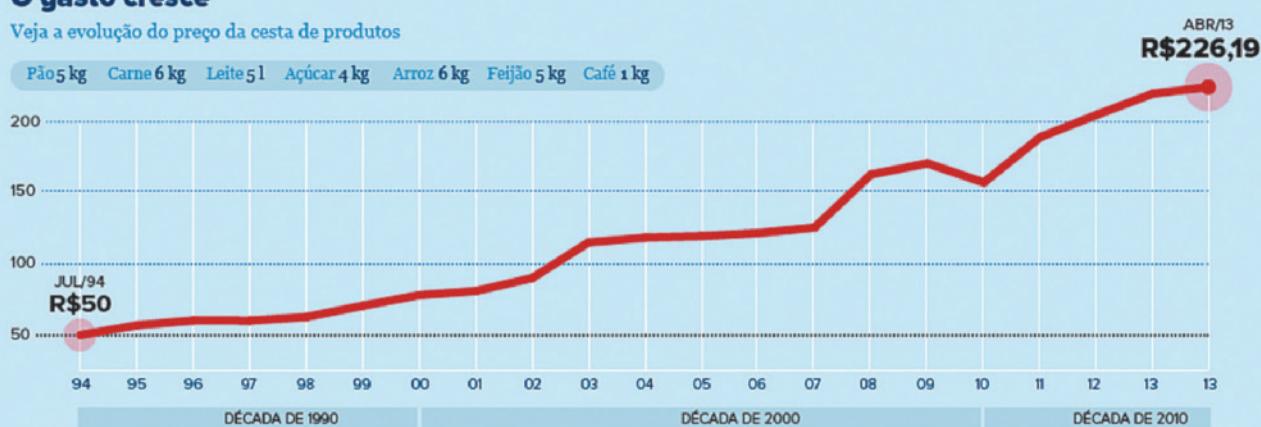
Fonte: Procon - SP

ARTE/G1



### O gasto cresce

Veja a evolução do preço da cesta de produtos



Fonte: G1 EXPLICA a inflação: a inflação no seu bolso. G1, c2010-2011. Disponível em: <http://g1.globo.com/economia/inflacao-efeitos/platb>. Acesso em: 17 jul. 2020.



- O QUE é inflação: IBGE explica INPC e IPCA. 2015. Vídeo [5min38s]. Publicado pelo canal IBGE. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=JVcDZOIIIMBk>. Acesso em: 17 jul. 2020.

Assista a esse vídeo para conhecer um pouco mais sobre a inflação.

- G1 EXPLICA a inflação. G1, c2010-2011. Disponível em: <http://g1.globo.com/economia/inflacao-efeitos/platb>. Acesso em: 17 jul. 2020.

Com uma calculadora, verifique no *link* como o dinheiro perdeu poder de compra por causa da inflação acumulada no período de julho de 1994 a abril de 2013.

A taxa de inflação  $J$  observada em um período, determinada pela variação no preço de determinado produto ou serviço, é expressa em termos percentuais.

Podemos realizar esse cálculo por meio da expressão:  $J = \frac{P_t}{P_0} - 1$ , em que  $P_0$  representa o preço na época-base e  $P_t$  representa o preço na época atual.

O cálculo da taxa acumulada de inflação, expressa por  $J_{AC}$ , em determinado período é dado por:

$J_{AC} = (1 + J_1) \cdot (1 + J_2) \cdot \dots \cdot (1 + J_n) - 1$ , em que  $J_1, J_2, \dots, J_n$  correspondem às taxas de inflação calculadas ao longo do período determinado.

Observe que  $1 + J_i = \frac{P_{ti}}{P_{0i}}$

### > ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 3.** Em janeiro de 2019, Ana comprou um produto por R\$ 11,50. Após um ano, ao comprar o mesmo produto pagou R\$ 12,75. Qual foi a taxa de inflação desse produto nesse período?

#### Resolução

Utilizando a expressão que permite calcular a taxa de inflação, fazendo  $P_t = 12,75$  e  $P_0 = 11,50$  temos:

$$J = \frac{12,75}{11,50} - 1 \approx 0,1087$$

Como esse valor é expresso em porcentagem, dizemos que a taxa de inflação do produto nesse período foi de aproximadamente 10,87%. Podemos também dizer que, sobre o preço de janeiro de 2019, houve um aumento de 10,87%.

- 4.** A taxa de inflação no Brasil em 2014 foi de aproximadamente 6,4% a.a., em 2015 foi de 10,7% a.a., em 2016 foi de 6,3% a.a. e em 2017 foi de 2,6%. Determine a inflação acumulada nesse período.

#### Resolução

Utilizando a expressão que permite calcular a inflação acumulada no período considerado, fazendo  $J_1 = 6,4\% = 0,064$ ;  $J_2 = 10,7\% = 0,107$ ;  $J_3 = 6,3\% = 0,063$ ;  $J_4 = 2,6\% = 0,026$ ; temos:

$$J_{AC} = (1 + 0,064) \cdot (1 + 0,107) \cdot (1 + 0,063) \cdot (1 + 0,026) - 1 \approx 0,2846$$

Nesse período, a inflação acumulada foi de aproximadamente 28,46%.

## > ATIVIDADES



- 5.** Retome a situação apresentada na página 102 sobre a família formada por Alice, Sérgio e Bruna. Reproduza a planilha de receitas e despesas dessa família e crie a quarta e a quinta colunas na planilha.
- a) Na quarta coluna, coloque o título **Despesas previstas – próximo mês** e estime os valores imaginando que Bruna quisesse que o saldo previsto fosse de R\$ 560,00. **Ver as Orientações para o professor.**
- b) Na quinta coluna, inclua o título **Despesas realizadas – próximo mês** e estime os valores imaginando o que a família gastou, de modo que o saldo real tenha sido de R\$ 510,00. Em seguida, compartilhe sua resolução com os colegas.
- 6.** Pesquise outros índices que são referência para o cálculo do índice de inflação e investigue a particularidade de cada um. Compartilhe sua resposta com os colegas. **Pesquisa do estudante. Ver Orientações para o professor.**
- 7.** Observe o gráfico a seguir. Em seguida, responda às questões:



Fonte: BRASIL. Ministério da Economia. Banco Central do Brasil. **Panorama econômico**. Brasília, DF, 2020. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/>. Acesso em: 17 jul. 2020.

- 8.** Observe na tabela a seguir a variação dos índices de preços ao consumidor amplo, por grupos.

**> IPCA – Variação por grupos — mensal**

Grupo	Variação (%)	
	Julho	Agosto
Índice Geral	0,19	0,11
Alimentação e Bebidas	0,01	-0,35
Habitação	1,20	1,19
Artigos de Residência	0,29	0,56
Vestuário	-0,52	0,23
Transportes	-0,17	-0,39
Saúde e Cuidados Pessoais	-0,20	-0,03
Despesas Pessoais	0,44	0,31
Educação	0,04	0,16
Comunicação	0,57	0,09

Fonte: EM AGOSTO, IPCA fica em 0,11%. **Agência IBGE Notícias**, 6 set. 2019. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/25382-em-agosto-ipca-fica-em-0-11>. Acesso em: 17 jul. 2020.

Pesquise o preço de dois produtos pertencentes a grupos distintos da tabela e elabore um problema utilizando dados apresentados. **Resposta pessoal.**

## &gt; CONEXÕES

## Imposto de renda

**salário bruto:** remuneração mensal paga ao trabalhador sem os descontos.

**renda:** soma das remunerações de diversos fatores de produção, por exemplo, salários, aluguéis, entre outros.

Todo trabalhador com registro em Carteira de Trabalho e Previdência Social (CTPS) tem diversos descontos em seu **salário bruto** mensal. Dependendo do salário, uma dessas retenções corresponde ao Imposto sobre a Renda Retido na Fonte (IRRF).

O que são Imposto de Renda Retido na Fonte (IRRF) e Imposto de Renda sobre Pessoa Física (IRPF)?

O IRRF é o imposto cobrado no momento do recebimento da **renda**, ou seja, é um desconto mensal, aplicado pela Receita Federal, sobre o salário bruto de alguns trabalhadores, de acordo com um valor chamado **base de cálculo**. O IRPF está relacionado com a Declaração de Ajuste Anual, também conhecida como a declaração do imposto de renda.

Quem precisa declarar o imposto de renda?

Existem algumas regras. Em geral, são pessoas que receberam rendimentos, ou seja, salários, férias, renda com aluguéis, pensões, entre outros, acima de determinado valor definido pelo Governo Federal.

Quando deve ser realizada essa declaração?  
Como ela deve ser feita?

Essa declaração deve ser realizada anualmente, até o último dia de abril. Em 2020, excepcionalmente, o prazo de entrega da declaração foi estendido até 30 de junho por causa da pandemia causada pelo vírus SARS-CoV-2. A declaração é feita por meio de um *software* da Receita Federal.

Caso o contribuinte não realize a declaração dentro do prazo estabelecido, é submetido a uma multa.



## Por que devemos declarar o imposto de renda?

Porque é por meio dessa declaração que a Receita Federal verifica se o valor retido na fonte é realmente o valor que você deveria pagar de acordo com a sua renda. Caso o valor retido seja maior do que se deve, é feita a restituição, ou seja, a quantia que supera o imposto devido é devolvida ao contribuinte, corrigida. Caso o valor retido seja menor do que o imposto devido, é necessário pagar a diferença aos cofres públicos.

## Para onde vai o seu imposto?

- Investimento em saúde pública;
- Desenvolvimento de políticas públicas;
- Investimento em educação;
- Investimento em rodovias; entre outros.

Fontes dos dados: BRASIL. Ministério da Economia. Secretaria da Receita Federal do Brasil.

**Conheça a história do imposto de renda.** Brasília, DF, 9 maio 2017. Disponível em: <http://receita.economia.gov.br/noticias/ascom/2016/marco/conheca-a-historia-do-imposto-de-renda>.

IR 2019: SAIBA quanto a Receita arrecada e para onde vai o dinheiro. **G1**, 9 mar. 2019. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/imposto-de-renda/2019/noticia/2019/03/09/ir-2019-saiba-quanto-a-receita-arrecada-e-para-onde-vai-o-dinheiro.ghtml>. Acessos em: 17 jul. 2020.

 Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede nas atividades a seguir. **Ver Orientações para o professor.**



1. Vocês sabem quais são as diferenças entre um trabalhador formal e um trabalhador informal? Pesquisem as diferenças e como é realizada a declaração de renda em cada caso.
2. Observe a tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2020 e responda.

### > Tabela de incidência mensal vigente em 2020

Base de cálculo em R\$	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R\$)
Até 1.903,98	-	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: BRASIL. Ministério da Economia. Secretaria da Receita Federal do Brasil. **IRPF [Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas]**. Brasília, DF, 2015. Disponível em: <http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 17 jul. 2020.

Para calcular a quantia mensal de IRPF do trabalhador, multiplicamos a base de cálculo pela alíquota e subtraímos, desse resultado, a parcela a deduzir correspondente. Sendo assim, calcule o IRPF de um trabalhador cuja base de cálculo é de R\$ 6.000,00 por mês e de outro que tenha como base de cálculo mensal R\$ 20.000,00.

3. Em sua opinião, por que devemos estar atentos à distribuição e à aplicação dos recursos recolhidos por meio dos tributos?

## Antecipar ou não a restituição do imposto de renda

Como vimos há pouco, o IRPF é um imposto que incide sobre a renda de contribuintes brasileiros. As alíquotas, ou as taxas do imposto, variam conforme a renda do contribuinte, e algumas pessoas podem ser isentas da cobrança.

Como o imposto é retido mensalmente, após a declaração obrigatória anual, algumas pessoas podem ter pago mais do que deveriam e, nesse caso, têm direito a receber parte do valor pago. Esse processo é chamado **restituição do imposto de renda**.

Muitas pessoas que têm direito a essa restituição contam com esse dinheiro para os mais diferentes fins, como quitar uma dívida, investir, comprar um bem de consumo, viagens etc. Porém, esse dinheiro é liberado em lotes e a data para recebê-lo depende de vários fatores, como a data de entrega da declaração anual.

Caso uma pessoa precise desse dinheiro antes da liberação de seu lote, ela normalmente pode recorrer aos bancos e solicitar uma antecipação. Nesse caso, a instituição cobra um valor calculado a partir de uma taxa mensal sobre o saldo da restituição, que está na declaração anual. Portanto, o prazo restante para liberação do respectivo lote é fundamental para o cálculo. Por outro lado, a restituição do imposto de renda também recebe um reajuste mensal enquanto o lote não for liberado.

Vamos elaborar uma calculadora, em uma planilha eletrônica, para ter uma estimativa da antecipação do imposto de renda e do seu rendimento, a fim de verificar qual decisão deve ser tomada.

### Calculadora de antecipação do imposto de renda

Para criar uma calculadora em uma planilha eletrônica, precisamos saber os cálculos envolvidos na antecipação ou no rendimento da restituição do imposto de renda.

Considere  $V_{IR}$  o saldo da restituição do imposto de renda. Esse valor  $V_{IR}$  pode assumir duas funções:

**1º caso:** em uma antecipação, o  $V_{IR}$  pode ser considerado um valor futuro ( $VF$ ), pois o valor presente ( $VP$ ) será a quantia que a instituição bancária vai antecipar:

$$VP = \frac{V_{IR}}{(1 + i_B)^n}$$

**2º caso:** em uma aplicação, o  $V_{IR}$  é um valor presente ( $VP$ ) e o valor futuro ( $VF$ ) será a quantia recebida ao liberar o lote:

$$VF = V_{IR} (1 + i_r)^n$$

Nessas expressões,  $i_B$  é a taxa mensal cobrada pelo banco para a antecipação;  $i_r$  é a taxa mensal de reajuste da restituição do imposto de renda;  $n$  é a quantidade de meses que falta para o lote de restituição ser liberado.

Com base nessas informações, siga os passos para criar a calculadora. Vamos utilizar o **Calc**, a planilha eletrônica do **LibreOffice**.

- I. Depois de abrir a planilha **Calc**, digite, na célula **A3**, "Restituição IR". Em seguida, na célula **A5**, digite "iB"; na célula **A6**, digite "ir"; na célula **A7** digite "n".
- II. Digite, na célula **D1**, "Antecipação IR". Em seguida, digite na célula **E1**, "Reajuste IR".

FOTO: LIBREOFFICE

- III. Selecione as células **D2** e **E2** e clique em **00** para formatá-las.
- IV. Digite, na célula **D2**, " $=B3/POTÊNCIA(1+B5/100;B7)$ " e pressione **Enter**. Em seguida, digite, na célula **E2**, " $=B3*POTÊNCIA(1+B6/100; B7)$ " e pressione **Enter**.
- V. Registre, na célula **B3**, o saldo da restituição do imposto de renda; na célula **B5** a taxa mensal cobrada pelo banco para a antecipação; na célula **B6**, a taxa mensal de reajuste da restituição; na célula **B7**, a quantidade de meses que falta para o lote de restituição ser liberado.

Observe um exemplo a seguir.

Veja que se essa pessoa contratar o serviço bancário, receberá R\$ 888,49 pela antecipação. Porém, se esperar o lote ser liberado, ele receberá R\$ 1.061,36.

Conhecendo essa diferença, que nesse exemplo é de R\$ 172,87, o contribuinte tem mais uma possibilidade de analisar se vale a pena antecipar a restituição. Observe que essa diferença representa quase 20% do saldo da restituição.

Agora faça o que se pede na atividade a seguir.



1. Ao fazer sua declaração anual do imposto de renda, Paulo viu que teria direito a R\$ 2.500,00 de restituição e que seu lote estava programado para o mês de novembro, ou seja, 7 meses após entregar a declaração. Considerando que a Receita Federal vai reajustar, em média, 0,6% ao mês, responda.
  - a) Qual será o valor que Paulo vai receber na data de liberação de seu lote? **R\$ 2606,91**
  - b) Caso Paulo queira antecipar sua restituição para setembro, a uma taxa de 2% ao mês, qual será o valor que ele receberá? **R\$ 2402,92**
  - c) Considere que Paulo optou pela antecipação em setembro. Então, qual deve ser a taxa aplicada a esse capital para que o montante seja igual à restituição na data de liberação de seu lote? **4,158%**

## &gt; ATIVIDADES COMPLEMENTARES



**1.** Considere as afirmações a seguir, a respeito de sistemas de amortização em um financiamento.

- I.** No Sistema de Amortização Constante (SAC), o valor das prestações é igual do começo ao fim do financiamento.
  - II.** No Sistema Price de amortização, o valor amortizado vai aumentando com o passar do tempo, do começo ao fim do período de quitação.
  - III.** Comparando, nos sistemas de amortização SAC e Price, o mesmo valor de empréstimo, a igual taxa de juro e mesmo período, verificamos que o saldo devedor sofre redução mais acelerada no Sistema Price.
- Podemos dizer que está(ão) correta(s) a(s) afirmação(ões):

- a) I.                   c) III.                   e) II e III.  
 b) II. **alternativa b**   d) I e III.

**2.** Cláudio comprou um fogão que custava R\$ 1.350,00 à vista, mas como não tinha todo o dinheiro, deu uma entrada de R\$ 350,00 e financiou o restante em 5 vezes, a uma taxa mensal de 3% de juros.



Considerando o Sistema Price de amortização, e adotando  $1,03^5 \approx 1,16$ , podemos afirmar que o valor de cada prestação é:

- a) maior do que R\$ 200,00 e menor do que R\$ 205,00.  
 b) maior do que R\$ 205,00 e menor do que R\$ 210,00.  
 c) maior do que R\$ 210,00 e menor do que R\$ 215,00.  
 d) maior do que R\$ 215,00 e menor do que R\$ 220,00. **alternativa d**  
 e) maior do que R\$ 220,00 e menor do que R\$ 225,00.

**3.** (UFAL) Um dos maiores problemas enfrentados pelos governos é a inflação. Felizmente, para a Economia Brasileira, a inflação está controlada; porém, não deixa de dar sinais de sua persistência. Pode-se definir *inflação* como:

- a)** o aumento contínuo e generalizado de todos os preços da economia. **alternativa a**
- b)** o aumento rápido e incontrolável das variáveis de demanda, como o consumo.
- c)** o excesso de gastos, principalmente, os de investimento, em relação ao produto de uma economia.
- d)** o aumento contínuo da massa salarial da economia, provocando elevação da demanda e, consequentemente, dos preços.
- e)** o aumento do crédito na economia, provocando elevação da demanda agregada.

**4.** (Enem/MEC) Um investidor inicia um dia com  $x$  ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

- I.** vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal ( $V_i$ );
- II.** compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo ( $V_m$ );
- III.** vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo ( $V_o$ );

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo. **alternativa b**



EDITORIA DE ARTE

Quantas operações o investidor fez naquele dia?

- a) 3                   b) 4                   c) 5                   d) 6                   e) 7

## PARA REFLETIR



Neste Capítulo, vimos como alguns conceitos de Matemática Financeira podem nos auxiliar em situações do dia a dia envolvendo o uso do dinheiro, possibilidades de organizar gastos e poupar. Examinamos também condições de pagamento e cálculos mais detalhados que nos permitem avaliar quanto gastamos pagando juros.

Estudamos o conceito de amortização, com destaque para dois sistemas de amortização praticados por instituições financeiras em contratos de empréstimos e financiamentos, analisando vantagens e desvantagens a eles associadas. Vimos também uma possibilidade de fazer um planejamento financeiro por meio de um orçamento familiar e verificamos como a inflação pode afetar nossas vidas e prejudicar o poder de compra das pessoas.

Nas páginas de abertura, foi apresentada uma discussão envolvendo formas e condições de pagamento em situações de venda e compra. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem auxiliá-lo a ampliar a situação apresentada na abertura? Você já tinha essa percepção antes de estudá-los?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo 3:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados? Qual(is)?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia que envolvem sistemas de amortização, orçamento familiar e inflação?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhecia sobre situações relacionadas a venda e compra?
- Você utiliza os conceitos estudados para analisar situações antes de tomar decisões e de resolver problemas do dia a dia?

Respostas pessoais.

- 
- Refletir sobre o seu próprio aprendizado é uma oportunidade de desenvolver autonomia frente aos estudos.

# CAPÍTULO

# 4

## A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- Competências gerais da BNCC: 2, 5 e 7
  - Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
    - Competência específica 1: EM13MAT103
    - Competência específica 3: EM13MAT313 e EM13MAT314
  - Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:
    - Competência específica 1
    - Competência específica 3
- O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

# Grandezas

Você já reparou, assistindo a alguns filmes estadunidenses, que nas placas de trânsito as distâncias estão indicadas em milha (*mile* em inglês)? Isso acontece porque nem todos os países utilizam a unidade de medida quilômetro para expressar a grandeza comprimento. E é de grandes e unidades de medida que este Capítulo trata.

Muitas séries e filmes exibem longas estradas dos Estados Unidos e, em algum momento, você pode se deparar com a cena de uma placa indicando a distância até uma cidade. Nas versões originais dessas cenas, isto é, sem as adaptações para o público brasileiro, as distâncias são exibidas em milhas. Acontece que os estadunidenses adotaram a milha como unidade de medida de comprimento. Uma milha (1 mi) equivale a, aproximadamente, 1,6 km.

E não apenas a distância pode ser expressa utilizando unidades de medida diferentes das nossas; a temperatura, por exemplo, também o é. Enquanto nós utilizamos a escala Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) para temperatura, os estadunidenses utilizam a escala Fahrenheit ( $^{\circ}\text{F}$ ). Portanto, se um dia for viajar para os Estados Unidos, certifique-se de conferir as distâncias e a temperatura convertendo-as para o nosso sistema de medição. Isso evitará algumas surpresas desagradáveis, como achar que fará calor, se a previsão for de 50  $^{\circ}\text{F}$  quando, na verdade, estará frio, pois 50  $^{\circ}\text{F}$  equivalem a 10  $^{\circ}\text{C}$ .



RAKSYB/HUTTERSTOCK.COM

 Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.



1. Como você faria para determinar o comprimento aproximado de uma ponte, em quilômetro, sabendo que ela tem 3 milhas de comprimento? Qual informação é necessária para isso?
2. Como vimos no texto de abertura, existe diferença entre as unidades de medida usadas para medir distância e temperatura no Brasil e as utilizadas nos Estados Unidos, mas essas não são as únicas diferenças. Pesquise outras unidades de medidas, suas respectivas grandezas e como elas se relacionam.
3. O Brasil adota o chamado Sistema Internacional de Unidades (SI); no entanto, não são todas as unidades de medida dele que utilizamos. O grau Celsius, por exemplo, não faz parte desse sistema. Mas isso não é exclusividade do Brasil, diversos países que adotaram o SI não utilizam todas suas unidades de medida no dia a dia. Faça uma pesquisa do motivo dessa implementação parcial do SI nos países.



■ Estrada localizada em Nova Iorque, Estados Unidos. Fotografia de 2017.

# Introdução

Em nosso cotidiano lidamos com **grandezas** o tempo inteiro: a velocidade de um veículo, o tempo de deslocamento até um lugar, a distância entre dois lugares, o tamanho de arquivos de computador etc. Ou seja, grandeza é tudo aquilo que pode ser medido. Cada grandeza pode ser associada a uma ou mais **unidades de medida**.

Uma unidade de medida é uma quantidade específica de uma grandeza que serve de padrão para a medição (comparação) em outras medições. Sempre que fazemos uma medição, estamos comparando a quantidade medida com seu padrão.

Por exemplo, o metro é uma quantidade específica da grandeza comprimento. Dizer que um objeto tem 4 metros de comprimento é o mesmo que dizer que ele tem 4 vezes a medida padrão adotada, que é o metro. Se a medida padrão adotada for o centímetro, esse objeto terá 400 cm, ou seja, 400 vezes a unidade padrão centímetro.



- A trena é um dos instrumentos de medida de comprimento utilizados no dia a dia, principalmente em atividades relacionadas à construção civil.

## O Sistema Internacional de Unidades (SI)

Ao longo da história, foram criadas várias unidades de medida que serviam para uma mesma grandeza, de tal modo que essa relação entre grandeza e unidade de medida era diferente em todo o mundo, o que dificultava a comunicação e o comércio, já que, em cada região, era utilizada uma unidade de medida particular.

Por conta dessa situação, em 1875, foi criado o Bureau International de Pesos e Medidas (BIPM) com a finalidade de estabelecer um sistema de medições único e que pudesse ser usado internacionalmente. Em 1960, definiu-se que esse sistema seria chamado de Sistema Internacional de Unidades (SI).

Esse sistema estabelece para cada grandeza apenas uma unidade de medida. Para a criação do SI, foram escolhidas **grandezas de base e unidades de medida de base**:

Grandeza de base	Unidade de base (símbolo)
Comprimento	metro (m)
Massa	quilograma (kg)
Tempo, duração	segundo (s)
Temperatura termodinâmica	kelvin (K)
Corrente elétrica	ampere (A)
Quantidade de substância	mol (mol)
Intensidade luminosa	candela (cd)

## Grandezas derivadas e unidades de medida derivadas

Vimos que o Sistema Internacional de Unidades foi baseado em sete grandezas de base. No entanto, sabemos que existem outras grandezas além dessas. Essas outras grandezas são chamadas de **grandezas derivadas**. Essas grandezas são medidas usando-se as **unidades de medida derivadas**. As grandezas e as unidades de medida recebem esse nome por derivarem, ou seja, terem como origem as sete grandezas e suas respectivas unidades de base.

As grandezas derivadas e suas respectivas unidades de medida são obtidas como produto ou razão de potências das unidades de medida de base. Veja alguns exemplos:

Grandeza	Unidade de medida	Símbolo
Área	metro quadrado	$m \cdot m = m^2$
Volume	metro cúbico	$m \cdot m \cdot m = m^3$
Concentração de massa	quilograma por metro cúbico	$kg \cdot \frac{1}{m^3} = \frac{kg}{m^3}$
Velocidade	metro por segundo	$m \cdot \frac{1}{s} = \frac{m}{s}$
Aceleração	metro por segundo ao quadrado	$m \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{m}{s^2}$

Nem todas as unidades de medida derivadas possuem nome e símbolo que expressam claramente o produto ou a razão das unidades de medida de base. Essas unidades de medida derivadas recebem um nome especial, geralmente em homenagem a alguém importante para o desenvolvimento da Ciência.

No entanto, isso não quer dizer que essas unidades de medida derivadas não sejam uma combinação das unidades de medida de base, essa é somente uma forma compacta de expressá-las.

Vamos ver, a seguir, alguns exemplos:

Grandeza	Unidade de medida (símbolo)	Expressão em termos das unidades de medida de base
Força	newton (N)	$\frac{m \cdot kg}{s^2}$
Pressão	pascal (Pa)	$\frac{kg}{m \cdot s^2}$
Carga elétrica	coulomb (C)	$s \cdot A$
Potência	watt (W)	$\frac{m^2 \cdot kg}{s^3}$

Observe que as sete grandezas de base e as sete unidades de medida de base foram fundamentais para a criação do SI, mas elas não são as únicas que o compõem. Todas as unidades apresentadas anteriormente, por exemplo, fazem parte do SI.

Vamos ver, a seguir, alguns conceitos importantes que são expressos por meio de razões ou produto de grandezas.

## Densidade demográfica

Segundo estimativa do IBGE, o Brasil tinha, em 2019, uma população de aproximadamente 210 milhões de habitantes, fazendo dele o sexto país mais populoso do mundo. Apesar de populoso, o Brasil não possui uma distribuição uniforme ao longo de seus 8 516 000 km<sup>2</sup>. Por exemplo, o estado do Rio de Janeiro tinha, em 2019, uma **densidade demográfica** de aproximadamente 395 hab/km<sup>2</sup>. Nesse mesmo ano, no estado do Acre, esse número era de aproximadamente 5,4 hab/km<sup>2</sup>.

Fonte dos dados: IBGE. **Cidades e estados**. Disponível em: [Mas o que é densidade demográfica?](https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/>. Acesso em: 19 jun. 2020.</a></p>
</div>
<div data-bbox=)

A densidade demográfica corresponde à distribuição de uma população em determinada área. Ela é a média de quantas pessoas habitam determinada área de determinado lugar. O cálculo é dado pela razão entre o total de habitantes de determinada região e a área dessa região.

$$d = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área}}$$

Normalmente, a densidade demográfica é expressa em  $\frac{\text{habitantes}}{\text{km}^2}$ .

**FÓRUM**

## Populoso ou povoado?

O Brasil é um país populoso. Como vimos, sua população é de mais de 210 milhões de habitantes, mas seria ele um país povoado? Para responder a essa pergunta devemos entender a diferença entre esses dois conceitos da Geografia.

*Populoso* refere-se à quantidade de habitantes de uma região, sem considerar sua extensão territorial e a distribuição da população.

Já *povoado* refere-se à densidade demográfica. Uma região com uma densidade demográfica alta é considerada **densamente povoada**, mesmo que sua população não seja tão grande. Para isso, basta que sua área seja pequena, por exemplo.

Compreendendo isso, concluímos que o Brasil é um país populoso (pois sua população é muito grande), mas nem todo ele é densamente povoado, pois sua extensão territorial é muito grande e sua população está mal distribuída dentro de seu território.

Observe o mapa a seguir.



A distribuição desigual da população dentro de um território pode trazer grandes problemas sociais e econômicos, tanto para as regiões densamente povoadas como para as pouco povoadas.

Após ler o texto, faça o que se pede a seguir.



**Ver as Orientações para o professor.**

- Com seus colegas, façam um fórum de debate sobre os problemas causados pela má distribuição da população no território brasileiro e as possíveis ações para reduzir essa distribuição desigual.

## Velocidade média

Um dos autódromos que temos no Brasil é o Autódromo José Carlos Pace (mais conhecido como Autódromo de Interlagos). Localizado na cidade de São Paulo, é nele que ocorre a etapa do Brasil de Fórmula 1. Sua extensão é de 4,309 km e, durante uma corrida dessa categoria, os carros podem chegar a até 330 km/h.

A velocidade atingida pelos carros é uma das grandes atrações desse esporte; no entanto, não é em todo o circuito que os carros atingem essa velocidade. Em uma curva o carro é mais lento, nas retas o carro é mais veloz e, dessa forma, a velocidade do carro varia ao longo de uma volta.

**PENSE E  
RESPONDA**

Nos carros, a grandeza velocidade (média ou instantânea) é mensurada na unidade de medida  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Qual seria a unidade de medida dessa grandeza no SI?  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

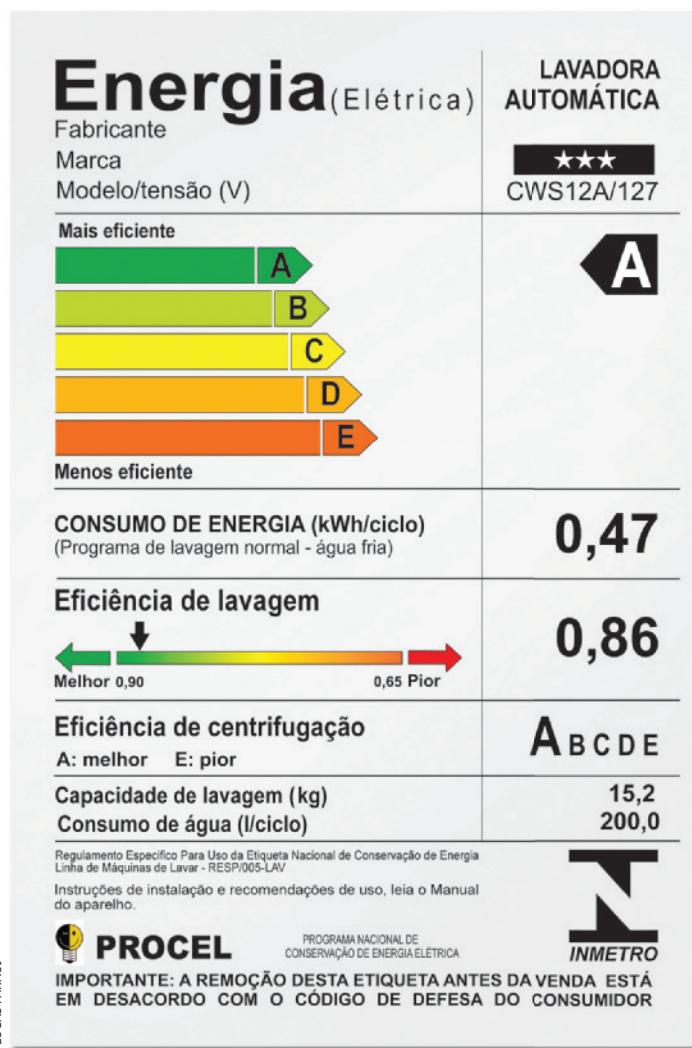
No entanto, durante uma corrida, a velocidade instantânea de um carro não é suficiente para saber qual piloto tem o melhor desempenho na pista inteira, pois ele pode ser mais rápido em um único ponto e mais lento nos restantes. Uma forma de fazer essa comparação é por meio da velocidade média.

Para esse cálculo, é considerada a razão entre duas grandes: a **distância ( $d$ )** percorrida pelo carro, nesse caso, dada em quilômetro, e o **tempo ( $t$ )** gasto para percorrer essa distância, dado em hora. A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{d}{t}$$

## Consumo de energia elétrica

Você já deve ter visto que a maioria dos eletrodomésticos possui uma etiqueta com diversas informações do produto, no que diz respeito ao consumo de energia elétrica. Essa etiqueta deve ficar fixada em local de fácil visualização pelo consumidor.



- ← tipo de equipamento
- ← nome e logomarca do fabricante
- ← modelo e tensão do equipamento
- ← A letra destacada indica a eficiência energética do produto; no lado esquerdo, verifica-se um esquema comparativo de eficiência energética.
- ← consumo de energia (a unidade de medida pode variar)
- ← eficiência energética das funções do equipamento
- ← informações sobre capacidade e outros consumos, além de energia elétrica

- Selo Procel de Economia de Energia.

Observe que, entre as informações apresentadas na etiqueta representada na página anterior, há o consumo de energia; nesse caso, dado em kWh/ciclo, pois se trata de uma lavadora. Dependendo do equipamento, essa unidade de medida pode variar. Um refrigerador, por exemplo, não trabalha em ciclos, então a unidade de medida utilizada é kWh/mês.

Mas o que significa essa unidade de medida? Vamos analisá-la tomando como exemplo o consumo da lavadora cuja etiqueta foi representada.

Para isso, primeiro precisamos entender como se lê essa informação.

kWh/ciclo: lê-se quilowatt-hora por ciclo.

Depois, precisamos entender o que é cada parte dessa unidade de medida:

Quilowatt (kW) é uma unidade de medida de **potência**.

1 kW equivale a 1000 W.

Hora (h) é uma unidade de medida de **tempo**.

Quilowatt-hora (kWh) é uma unidade de medida de **energia gasta** (ou consumida).

Observe como essas unidades se relacionam:

Um quilowatt-hora (kWh) é a energia gasta por um aparelho que tem 1 quilowatt (kW) de potência durante 1 hora (h). Se esse aparelho ficar ligado por cinco horas, sua potência continua sendo 1 quilowatt, mas agora ele terá gasto 5 kWh ( $5 = 1 \cdot 5$ ).

Voltando ao nosso exemplo, 0,47 kWh/ciclo significa, então, que a cada ciclo de funcionamento da lavadora ela gastará 0,47 kW para cada hora em que estiver funcionando.

Esse cálculo é importante, pois o valor pago na conta de energia elétrica é calculado sobre o gasto de energia de todos os equipamentos elétricos e eletrônicos.

Observe que, em todos os exemplos apresentados, foi necessário operar diferentes grandezas com a finalidade de obter informações que não teríamos utilizando somente uma grandeza.

PENSE E  
RESPONDA

Faça uma pesquisa em sua região e verifique qual é a tarifa de energia que é cobrada, assim você poderá verificar o custo e, com isso, criar hábitos para economizar energia, não somente para ter maior controle dos gastos desnecessários, mas também para contribuir para a sustentabilidade do meio ambiente.

*Ver as Orientações para o professor.*



PROCEL: Programa Nacional de Conservação de Energia Elétrica. **Procel Info**, 2006. Disponível em: <http://www.procelinfo.com.br/main.asp?TeamID={921E566A-536B-4582-AEAF-7D6CD1DF1AFD}>. Acesso em: 26 ago. 2020.

Encontre nesse *link* mais informações sobre o Programa Nacional de Conservação de Energia Elétrica, coordenado pelo Ministério de Minas e Energia.

# Medidas muito grandes e medidas muito pequenas

Uma vez estabelecido um Sistema Internacional de Unidades, teoricamente, bastaria começar a fazer as medições das grandezas com essas unidades de medida escolhidas. No entanto, surge uma nova questão: algumas medidas são muito grandes, ou muito pequenas, para usarmos as unidades de medida estabelecidas.

Para tentar solucionar esse problema, duas possibilidades foram adotadas inicialmente. Vamos vê-las agora.

## Notação científica

Quando temos números muito grandes ou muito pequenos, podemos escrevê-los em notação científica, simplificando a escrita e as operações, uma vez que é possível se utilizar das propriedades das potências. Essa notação é muito utilizada pelos cientistas.

Para escrever um número em notação científica, um dos fatores é um número maior do que ou igual a 1 e menor do que 10 e o outro fator é uma potência de 10.

Por exemplo:

a)  $0,000009 = 9,0 \cdot 10^{-6}$

b)  $20\,000\,000 = 2,0 \cdot 10^7$

c) A distância entre o planeta Terra e o Sol é de 149 600 000 km, em notação científica, temos  $1,496 \cdot 10^8$  km.



NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK.COM

■ Representação do Sistema Solar (imagem sem escala; cores-fantasia).

d) O comprimento de certa bactéria é 0,000012 m, em notação científica, temos:  $1,2 \cdot 10^{-5}$  m.

■ Representação de bactérias (ilustração em 3D; colorido artificialmente).

KATERYNA KON/SHUTTERSTOCK.COM

# Múltiplos e submúltiplos das unidades de medida

Apesar de ser uma solução que serve para todos os cálculos, o uso das notações científicas não é algo muito prático no cotidiano. Imagine como seria se em uma placa na estrada, em vez de 60 km, aparecesse que uma cidade está distante  $6 \cdot 10^4$  m.

Mas o que significa essa letra **k** na frente do símbolo de metro?

Essa letra é o prefixo **quilo**, que substitui o  $10^3$ , ou seja, em vez de escrever  $60 \cdot 10^3$  m, escreve-se 60 km, o que representa a mesma distância.

Diversos prefixos foram adotados no SI; eles indicam múltiplos e submúltiplos das unidades de medida. Dessa forma, números muito grandes, ou muito pequenos, podem ser escritos sem a necessidade de se usar notação científica, facilitando o dia a dia. Todas as unidades do SI aceitam todos os prefixos existentes.

Um ponto de atenção fica para a unidade de medida da grandeza massa. A unidade de medida de massa que recebe os prefixos é o grama, apesar de não ser a unidade do SI. Isso porque o quilograma (a unidade de medida que faz parte do SI) já vem com o prefixo quilo. Isso se deu por questões históricas, que remontam à época da Revolução Francesa (século XVIII).

Veja, a seguir, os principais prefixos utilizados e seu fator de multiplicação.

Nome	Fator	Símbolo
tera	$10^{12}$	T
giga	$10^9$	G
mega	$10^6$	M
quilo	$10^3$	k
centi	$10^{-2}$	c
mili	$10^{-3}$	m
micro	$10^{-6}$	$\mu$
nano	$10^{-9}$	n

Mas não é só no cotidiano das pessoas que se usam esses prefixos, em pesquisas e indústrias envolvendo nanotecnologia, microprocessadores, biologia e medicina eles são muito utilizados. Por exemplo:

**Micrômetro** ( $\mu\text{m}$ ): um micrômetro corresponde a 0,000001 m, ou  $1,0 \cdot 10^{-6}$  m.

**Nanômetro** (nm): um nanômetro corresponde a 0,000000001 m, ou  $1,0 \cdot 10^{-9}$  m.

Agora veja que, apesar da possibilidade de se utilizar a notação científica e os prefixos para escrever números muito grandes, ou muito pequenos, em alguns casos, faz-se necessário e mais eficiente a criação de novas unidades de medida.

É o caso das unidades de medida astronômicas, que estudaremos a seguir.

## Unidades de medida astronômicas

O metro é uma unidade de medida muito conveniente no nosso dia a dia, por exemplo, na medição da distância entre lugares, comprimento de objetos, entre outras situações. Mas você já pensou em como seria sua aplicação em outros casos, como a distância entre planetas? Por exemplo, a distância entre a Terra e o Sol é de aproximadamente 150 bilhões de metros, ou  $1,5 \cdot 10^{11}$  m.

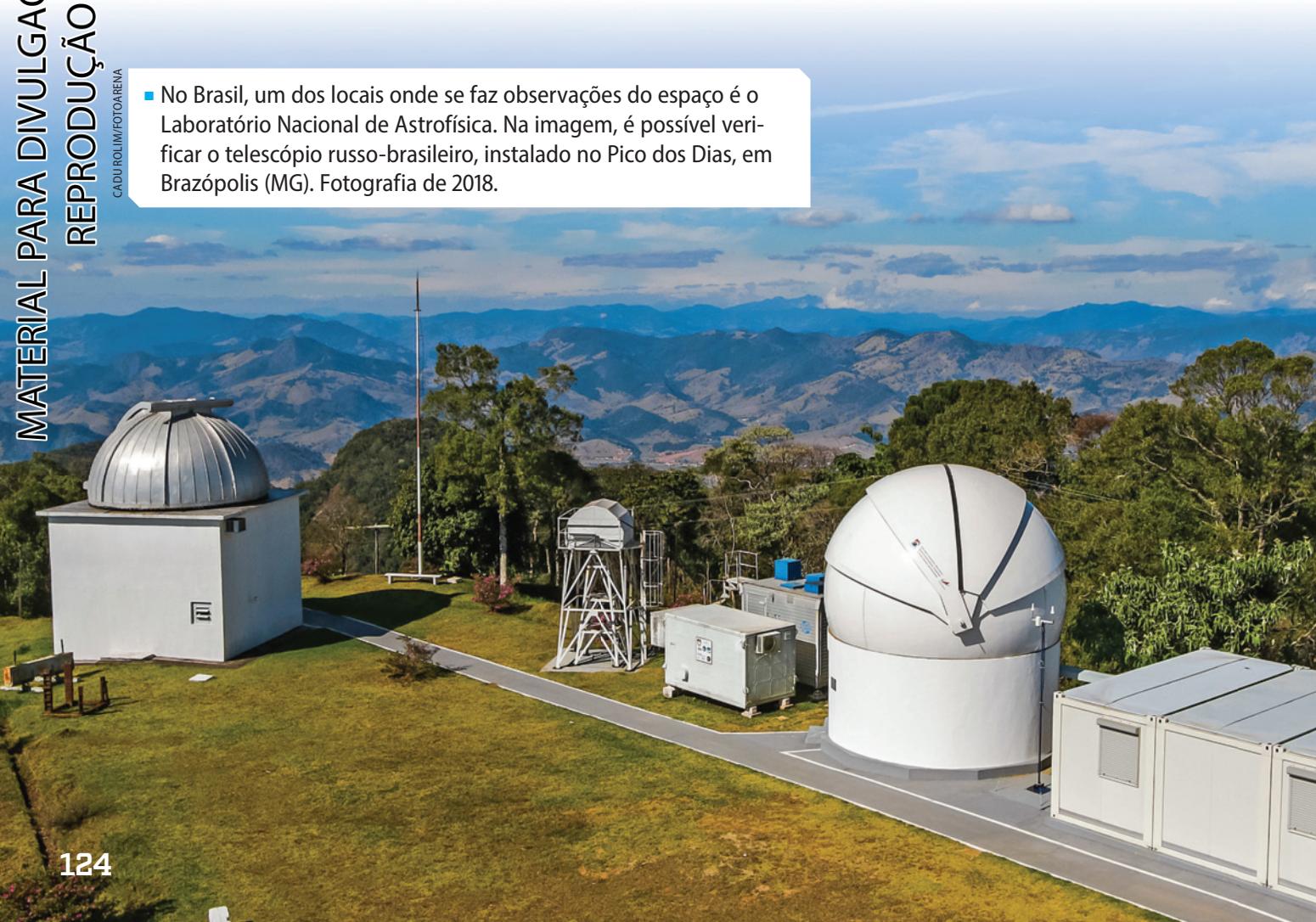
Como na Astronomia as distâncias utilizadas e calculadas são sempre muito grandes, faz-se mais prático trabalhar com grandezas específicas para a área. Vamos ver algumas delas:

**Ano-luz:** um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz no vácuo ao longo de um ano. Equivale a aproximadamente 9 460 000 000 000 000 m.

**Unidade Astronômica (UA):** uma UA corresponde à distância média entre a Terra e o Sol. Equivale a 149 597 870 700 m. A UA é muito utilizada para medir distâncias em nosso Sistema Solar.

**Parsec (PC):** 1 PC corresponde a 206 265 UA. É uma medida muito grande, utilizada para medir distâncias entre estrelas.

- No Brasil, um dos locais onde se faz observações do espaço é o Laboratório Nacional de Astrofísica. Na imagem, é possível verificar o telescópio russo-brasileiro, instalado no Pico dos Dias, em Brazópolis (MG). Fotografia de 2018.



# Unidades de transferência e de armazenamento de dados

Como vimos anteriormente, a criação de novas unidades de medida é uma realidade. Com o decorrer do tempo surgem inovações tecnológicas e, com isso, surgem novas necessidades. Dessa maneira, as unidades de medida estão em constante ampliação e aperfeiçoamento para que nós possamos mensurar o mundo à nossa volta. E é nesse cenário de mudanças que surge uma nova necessidade: mensurar o mundo digital.

O uso de computadores, *smartphones* e *tablets* é cada dia mais constante na vida das pessoas. Com esses dispositivos é possível fazer e compartilhar arquivos, fotos, vídeos, áudios, jogar com pessoas, fazer compras, trabalhar, enfim, uma infinidade de coisas.

Todas essas atividades exigem o envio e o recebimento de dados digitais, mas quantos dados são enviados? Ou ainda, quantos dados são recebidos? Um arquivo digital não pode ser mensurado com nenhuma das unidades de medida que eram até então conhecidas, de tal forma que foram criadas duas unidades de medida: o *bit* e o *byte*.

## Entendendo o *bit* e o *byte*

O *bit* (que tem como símbolo seu próprio nome) e o *byte* (B) são unidades de medida de **capacidade de armazenamento de dados**.

Um *bit* pode valer 0 ou 1 e, apesar de ser considerado a menor unidade de armazenamento de uma informação digital, um *bit* não pode ser processado sozinho por um dispositivo (computador, *smartphone*, ou similar). Para ser processado, é necessário um agrupamento de, no mínimo, 8 *bits*. Esses 8 *bits* formam 1 *byte*.

Como o *byte* é a informação que pode efetivamente ser processada por um equipamento, ele é considerado a menor unidade de medida de informação. De tal forma que, quando abrimos as propriedades de um arquivo, temos seu tamanho medido em *bytes*.

## Os múltiplos do *bit* e do *byte*

Da mesma forma que outras unidades do SI, o *bit* e o *byte* aceitam os prefixos para múltiplos (pelo conceito de *bit* e *byte* não existem submúltiplos deles). Nós estamos muito acostumados a ouvir sobre esses múltiplos e, talvez, até a utilizá-los. Veja, a seguir, os principais:

Nome (símbolo)	Equivalência
<i>kilobyte</i> (kB)	1024 <i>bytes</i>
<i>megabyte</i> (MB)	1024 <i>kilobytes</i>
<i>gigabyte</i> (GB)	1024 <i>megabytes</i>
<i>terabyte</i> (TB)	1024 <i>gigabytes</i>

Observe que, nesse caso, apesar de os prefixos serem os mesmos, eles não são exatamente iguais às outras unidades de medida do SI. Observe:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$$

$$1 \text{ kB} = 1024 \text{ B}$$

Essa diferença se dá pela natureza do *bit* e do *byte*, construídos em um sistema binário (base 2), enquanto as outras unidades de medida estão construídas em um sistema decimal (base 10). Veja:

$2^0 = 0$	$2^4 = 16$	$2^8 = 256$
$2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	

Observe que não existe um número natural  $x$ , tal que  $2^x = 1000$ , de tal forma que o número mais próximo é 1024.

## Taxa de transferência

Outra grandeza que foi criada para atender aos tempos atuais é a **taxa de transferência**. Ela indica quantos *bits* por segundo são transferidos e tem como unidade de medida o bps (*bit* por segundo).

De forma semelhante, a taxa de transferência também aceita os prefixos de múltiplos. Os dois múltiplos mais conhecidos são o kbps (*quilobit* por segundo) e o Mbps (*megabit* por segundo).

E é aqui que se dá uma grande confusão. Veja o exemplo a seguir:

Determinada empresa oferece um plano de internet banda larga prometendo uma velocidade de conexão para *download* de 35 Mbps, a famosa **velocidade de download**.



Normalmente, as pessoas entendem que o *download* de um arquivo de 35 MB levará 1 segundo para ser concluído, no entanto, a taxa de transferência lida com *bits*, enquanto o tamanho do arquivo lida com *bytes*.

Sabendo que 1 *byte* é igual a 8 *bits*, o tempo de *download* será, na realidade, 8 vezes maior, ou seja, no nosso exemplo, 8 segundos.

### SAIBA QUE...

Internet banda larga é aquela cuja velocidade de conexão é superior a 128 kbps.

### PENSE E RESPONDA

Observe que, na peça publicitária, são colocados 35 mega, mas, como vimos, mega é somente um prefixo e não uma unidade de medida. Faça uma pesquisa de propagandas de internet. Todas elas possuem uma apresentação visual semelhante? Se sim, por quê?

[Ver as Orientações para o professor.](#)

# Utilizando as unidades de medida

Como vimos até aqui, existem muitas unidades de medida, algumas são utilizadas em diversos países (como as unidades do SI), outras são utilizadas em alguns poucos países (como o Sistema Imperial) e outras são utilizadas em situações específicas, como as medidas agrárias.

Para aplicarmos as unidades de medida são necessárias duas coisas: entender o contexto e trabalhar sempre na unidade de medida escolhida.

Por exemplo, as áreas das propriedades rurais, em geral, não são dadas em metro quadrado, mas em hectare (ha) ou alqueires. Sendo assim, nesse contexto, o ideal é utilizar uma dessas unidades de medida e fazer a conversão de todas as medidas para essa unidade de medida. Para isso, temos:

- 1 hectare equivale a 10 000 m<sup>2</sup>;
- 1 alqueire paulista equivale a 24 200 m<sup>2</sup>;
- 1 alqueire mineiro equivale a 48 400 m<sup>2</sup>;
- 1 alqueire do Norte equivale a 27 225 m<sup>2</sup>.

Além disso, conhecer as unidades de medida pode contribuir para você fazer escolhas. Veja as especificações técnicas de uma determinada marca de geladeira:

Especificações técnicas – Geladeira	
Tensão de alimentação	127 V ou 220 V
Consumo de energia em kWh	39,9 kWh/mês
Dimensões externas L × A × P (mm)	695 × 1854 × 758
Dimensões internas L × A × P (mm)	455 × 1054 × 558
Dimensões da embalagem L × A × P (mm)	737 × 1914 × 799
Peso aproximado (sem embalagem)	76 kg

Fonte: Dados fictícios.

MAGDALENA CVETKOVIC/SHUTTERSTOCK.COM; EDITORIA DE ARTE

## PENSE E RESPONDA

Nas dimensões do produto, foi utilizada a unidade de medida milímetro. Você considera que essa foi a melhor escolha do fabricante? Justifique.

[Ver as Orientações para o professor.](#)

Com essas especificações, é possível saber se a geladeira consome muita energia elétrica, se ela caberá no espaço disponível, se, no caso de prédios, ela caberá no elevador e se ele suportará o peso dela, entre outras informações.

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 1.** Um piloto completou um percurso em 1h30 com uma velocidade constante de 200 km/h. Qual foi a distância percorrida, em quilômetro, nesse percurso?

### Resolução

Primeiro precisamos converter o tempo para hora. 1h30 é o mesmo que 1,5 h.

No enunciado, é dito que a velocidade foi constante, logo, ela é igual à velocidade média. Assim, podemos escrever:

$$200 \text{ km/h} = \frac{d \text{ km}}{1,5 \text{ h}} \Rightarrow d = 300 \text{ km}$$

Logo, o piloto percorreu 300 km.

- 2.** A vazão de uma torneira é a razão entre o volume de água que sai da torneira, em litro, pelo tempo que a torneira fica aberta, em minuto.

Um tanque é abastecido por três torneiras diferentes com vazões de 15 litros por minuto, 18 litros por minuto e 20 litros por minuto. Para enchê-lo, é necessário deixar as três torneiras ligadas durante 30 minutos e, então, fechar a primeira torneira. Após 10 minutos, fechar a segunda torneira e, após 5 minutos, fechar a terceira torneira. Qual é a capacidade desse tanque?

### Resolução

A capacidade do tanque será igual ao volume despejado pelas três torneiras. De modo que basta calcular esses volumes e somá-los.

Pelo enunciado, temos:

$$\text{vazão} = \frac{\text{volume}}{\text{tempo}} \Rightarrow \text{volume} = \text{vazão} \cdot \text{tempo}$$

Torneira 1: volume =  $15 \cdot 30 = 450$  litros

Torneira 2: volume =  $18 \cdot 40 = 720$  litros

Torneira 3: volume =  $20 \cdot 45 = 900$  litros

Volume total:  $450 + 720 + 900 = 2070$  litros

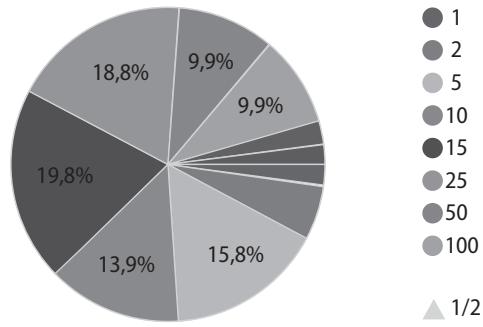
Logo, o volume do tanque é de 2070 litros.

- 3.** Leia o trecho extraído de um artigo científico sobre uma pesquisa de satisfação com os serviços de internet em que foram entrevistadas 101 pessoas. Em:

[...]

No Gráfico 2 podemos observar que os provedores brasileiros atendem uma gama diversificada de velocidade. A maior porcentagem dos usuários declarou possuir 15 Mb, uma velocidade modesta geralmente fornecida em cidades de médio e grande porte para usuários comuns e pequenas empresas. Podemos observar também, que existem raros casos de usuários de internet abaixo dos 5 Mb e acima dos 100 Mb.

> Gráfico 2 – Qual a velocidade do serviço contratado (Mbps)?



Podemos atribuir velocidades acima de 100 Mbps a usuários domésticos avançados e a empresas de médio e grande porte.

É fácil deduzir que velocidades abaixo de 5 Mb são de usuários onde um serviço de qualidade ainda não existe no logradouro ou na cidade onde residem. Geralmente os fornecedores dessa modalidade de serviço possuem uma infraestrutura pobre.

[...]

CRUZ, G. N. A. Internet: uma breve análise do mercado e da satisfação dos clientes.

Cadernos de Graduação: ciências exatas e tecnológicas, Aracaju, v. 5, n. 2, p. 56, mar. 2019.

Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernoexatas/article/view/6682/3240>.

Acesso em: 18 jul. 2020.

Com base nessas informações, responda às questões a seguir.

- Quais podem ser as dificuldades encontradas por alguém que lê o texto e o gráfico e tenta compreendê-los?
- De acordo com o gráfico e com base no texto, qual é a porcentagem dos usuários que declaram possuir 15 Mbps de internet?
- Se um usuário com a internet de 15 Mbps precisar fazer o *download* de um arquivo de 1,5 GB, quanto tempo levará para que o arquivo seja baixado completamente caso a velocidade da internet se mantenha constante? Dados: 1 GB = 1024 MB.

### Resolução

- O texto apresenta alguns equívocos, como se referir à velocidade da internet apenas pela unidade **Mb**, que, na verdade, indica quantidade de dados e não quantidade de dados transferidos em determinado tempo, como é colocado no texto.

As cores em tons de cinza utilizadas podem dificultar a compreensão do gráfico, uma vez que são muito parecidas. Outro dificultador é que há oito bolinhas com as velocidades variando entre 1 e 100 Mbps, mas no gráfico há dez setores, ou seja, dois setores estão associados às informações representadas pelos triângulos posicionados abaixo da bolinha referente a 100 Mbps.

- Na pesquisa realizada, a maior porcentagem foi associada aos usuários com internet de 15 Mbps de velocidade, ou seja, 19,8% dos usuários entrevistados.
- Sabemos que 1 GB = 1024 MB. Nesse caso, temos:

GB	MB
1	1024
1,5	x

$$\text{Logo, } x = 1,5 \cdot 1024 \Rightarrow x = 1536 \text{ MB}$$

$$\text{Como } 1 \text{ byte} = 8 \text{ bits, temos } x = 1536 \cdot 8 \Rightarrow x = 12288 \text{ Mbits.}$$

A velocidade da internet é de 15 Mbps (15 megabits por segundo), logo:

$$12288 \text{ Mbits : } 15 \text{ Mbps} = 819,2 \text{ segundos}$$

Logo, o *download* levará 819,2 segundos ou aproximadamente 13 minutos e 39 segundos.

## &gt; ATIVIDADES



1. A velocidade da luz é de aproximadamente 300 000 km/s, enquanto 1 parsec é uma unidade de distância de  $3,084 \cdot 10^{13}$  km. Calcule o tempo necessário, em segundo, para a luz percorrer no vácuo a distância equivalente a 1 parsec. **aproximadamente  $1,028 \cdot 10^8$  s**

2. Veja o título da notícia a seguir:

### Mundo chega a 7 bilhões de pessoas; confira curiosidades e números

MUNDO chega a 7 bilhões de pessoas; confira curiosidades e números. **G1**, São Paulo, 1º nov. 2011. Disponível em: <http://g1.globo.com/mundo/noticia/2011/10/mundo-chega-7-bilhoes-de-pessoas-confira-curiosidades-e-numeros.html>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Escreva o número que aparece no título da notícia com todos os dígitos e em notação científica.  **$7\,000\,000\,000 = 7,0 \cdot 10^9$**

3. Rosa percebeu que sua conta de energia teve um aumento. Observou as taxas que não se alteraram, mas verificou que o consumo de energia aumentou. No último mês, ela comprou um equipamento de 150 W. Esse equipamento ficou ligado 5 horas por dia durante os 30 dias. Sabendo que a tarifa de energia na região de Rosa é de R\$ 0,56 por kWh, qual foi o valor gasto por Rosa para manter esse aparelho ligado nesse período? **R\$ 12,60**

4. Ana queria comprar um micro-ondas para que os funcionários da sua loja pudessem usar. Estimou que esse aparelho iria ser utilizado 3 horas por dia, durante 22 dias no mês. Ela verificou as informações sobre o consumo de energia do aparelho. Sua conta de energia mensal é de R\$ 234,50, aproximadamente. Porém Ana está indecisa, pois não quer ultrapassar o valor de R\$ 275,00 na conta de energia. Sabendo que na região onde Ana tem a loja o preço do quilowatt-hora é R\$ 0,86 e que a potência do micro-ondas é 250 W, você a aconselharia a efetuar a compra?

**Resposta possível:** Sim, pois, nessas condições, a conta de energia elétrica ficaria em R\$ 248,69.

5. O percurso entre as cidades **A** e **B**, em geral, é percorrido em 8 horas e 30 minutos. Sabendo que a distância entre elas é de 500 km, determine a velocidade média (em km/h) de um automóvel que faça a viagem nesse tempo. **aproximadamente 58,8 km/h**

6. (Enem/MEC) Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km<sup>2</sup> de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: <http://www.wwf.org.br>. Acesso em: 23 abr. 2010. Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km<sup>2</sup>, é de: **alternativa b**

- a)** 250
- b)** 25
- c)** 2,5
- d)** 0,25
- e)** 0,025

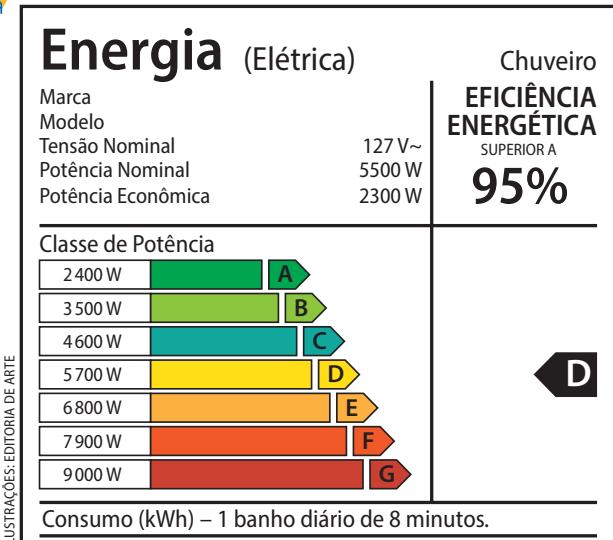
7. Pesquise a população de duas regiões: onde você mora e uma região vizinha, anotando todas as informações, como área e número de habitantes. Com esses dados, elabore um problema que envolva pelo menos duas regiões, tratando dos impactos da densidade demográfica nelas. Não se esqueça de anotar os dados e, se for o caso, calcular o número de habitantes por região para então iniciar a elaboração de um problema. **Resposta pessoal.**

8. Em um disco rígido de 1 GB é possível armazenar 8,6 bilhões de bits, ou seja, 8,6 bilhões de sinais.

Com base nessa informação, calcule a quantidade de bits que um computador consegue armazenar se o disco rígido tiver:

- a)** 4,3 GB **36,98 bilhões de bits**
- b)** 2,0 GB **17,2 bilhões de bits**
- c)** 3,2 GB **27,52 bilhões de bits**

9. Observe a etiqueta a seguir sobre o consumo de energia de determinado equipamento.

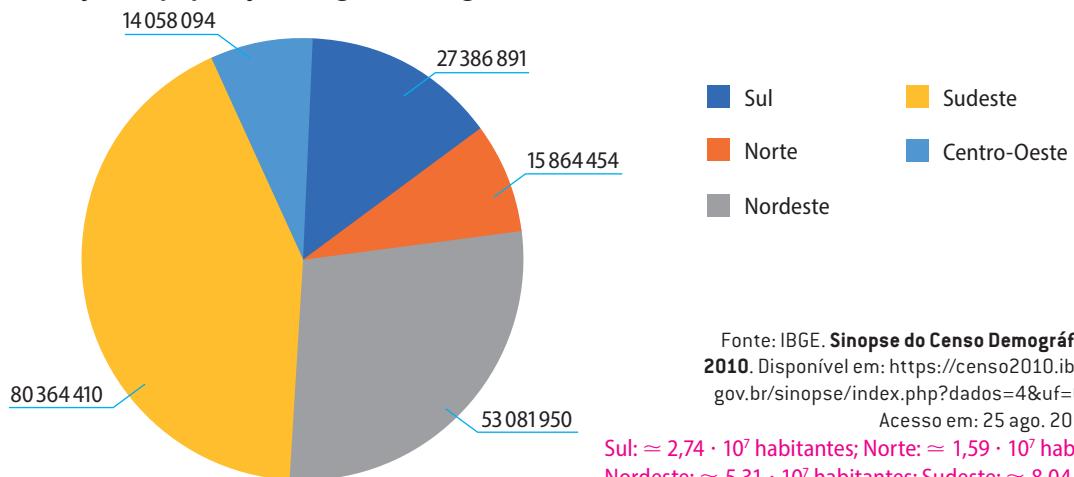


Pesquise o significado de **potência nominal**, **potência econômica** e **eficiência energética** para poder utilizar corretamente as informações da etiqueta e, a partir disso, elabore um problema. Troque com seu colega e resolvam os problemas. Depois de finalizados, discutam como foi o processo de resolução.

Resposta pessoal.

10. Observe o gráfico de setores a seguir sobre a distribuição da população nas grandes regiões, em 2010.

> Distribuição da população nas grandes regiões em 2010



Fonte: IBGE. *Sinopse do Censo Demográfico 2010*. Disponível em: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=4&uf=00>.

Acesso em: 25 ago. 2020.

**Sul:**  $\approx 2,74 \cdot 10^7$  habitantes; **Norte:**  $\approx 1,59 \cdot 10^7$  habitantes;  
**Nordeste:**  $\approx 5,31 \cdot 10^7$  habitantes; **Sudeste:**  $\approx 8,04 \cdot 10^7$  habitantes;  
**Centro-Oeste:**  $\approx 1,41 \cdot 10^7$  habitantes

a) Represente, em notação científica com duas casas decimais, a população estimada de cada região.

b) Com base nas estimativas do item a, calcule qual é o percentual da população brasileira que a população de cada região representa. **Sul:**  $\approx 14,36\%$ ; **Norte:**  $\approx 8,33\%$ ; **Nordeste:**  $\approx 27,83\%$ ;  
**Sudeste:**  $\approx 42,14\%$ ; **Centro-Oeste:**  $\approx 7,34\%$

11. Ao ler o anúncio a seguir, em um jornal sobre a venda de um terreno, Carlos se interessou:

<b>VENDO TERRENO</b>
Plano, 60 ha, boa localização. R\$ 110.000,00.

No entanto, antes de comprar, Carlos queria calcular o valor do metro quadrado para comparar o preço com outros anúncios. Quantos metros quadrados tem o terreno do anúncio? **60000 m<sup>2</sup>**

# Precisão e instrumentos de medida

Você sabia que o tiro com arco é uma das atividades humanas mais antigas que existe? Há registros históricos do uso do arco e flecha em pinturas rupestres que datam da Pré-História. Naquela época, essa ferramenta era utilizada para caça, mas, pelo seu potencial, também foi adaptada para a guerra.



ORONZOZ/ALBUM/FOTOARENA

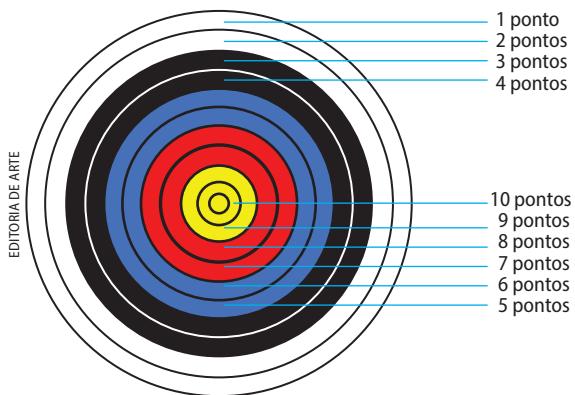
■ Pintura rupestre localizada em Barranco de la Valltorta, Espanha. Pintura datada de 3500 a 2000 a.C.

No ano 1900, o tiro com arco foi reconhecido como esporte olímpico, permanecendo até 1920. Reapareceu em torneios na Inglaterra e, em 1972, foi reintroduzido nos esportes olímpicos, permanecendo até os dias atuais.

Esse esporte exige, além de preparo físico, habilidades de precisão e exatidão para cumprir a meta da modalidade, que tem como objetivo fazer a maior pontuação possível.

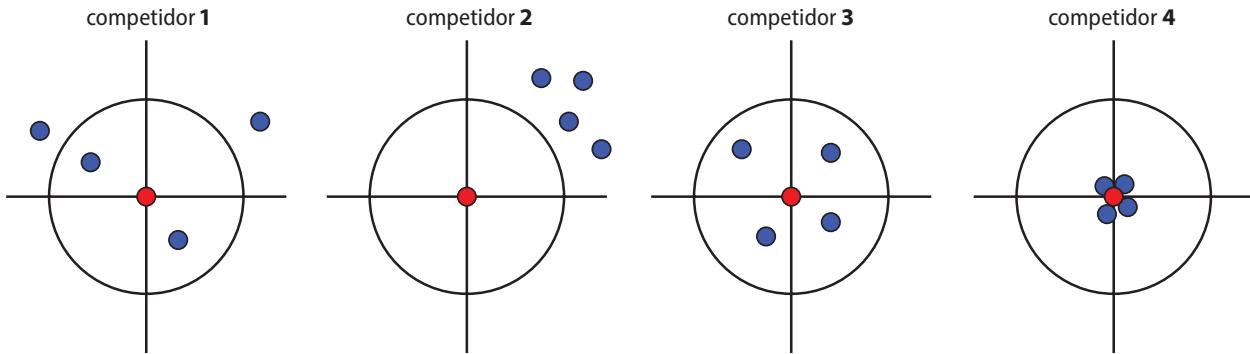
O alvo é composto de dez círculos concêntricos, e o arqueiro precisa acertar o alvo, numa rodada de seis disparos, marcando a pontuação de acordo com o local que a flecha se fixar no alvo. Quanto mais distante do centro, menor será a pontuação.

Observe como é esse alvo e sua pontuação.



Mas o que significa exatidão e precisão?

Observe a seguinte situação: quatro competidores estavam jogando dardos e cada um tinha quatro tentativas para acertar o alvo.



EDITORIA DE ARTE

Como podemos analisar a exatidão e a precisão de cada um dos competidores?

De acordo com o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro), **exatidão** é um conceito qualitativo e não há um valor numérico para ela. O conceito de exatidão está relacionado à maior ou menor aproximação entre o valor verdadeiro e o valor real.

Fonte dos dados: JCGM. **Avaliação de dados de medição**: guia para a expressão de incerteza de medição. 2008.  
Disponível em: [http://www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/iso\\_gum\\_versao\\_site.pdf](http://www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/iso_gum_versao_site.pdf). Acesso em: 11 jun. 2020.

No caso dos competidores, consideraremos que exatidão está em acertar os dardos dentro do alvo (valor verdadeiro).

Já a **precisão** está associada à dispersão dos valores da repetição das medidas. No caso dos competidores, observe o competidor **2**, os dardos estão muito próximos, então ele foi preciso; já os dardos do competidor **3** estão mais dispersos, ou seja, ele foi menos preciso.

Com isso, podemos analisar cada competidor de acordo com os critérios que estabelecemos para a competição:

**Competidor 1** – Não exato, porque alguns dardos ficaram totalmente fora do alvo; impreciso, porque os dardos ficaram dispersos.

**Competidor 2** – Não exato, porque todos os dardos ficaram totalmente fora do alvo; preciso, porque os dardos ficaram muito próximos uns dos outros.

**Competidor 3** – Exato, porque todos os dardos ficaram dentro do alvo; impreciso, porque os dardos ficaram longe uns dos outros.

**Competidor 4** – Exato, porque todos os dardos ficaram dentro do alvo; preciso, porque todos os dardos estão bem próximos uns dos outros.

#### PENSE E RESPONDA

De que forma seria possível classificar como "Não exato" todos os competidores?

*Ver as Orientações para o professor.*

Então, após essa análise, é possível observar as habilidades de cada competidor, além de analisar em qual aspecto cada um precisa melhorar sua *performance*.

## Média e desvio padrão

A exatidão e a precisão não são assuntos somente do esporte. Em outras áreas esses aspectos são importantes para experimentos e produções que envolvem medidas.

Como vimos, a exatidão é um atributo qualitativo, já a precisão é um atributo quantitativo, ou seja, há um valor numérico associado à precisão. Um desses valores é o desvio padrão.

Veja que, no desenvolvimento de substâncias químicas ou no controle de qualidade em uma linha de produção, por exemplo, a análise de uma única amostra não é suficiente para fornecer informações sobre as variações dos resultados; por esse motivo, são analisadas diversas amostras. A precisão das medidas é obtida pela repetição do procedimento nas mesmas condições.

ALEXANDRINAZ/SHUTTERSTOCK.COM



Veja os exemplos a seguir:

- I. De um lote contendo 30 peças iguais, três delas foram escolhidas para verificação da medida de seus comprimentos para o controle de qualidade. Foram obtidos os seguintes resultados: 31,0 cm; 30,4 cm; 31,8 cm. Calcule o desvio padrão para essas amostras.

Para resolver esse problema, primeiro calculamos a média das medidas:

$$\bar{x} = \frac{31,0 + 30,4 + 31,8}{3} = \frac{93,2}{3} \approx 31,07$$

Logo, a média é igual a 31,06 cm.

- No dia a dia, por ser inviável testar toda a produção, muitas indústrias fazem testes por amostragem.

Esse caso trata da análise de uma amostra (pois não foram medidas todas as peças), assim utilizamos o **desvio padrão amostral** dado por:

$$dp = +\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Nesse caso, temos:

$$dp = +\sqrt{\frac{(31,0 - 31,07)^2 + (30,4 - 31,07)^2 + (31,8 - 31,07)^2}{3-1}} = +\sqrt{\frac{0,9867}{2}} \approx 0,7024$$

Logo, o desvio padrão é 0,7024 cm.

Observe que  $x_i - \bar{x}$  representa um "erro", relacionado a quanto o valor  $x_i$  desvia do valor médio. Como este pode ser um valor negativo, um modo de contornar isso é elevar esses erros ao quadrado antes de adicioná-los. Depois de dividir por  $n - 1$ , é extraída a raiz quadrada do resultado, como forma de compensar o fato de ter elevado ao quadrado. Pode-se mostrar, em Matemática, que essa é uma forma de obter um desvio que otimiza o erro cometido nas medições.

- II.** Um farmacêutico produz um determinado medicamento que será vendido em cápsulas de 200 mg. Após a produção, as cápsulas passam pelo controle de qualidade para verificar se todas estão com a mesma massa. Para isso, com uma balança de precisão (instrumento utilizado para medidas precisas), o farmacêutico anotou o resultado de cada pesagem de cinco comprimidos que ele produziu: 198 mg, 205 mg, 204 mg, 199 mg, 202 mg. Calcule o desvio padrão para essas cápsulas.

Para resolver esse problema, primeiro calculamos a média das medidas:

$$\bar{x} = \frac{198 + 205 + 204 + 199 + 202}{5} = \frac{1008}{5} = 201,6$$

Logo, a média é igual a 201,6 mg.

Esse caso trata de uma análise de toda a população (pois foram medidas todas as cápsulas produzidas, não só uma amostra), assim utilizamos o **desvio padrão populacional** dado por:

$$dp = +\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Nesse caso, temos:

$$dp = +\sqrt{\frac{(198 - 201,6)^2 + (205 - 201,6)^2 + (204 - 201,6)^2 + (199 - 201,6)^2 + (202 - 201,6)^2}{5}}$$

$$\text{Logo, } dp = \sqrt{\frac{37,2}{5}} \approx 2,728$$

Portanto, o desvio padrão é aproximadamente 2,728 mg.

Observando as fórmulas de desvio padrão, percebemos que, no caso ideal de todas as medidas serem iguais à média, o desvio padrão será igual a zero. Ou seja, quanto mais próximo de zero, menos dispersos estão os valores em relação à média.

Repare que, nos dois exemplos, nós calculamos média e desvio padrão, mas não fizemos uma análise se esses valores são bons, ruins, satisfatórios ou qualquer outra análise qualitativa. O motivo é que esse tipo de análise dependerá das exigências da produção. Pode ser que, para uma determinada produção, 0,7024 cm seja um desvio padrão muito grande, enquanto para outra seja um desvio padrão satisfatório.



TRMK/SHUTTERSTOCK.COM

■ Na indústria farmacêutica o controle de qualidade dos medicamentos é de fundamental importância e possibilita acompanhar e regular a calibragem das máquinas.

#### PENSE E RESPONDA

No caso das cápsulas, você considera que um desvio padrão de 2,728 mg é satisfatório? Justifique.

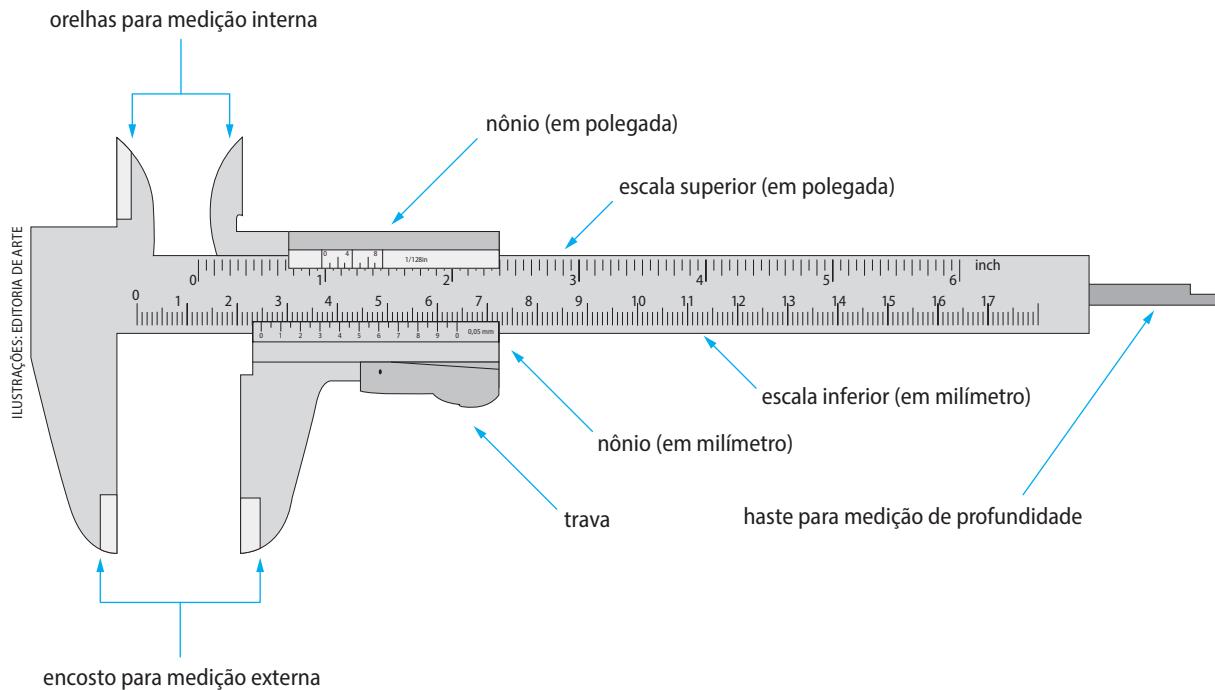
Ver as Orientações para o professor.

## Instrumentos de medida de precisão

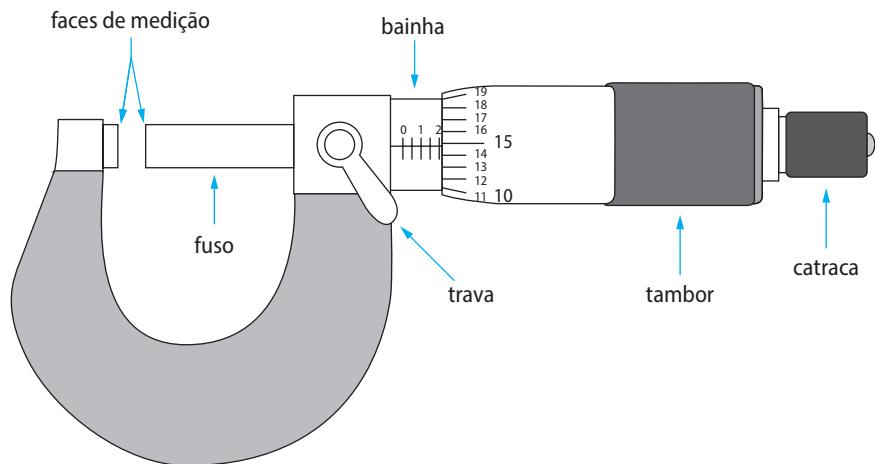
Em muitas áreas da indústria e da pesquisa, as medidas devem ser precisas, pois podem afetar diretamente a eficácia de um produto.

Alguns dos instrumentos de medida de precisão mais utilizados na indústria e na pesquisa são:

- **paquímetro** – um dos instrumentos de medida de precisão de comprimento mais utilizados em laboratórios e indústrias. Os modelos mais comuns são capazes de fazer medidas com precisão de 0,1 mm, 0,05 mm e 0,02 mm.



- **micrômetro** – instrumento com precisão maior do que o paquímetro (entre 0,01 mm e 0,001 mm). Em geral, é utilizado quando a medida obtida pelo paquímetro não é suficiente.



- **balança de precisão analítica** – tem elevada sensibilidade (0,1 mg). É utilizada para medir a massa de sólidos ou líquidos. Os laboratórios e as indústrias químicas e farmacêuticas a utilizam para obter medidas de massa com maior precisão.



■ Balança analítica utilizada em laboratórios e indústrias químicas e farmacêuticas.

## Algarismos significativos e duvidosos

Veja a situação a seguir:

Para realizar um experimento, Carlos e João mediram o comprimento de um mesmo objeto. O instrumento que tinham à disposição no momento era uma régua comum, graduada em milímetro. Carlos encontrou um valor um pouco maior do que 25,1 cm e estimou que fosse 25,13 cm. João também encontrou um valor um pouco maior do que 25,1 cm, mas estimou que seria 25,17 cm.

### PENSE E RESPONDA

Observe que a régua utilizada era graduada em milímetro. Em sua opinião, como isso justifica os algarismos 3 e 7 nas estimativas feitas?

Ver as Orientações para o professor.

■ Devemos ficar atentos aos erros envolvidos no processo de medição.

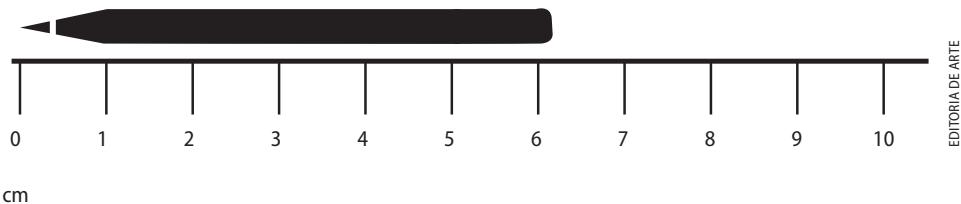


Comparando as duas medições, temos três algarismos corretos: 2, 5 e 1, pois todos concordam que o objeto possui pouco mais de 25,1 cm de comprimento. Porém, temos uma divergência no último algarismo: 3 ou 7, pois João estimou que o comprimento do objeto era de 25,1 cm e mais um pouco, e desse pouco ele fez uma estimativa. Carlos também fez uma estimativa registrando também esse pouco a mais. Então, podemos verificar que, quando as medições são realizadas por diferentes pessoas, o pouco a mais estimado pode ter variações.

Dessas medições, dizemos que os algarismos 2, 5, 1, 3 e 7 são **algarismos significativos** (a.s.), sendo que os algarismos 2, 5 e 1 são os **algarismos significativos exatos**, enquanto os algarismos 3 e 7 são os **algarismos significativos duvidosos** de Carlos e João, respectivamente.

Observe este outro exemplo:

Para medir o comprimento de um lápis, foi utilizada uma régua com escala em centímetro.



EDITORIA DE ARTE

Ao tomar essa medida, observamos que o lápis tem pouco mais de 6 cm, então podemos estimar que seu comprimento pode ser igual a 6,1 cm ou 6,2 cm. Assim, temos um algarismo correto, que é o 6, e um duvidoso ou incerto, que é o 1 ou o 2.

O 1 é duvidoso porque fizemos uma estimativa. Nesse caso, se outra pessoa realizasse a mesma medição, o algarismo que iria constar na medida seria o 6 (algarismo correto), mas, em relação à estimativa, essa pessoa poderia utilizar outro algarismo que não o 1. Da mesma forma ocorre com o 2.

Dessa maneira, podemos dizer que o algarismo duvidoso é aquele que não está visível na escala de medição do instrumento.

Assim, quando fazemos medições, as diferenças que existem nos resultados podem gerar os algarismos duvidosos, pois vai depender de quem está fazendo a medição e o valor aproximado que irá estimar.

Algarismos significativos indicam o número de algarismos de um valor, em geral, uma medida (ou uma avaliação numérica). Eles expressam o grau de precisão desse valor, ou seja, um número que devemos apresentar após realizar uma medição (ou uma avaliação numérica).



## Como reconhecer os algarismos significativos

Com base no valor de uma medição, chamamos de algarismos significativos aqueles contados da esquerda para a direita, a partir do primeiro algarismo diferente de zero, e indicamos quantos são.

35,6 cm → 3 algarismos significativos

0,6507 → 4 algarismos significativos

0,45670 → 5 algarismos significativos

Para identificar os algarismos significativos, podemos utilizar a notação científica. Observe, a seguir, como essa notação dá a noção de ordem de grandeza, além de evidenciar os algarismos significativos, servindo, inclusive, para fazer a comparação com outro que também esteja escrito em notação científica.

$135 = 1.35 \cdot 10^2$  → três algarismos significativos

$18,37 = 1,837 \cdot 10^4$  → quatro algarismos significativos

$$0,00260 = 2,60 \cdot 10^{-3} \rightarrow \text{três algarismos significativos}$$

Esse método é particularmente útil quando trabalhamos com números muito grandes ou muito pequenos. Observe os exemplos a seguir.

A massa da Terra é de 5 973 600 000 000 000 000 000 kg. Esse número pode ser reescrito, utilizando notação científica, como  $5,9736 \cdot 10^{24}$  kg.



PENSE E  
RESPONDA

Quantos são os algarismos significativos das duas medidas apresentadas (massa da Terra e massa do elétron)? **5:8**

- Representação do planeta Terra (imagem sem escala; cores-fantasia). O diâmetro da Terra é de cerca de 12 756 km.

A massa do elétron é de:

Em notação científica, esse número pode ser reescrito como  $9,1093822 \cdot 10^{-31}$  kg.

Assim, os algarismos significativos ficam evidentes.

## Adição e subtração considerando algarismos significativos

Ao realizar a adição ou a subtração envolvendo valores cuja parte decimal é não nula, o resultado deverá ser dado de acordo com a menor quantidade de algarismos significativos à direita encontrada entre as parcelas. Observe o exemplo:

$$\begin{array}{r} 128,46 \\ + 12,9 \\ \hline 141,36 \end{array}$$

5 a.s.      3 a.s.      5 a.s.

Observe que o resultado 141,36 possui 5 algarismos significativos e o último à direita é o da ordem dos centésimos, enquanto a parcela 12,9 tem 3 algarismos significativos, sendo o último à direita o da ordem dos décimos. Para a resposta final, devemos expressar o resultado até a ordem dos décimos, que corresponde à menor quantidade de algarismos significativos à direita. Para isso, é feito o arredondamento.

$$\begin{array}{r} 128,46 \\ + 12,9 \\ \hline 141,36 \end{array}$$

5 a.s.      3 a.s.      5 a.s.

arredondamento → 141,4

4 a.s.

Nesse caso, para que a resposta tenha algarismos significativos até a ordem dos décimos, realizamos o arredondamento. Como o último algarismo é 6, o arredondamento é feito para mais. O algarismo 4 na parte decimal é um algarismo significativo não exato, já que foi obtido por meio de um arredondamento.

## Multiplicação e divisão considerando algarismos significativos

Ao realizar multiplicação ou divisão envolvendo valores cuja parte decimal é não nula, o resultado só deve ter a mesma quantidade de algarismos significativos à direita do número com a menor quantidade de algarismos significativos à direita envolvidos nesse cálculo. Observe o exemplo:

$$\begin{array}{r} 2,21 \cdot 1,2 = 2,652 \\ \quad 3 \text{ a.s.} \quad 2 \text{ a.s.} \quad 4 \text{ a.s.} \end{array}$$

arredondamento → 2,6

2 a.s.

Veja que o resultado tem apenas uma casa decimal, que é a dos décimos. Isso acontece porque o número 2,21 tem algarismos significativos, à direita, até a ordem dos centésimos e o número 1,2, até a ordem dos décimos. Por essa razão, o produto é arredondado para ter até a ordem dos décimos, cujo algarismo (no caso, 6) é significativo não exato.

- A calculadora pode auxiliar a realizar cálculos com muitas casas decimais.



## ATIVIDADES RESOLVIDAS

- 4.** Três engenheiros obtiveram os seguintes dados ao realizar quatro medições da espessura de uma mesma peça, cujo padrão de medida é 0,25 mm.

Os resultados obtidos foram os seguintes:

engenheiro 1: 0,23 mm, 0,26 mm, 0,22 mm, 0,28 mm;

engenheiro 2: 0,31 mm, 0,24 mm, 0,25 mm, 0,30 mm;

engenheiro 3: 0,21 mm, 0,23 mm, 0,26 mm, 0,25 mm.

a) Calcule a média e o desvio padrão das medições de cada um dos engenheiros.

b) Qual dos engenheiros foi o menos preciso em suas medições?

c) Dê o exemplo de um cenário no qual os 3 engenheiros tenham sido exatos.

### Resolução

a) Engenheiro 1:

$$\bar{x} = \frac{0,23 + 0,26 + 0,22 + 0,28}{4} = \frac{0,99}{4} \approx 0,25 \text{ mm}$$

$$dp = \sqrt{\frac{(0,23 - 0,25)^2 + (0,26 - 0,25)^2 + (0,22 - 0,25)^2 + (0,28 - 0,25)^2}{4}}$$

$$dp = \sqrt{\frac{0,0023}{4}} \approx 0,024 \text{ mm}$$

Engenheiro 2:

$$\bar{x} = \frac{0,31 + 0,24 + 0,25 + 0,30}{4} = \frac{1,1}{4} \approx 0,28 \text{ mm}$$

$$dp = \sqrt{\frac{(0,31 - 0,28)^2 + (0,24 - 0,28)^2 + (0,25 - 0,28)^2 + (0,30 - 0,28)^2}{4}}$$

$$dp = \sqrt{\frac{0,0038}{4}} \approx 0,03 \text{ mm}$$

Engenheiro 3:

$$\bar{x} = \frac{0,21 + 0,23 + 0,26 + 0,25}{4} = \frac{0,95}{4} \approx 0,24 \text{ mm}$$

$$dp = \sqrt{\frac{(0,21 - 0,24)^2 + (0,23 - 0,24)^2 + (0,26 - 0,24)^2 + (0,25 - 0,24)^2}{4}}$$

$$dp = \sqrt{\frac{0,0015}{4}} \approx 0,0004 \text{ mm}$$

b) Duas são as análises que precisam ser feitas: o quanto próximo a média está do valor padrão e se o desvio padrão é grande ou não.

Se a média for próxima do valor padrão, mas o desvio padrão for grande, isso significa que as medidas estão dispersas. No entanto, se a média for distante do padrão, isso já será um sinal de imprecisão.

No caso dos três engenheiros, o segundo é o que apresenta a média mais distante do padrão, e o desvio padrão é o maior dos três. Isso é observável pelas medições 0,31 mm e 0,30 mm, que, de todos os envolvidos, são as piores medições feitas.

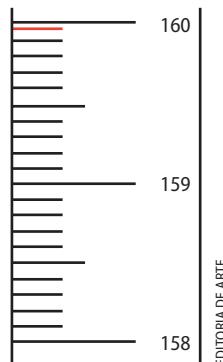
- c) Lembrando que exatidão é um conceito qualitativo e subjetivo, podemos imaginar cenários que incluem todos os engenheiros como sendo exatos. Por exemplo, se ser exato for obter medições que estejam entre 0,19 mm e 0,31 mm ( $0,25 \text{ mm} \pm 0,06 \text{ mm}$ ), então todos foram exatos, pois não há medições fora desse intervalo.

- 5.** Em uma classe de 36 estudantes, entre meninas e meninos, foi solicitado que medissem a altura de cada estudante utilizando uma fita métrica de 2 metros. Observe o resultado ao lado, sabendo que o símbolo  $\leftarrow$  indica que o valor à esquerda está contemplado no intervalo e o valor à direita não. Ou seja, o intervalo  $1,50 \leftarrow 1,60$  representa as medidas  $h$ , de altura, tais que  $1,50 \leq h < 1,60$ .

Com base nessas informações, responda:

- a) Quantos estudantes possuem altura igual a 1,50 m ou menor do que 1,70 m?
- b) Ana pediu a um colega que medisse sua altura de maneira precisa e cuidadosa. A medida obtida pelo colega de Ana está representada na imagem em vermelho. Observe.
- Em qual das faixas a altura de Ana se encontra? Expressa a altura de Ana, em centímetro, por notação científica.
- c) O erro ou incerteza de um instrumento de medida é dado pela menor medida que esse instrumento pode aferir, dividido por 2. O erro associado à medida feita com a fita métrica pode influenciar consideravelmente na precisão das medidas das alturas e na quantidade de estudantes em cada um dos intervalos propostos?

Intervalo de altura (m)	Quantidade de estudantes com altura neste intervalo
1,50 $\leftarrow$ 1,60	5
1,60 $\leftarrow$ 1,70	22
1,70 $\leftarrow$ 1,80	6
1,80 $\leftarrow$ 1,90	3
Total	36



EDITÓRIA DE ARTE

### Resolução

- a) Não há como saber, exatamente, quantos estudantes possuem 1,50 m pelos dados do quadro, mas sabemos que esse(s) estudante(s) pertence(m) à primeira faixa de altura registrada, logo está(ão) entre os cinco estudantes com altura de 1,50 m a 1,60 m. Além disso, a quantidade de estudantes na faixa maior do que 1,60 m e menor do que 1,70 m também faz parte da contagem de estudantes com menos de 1,70 m. Portanto, basta somar os valores 5 e 22, ou seja, 27 estudantes estão entre os que possuem menos de 1,70 m.

Resposta: 27 estudantes.

- b) A fita métrica tem medidas em centímetro e milímetro; logo, a altura de Ana está entre 1,59 m e 1,60 m. Podemos estimar algo entorno de 1,599 m que, por conveniência, poderíamos adotar como 1,60 m pelo arredondamento, mas, como  $1,599 < 1,600$ , então sua altura está na primeira faixa. A altura de Ana pode ser expressa por  $1,599 \cdot 10^2 \text{ cm}$ .
- c) Como a menor medida possível de ser aferida na fita métrica é 1 mm, então o erro em cada uma das medições realizadas é de  $\pm 0,5 \text{ mm}$ . O erro associado a essa medida não deve interferir diretamente na precisão da medida de altura; dessa forma, dificilmente os intervalos de altura, para classificação, seriam afetados.

## &gt; ATIVIDADES



**12.** Dois farmacêuticos, ao manipular 60 cápsulas de determinado remédio, separaram uma amostra de cinco cápsulas para verificar se as massas dessas cápsulas correspondiam à referência, que é de 500 mg. Após a pesagem, foram obtidos os seguintes dados:

farmacêutico 1: 497 mg, 497 mg, 503 mg, 503 mg,

500 mg;

farmacêutico 2: 497 mg, 502 mg, 498 mg, 503 mg,

500 mg.

Para você, qual farmacêutico teve melhor desempenho? Justifique, com base no cálculo do desvio padrão. [Farmacêutico 2. Ver as Orientações para o professor.](#)

**13.** Em cada caso a seguir, indique a quantidade de algarismos significativos.

a) 4,288 m<sup>3</sup> 4

d) 02,3000005 g 8

b) 28,38025 kg 7

e) 2750,1 km 5

c) 1,000002 m 7

**14.** Escreva os números a seguir em notação científica e indique a quantidade de algarismos significativos.

a) 234,5 2,345 · 10<sup>2</sup>; 4

b) 0,251 2,51 · 10<sup>-1</sup>; 3

**15.** Ana e Clara mediram a largura de uma mesa para comprarem uma toalha. Para isso, elas usaram um instrumento de medição cuja menor marcação é 10 cm. Ana mediu 1,22 m e Clara 1,23 m. Qual é o algarismo duvidoso? Justifique. [Ver as Orientações para o professor.](#)

**16.** Sabendo que as operações entre números devem seguir algumas regras envolvendo os algarismos significativos, após encontrar os resultados de cada caso a seguir, responda em notação científica.

a) 12,35 m + 2,347 m 1,470 · 10<sup>-1</sup> m

b) 22,3402 cm · 3,100 cm 6,9255 · 10<sup>-1</sup> cm<sup>2</sup>

**17.** Indique, para cada situação, se a medição feita deve ser precisa ou não. Justifique. [Ver as Orientações para o professor.](#)

a) Ao fazer um bolo, José seguiu a receita e as medidas sugeridas para cada ingrediente.

b) Para produzir uma medicação, são necessárias três substâncias, cada uma com uma quantidade diferente.

c) Medir a espessura do disco de freio de um automóvel.

**18.** Ao multiplicar 2,00 m por 3,5 m, quantos algarismos significativos teremos no produto? Justifique. [2 algarismos significativos. Ver as Orientações para o professor.](#)

**19.** Para realizar uma atividade de Arte, a professora solicitou aos estudantes que recortassem folhas de papel em quadrados de lado 15 cm. Ao reunir todas as folhas recortadas, a professora notou que algumas folhas tinham dimensões diferentes entre si e, para ter certeza, utilizou uma mesma régua para medir um dos lados de cada quadrado recortado, obtendo as seguintes medidas em centímetro:

14,92 cm

15,21 cm

15,04 cm

15,43 cm

Com base nessas medidas e sabendo que a menor medida da régua é 1 mm, responda:

a) Quais são os algarismos significativos? E os algarismos significativos duvidosos?

[Ver as Orientações para o professor.](#)

b) Converta cada valor em centímetro para metro e represente na forma de notação científica.

1,492 · 10<sup>-1</sup>; 1,504 · 10<sup>-1</sup>; 1,521 · 10<sup>-1</sup>; 1,543 · 10<sup>-1</sup>

**20.** Em cada caso a seguir, indique a quantidade de algarismos significativos.

a) 238 m 3

b) 2,345 kg 4

c) 1,0025 m 5

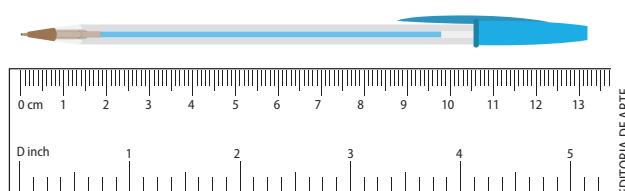
d) 2,300 g 4

e) 25600 km 3

**21.** Resposta possível:

13,24 cm, sendo que os algarismos 1, 3 e 2 são os algarismos significativos exatos e o 4, o algarismo significativo duvidoso.

**21.** Faça a leitura do comprimento da caneta a seguir, estimando seu valor, e indique os algarismos significativos exatos e os duvidosos dessa medida.



## &gt; CONEXÕES

## Construindo mapas: representando grandes regiões em pequenos espaços

Para interpretar e construir mapas é necessário o uso da Cartografia. Saiba mais sobre esse ramo do conhecimento lendo o texto a seguir e, depois, responda às questões:

### A Matemática e a Cartografia

Cartografia, que é a arte de fazer mapas, tem uma história antiga, que remonta a milênios antes de Cristo. Nos tempos modernos, ou seja, a partir da segunda metade do século XV, a elaboração de mapas tornou-se uma atividade de interesse crescente, principalmente devido às grandes navegações, que exigiam mapas cada vez mais confiáveis. E, por serem mapas de grandes regiões, se não de todo o globo terrestre, os cartógrafos procuravam descobrir a maneira de fazer um tal mapa de forma a reproduzir as diferentes localidades do globo preservando, com exatidão, na mesma escala, as várias distâncias entre elas. Isso perdurou até que, em meados do século XVIII, o grande matemático Leonardo Euler (1707-1783) demonstrou a impossibilidade desse intento. [...]

Um outro momento importante da Cartografia do século XVI foi a construção de um mapa com características especiais, muito apropriadas às navegações, o chamado mapa de Mercator.

[...]

ÁVILA, G. A Matemática e a Cartografia. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 65. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/65/2.html>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Considerando valores tão altos de extensão territorial, para transformar as medidas reais de um país para que caiba em um desenho tão pequeno como o de um mapa, utilizamos escalas.

Fonte dos dados: IBGE apresenta nova área territorial brasileira: 8.515.767,049 km<sup>2</sup>.

**Agência IBGE Notícias**, 27 nov. 2012. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias-releases/14318-asi-ibge-apresenta-nova-area-territorial-brasileira-8515767049-km2>. Acesso em: 23 jun. 2020.

- Representação artística de um Mapa mundial antigo.



## Escala

Os cartógrafos trabalham com uma visão reduzida do território, sendo necessário indicar a proporção entre a superfície terrestre e a sua representação. Esta proporção é indicada pela escala. A escala representa, portanto, a relação entre a medida de uma porção territorial representada no papel e sua medida real na superfície terrestre.

[...]

[...] A escala numérica indica a relação entre as dimensões do espaço real e do espaço representado, por meio de uma proporção numérica. Por exemplo, numa escala 1:100 000, 1 centímetro medido no mapa representa uma distância de 100 000 centímetros ou 1 quilômetro na superfície terrestre.

[...]

IBGE. **Conceitos gerais:** o que é cartografia: escala. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/escala.html>. Acesso em: 23 jun. 2020.

A fórmula para o cálculo de uma escala é uma razão entre duas grandezas:

$$E = \frac{d_{\text{mapa}}}{D_{\text{real}}}$$

Em que:

$E$  é a escala do mapa.

$d_{\text{mapa}}$  é a medida da distância entre dois pontos do mapa.

$D_{\text{real}}$  é a medida real da distância entre esses dois pontos.

Observe como podemos utilizar essa fórmula.

A distância real, em linha reta, entre duas cidades é 400 km. Em um mapa, essa distância foi reduzida para 8 cm. Em que escala esse mapa foi construído?

Primeiro transformamos 400 km em 40 000 000 cm, e então:

$$E = \frac{8 \text{ cm}}{40 000 000 \text{ cm}} = \frac{1}{5 000 000}$$

Logo, a escala do mapa é de 1 : 5 000 000.

Isto é, para cada 1 cm do mapa, tem-se 50 km de distância real.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.



1. Você já fez um mapa ou teve de usar a escala para consultar um mapa? converse com os colegas a respeito. **Resposta pessoal.**
2. De acordo com o texto, para que serve a escala de um mapa? **Resposta esperada: A escala é utilizada para identificar o tamanho real de uma determinada região representada no mapa.**
3. Junte-se a um colega e façam o planejamento de uma viagem de carro. A ideia é que a viagem tenha início na cidade onde vocês

moram e passe por quatro cidades diferentes.

Para isso, vocês deverão: **Respostas pessoais.**

- 1º) Calcular, com a ajuda de um mapa, a distância entre as cidades.
- 2º) Estimar, com o valor calculado no item anterior, quanto de combustível será utilizado e qual o valor a ser gasto com ele.
- 3º) Escrever um texto explicando a motivação para a escolha das cidades, indicando, por exemplo, pontos de interesse para visita.
- 4º) Quais conceitos matemáticos você utilizou para realizar as atividades desta seção?  
**Resposta esperada: Proporção, escala e grandezas.**

# > EXPLORANDO A TECNOLOGIA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA

SASHKIN/SHUTTERSTOCK.COM

## Conversão de medidas computacionais

Ao longo do Capítulo, vimos que existem algumas peculiaridades no uso das unidades de medida de armazenamento e de transmissão de dados.

Vimos que nessas unidades de medida 1 kB não vale, de verdade, 1000 *bytes*, mas, sim, 1024 *bytes*. No entanto, fornecedores de *hardware* normalmente consideravam 1 kB como 1000 *bytes*, enquanto, para os desenvolvedores de *softwares*, 1 kB valia 1024 *bytes*.

Essa diferença se dava, principalmente, por questões mercadológicas.

A fim de resolver esse problema, em 2000, o International Electrotechnical Commission (IEC) padronizou os prefixos de unidades que utilizam a base 2 da seguinte forma:

Nome	Prefixo	Valor
<i>Kibibyte</i>	KiB	$2^{10} = 1\,024$
<i>Mebibyte</i>	MiB	$2^{20} = 1\,048\,576$
<i>Gibibyte</i>	GiB	$2^{30} = 1\,073\,741\,824$
<i>Tebibyte</i>	TiB	$2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$

Assim, graças a essa padronização, hoje, quando lemos 1 kB, sabemos que estamos falando de 1000 *bytes* e ao ler 1 KiB, 1024 *bytes*.

Diante dessas informações, propomos construir uma tabela que ajuste os valores nominais dessas unidades binárias. Para isso, vamos utilizar a planilha eletrônica **Calc** do **LibreOffice**.

## Conversão da taxa de transmissão

Para montar uma tabela para ajuste da taxa de transmissão, abra a planilha **Calc** e execute os seguintes passos:

- I. Selecione as células A1 até D1, selecione a função **Mesclar e centralizar** (destacada em vermelho na imagem a seguir) e escreva “Taxa de transmissão”.

- II.** Escreva nas células indicadas os respectivos textos: nas células A3 e B3, depois de mesclá-las, escreva “Taxa contratada”; nas células C3 e D3, depois de mesclá-las, escreva “Taxa real”; nas células B4 e D4, escreva “Kb/s”; nas células B5 e D5, escreva “Mb/s”; nas células B6 e D6, escreva “Gb/s”.

Você pode observar os dois primeiros passos na imagem a seguir.

Taxa de transmissão					
1					
		Taxa contratada		Taxa real	
3		Kb/s		Kb/s	
4		Mb/s		Mb/s	
5		Gb/s		Gb/s	
6					
7					
8					
9					

IMAGENS: LIBREOFFICE

- III.** Em seguida, devemos digitar as fórmulas nas células indicadas: na célula C4 escreva (sem as aspas) “=A4/8”; na célula C5 escreva (sem as aspas) “=A5/8”; na célula C6 escreva (sem as aspas) “=A6/8”.

Para converter as unidades de taxa de transmissão, basta digitar os valores nas células A4, A5 ou A6, considerando a unidade fornecida, e verificar o valor real ao lado. O exemplo a seguir mostra que uma taxa de 300 Mb/s corresponde a uma taxa real de 37,5 MB/s.

Taxa de transmissão					
1					
		Taxa contratada		Taxa real	
3		Kb/s		0 Kb/s	
4		300 Mb/s		37,5 Mb/s	
5		Gb/s		0 Gb/s	
6					
7					
8					
9					

## Conversão para prefixos de base binária

Agora, vamos desenvolver uma tabela para conversão (unidades de medida de capacidade de armazenamento) entre prefixos do sistema decimal (SI) e os prefixos do sistema binário (EIC), utilizando a mesma planilha. Para isso, execute os seguintes passos:

- I. Selecione as células F1 até N1, selecione a função **Mesclar e centralizar** e escreva “Conversão”.
- II. Vamos preencher os títulos da tabela escrevendo nas células indicadas os respectivos textos: nas células F2 até I2, depois de mesclá-las, escreva “Conversão de SI para EIC”; nas células K2 e N2, depois de mesclá-las, escreva “Conversão de EIC para SI”; nas células F3 e G3, depois de mesclá-las, escreva “SI”; nas células M3 e N3, depois de mesclá-las, escreva “SI”; nas células H3 e I3, depois de mesclá-las, escreva “EIC”; nas células K3 e L3, depois de mesclá-las, escreva “EIC”.
- III. Agora, vamos preencher as unidades escrevendo nas células indicadas os respectivos textos: nas células G4 e N4, escreva “KB”; nas células G5 e N5, escreva “MB”; nas células G6 e N6, escreva “GB”; nas células G7 e N7, escreva “TB”; nas células I4 e L4, escreva “KiB”; nas células I5 e L5, escreva “MiB”; nas células I6 e L6, escreva “GiB”; nas células I7 e L7, escreva “TiB”.

Você pode observar os três últimos passos na imagem a seguir:

**Sheet: Sem título 1 - LibreOffice Calc**

**Taxa de transmissão**

	Taxa contratada	Taxa real
Kb/s	0 Kb/s	
300 Mb/s	37,5 Mb/s	
Gb/s	0 Gb/s	

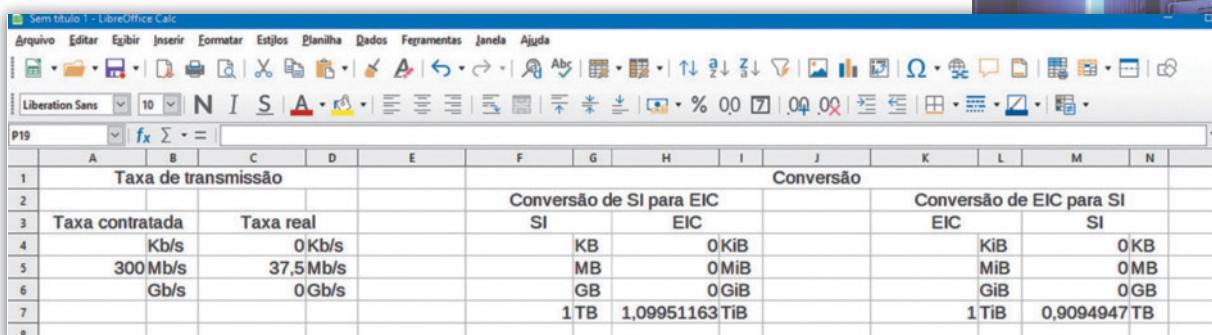
**Conversão**

Conversão de SI para EIC		Conversão de EIC para SI	
SI	EIC	EIC	SI
KB	KiB	KiB	KB
MB	MiB	MiB	MB
GB	GiB	GiB	GB
TB	TiB	TiB	TB

- IV.** Em seguida, devemos digitar as fórmulas nas células indicadas: na célula H4, escreva (sem as aspas) “=F4\*1,024”; na célula H5, escreva (sem as aspas) “=F5\*POTÊNCIA(1,024;2)”; na célula H6, escreva (sem as aspas) “=F6\*POTÊNCIA(1,024;3)”; na célula H7, escreva (sem as aspas) “=F7\*POTÊNCIA(1,024;4)”; na célula M4, escreva (sem as aspas) “=K4/1,024”; na célula M5, escreva (sem as aspas) “=K5/POTÊNCIA(1,024;2)”; na célula M6, escreva (sem as aspas) “=K6/POTÊNCIA(1,024;3)”; na célula M7, escreva (sem as aspas) “=K7/POTÊNCIA(1,024;4)”.

Para converter as unidades para a base binária, basta digitar os valores nas células F4, F5, F6 ou F7, considerando a unidade fornecida, e verificar o respectivo valor no padrão EIC, que estará ao lado. Analogamente, você pode digitar os valores nas células K4, K5, K6 ou K7 e verificar o respectivo valor no padrão SI, que também estará ao lado.

Observe que, por exemplo, 1 TB, no sistema SI, corresponde a quase 10% a mais do que no sistema EIC.



The screenshot shows a LibreOffice Calc spreadsheet titled "Sem título 1 - LibreOffice Calc". The table has three main sections: "Taxa de transmissão", "Conversão de SI para EIC", and "Conversão de EIC para SI".

Taxa de transmissão		Conversão de SI para EIC		Conversão de EIC para SI	
Taxa contratada	Taxa real	SI	EIC	EIC	SI
Kb/s	0 Kb/s	KB	0 KiB	KiB	0 KB
300 Mb/s	37,5 Mb/s	MB	0 MiB	MiB	0 MB
Gb/s	0 Gb/s	GB	0 GiB	GiB	0 GB
		1 TB	1,09951163 TiB	1 TiB	0,9094947 TB

Agora, faça o que se pede na atividade a seguir.

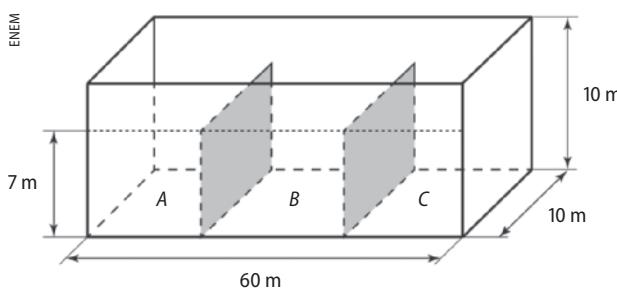


- Considerando a tabela de conversão que construímos, elabore um fluxograma para cada uma das seguintes conversões: [Ver as Orientações para o professor.](#)
  - Converter o tamanho de um arquivo que está em GB para MB.
  - Converter uma taxa de transmissão que está em Mb/s para MiB/s.

## &gt; ATIVIDADES COMPLEMENTARES



**1.** (Enem/MEC) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por  $60\text{ m} \times 10\text{ m}$  de base e  $10\text{ m}$  de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de  $7\text{ m}$  de altura e  $10\text{ m}$  de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará. Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.



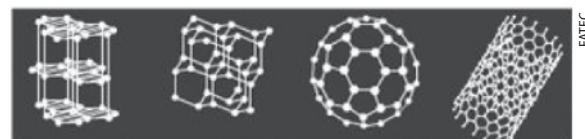
Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de **alternativa d**

- a)  $1,4 \times 10^3\text{ m}^3$
  - b)  $1,8 \times 10^3\text{ m}^3$
  - c)  $2,0 \times 10^3\text{ m}^3$
  - d)  $3,2 \times 10^3\text{ m}^3$
  - e)  $6,0 \times 10^3\text{ m}^3$
- 2.** (Fuvest-SP) Após chover na cidade de São Paulo, as águas da chuva descerão o rio Tietê até o rio Paraná, percorrendo cerca de 1.000 km. Sendo de  $4\text{ km/h}$  a velocidade média das águas, o percurso mencionado será cumprido pelas águas da chuva em aproximadamente:
- a) 30 dias.
  - b) 10 dias.
  - c) 25 dias.
  - d) 2 dias.
  - e) 4 dias.
- alternativa b**

**3.** (Fatec-SP) A nanotecnologia refere-se à tecnologia utilizada para manipular estruturas muito pequenas, tornando possível a criação de estruturas funcionais que seriam inconcebíveis utilizando-se tecnologia convencional. Na formação da palavra Nanotecnologia, o termo “tecnologia” refere-se ao desenvolvimento e produção de novos materiais, já o prefixo “nano” está relacionado a uma escala de medida em que um nanômetro (nm) é um bilionésimo do metro.

## &gt; Estruturas de átomos de carbono na escala nano

Grafite      Diamante      Fulerenos      Nanotubos



FATEC

Dentre as estruturas apresentadas tem-se o grafite, um semimetal que conduz eletricidade e o diamante, um excelente isolante. Os fulerenos são conhecidos como moléculas semelhantes à bola de futebol. Um fulereno é feito de 60 átomos de carbono unidos de tal maneira que criam uma esfera oca de  $0,7\text{ nm}$  de diâmetro.

Outra estrutura de carbono é o nanotubo no qual os átomos de carbono estão ligados em forma de tubos, ocos como fulerenos, com diâmetros de uma a várias dezenas de nanômetros.

([www.cienciaviva.org.br](http://www.cienciaviva.org.br) – Acesso em 13.03.2010.)

De acordo com o texto, calculando a área da superfície ocupada por um fulereno, tem-se que esta medida é, em metros quadrados, aproximadamente igual a

1. Área da superfície esférica:  $A = 4\pi r^2$
2. Adote  $\pi = 3$

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $4,2 \times 10^{-81}$ | d) $1,47 \times 10^{-18}$ |
| b) $5,6 \times 10^{-36}$ | e) $2,18 \times 10^{-12}$ |
| c) $3,5 \times 10^{-27}$ | <b>alternativa d</b>      |

4. (Enem/MEC) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina-d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina. A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é:
- a) 11,25      c) 28,80      e) 49,50  
b) 27,00      d) 32,25  
**alternativa b**

5. (UFRGS-RS) Em texto publicado na **Folha de S. Paulo**, em 16/09/2007, o físico Marcelo Gleiser escreveu que “átomos têm diâmetros de aproximadamente um décimo de bilionésimo de metro”. Escrito em potência de 10, um décimo de bilionésimo é: **alternativa c**

- a)  $10^{-8}$       c)  $10^{-10}$       e)  $10^{-12}$   
b)  $10^{-9}$       d)  $10^{-11}$

6. (PUC-RJ) Considerando-se os algarismos significativos dos números 28,7 e 1,03, podemos afirmar que a soma destes números é dada por: **alternativa a**

- a) 29,7      c) 29      e) 29,0  
b) 29,73      d) 29,74

## PARA REFLETIR



Nas páginas de abertura, foram apresentados conteúdos referentes às unidades de medida de comprimento, como a milha, e de temperatura, como a escala Fahrenheit, utilizadas em outros países. Além disso, essas unidades foram relacionadas às unidades-padrão utilizadas no Brasil. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual é a importância dela? Se não, retome o texto de abertura de Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros, revistas, jornais e sites sobre outras unidades de medida de comprimento, de área e de massa.

Vimos, também, o que são grandezas e unidades de medida, como elas foram padronizadas formando o Sistema Internacional de Unidades (SI) e como funciona esse sistema.

Além disso, estudamos formas de expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, como as notações científicas e os prefixos do SI.

Compreendemos como os sistemas de medição estão em constante mudança e adaptação à realidade do mundo, principalmente por conta do surgimento de novas tecnologias. Com isso, vimos as unidades de medida astronômicas e as de transmissão e armazenamento de dados.

Por fim, estudamos sobre exatidão e precisão em medições, vimos instrumentos de medida, entendemos o que são algarismos significativos, tanto os exatos quanto os duvidosos.

Vamos refletir sobre as aprendizagens deste Capítulo: [Ver as Orientações para o professor.](#)

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual?
- Somente as unidades de medida do SI são suficientes para interagirmos com o mundo à nossa volta?
- Quando uma medição deve ser precisa e quando ela não tem essa obrigatoriedade? Explique com exemplos.



## RESPOSTAS DAS ATIVIDADES

### Capítulo 1 · Matrizes e sistemas lineares

#### Atividades

1. alternativa **b**

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3. A e B

4. a]  $A = (1 \ 0 \ -1)$

$$\text{b)] } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)] } C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. alternativa **a**

6. zero

7. alternativa **b**

$$8. \text{a)] } A = \begin{bmatrix} 340 & 410 \\ 105 & 87 \\ 96 & 134 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 180 & 152 \\ 64 & 36 \\ 113 & 88 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)] } C = A + B = \begin{bmatrix} 520 & 562 \\ 169 & 123 \\ 209 & 222 \end{bmatrix}$$

9. a] V      b] V

10.  $c_{23} = 4$

$$11. \text{a)] } \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{c)] } \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{b)] } \begin{bmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & -18 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{d)] } \begin{bmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & 24 \\ 2 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

12. a] V

b] V

$$13. \text{a)] } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)] } \begin{bmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -26 & 20 & -22 \end{bmatrix}$$

$$14. \text{a)] } C = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

c] V

d] V

$$\text{b)] } D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$15. \text{a)] } \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{bmatrix}$$

b] Não é possível determinar este produto.

$$\text{c)] } \begin{bmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

16.  $AB \neq BA$

17.  $c_{32} = 94$

$$18. \text{a)] } T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)] } E = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 200 \\ 50 & 150 & 100 \end{bmatrix}$$

c] 650 zíperes

d] Resposta pessoal.

$$19. \text{a)] } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

b] B não é invertível.

$$\text{c)] } C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

**20.**  $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$

**21.**  $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

**22.**  $(p+q) = 0$

**23.**  $X = \begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$

**24.**  $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

**25.**  $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**26.**  $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

**27.**  $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

**28.**  $a = 2$ .

**29.** alternativa **b**

**30.** alternativa **a**

**31.**  $(0, -3)$  e  $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

**32. a]** É solução.

**b]**  $(3, 2, 0)$  é uma solução.

**33.** Não.

**34.**  $m = -\frac{10}{3}$

**35.**  $m = 2$  ou  $m = -2$ .

**36.**  $(a, 6 - 2a)$  é solução.

**37.** É solução.

**38.**  $S = \{(10, 5)\}$

**39.** Motocicleta: 325 km; automóvel: 225 km

**40. a]**  $\begin{cases} x + y = 58 \\ 56x + 72y = 3840 \end{cases}$

**b]** 21 caixas do tipo A e 37 caixas do tipo B.

**41.**  $S = \{(4, 3)\}$ ; sim

**42. a]** O sistema é possível e determinado.

**b]** O sistema é impossível.

**c]** O sistema é possível e indeterminado.

**43.**  $\{m \in \mathbb{R} \mid m \neq -9\}$

**44.**  $k = 10$

**45.** 7 sacos

**46.**  $a = 10$  e  $b = 3$ . O sistema é possível e determinado.

**47.** alternativa **b**

**48. a]** É solução.

**b]** Não é solução.

**49.** alternativa **c**

**50.** 20 gramas do alimento C

**51.** alternativa **c**

**52. a]**  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

**b]**  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

**c]**  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

**53.** O valor da gratificação foi de R\$ 800,00.

**54. a]**  $\begin{cases} 2a - 5b = -4 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$

**b]**  $\begin{cases} -4m + n = 1 \\ 3m + 5n - 2p = 2 \\ m + 6p = 3 \end{cases}$

**55.**  $S = \{(-2, 3, 0)\}$

**56.**  $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 7 \\ 8 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 80 \\ 75 \end{bmatrix}$

**57. a]**  $S = \{(10, 20)\}$

**b]**  $S = \{(-12, 7, 3)\}$

**c]**  $S = \{(1, 1, 1, 1)\}$

**d]**  $S = \emptyset$

**58. a]**  $S = \left\{ \left( \frac{13-\lambda}{2}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

**b]**  $S = \left\{ \left( \lambda, \frac{-8+4\lambda}{5} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

- 59.** a]  $S = \emptyset$   
 b]  $S = \{(-7, -2, 2)\}$
- 60.**  $S = \left\{ \left( \frac{5t}{2} + 5, \frac{-19t - 20}{6}, \frac{t+2}{6}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$
- 61.** a]  $S = \{(1, -2, 3, 4)\}$ ; sistema possível e determinado  
 b]  $S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ; sistema possível e indeterminado
- 62.**  $t = 8$
- 63.**  $S = \{(5, 6, 7, 8)\}$
- 64.** a]  $S = \left\{ \left( \frac{13}{4}, \frac{7}{8} \right) \right\}$   
 b]  $m \neq -\frac{4}{3}$

### Atividades complementares

1. alternativa a      5. alternativa b  
 2. alternativa b      6. alternativa c  
 3. alternativa e      7. alternativa a  
 4. alternativa a

## Capítulo 2 · Porcentagem e juros

### Atividades

Fração	Representação decimal	Porcentagem
$\frac{9}{10}$	0,9	90%
$\frac{1}{4}$	0,25	25%
$\frac{13}{200}$	<b>0,065</b>	6,5%
$\frac{47}{100}$	<b>0,47</b>	47%
$\frac{2}{25}$	<b>0,08</b>	8%

- 2.** a] 420      b] 22,5      c] 1,8      d] 240  
**3.** a] Aproximadamente 92 250 habitantes  
 b] Aproximadamente 94 556 habitantes  
**4.** 25%  
**5.** 6%  
**6.** aproximadamente R\$ 231,53  
**7.** a] 320 km  
 b] 264 km  
 c] 2,4 h ou 2h24

- 8.** R\$ 4.320,00  
**9.** R\$ 135,00  
**10.** a] Não, é mais vantajoso a compra à vista.  
 b]  $x = 10$   
**11.** a] R\$ 1.800,00  
 b] R\$ 250.000,00  
 c] Resposta pessoal  
**12.** R\$ 2.500,00  
**13.** R\$ 295,00  
**14.** R\$ 1.032,00  
**15.** R\$ 25,20  
**16.** alternativa e  
**17.** R\$ 24,00  
**18.** R\$ 192,00  
**19.** R\$ 6.000,00  
**20.** 3% a.m.  
**21.** R\$ 2.634,00  
**22.** a] R\$ 1,60  
 b] Antes das 10 horas foram vendidos 50 melões; entre 10 e 11 horas, foram vendidos 120 melões; depois das 11 horas, foram vendidos 130 melões.  
**23.** 0,25% a.m.  
**24.** 3% a.m.  
**25.** a] R\$ 700,00      b] R\$ 2.520,00      c] R\$ 945,00  
**26.** R\$ 97,20  
**27.** R\$ 25.000,00  
**28.** R\$ 13.620,00  
**29.** 2,5% a.m.  
**30.** R\$ 208.548,38  
**31.** R\$ 20.980,00  
**32.** R\$ 19.487,17  
**33.** R\$ 7.103,77  
**34.** alternativa c  
**35.** 15  
**36.** R\$ 13.824,00  
**37.** a] R\$ 4.499,46      c] R\$ 4.376,64  
 b] R\$ 43.060,65  
**38.** R\$ 5.796,35; R\$ 796,35  
**39.** R\$ 16.345,00  
**40.** Resposta pessoal.  
**41.** 12 meses  
**42.** I. F      II. F      III. V      IV. F      V. V  
**43.** a] 14 meses e 6 dias  
 b] 22 meses e 16 dias  
**44.** a] 3 meses      b] 2 anos  
**45.** 6% ao mês  
**46.** alternativa b  
**47.** a] R\$ 12.000; R\$ 15.000; R\$ 30.000  
 b] aproximadamente 6 meses  
 c] 3% a.m.

**Atividades complementares**

- 1.** alternativa **a** **8.** alternativa **a** **15.** alternativa **b**  
**2.** alternativa **a** **9.** alternativa **c** **16.** alternativa **b**  
**3.** alternativa **e** **10.** alternativa **b** **17.** alternativa **c**  
**4.** alternativa **b** **11.** alternativa **d** **18.** alternativa **d**  
**5.** alternativa **c** **12.** alternativa **b** **19.** alternativa **c**  
**6.** alternativa **d** **13.** alternativa **c**  
**7.** alternativa **a** **14.** alternativa **a**

**Capítulo 3 · Matemática financeira****Atividades**

- 1.** **a]** A primeira prestação é mais alta no SAC. Resposta pessoal.  
**b]** Nas primeiras prestações, o valor amortizado no SAC é maior do que no Sistema Price. Sim.  
**2.** **a]** R\$ 3.125,00                           **b]** R\$ 2.800,00  
**3.** **a]** R\$ 56.250,00  
**b]** R\$ 1.833,85  
**c]** R\$ 1.171,88  
**d]** Sistema Price: R\$ 31.774,96; SAC: R\$ 27.562,50  
**4.** alternativa **c**  
**5.** Pesquisa do estudante.  
**6.** **a]** Dezembro de 2019. Aproximadamente 4,3%  
**b]** Julho e outubro de 2019; janeiro, abril e julho de 2020.  
**c]** Resposta pessoal.  
**8.** Resposta pessoal.

**Atividades complementares**

- 1.** alternativa **b**                           **3.** alternativa **a**  
**2.** alternativa **d**                           **4.** alternativa **b**

**CAPÍTULO 4 · Grandezas****Atividades**

- 1.** Aproximadamente  $1,028 \cdot 10^8$ s  
**2.**  $7\,000\,000\,000 = 7,0 \cdot 10^9$   
**3.** R\$ 12,60  
**4.** Resposta pessoal.  
**5.** aproximadamente 58,8 km/h  
**6.** alternativa **b**  
**7.** Resposta pessoal.  
**8.** **a]** 36,98 bilhões de bits  
**b]** 17,2 bilhões de bits  
**c]** 27,52 bilhões de bits  
**9.** Resposta pessoal.

**10.** **a]** Sul:  $\approx 2,74 \cdot 10^7$  habitantes;  
 Norte:  $\approx 1,59 \cdot 10^7$  habitantes;  
 Nordeste:  $\approx 5,31 \cdot 10^7$  habitantes;  
 Sudeste:  $\approx 8,04 \cdot 10^7$  habitantes;  
 Centro-Oeste:  $\approx 1,41 \cdot 10^7$  habitantes.

**b]** Sul:  $\approx 14,36\%$ ;  
 Norte:  $\approx 8,33\%$ ;  
 Nordeste:  $\approx 27,83\%$ ;  
 Sudeste:  $\approx 42,14\%$ ;  
 Centro-Oeste:  $\approx 7,34\%$

**11.** 60 000 m<sup>2</sup>

**12.** O farmacêutico **2** teve melhor desempenho.

- |                        |             |             |
|------------------------|-------------|-------------|
| <b>13.</b> <b>a]</b> 4 | <b>c]</b> 7 | <b>e]</b> 5 |
| <b>b]</b> 7            | <b>d]</b> 8 |             |

**14.** **a]**  $2,345 \cdot 10^2$ ; **b]**  $2,51 \cdot 10^{-1}$ ; **3**

**15.** O algarismo duvidoso de Ana é o **2** e no caso de Clara é o **3**. Isso acontece porque no instrumento de medida esses números não estão explícitos e cada uma vez uma estimativa diferente.

**16.** **a]**  $1,470 \cdot 10^{-1}$  m  
**b]**  $6,9255 \cdot 10^{-1}$  cm<sup>2</sup>

**17.** **a]** A medição não necessita ser precisa, pois, ao fazer a receita do bolo, acrescentar um pouco a mais ou colocar um pouco a menos, não vai influenciar no resultado.

**b]** A medição deve ser precisa. Por se tratar de uma medicação, a quantidade de cada substância deve ser precisa para não causar problemas de saúde ou reações adversas.

**c]** A medição deve ser precisa, pois, nesse caso, qualquer erro poderá ocasionar um acidente.

**18.** 2 algarismos significativos, pois o resultado deve ter a mesma quantidade de algarismos significativos do número envolvido no cálculo, com a menor quantidade de algarismos significativos.

**19.** **a]** Todos os algarismos são significativos. Os algarismos significativos duvidosos são: 2, 4, 1 e 3, respectivamente.

- b]** ▪  $1,492 \cdot 10^{-1}$   
 ▪  $1,504 \cdot 10^{-1}$   
 ▪  $1,521 \cdot 10^{-1}$   
 ▪  $1,543 \cdot 10^{-1}$

- |                        |             |             |
|------------------------|-------------|-------------|
| <b>20.</b> <b>a]</b> 3 | <b>c]</b> 5 | <b>e]</b> 3 |
| <b>b]</b> 4            | <b>d]</b> 4 |             |

**21.** Resposta pessoal.

**Atividades complementares**

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| <b>1.</b> alternativa <b>d</b> | <b>4.</b> alternativa <b>b</b> |
| <b>2.</b> alternativa <b>b</b> | <b>5.</b> alternativa <b>c</b> |
| <b>3.</b> alternativa <b>d</b> | <b>6.</b> alternativa <b>a</b> |



Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências são identificadas por números (de 1 a 10) e as habilidades, por códigos alfanuméricos, por exemplo, EM13MAT103, cuja composição é explicada da seguinte maneira:

- as duas primeiras letras indicam a etapa da Educação Básica, no caso, Ensino Médio (EM);
- o primeiro par de números indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio (13);
- a segunda sequência de letras indica a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras): MAT = Matemática e suas Tecnologias; LGG = Linguagens e suas Tecnologias; LP = Língua Portuguesa; CNT = Ciências da Natureza e suas Tecnologias; CHS = Ciências Humanas e Sociais Aplicadas;
- os três números finais indicam a competência específica (1º número) e a habilidade específica (dois últimos números).

A seguir, os textos na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades mencionadas nesta obra.

### Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
4. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
5. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropiar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
6. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

### Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1** – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

**[EM13MAT103]** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as

conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

**[EM13MAT104]** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

**[EM13MAT106]** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2** – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

**[EM13MAT203]** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3** – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

**[EM13MAT301]** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

**[EM13MAT303]** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

**[EM13MAT313]** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

**[EM13MAT314]** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4** – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

## Ciências da Natureza e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1** – Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2** – Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e

do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3** – Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

## BIBLIOGRAFIA COMENTADA

ALMEIDA, L. W. de.; SILVA K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica.** São Paulo: Contexto, 2016.

- Essa obra proporciona oportunidades de integração envolvendo atividades normalmente desenvolvidas nas aulas de Matemática e situações do dia a dia, no que tange a aspectos econômicos, sociais e ambientais.

BONOMI, M. C.; LAURO, M. M. **Funções elementares, equações e inequações:** uma abordagem utilizando microcomputador. 1 ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.

- Esse material aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de softwares.

BOYER, C. **História da Matemática.** Tradução de Helena de Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

- O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática, destacando a fascinante relação da humanidade com números, formas e padrões ao longo do tempo.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, habilidades e aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília, DF, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica que orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017.** Brasília, DF, 2017. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1 000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conhecido como o Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da saúde. **Guia alimentar para a saúde.** Brasília, DF, 2014. Disponível em: [http://189.28.128.100/dab/docs/portaldab/publicacoes/guia\\_alimentar\\_populacao\\_brasileira.pdf](http://189.28.128.100/dab/docs/portaldab/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC:** contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao\\_temas\\_contemporaneos.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento explicativo sobre os temas transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola? In: DAYRELL, J.; CARRANO, P.; MAIA, C. L. **Juventude e Ensino Médio:** diálogo, sujeitos e currículo. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: [https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo\\_juventude-e-ensino-medio\\_2014.pdf](https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARVALHO, J. P. de. Um problema de Fibonacci. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 17. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta uma explicação sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos números complexos.** São Paulo: CAEM – IME-USP, 2011. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais.** Campos dos Goytacazes: UENF-RJ, 2016.

- O material explora a utilização do software GeoGebra e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna.** 4. ed. reformulada. São Paulo: Atual, 2003.

- Essa obra apresenta conceitos matemáticos como conjuntos, funções, entre outros, destacando demonstrações e a importância de uma linguagem formal na escrita matemática.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2007.

- O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática organizados de forma cronológica.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade:** história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

- Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um saber mais integrado e livre, destacando a integração de diferentes áreas de conhecimento permeando o processo de ensino e aprendizagem.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Papirus Educação).

- Essa obra busca refletir sobre as relações entre educação e tecnologias, evitando jargões, teorias e abordagens específicas desses campos de conhecimento, de modo que as discussões propostas sejam mais acessíveis a todos.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. São Paulo: SBM, 2006. 3 v. (Coleção do professor de Matemática).

- Livro que aborda conceitos matemáticos desenvolvidos no Ensino Médio, destacando demonstrações e atividades de aprofundamento.

LOPES, C. A. E.; NACARATO, A. M. (org.). **Escritas e leituras na educação matemática.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

- Livro que traz um compilado de artigos discutindo perspectivas consideradas fundamentais no ensino de Matemática, que deve focalizar os saberes do aluno, incentivando a criação dos próprios procedimentos e desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, priorizando a aquisição e comunicação em linguagem matemática.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

- Essa obra apresenta reflexões que buscam articular questões epistemológicas e ações docentes, bem como analisar formas usuais do trabalho escolar propondo alternativas didáticas.

MELO, M. C. P.; JUSTULIN, A. M. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XV., 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: SBEM-PR, 2019. Disponível em: [http://www.sbmeparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV\\_EPREM/paper/viewFile/1019/881](http://www.sbmeparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresentação teórica e prática da metodologia de resolução de problemas.

PATERLINI, R. R. Técnicas de máximos e de mínimos. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 35. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Artigo no qual são investigadas situações-problema por meio de diferentes técnicas para se encontrar os valores de máximo ou de mínimo da função.

POMMER, W. M. **O número de Euler:** Possíveis abordagens no ensino básico. São Paulo: FEUSP, 2010. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Esse material apresenta aspectos históricos sobre o número de Euler, que contribuem para ampliar o estudo sobre o tema.

PONTE, J. P.; BROCALDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

- Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

PORTAL DA OBMEP. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Portal que disponibiliza materiais teóricos, videoaulas e atividades interativas sobre Matemática na Educação Básica.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

- Esse é o primeiro livro de história da Matemática publicado no Brasil, escrito por uma autora que apresenta um olhar crítico de como a história da matemática tem sido contada ao longo do tempo.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. Tradução de Abigail Lins, Jussara de Loiola Araújo. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

- Neste livro, as discussões destacam a importância da perspectiva democrática na educação matemática e seu caráter emancipatório, enfatizando o papel da modelagem na educação matemática.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

- Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

UNESCO. **Declaração mundial sobre educação para todos:** satisfação das necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1998. Disponível em: [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291\\_por](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas? **RPM**, Rio de Janeiro, n. 33. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

ZABALA, A.; ARNAU, L. **Como aprender e ensinar competências.** Tradução de Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010.

- Uma obra que apresenta um novo enfoque no ensino e na aprendizagem de competências, priorizando as capacidades cognitivas, em relação à aquisição de conhecimento.

## &gt; SIGLAS DE VESTIBULARES

**Acafe-SC:** Associação Catarinense das Fundações Educacionais  
**Cespe/UnB-DF:** Centro de Seleção e de Promoção de Eventos Universidade de Brasília  
**Cesupa-PA:** Centro Universitário do Estado do Pará  
**Enem/MEC:** Exame Nacional do Ensino Médio  
**Epcar-MG:** Escola Preparatória de Cadetes do Ar  
**EsPCEx-SP:** Escola Preparatória de Cadetes do Exército  
**ESPM-SP:** Escola Superior de Propaganda e Marketing  
**Fatec-SP:** Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo  
**FESP:** Faculdade Engenharia São Paulo  
**FGV-SP:** Fundação Getúlio Vargas (SP)  
**Fuvest-SP:** Fundação Universitária para o Vestibular  
**IFCE:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará  
**IFFar-RS:** Instituto Federal Farroupilha  
**IFSC:** Instituto Federal Santa Catarina  
**IFSul-RS:** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense  
**ITA-SP:** Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
**PUCCamp-SP:** Pontifícia Universidade Católica de Campinas  
**PUC-RJ:** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
**Saresp-SP:** Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo  
**UCDB-MS:** Universidade Católica Dom Bosco  
**Udesc-SC:** Universidade do Estado de Santa Catarina  
**UEA-AM:** Universidade do Estado do Amazonas  
**UECE:** Universidade Estadual do Ceará

**UEG-GO:** Universidade Estadual de Goiás  
**UEPA:** Universidade do Estado do Pará  
**UEPG-PR:** Universidade Estadual de Ponta Grossa  
**UERN:** Universidade Estadual do Rio Grande do Norte  
**Uesc-BA:** Universidade Estadual de Santa Cruz  
**UFABC-SP:** Universidade Federal do ABC  
**UFAL:** Universidade Federal de Alagoas  
**UFC-CE:** Universidade Federal do Ceará  
**Ufersa-RN:** Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
**UFG-GO:** Universidade Federal de Goiás  
**Ufop-MG:** Universidade Federal de Ouro Preto  
**UFPB:** Universidade Federal da Paraíba  
**UFPE:** Universidade Federal de Pernambuco  
**UFPel-RS:** Universidade Federal de Pelotas  
**UFPR:** Universidade Federal do Paraná  
**UFRGS-RS:** Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
**UFRN:** Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
**UFS-SE:** Universidade Federal de Sergipe  
**UFSC:** Universidade Federal de Santa Catarina  
**UFV-MG:** Universidade Federal de Viçosa  
**UMC-SP:** Universidade de Mogi das Cruzes  
**Unicruz-RS:** Universidade de Cruz Alta  
**Unifor-CE:** Universidade de Fortaleza  
**Unimep-SP:** Universidade Metodista de Piracicaba  
**Unimontes-MG:** Universidade Estadual de Montes Claros  
**Unit-SE:** Universidade Tiradentes  
**Vunesp-SP:** Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA

# Orientações para o professor

## Apresentação

Caro professor,

Atualmente, o ensino de Matemática, assim como o de outras áreas do conhecimento, está pautado pelas indicações presentes nos documentos oficiais, principalmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As perspectivas desse trabalho estão voltadas para atender os estudantes do século XXI, reconhecendo que “as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação” (BNCC, 2018, p. 462).

Diante desse cenário, ensinar Matemática hoje significa desenvolver nos estudantes competências e habilidades apoiadas em noções, conceitos e métodos matemáticos que possibilitem a eles empregar estratégias próprias e criar soluções por meio da observação, da análise, do estabelecimento de conexões, do levantamento de conjecturas, percebendo e expressando regularidades.

Promover tais ações nos estudantes requer que você, professor, tenha domínio dos conteúdos da área, identifique as dificuldades de aprendizagem deles e, com o apoio de estudos da Educação Matemática, ajude-os a superá-las, favorecendo a autonomia e a cooperação em sala de aula.

Cientes disso, e com a intenção de poder contribuir para o trabalho docente, elaboramos estas **Orientações para o professor**, nas quais, além das discussões sobre os conteúdos e métodos de ensino, procuramos fornecer subsídios para o seu trabalho como professor, por meio de comentários sobre as seções e os conteúdos abordados, além de sugerir leituras complementares a fim de colaborar com a sua formação.

Na parte específica de cada Volume, fazemos observações e sugestões que visam enriquecer, tanto no aspecto teórico como no metodológico, os temas abordados nos Capítulos, e apresentamos as respostas e resoluções das atividades.

Para finalizar, desejamos a você muito sucesso em seu trabalho e esperamos que estas orientações possam ajudar a aprimorar sua prática pedagógica.

Os autores



# Sumário

<b>&gt; O Novo Ensino Médio .....</b>	164
<b>&gt; A BNCC .....</b>	166
Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) .....	168
Competências socioemocionais .....	169
<b>&gt; O ensino da Matemática .....</b>	170
A BNCC e o ensino de Matemática.....	170
Metodologias ativas.....	175
O papel do professor.....	180
Pensamento computacional.....	182
<b>&gt; Avaliação .....</b>	183
Volumes da obra.....	185
<b>&gt; Estrutura da obra .....</b>	186
<b>&gt; Bibliografia consultada e comentada .....</b>	188
<b>&gt; Comentários e sugestões de abordagem para este Volume .....</b>	190
Capítulo 1 .....	195
Capítulo 2 .....	209
Capítulo 3 .....	222
Capítulo 4 .....	234
<b>&gt; Resolução das atividades .....</b>	246

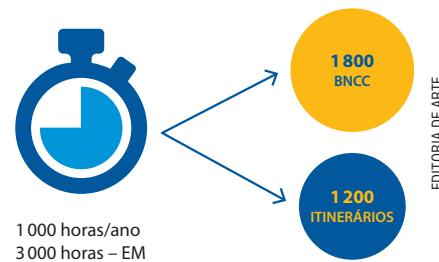


# O NOVO ENSINO MÉDIO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/lei nº 9.394/1996) já trazia em suas indicações para o Ensino Médio a necessidade de, nessa etapa da Educação Básica, haver para os estudantes o aprofundamento de conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental para o prosseguimento dos estudos; uma preparação básica para o trabalho e para a cidadania; seu aprimoramento ético; o desenvolvimento de autonomia intelectual e do pensamento crítico, além da compreensão dos processos produtivos vinculados a processos científicos e tecnológicos<sup>1</sup>.

A lei da reforma do Ensino Médio, de 2017, conhecida como a que instaurou o Novo Ensino Médio, buscou tornar mais exequíveis e efetivas as ações para a consolidação do que foi previsto na LDB, determinando às escolas 3 000 horas de aulas para os três anos de curso, sendo um total máximo de 1 800 horas de formação geral básica, para atendimento da BNCC, e o mínimo de 1 200 horas para o cumprimento de itinerários formativos.

## Novo Ensino Médio Ampliação da carga horária



A distribuição dessa carga horária pode ser flexibilizada de acordo com as escolhas e necessidades de cada região, sendo possível fazer uma distribuição de horas para cada uma das séries do Ensino Médio. Os exemplos apresentados a seguir são algumas das possibilidades (em amarelo, estão destacadas as horas referentes à formação geral básica e, em azul, as referentes aos itinerários formativos).

## Novo Ensino Médio Possibilidades de distribuição da carga horária



<sup>1</sup> Artigo 35 da LDB. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm). Acesso em: 5 set. 2020.



Outro aspecto a ser considerado é que, para as 1 800 horas de formação geral básica, também existe a flexibilização de distribuição da carga horária dos diferentes componentes de cada uma das áreas: Linguagens e suas Tecnologias (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa); Matemática e suas Tecnologias (Matemática), Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Biologia, Física e Química) e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia e Filosofia). Destaca-se o fato de que os componentes Língua Portuguesa e Matemática devem ser oferecidos nas três séries.

Uma sugestão de distribuição da carga horária é destinar 600 horas para a área de Linguagens e suas Tecnologias (sendo 400 horas voltadas para Língua Portuguesa e 200 horas para as Linguagens: Arte, Educação Física e Língua Inglesa) e 400 horas para cada uma das outras áreas.

Áreas do conhecimento	Carga horária
Linguagens e suas Tecnologias	200 h
Língua Portuguesa	400 h
Matemática e suas Tecnologias	400 h
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	400 h
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	400 h
<b>Total</b>	<b>1 800 h</b>

A estruturação por áreas de conhecimento se dá na perspectiva de fortalecimento das relações entre os componentes curriculares que delas fazem parte, tendo em vista a resolução de problemas contextualizados e voltados para a intervenção na realidade. Apoiada nesses pressupostos, a BNCC destaca a necessidade de escolas e professores proporcionarem aos estudantes

experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas (BNCC, 2018, p. 463).

Tais aprendizagens possibilitam aos estudantes atingirem o que o Novo Ensino Médio propõe, que é a ampliação das condições de inclusão social por meio do acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho, como apresentado no Parecer CNE/CEB nº 5/2011.

Por outro lado, esse mesmo parecer destaca que o rápido desenvolvimento tecnológico e a ampliação de seu acesso pelas pessoas em geral vêm provocando mudanças profundas nas dinâmicas sociais, no reconhecimento e valorização de diferentes culturas, nas relações com o mundo do trabalho e suas incertezas futuras. Essas mudanças afetam mais diretamente os jovens que, portanto, demandam uma formação mais adequada a esses novos tempos.

Pensar nessa formação exige a tomada de consciência de que na etapa do Ensino Médio, como apontado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCN, 2013), temos um contingente de pessoas que precisam ser consideradas em sua multiplicidade e reconhecidas como participantes ativas nos diversos meios nos quais estão inseridas e que, por isso, carregam consigo várias culturas juvenis ou muitas juventudes.

Compreender as modificações da sociedade e, por conseguinte, as mudanças nos perfis dos sujeitos escolares é também um caminho que precisa ser percorrido. São várias as formas de sociabilidade existentes na vida cotidiana dos jovens e incorporar as manifestações juvenis ao processo educativo exige do professor a sensibilidade de estar aberto ao

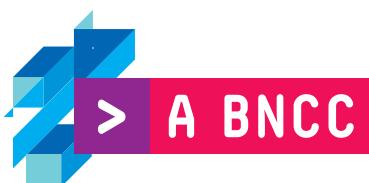
diálogo e atento aos desafios que a contemporaneidade lança para a escola. Não é possível deixar de considerar que a escola é um espaço de encontro de inúmeras manifestações diferentes entre si, um local que se constitui de culturas diversas, de valores diversos e de diferentes perspectivas de olhar para o mundo e planejar o futuro.

O Novo Ensino Médio aponta que um modo de trabalhar com essa diversidade é por meio do estímulo à participação ativa, que pode propiciar aos jovens vivenciar valores como os da solidariedade e da democracia e permitir o aprendizado da alteridade. Isso significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças, além do desenvolvimento de habilidades discursivas e argumentativas. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens.

Esses fatores implicam numa organização escolar que promova e garanta aos estudantes serem protagonistas e interlocutores em seu percurso escolar possibilitando

[...] uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu **projeto de vida**, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos (BNCC, 2018, p. 463).

Essas considerações sobre o perfil do público-alvo da etapa do Ensino Médio e a busca por atender às suas necessidades e expectativas de vida reforçam a decisão de se ter uma composição curricular estruturada por áreas de conhecimento. Desse modo, será possível cada rede de ensino ou unidade escolar montar seu cronograma de trabalho, tendo em vista as necessidades específicas dos espaços em que estão inseridas. Assim, a distribuição das cargas horárias relativas a cada área e, consequentemente, a cada um dos componentes curriculares que as compõem pode ser feita por bimestre, trimestre ou semestre.



Os desafios impostos à educação escolar de um público múltiplo e dinâmico inserido em uma efervescência de desenvolvimento em todas as áreas, provocado principalmente pelo avanço tecnológico, exigem um novo olhar e um posicionamento sobre a abordagem a ser dada ao conhecimento a ser construído e à constituição de um sujeito consciente de toda a contribuição que ele pode dar ao mundo de modo geral.

Para que essa **formação integral** seja possível, estudos em Educação têm indicado e construções curriculares de diferentes países têm assumido que o ensino precisa estar orientado ao desenvolvimento de competências e habilidades.

A BNCC também apresenta tal posicionamento, e diante do fato de que ao termo **competência** têm se dado diferentes significados, ela apresenta a definição a ser considerada:

[...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BNCC, 2018, p. 8).

No que tange ao termo **habilidade**, o documento também especifica:

As **habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares (BNCC, 2018, p. 29).

Em outro trecho, esse documento destaca que o desenvolvimento de competências exige que

[...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) [...] (BNCC, 2018, p. 13).

Dessa forma, a BNCC delega à escola uma função social urgente, tendo em vista o mundo globalizado e a consequente necessidade de pessoas que saibam fazer e que tenham a capacidade de planejar e resolver problemas, que saibam ler o mundo através de palavras, imagens, fatos, números, códigos e outras linguagens, usando esses recursos para saber agir e saber conviver.

As competências gerais apresentadas pela BNCC têm o propósito do desenvolvimento integral do estudante:

**1** Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

**2** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

**3** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

**10** Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.



**9** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

**4** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

**8** Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocritica e capacidade para lidar com elas.

**5** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

**7** Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

**6** Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Tendo em vista que o desenvolvimento de competências é a proposta de ensino, deve-se repensar o estudo de conteúdos, o que significa não menosprezá-los, mas sim mudar o foco do trabalho com eles. A memorização de fatos e/ou procedimentos referentes aos conteúdos abordados nos diferentes componentes curriculares não precisa ser totalmente abandonada, porém deve fazer sentido para os estudantes. Na medida do possível, as situações propostas devem buscar estabelecer integração entre as diferentes áreas, possibilitando o emprego de noções e conhecimentos matemáticos, geográficos, biológicos etc., além de um domínio da língua.

Esses elementos apontam que o ensino por competências exige o repensar da prática docente. O professor precisa reconhecer que os objetos de

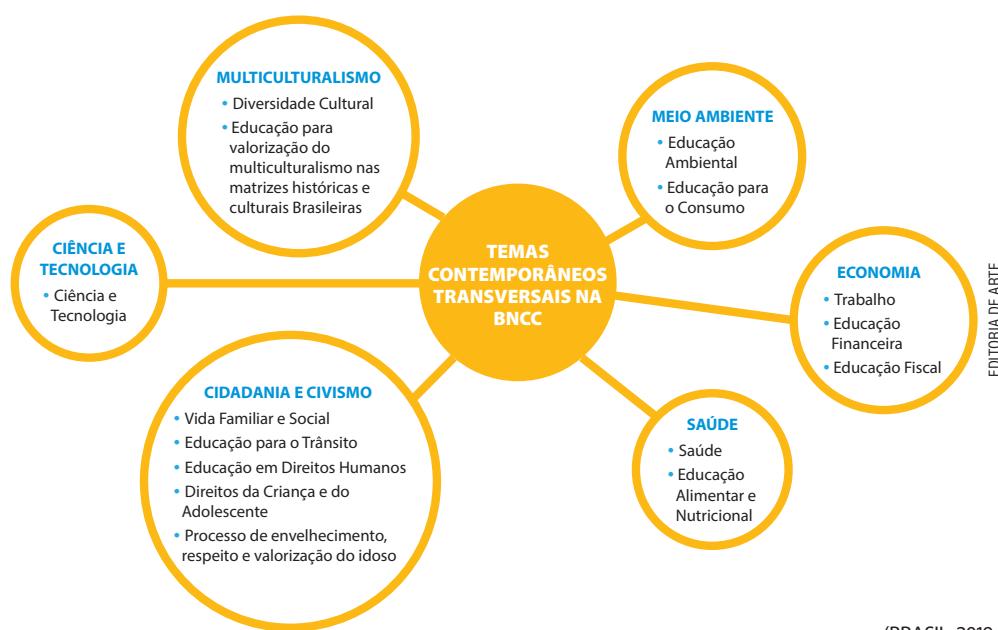
conhecimento devem ser apresentados, sempre que possível, por meio de situações e problemas contextualizados que provoquem conflitos e exijam que os estudantes mobilizem seus processos cognitivos de observação, visualização, compreensão, organização, análise e síntese como suporte para a elaboração de argumentação consistente. É necessário lembrar que muitas situações matemáticas podem ser contextualizadas por meio de questões internas à própria Matemática e por meio da análise de seus procedimentos. Tais ações se concretizam com propostas a serem desenvolvidas em grupo, pois o trabalho colaborativo direciona para discussões, considerações e reconsiderações das estratégias e dos erros. Ao propor a resolução das atividades presentes no livro, é importante formar duplas ou quartetos colaborativos.

## Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)

Trazer para a sala de aula problematizações sobre temas vividos pelas pessoas em seu dia a dia e que influenciam suas vidas é uma forma de tratar dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), que são referidos na BNCC. Esses temas não se vinculam a uma determinada área ou disciplina escolar, pelo contrário, devem ser abordados por todas elas. Eles devem ser considerados como um conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos têm direito.

A importância desse trabalho é a possibilidade de transformar a escola em um espaço voltado para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades de todos em relação à sua vida pessoal, coletiva e ambiental. Esses temas são indicados por serem “aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional”<sup>2</sup>.

Veja a seguir os temas propostos.



(BRASIL, 2019, p. 13)

<sup>2</sup> BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao\\_temas\\_contemporaneos.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf). Acesso em: 25 jul. 2020.



É preciso considerar as possibilidades de integração dos assuntos específicos de cada área com esses temas, pois eles têm um caráter social e político e são um caminho promissor para os estudantes reconhecerem suas reais possibilidades de ação sobre a realidade em que vivem. Ao mesmo tempo, essa integração pode contribuir muito para a valorização dos conhecimentos escolares. Além disso, essa abordagem é profundamente significativa para a construção da cidadania e para a participação ativa do estudante na vida em sociedade. Além da possibilidade do desenvolvimento das habilidades específicas da área, há um grande potencial para que atitudes e valores sejam colocados em discussão dentro da sala de aula.

## Competências socioemocionais

A incorporação de atitudes e valores pelos estudantes está intimamente ligada ao desenvolvimento de competências socioemocionais. Tais competências são consideradas cruciais para a construção de um percurso escolar que promova a educação integral do estudante, preparando-o para sua vida futura.

Tais competências dizem respeito ao se relacionar com os outros e consigo mesmo, a compreender e gerir emoções, a estabelecer e atingir objetivos, a tomar decisões autônomas e responsáveis e a enfrentar situações adversas de maneira criativa e construtiva.

Estudos e discussões sobre quais estudantes se saem melhor em atividades escolares indicam aqueles que apresentam características como organização, persistência, resiliência, enfrentamento e resolução de conflitos com controle da frustração e da ansiedade, além de autoestima, confiança e criatividade. A partir dessas conclusões, torna-se, então, evidente que o desenvolvimento cognitivo do jovem não se dá de modo isolado do seu desenvolvimento socioemocional. Desse modo, as propostas do Novo Ensino Médio, com indicação de novos enfoques para o ensino, com sugestão de abordagens em que a aprendizagem colaborativa e a autonomia estejam presentes, estão apontando para um caminho promissor que conduz a uma educação mais abrangente.

De forma coerente com as políticas integradoras, essas transformações devem se manifestar em diferentes oportunidades de aprendizagem, tendo o professor um papel fundamental, tanto na criação de novas atividades quanto no planejamento e na condução das rotinas e ações que já têm lugar na escola. O professor, como mediador, pode integrar a esses momentos propostas em que os estudantes, distribuídos em duplas, trios ou quartetos, possam discutir e colaborar entre si na resolução de problemas.

Em trabalhos colaborativos, o objetivo não é a homogeneização do pensamento e do conhecimento dos sujeitos participantes. Deve-se rejeitar o autoritarismo e a condução pedagógica com motivação hierárquica. Ao contrário, a colaboração entre os pares tem como objetivo a reconstrução do conhecimento dos participantes. Para isso, é importante respeitar a individualidade de cada sujeito, seus recursos e seu ritmo pessoal. Esse tipo de trabalho permite que as pessoas nele envolvidas passem a reconhecer o que sabem, o que os outros sabem e o que todos não sabem, resultando na busca de superação dos limites de cada um e do grupo como um todo.

Para que esse tipo de interação ocorra nos grupos colaborativos é essencial que o professor determine quais serão os participantes não pela amizade ou proximidade de localização na sala, mas sim por características que possibilitem que todos tenham voz no grupo e sejam considerados como participantes necessários. Essa ação favorece o desenvolvimento da autoestima, confiança e criatividade, o que promoverá o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de fornecer as bases para a aceitação social.

A mediação do professor é o ponto-chave de todo esse processo por meio de suas intervenções, com a acolhida de diferentes pontos de vista e de discussões realizadas principalmente com perguntas que instiguem os estudantes a justificarem seu posicionamento e conclusões. As questões podem ser do tipo: *"Todos chegaram a essa conclusão ou alguém teve alguma consideração um pouco diferente dessa?"*; *"E se fosse de tal forma? Vocês pensaram nessa outra possibilidade?"*; *"Vocês levaram em consideração outros pontos de vista?"*; *"Apoiaram-se no que já estudamos antes a respeito desse assunto?"*; *"Que tal olharem também em outros livros e sites para dar maior respaldo ao que estão afirmando?"* etc.



## > O ENSINO DA MATEMÁTICA

Pensar o ensino de Matemática exige pensar o que significa aprender Matemática. As perspectivas atuais de educadores matemáticos consagram que para **aprender** Matemática é preciso **fazer** Matemática.

Esse **fazer** significa se engajar em uma atividade que promova a observação e análise de dados e informações, o estabelecimento de conexões e relações, a criação de conjecturas, a identificação e expressão de regularidades, a busca de explicações, a criação de soluções, a invenção de estratégias próprias que envolvam noções, conceitos e procedimentos matemáticos, a validação de suas produções e a sua comunicação com seus pares.

Assim, **ensinar** Matemática é, para um professor, criar as condições que possibilitarão que os estudantes **façam** Matemática. Embora possa parecer que essa seja uma missão impossível, na verdade, trata-se de promover em sala de aula uma atitude investigativa por parte dos estudantes, possibilitando a eles mobilizarem sua intuição e conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade

ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCALDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem contribuir para aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes.

Chamar o estudante a agir como um matemático não implica obrigatoriamente em trabalhar com problemas muito difíceis. Ponte, Brocado e Oliveira (2003) destacam que, pelo contrário, investigar **significa trabalhar com questões que nos interpelam** e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes do que a própria solução.

## A BNCC e o ensino de Matemática

No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com a BNCC, tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. O conceito de letramento matemático considerado pelo documento apóia-se naquele utilizado pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (Pisa). Assim, é

[...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas [...] (BNCC, 2018, p. 266).

Nessa etapa da Educação Básica, há que se considerar que o desenvolvimento intelectual dos jovens permite maior capacidade de abstração e potencializa o pensar de modo



rigoroso e criativo na resolução de problemas. Desse modo, para além da simples ampliação de conteúdo, é importante destacar a perspectiva integradora da Matemática, como uma organização que se estabelece em torno de temas, questões e problemas cuja finalidade de aprendizagem não é apenas saber os conteúdos matemáticos, mas saber usá-los como suporte para a realização de uma reflexão crítica. Pretende-se que, ao final do Ensino Médio, os estudantes tenham se apropriado de seu papel como cidadãos em um contexto social, político, cultural e econômico.

Tal posicionamento exige que a postura no trato com as propostas matemáticas escolares considere a busca de problemas fora da Matemática, de modo a proporcionar aos estudantes a consciência de que essa área do conhecimento se abre para muitas outras nas quais ela pode ser utilizada como uma ferramenta de compreensão e análise. Porém, é preciso destacar que a presença da Matemática nas diversas áreas do conhecimento não ocorre somente por meio dos registros fornecidos pelos fatos e fenômenos estudados, mas também pelo seu amplo conjunto de procedimentos para cálculo, análise, medição e estimativa dos fenômenos da realidade e de suas relações. Esse fato é o que traz a necessidade de também se trabalhar de modo cuidadoso a linguagem, definições e procedimentos matemáticos que darão suporte às resoluções dos problemas.

As competências específicas e as habilidades vinculadas à área de Matemática, apresentadas na BNCC, expressam esses aspectos conferindo a professores e estudantes maiores oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e também em outras áreas do conhecimento. A Matemática pode ser identificada na base de uma série de processos que organizam a vida contemporânea, ao mesmo tempo em que aponta os conhecimentos específicos a serem construídos, como pode ser visto no quadro a seguir.

Competências específicas	Habilidades
<p><b>Competência específica 1</b> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.</p>	<p><b>(EM13MAT101)</b> Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT102)</b> Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.</p> <p><b>(EM13MAT103)</b> Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.</p> <p><b>(EM13MAT104)</b> Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.</p> <p><b>(EM13MAT105)</b> Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).</p> <p><b>(EM13MAT106)</b> Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).</p>

Competências específicas	Habilidades
<b>Competência específica 2</b> Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	<p><b>(EM13MAT201)</b> Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.</p> <p><b>(EM13MAT202)</b> Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.</p> <p><b>(EM13MAT203)</b> Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.</p>
<b>Competência específica 3</b> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	<p><b>(EM13MAT301)</b> Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT302)</b> Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT303)</b> Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.</p> <p><b>(EM13MAT304)</b> Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.</p> <p><b>(EM13MAT305)</b> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.</p> <p><b>(EM13MAT306)</b> Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.</p> <p><b>(EM13MAT307)</b> Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT308)</b> Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.</p> <p><b>(EM13MAT309)</b> Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p>

Competências específicas	Habilidades
	<p><b>(EM13MAT310)</b> Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.</p> <p><b>(EM13MAT311)</b> Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.</p> <p><b>(EM13MAT312)</b> Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.</p> <p><b>(EM13MAT313)</b> Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.</p> <p><b>(EM13MAT314)</b> Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).</p> <p><b>(EM13MAT315)</b> Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.</p> <p><b>(EM13MAT316)</b> Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).</p>
<p><b>Competência específica 4</b> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.</p>	<p><b>(EM13MAT401)</b> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.</p> <p><b>(EM13MAT402)</b> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.</p> <p><b>(EM13MAT403)</b> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.</p> <p><b>(EM13MAT404)</b> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT405)</b> Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.</p> <p><b>(EM13MAT406)</b> Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.</p> <p><b>(EM13MAT407)</b> Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (<i>box-plot</i>), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.</p>

Competências específicas	Habilidades
<b>Competência específica 5</b> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	<p><b>(EM13MAT501)</b> Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebraicamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.</p> <p><b>(EM13MAT502)</b> Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebraicamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo <math>y = ax^2</math>.</p> <p><b>(EM13MAT503)</b> Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.</p> <p><b>(EM13MAT504)</b> Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.</p> <p><b>(EM13MAT505)</b> Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.</p> <p><b>(EM13MAT506)</b> Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.</p> <p><b>(EM13MAT507)</b> Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.</p> <p><b>(EM13MAT508)</b> Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.</p> <p><b>(EM13MAT509)</b> Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.</p> <p><b>(EM13MAT510)</b> Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.</p> <p><b>(EM13MAT511)</b> Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.</p>

Nesta Coleção, as oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento se dão em vários momentos como na **Abertura** de cada Capítulo, nas seções **Atividades resolvidas** e **Atividades**, bem como na seção **Conexões**, entre outras. Esses são os elementos que dão suporte ao professor para propor aos estudantes os trabalhos em grupos colaborativos em diferentes situações de investigação.



## Metodologias ativas

Todos temos consciência de que a educação formal não acontece apenas no espaço físico da sala de aula e, atualmente, considerando as possibilidades de uso das tecnologias que promovem uma integração de diferentes espaços e tempos, esse fato se tornou mais evidente. Dessa forma, é necessário fornecer aos estudantes possibilidades de aprendizagem que rompam com sua atitude passiva e ultrapassem o espaço físico da sala de aula.

Se queremos que os estudantes sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (MORÁN, 2015).

Segundo Morán (2015), os estudantes devem ser mobilizados por meio de desafios e atividades bem planejadas e avaliadas por meio de acompanhamento do professor. Tais desafios contribuem para mobilizar competências intelectuais, emocionais, pessoais e de comunicação.

Ainda segundo o mesmo autor, as metodologias ativas são o ponto de partida para processos de reflexão, de integração cognitiva e de generalização. Desafios e atividades propostos devem ser do tipo investigativo que exigem aprender pela descoberta por meio de pesquisas, análise de situações, identificação de diferentes aspectos envolvidos, reconhecendo regularidades, fazendo escolhas e validando suas conclusões. As metodologias ativas mais aplicadas são a aprendizagem por projetos, por resolução de problemas, sala de aula invertida e rotação por estações.

Na **metodologia por projetos**, os estudantes são motivados a trabalhar de forma colaborativa em propostas interdisciplinares nas quais se abordam conceitos-chave dos objetos de conhecimento envolvidos. As aprendizagens são vinculadas a experiências e interesses deles, o que implica em um questionamento constante e na reconstrução de certezas. Os conteúdos surgem de acordo com o desenvolvimento da pesquisa e são explorados de modo mais profundo do que se tivessem sido determinados anteriormente. O ponto de partida deve ser a definição de uma questão central, que irá determinar o que investigar. A seguir, um conjunto de certezas provisórias e dúvidas temporárias estarão presentes ao longo da pesquisa, podendo também o professor prever a amplitude do projeto a partir dos conhecimentos prévios que os estudantes apresentam. A busca de informação na internet, em livros, revistas, entrevistas vai requerer a elaboração de registros importantes para o processo em desenvolvimento e para a socialização de ideias.

A **metodologia de resolução de problemas** propõe uma abordagem em que a construção do conhecimento se faz a partir de problemas geradores, propostos como ponto de partida para o ensino de conceitos e conteúdos matemáticos. O problema matemático é apresentado antes de se iniciar o conteúdo, e o estudante, ao resolvê-lo, construirá um conceito que ainda não conhece. Segundo Huanca e Onuchic (2011), pesquisadores citados por Melo e Justulin (2019), nessa metodologia “os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos”. Eles indicam que as atividades podem ser organizadas em dez etapas:

- |   |   |
|---|---|
| <p>(1) proposição do problema,<br/>(2) leitura individual,<br/>(3) leitura em conjunto,<br/>(4) resolução do problema,<br/>(5) observar e incentivar,<br/>(6) registro das soluções na lousa,</p> | <p>(7) plenária,<br/>(8) busca do consenso,<br/>(9) formalização do conteúdo, e<br/>(10) proposição e resolução de novos problemas.</p> |
|---|---|

Se surgirem dúvidas, o professor poderá auxiliar, porém as ações são exclusivamente dos estudantes; ele age como observador e incentivador, estimulando o trabalho em grupo, incentivando a reflexão e a troca de ideias entre eles. Depois de os grupos concluírem suas resoluções, um representante é convidado a registrar na lousa a sua resolução, esteja certa ou errada. Diante das respostas, os estudantes são convidados a refletir e discutir os diferentes métodos utilizados na solução. Depois desse momento, o professor busca, com toda a turma, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. Ao final das discussões, o professor formaliza o conteúdo matemático do qual emergiu o problema gerador, institucionaliza os conceitos, destaca diferentes formas operatórias e/ou demonstra propriedades específicas sobre o assunto. É importante que sejam propostos novos problemas relacionados ao conteúdo que foi formalizado, para a familiarização com o novo conhecimento e reconhecimento de sua aplicação a diferentes contextos.

A **sala de aula invertida** se caracteriza por inverter o ciclo típico das aulas, no qual o professor apresenta o conteúdo e este é aplicado. Nessa metodologia, os estudantes devem ter contato antecipado com o conhecimento necessário antes da aula, para que, no ambiente da sala de aula possam interagir de forma ativa para esclarecer, trabalhar e aplicar o conhecimento com o qual tiveram contato. Embora muitas pesquisas apontem resultados positivos sobre o emprego dessa metodologia, há também pesquisadores que apresentam críticas sobre ela. Segundo Valente (2014), citado por Honório (2016), alguns críticos destacam a dependência que esse modelo tem da tecnologia, o que pode criar um ambiente de aprendizagem desigual, tanto em termos do acesso à tecnologia quanto à motivação para os estudos independentes. Outra crítica é a de o estudante vir para a sala de aula sem se preparar e, com isso, não ter condições de acompanhar as discussões ou prejudicar as interações possíveis. No entanto, essas críticas são rebatidas, apoiadas justamente nessas interações entre os participantes do processo colaborativo, que tem como paradigma o predomínio da comunicação, da coordenação e da cooperação e, por isso, as aprendizagens podem ocorrer. Nesse modelo, o professor disponibiliza materiais, normalmente em ambiente virtual (videoaula, tutorial, textos e questões) de acordo com seu planejamento de trabalho e, na sala de aula, dará o *feedback* de modo a esclarecer dúvidas e corrigir erros, pois agora seu papel é amparar e não mais transmitir informações.

Na **metodologia de rotação por estações de aprendizagem**, os estudantes são divididos em pequenos grupos, que participarão de algumas estações de trabalho, sendo recomendado que, em pelo menos uma delas, a proposta envolva o uso de ambiente virtual. Essas estações podem estar alocadas em diferentes ambientes da escola. Os grupos executam um rodízio por essas estações, cada uma com uma atividade que se comunica com o objetivo central da aula. As estações precisam ser planejadas de forma que sejam independentes, sem exigência de algum pré-requisito ou exercício prévio, levando em consideração que cada grupo iniciará as atividades em uma estação diferente. Desse modo, o professor necessita ocupar-se de diferentes ações que cercam o planejamento das estações: definir quantas, quais serão e qual deve ser a quantidade de estudantes em cada estação; organizar o(s) espaço(s); delimitar o tempo necessário para cada estação e qual será o tempo limite para a mudança de estação de trabalho; pensar nos recursos didáticos necessários para cada estação. As propostas em cada estação podem variar abrangendo tarefas de leitura, escrita, produção, discussão, exercícios, atividades em plataformas virtuais, atividades envolvendo aplicativos e recursos tecnológicos, podendo, por exemplo, haver uma estação com o professor, uma na qual se realizem atividades individualizadas e uma com computadores para o desenvolvimento da atividade *on-line*.

A escolha de qual metodologia utilizar e para qual ou quais assuntos elas poderão ser aplicadas cabe ao professor. O livro didático não determina o emprego de uma ou outra metodologia, ele apenas oferece suporte para a estruturação e desenvolvimento dos



objetos de conhecimento matemático a serem explorados e sistematizados pelos estudantes do Ensino Médio.

**Atividades investigativas** precisam estar presentes em qualquer das metodologias ativas que se queira aplicar em sala de aula, sejam elas de resolução de problemas, baseadas em projetos, sala de aula invertida, rodízio por estações etc.

Para exemplificar como utilizar os recursos fornecidos pelo livro didático para a elaboração e o desenvolvimento de propostas de atividades investigativas, vamos considerar o trecho da introdução de um capítulo desta Coleção que propõe o estudo de função quadrática:

Situações envolvendo trajetórias parabólicas, como lançamentos de projéteis, podem ser modeladas por meio de funções quadráticas, assim como certos tipos de movimentos estudados pela Física. Além disso, alguns objetos, como antenas parabólicas e faróis de veículos, são construídos utilizando propriedades da parábola, a curva que representa o gráfico de funções quadráticas.

Nesse parágrafo, podemos destacar os seguintes temas que podem gerar investigações a serem realizadas:

- lançamento de projéteis;
- movimentos em Física;
- construção de antenas parabólicas e faróis.

Considerando que, no Ensino Fundamental, os estudantes já podem ter tido contato com as funções quadráticas, como expresso pelas habilidades:

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo  $ax^2 = b$ .

[...]

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau (BNCC, 2018, p. 313-317).

Uma proposta investigativa envolvendo esse tema – funções quadráticas – é essencial para a consolidação da aprendizagem construída, ampliação dos conhecimentos e identificação das possibilidades de sua aplicação em diferentes contextos, como propõe a BNCC.

Partindo, então, desses pressupostos é possível elaborar um planejamento para a efetivação de uma atividade investigativa. As competências e habilidades, cujo desenvolvimento será promovido, estão listadas no início do Capítulo e são elas que balizarão a sua mediação, dando suporte às suas intervenções no desenrolar do trabalho realizado pelos estudantes. Porém, em atividades investigativas, os estudantes percorrem diferentes caminhos e, levando em consideração que farão explorações sobre a função quadrática, certamente outras habilidades poderão ser mobilizadas, consolidadas ou desenvolvidas, como as que são referentes a números e grandezas e medidas. Analise quais foram os caminhos percorridos pelos estudantes para destacar também as habilidades desses objetos de conhecimento.

O ponto de partida consiste em mobilizar a turma para a realização da atividade investigativa, nesse caso específico, a partir da proposta da leitura do texto inicial do Capítulo 3 deste Volume e sua introdução, e do seguinte questionamento:

- Vocês conseguem imaginar como e por que situações como o lançamento de projéteis, movimentos estudados pela Física, e a construção de antenas parabólicas e faróis estão ligados às funções quadráticas?

As respostas dos estudantes já fornecem dados para o levantamento inicial do conhecimento prévio que eles têm sobre o assunto. Outras questões podem ser propostas:

- Será que essas são as únicas situações em que essas funções se aplicam?

Essas são as questões que vamos tentar responder, mas vamos nos dividir em grupos de modo que cada um vá em busca de algumas respostas, para, ao final, juntarmos as partes para uma conclusão geral da classe.

A formação dos grupos para atividades investigativas, como já destacado anteriormente, é determinada pelo professor, levando em conta as possibilidades de participação e contribuição de cada um no grupo. Deve-se procurar evitar formações nas quais alguns estudantes fazem e outros esperam as respostas, além de buscar a constituição de grupos colaborativos de até quatro integrantes. Essa montagem pode ser feita quando da apresentação da proposta à classe.

Feita a organização dos grupos, apresentar a todos as partes das questões iniciais a serem respondidas, para que cada grupo decida sobre qual questão trabalhará, porém verificar que todas sejam respondidas pela turma.

- Por que o lançamento de projéteis está ligado às funções quadráticas e como elas se aplicam?
- Quais dos movimentos estudados pela Física são modelados pela função quadrática? Como usá-la para resolver problemas de Física?
- O que a construção de antenas parabólicas e faróis tem a ver com as funções quadráticas? Como empregá-las nessas construções?
- Há outras aplicações da função quadrática nas diversas áreas de conhecimento? Quais são e como são aplicadas?

Como fonte de consulta, os estudantes poderão utilizar os próprios livros didáticos de todas as áreas, outros livros da biblioteca da escola e a internet. No caso do livro de Matemática, eles poderão apoiar-se nas atividades resolvidas e apresentar exemplos de aplicação retirados das demais atividades. Durante todo o processo, eles devem documentar suas descobertas, tanto por meio de relatórios, como por fotos e/ou vídeos de modo que, quando encerrarem as investigações, possam compilar essa documentação para a apresentação à classe. Se achar interessante, pode também sugerir que façam registros em seu portfólio.

O acompanhamento dos trabalhos dos estudantes e a intervenção do professor em cada grupo é essencial para conhecer as dificuldades presentes com objetivo de atuar sobre elas. É, também, por esse acompanhamento que será possível perceber se há alguma dificuldade comum a todos na sala, o que pode requerer uma abertura da discussão com todos os grupos.



Atividades desse tipo demandam mais do que uma aula para serem realizadas, sendo o professor, pelo seu acompanhamento das discussões e preparação dos estudantes para a apresentação de suas descobertas à classe, quem determinará o momento em que as equipes devem encerrar esta etapa de trabalho.

Em seguida, cada grupo deve apresentar à sala suas descobertas, validando-as com argumentações consistentes. Pesquisas indicam que ao ser solicitado a explicar, elaborar ou defender seu posicionamento perante outros, o indivíduo constrói para si uma maior estrutura de compreensão sobre o que está abordando. Dessa forma, cabe ao professor incentivar essa prática ao comentar e explicitar os raciocínios desenvolvidos usando, essencialmente, três fases dos processos argumentativos: a **formulação de ideias, a explicação e justificação dos procedimentos** e os **algoritmos utilizados**. Para orientar o suporte que deve ser dado aos estudantes para a constituição de seus processos argumentativos e para a observação pelo professor do desenvolvimento desse processo, foi criado, por pesquisadores<sup>3</sup>, o quadro a seguir.

> **Quadro 1: Avaliação da Argumentação Científica dentro da Sala de Aula (AACs)**

Aspectos conceituais e cognitivos	Aspectos epistêmicos	Aspectos sociais
1. A conversa centrou-se na geração ou validação de alegações ou explicações.	8. Os participantes invocaram as “ferramentas da retórica” para apoiar ou contestar ideias.	15. Os participantes foram reflexivos sobre <i>o que e como</i> conhecem.
2. Os participantes procuram e discutem conclusões e explicações alternativas.	9. Os participantes usaram evidências para apoiar e desafiar as ideias ou dar sentido ao fenômeno sob investigação.	16. Os participantes respeitam o que o outro tem a dizer.
3. Os participantes modificaram sua conclusão ou explicação quando notaram uma inconsistência ou descobriram informações anômalas.	10. Os participantes examinaram a relevância, a coerência e a suficiência das provas.	17. Os participantes discutiram uma ideia quando ela foi introduzida na conversa.
4. Os participantes estavam céticos sobre ideias e informações.	11. Os participantes avaliaram a forma como os dados disponíveis foram interpretados ou o método usado para coletar os dados.	18. Os participantes encorajaram ou convidaram outros para compartilhar ou criticar ideias.
5. Os participantes forneceram razões enquanto apoiavam ou contestavam uma ideia.	12. Os participantes usaram as teorias científicas, leis ou modelos para apoiar e desafiar ideias ou para ajudar a atribuir sentido ao fenômeno sob investigação.	19. Os participantes reafirmam ou sumarizam comentários e perguntavam uns aos outros para esclarecer ou detalhar seus comentários.
6. Os participantes basearam as suas decisões ou ideias sobre estratégias de raciocínio inadequadas.	13. Os participantes fizeram distinções e conexões entre inferências e observações explícitas por outros.	
7. Os participantes tentaram avaliar os méritos de cada explicação ou alegação alternativa de forma sistemática.	14. Os participantes usam a linguagem científica para comunicar ideias.	

<sup>3</sup> Ferramenta denominada Assessment of Scientific Argumentation in the Classroom (ASAC) criada por SAMPSON, V. et al., 2012, apud CARMO, A. B. **Argumentação matemática em aulas investigativas de física**. USP, 2015. Disponível em: [https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-12052015-135710/publico/ALEX\\_BELLUCCO\\_DO\\_CARMO.pdf](https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-12052015-135710/publico/ALEX_BELLUCCO_DO_CARMO.pdf). Acesso em: 1º jul. 2020.

Após cada apresentação, o professor faz sua validação e complementa, se necessário, a justificativa final. Terminada a apresentação de todos os grupos, as perguntas iniciais devem ser retomadas e a classe deve ser questionada no sentido de avaliar se o conjunto das apresentações foi suficiente para respondê-las, solicitando, então, a todos a elaboração de uma síntese do que foi exposto, que pode ser tomado como mais um instrumento de avaliação.

A partir daí, todos poderão passar à resolução das atividades propostas no livro e indicadas pelo professor, para que ocorra a familiarização do conhecimento construído durante a vivência da atividade investigativa. Para resolver essas atividades, podem ser formados outros grupos, porém sempre grupos colaborativos, e os problemas propostos devem abordar diferentes contextos e diferentes aplicações, tanto externas à Matemática como internas a ela.

O exemplo de atividade investigativa sobre funções quadráticas, descrito anteriormente, pode ser adaptado para os diferentes conteúdos de cada um dos Volumes. Em todos os Capítulos, existe a possibilidade de criar esse tipo de atividade a partir da abertura, da introdução, ou de outras seções que sempre propõem elementos interessantes, tendo como suporte o próprio livro didático.

## □ papel do professor

Aulas de investigação podem representar um desafio à prática do professor, pois elas demandam um equilíbrio entre garantir que o trabalho dos estudantes ocorra e seja significativo do ponto de vista do conhecimento matemático e conceder a eles a autonomia necessária para possibilitar a autoria da investigação.

Considerando esse equilíbrio, o professor precisa interagir com os estudantes para estar ciente de suas necessidades e características particulares, sem perder de vista os aspectos gerais da gestão da situação didática. Desse modo, o professor é levado a desempenhar diversos papéis no decorrer de uma atividade de investigação.

**Criar o cenário e desafiar os estudantes:** O sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula, de modo que o estudante se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para pensar, colocar questões, explorar suas ideias e exprimi-las. Dependendo da situação proposta, é preciso disponibilizar aos estudantes materiais diversos para manipulação ou consulta, sendo o livro didático o ponto de partida essencial para as suas buscas e pesquisas.

Ao propor uma atividade, é fundamental garantir que todos os estudantes entendam o sentido da tarefa proposta, aquilo que se espera deles no decurso da aula, levando-os a compreenderem o que significa investigar e aprender a fazê-lo. A proposta inicial da tarefa não pode ser demasiadamente pormenorizada sobre o que é para ser feito, uma vez que a interpretação pelo estudante sobre o que se propõe é um dos objetivos dessas aulas, esperando-se que ele evolua para realizá-la autonomamente.

O professor precisa dar uma atenção especial à própria tarefa docente, escolhendo questões ou situações iniciais e no decorrer da atividade que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos estudantes.

**Acompanhar o progresso dos estudantes:** Uma vez que os estudantes já estejam em processo de investigação, cabe ao professor manter uma posição de retaguarda, procurando compreender como eles estão pensando, fazendo algumas questões ou solicitando explicações.

É um desafio para o professor perceber aonde os estudantes querem chegar, uma vez que ele pode não ter acompanhado todo o processo de discussão dentro do grupo. Aqui o professor deve considerar que os estudantes podem ainda não ter os registros organizados e sua comunicação matemática oral é limitada e contém erros, precisando, assim, se



esforçar para compreendê-los e evitando corrigir cada afirmação ou conceito matemático apresentado de forma imprecisa.

Acompanhar o progresso dos estudantes possibilita ao professor sinalizar que eles podem continuar por estarem indo na direção correta ou intervir, de acordo com a necessidade do grupo, ou ainda fornecendo apoio mais direto para influenciar positivamente o trabalho deles.

A avaliação do desenvolvimento dos estudantes durante a atividade pode também levar o professor a decidir por conceder mais tempo para a investigação, ou a fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma, ou passar à discussão final.

**Apoiar o trabalho dos estudantes:** Na condução da aula, o apoio a ser dado precisa estar pautado na manutenção dos aspectos característicos do processo investigativo. Assim, a intervenção do professor pode assumir várias formas como colocar questões, fornecer ou recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão por parte dos estudantes.

A postura interrogativa é a que o professor deve privilegiar e suas questões podem ter diferentes intenções, como a de esclarecer ideias, suas e dos jovens, refazer uma questão proposta por um estudante para que ele pense melhor sobre a sua dúvida, ou a de transformar uma questão em uma sugestão orientadora para a atividade.

Essa postura tem, também, a função de ajudar os estudantes a compreender que o papel principal do professor é apoiá-los em seu trabalho e não simplesmente dizer se estão certos ou não, o que, aliás, deve ocorrer cada vez menos nessas aulas.

Em alguns momentos, a atividade investigativa pode sofrer bloqueio porque os estudantes não compreendem certos conceitos ou representações importantes para a sua continuidade. A intervenção do professor nesses momentos precisa ser a de fornecer ou recordar conceitos anteriormente estudados para que os estudantes possam dar continuidade a sua tarefa.

Outra prática importante por parte do professor é a de promover a reflexão dos estudantes sobre o trabalho realizado e ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram.

**Raciocinar matematicamente:** Em atividades de investigação, é natural que os estudantes apresentem questões ou conjecturas que o professor não havia pensado antes. É preciso avaliar rapidamente se será apropriado parar para pensar junto com os estudantes ou deixar para um momento posterior.

Construir o raciocínio matemático junto com os estudantes pode ser interessante, pois é uma oportunidade de acompanharem o desenvolvimento da ideia, enquanto o professor pensa em voz alta, colocando a questão debatida em termos matemáticos e buscando a sua justificativa.

Tudo o que foi exposto até este ponto deixa claro que em toda atividade de investigação devem ser dados um tempo e uma oportunidade aos estudantes para que possam organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los para os colegas e para o professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Desse modo, será possível a todos reconhecer o valor dos processos matemáticos, adquirir confiança em sua capacidade de fazer Matemática e, finalmente, tornar-se aptos a resolver problemas.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas a serem propostas se restrinjam apenas às investigativas. Depois de propor problemas de investigação, o professor deve abordar problemas de familiarização com o novo conhecimento apresentando diferentes domínios matemáticos e contextos.

Os contextos podem variar entre propostas envolvendo aspectos da história da Matemática, explorações de situações envolvendo a Etnomatemática, e, como os jovens estão conectados o tempo todo – inclusive durante as aulas –, atividades envolvendo as Tecnologias da Informação e Comunicação são potencialmente ricas nesse processo.

## Pensamento computacional

O desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado no Ensino Fundamental, pode ser aprofundado nesta etapa da escolaridade. A BNCC aponta que esse tipo de pensamento

[...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (BNCC, 2018, p. 474).

Desse modo, ele pode ser entendido como um processo de formulação e resolução de problemas cujas soluções são representadas por meio de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente. Esse processo envolve ações de pensamento que tratam da decomposição do problema em etapas, do reconhecimento de padrões e suas repetições, da abstração e generalização que permite a construção de algoritmos e, por fim, da avaliação da solução.

Para auxiliar os estudantes a desenvolver seu pensamento computacional, é necessário orientá-los para que empreguem estas quatro ações no momento da resolução de problemas:

- **ponto de partida:** decomposição do problema em partes, dividindo-o em problemas menores e mais fáceis de manejar. Tal ação, além de tornar todo o processo de solução mais explícito, facilita a detecção de erros pelo caminho.
- **reconhecimento de padrões:** essa ação é composta de dois momentos, um primeiro em que se deve buscar características e/ou propriedades que sejam comuns às várias partes do problema decomposto e que podem ser replicadas em cada uma delas. No segundo momento, deve ocorrer uma busca de soluções já utilizadas anteriormente que possam ser empregadas no problema atual, mesmo que com adaptações. Esse segundo momento é o passo necessário para a próxima ação.
- **abstração e generalização:** trata-se de identificar, em uma situação, quais elementos não são relevantes reduzindo, assim, o foco de atenção aos detalhes substanciais para a resolução do problema. Nesse movimento, é possível detectar características/propriedades comuns a um conjunto de dados e identificar, por generalização, quais procedimentos ou algoritmos poderão ser adotados e, por fim, escrever o algoritmo. Reconhecer tipos de estruturas que podem ser reaplicadas faz os problemas se tornarem mais simples.
- **avaliação:** ela ocorre a todo momento, desde que se toma conhecimento sobre o problema a resolver até se chegar ao algoritmo que o resolve. É necessário que, em cada uma das ações, aspectos como eficácia, consumo de recursos, rapidez, facilidade, abrangência da solução, entre outros sejam analisados para que se tenha, ao final, um resultado mais robusto e confiável. Outra característica da avaliação é a de manter controle sobre as necessidades e propósitos das estratégias adotadas para prevenir que pequenos erros de percurso não se tornem grandes complicações ao final.

Muitos dos problemas discutidos em sala de aula podem ser analisados sob esse ponto de vista, sendo recomendado propor aos estudantes que representem as soluções por meio de fluxogramas que descrevam o processo de solução ou que realizem descrições orais e/ou escritas do passo a passo de suas resoluções.

Por outro lado, é também necessário que, no planejamento de sequências de trabalho e de ações pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula, sejam consideradas as descobertas recentes, as novas tecnologias e a sua influência no conhecimento científico. Nesse contexto, destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos para o ensino e a aprendizagem matemática. Essas explorações devem, na medida do possível, ser feitas também por meio de atividades investigativas. Nesta Coleção, a seção



**Explorando a tecnologia**, presente em todos os Volumes, relaciona explorações matemáticas a softwares específicos, que atendem ao proposto na BNCC referente à cultura digital

[...] fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica (BNCC, 2018, p. 474).

Os softwares explorados na Coleção são o **GeoGebra**, o **LibreOffice** e o **Scratch**, todos eles gratuitos e com facilidade de acesso *on-line*.

O **GeoGebra** é um software específico de Matemática voltado para o estudo de Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Ele é conhecido como um software de matemática dinâmica por proporcionar movimentações e modificações do objeto matemático construído, permitindo, assim, o desenvolvimento de processos investigativos nas diferentes frentes estudadas, graças à interconexão que possui entre geometria, álgebra e planilha de cálculo. Em todos os Capítulos em que se propõe sua utilização, há uma sugestão de uso com suporte para a exploração pelos estudantes.

O **LibreOffice** também é apresentado nesta Coleção como um recurso gratuito para o uso de planilhas eletrônicas, editor de fórmulas matemáticas e gráficos, além de textos e apresentações. Nos Capítulos em que seu uso é sugerido, há indicações de possibilidades de exploração pelos estudantes, cabendo ao professor mobilizar os processos investigativos por meio de questões que os incentivem a realizar ações de busca para a aprendizagem esperada.

O **Scratch** é um software voltado para a programação de animações ou jogos, utilizando imagens e sons disponíveis. Essa programação é feita a partir de blocos com os comandos básicos para a movimentação pretendida do personagem em cena. Seu uso em sala de aula é favorecido por ser extremamente intuitivo e visual com manipulação simples de suas estruturas e construção dos comandos. Esse recurso dá respaldo ao trabalho do desenvolvimento do pensamento computacional, pois favorece a capacidade analítica de antecipação da ação que se espera do personagem, montada por meio de blocos preestabelecidos, passíveis de serem encaixados uns com os outros de acordo com a lógica desejada. Sua aplicação também tem caráter investigativo, uma vez que os resultados podem ser imediatamente testados e observados na tela, de modo a permitir a análise do erro e sua correção a cada etapa construída.

## > AVALIAÇÃO

Diante de diferentes propostas metodológicas que podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula, é preciso considerar que apenas os processos tradicionais de avaliação não são suficientes para revelar a qualidade das aprendizagens reais dos estudantes e para fornecer essa informação a todos que dela vão fazer uso – gestores, professores, estudantes.

A avaliação é base para tomadas de decisão e, por isso, deve ser considerada como uma ação que está sempre a serviço de desvelar a qualidade da realidade. De acordo com Luckesi (2016), precisamos “ter clareza de que nossos atos avaliativos sempre operam com um único algoritmo metodológico, que se resume em coletar dados da realidade e qualificá-la tendo por base um padrão de qualidade”.

Coletar dados da realidade significa considerar a educação integral do estudante, isto é, observá-lo não somente do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo, mas também de seu aprimoramento socioemocional, como apontado pela BNCC.

No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades (BNCC, 2018, p. 14).

Note que esse parágrafo traz elementos substanciais para a construção de uma pauta de observação para se realizar uma avaliação que de fato possa qualificar a realidade da aprendizagem desenvolvida. Essa pauta de observação deve ser feita pelo professor durante a elaboração de seu planejamento e deve estar sempre presente no decorrer de todo o processo vivido pelo estudante, o que caracteriza uma avaliação processual. Cabe aqui ressaltar que esse processo avaliativo não descarta a verificação das aprendizagens específicas de cada objeto de conhecimento trabalhado, que, normalmente, estão presentes nas avaliações externas como Saeb, Enem, vestibulares, que também são abordadas nos Volumes desta Coleção.

Embora para cada um dos componentes curriculares seja preciso eleger as habilidades específicas, uma pauta de observação pode ter a seguinte configuração:

<b>Aplicar conhecimentos para resolver problemas</b>			
<b>Habilidades específicas</b>	<b>Qualidade</b>		
Identificar uma ...			
Realizar transformações entre ...			
Realizar cálculos envolvendo números...			
Determinar ... e reconhecer que ...			
Resolver problemas que envolvam ... validando estratégias e resultados			
Identificar regularidades e padrões em ...			
Identificar e utilizar diferentes formas e propriedades ...			
Reconhecer que os valores obtidos são ...			
Construir argumentos consistentes para explicar ...			
Analizar os elementos obtidos e produzir a comunicação de suas conclusões a serem apresentadas tanto oralmente como por escrito.			
<b>Habilidades socioemocionais</b>			
Utilizar as informações disponíveis de modo ético.			
Atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais.			
Ter autonomia para tomar decisões.			
Ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções.			
Conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.			

No registro da qualidade observada, pode-se dar valores, por exemplo, de 0 a 2:

- 0 – a ser desenvolvida, requer investimento do professor e do estudante.
- 1 – em desenvolvimento, apresenta instabilidade e requer intervenções de suporte por parte do professor.
- 2 – desenvolvida e consolidada.

Essa pauta de observação deve ser ainda apoiada pelo quadro de acompanhamento da construção dos processos argumentativos pelos estudantes.



Outro aspecto da avaliação a ser tratado é o da autoavaliação, que contribui para estimular o estudante a tomar consciência de seu próprio percurso de aprendizagem e se responsabilizar pelo seu empenho em avançar.

Nessa perspectiva, entende-se que a autoavaliação é um componente importante ao ser utilizada como um instrumento da avaliação formativa, pois auxilia os estudantes a adquirirem uma capacidade cada vez maior de analisar suas próprias responsabilidades, atitudes, comportamento, pontos fortes e fracos, sua condição de aprendizagem e suas necessidades para atingir os objetivos. Com o exercício constante da autoavaliação, os estudantes serão capazes de desenvolver sentimentos de responsabilidade pessoal e de apreciação da força dos empenhos individuais e de grupo. Além disso, aprendem a encarar prontamente as capacidades em várias empreitadas e a afinar suas potencialidades e contribuições, além de desenvolver a capacidade de análise contínua na qual leva em conta o que já aprendeu, o que ainda não aprendeu, os aspectos facilitadores e os dificultadores do seu trabalho, conseguindo planejar suas ações. Além disso, a autoavaliação também incentiva os jovens a pensar sobre si mesmos e os conduz a uma modalidade de apreciação que se pratica durante a vida inteira e os ajuda a avançar em sua autonomia.

A autoavaliação também deve ser orientada pelo professor por meio de questões que estimulem os estudantes a refletir sobre suas ações durante a realização das atividades. No quadro a seguir, há exemplos de questões para esse fim.

#### AUTOAVALIAÇÃO

1. Entre os assuntos abordados, qual você considerou mais interessante? E o menos interessante? Explique suas escolhas.
2. Comparando o trabalho de seu grupo com os dos outros, como você avalia a produção de vocês?
3. Considerando a avaliação feita anteriormente, você acha que a produção do seu grupo poderia ter sido melhor? Em qual(is) aspecto(s)?
4. Como você avalia a participação de cada um dos integrantes de seu grupo para a realização do trabalho? Como você se classifica dentro do seu grupo de trabalho: colaborativo(a), proativo(a), coordenador(a), inovador(a), organizador(a)?
5. As discordâncias entre você e seus colegas de grupo ocorreram de modo a chegarem a um consenso, com respeito pelas ideias do outro e a construção de argumentação consistente, proposta com cordialidade? Dê um exemplo.
6. Você e seu grupo criaram estratégias para evitar distrações e manter a concentração, o esforço e a motivação durante a realização das tarefas? Dê um exemplo.
7. Durante as apresentações dos vários grupos, você se manteve envolvido e participante das discussões? O que você aprendeu que não sabia?
8. Quais conhecimentos matemáticos você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
9. Quais conhecimentos de outras áreas você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
10. Em que medida a seção **Para refletir** contribuiu para a análise de sua aprendizagem em cada um dos Capítulos que compuseram os temas desse período?

## Volumes da obra

Esta Coleção é formada por seis Volumes, sendo cada um constituído por um conjunto de objetos de conhecimento que estão integrados dentro da própria Matemática. Além disso, apresentam também situações cuja contextualização evidencia os modelos matemáticos que representam fatos e fenômenos de outras áreas de conhecimento e presentes no cotidiano.

Tal estruturação pode ser observada em todos os Volumes da Coleção, uma vez que essas integrações são destacadas em várias das seções que compõem os Capítulos – **Abertura, Conexões, História da Matemática**, além de destaque sobre alguns aspectos do conhecimento matemático, que embasam reflexões sobre temas transversais e aspectos

curiosos de sua presença na vida e no desenvolvimento humano, apontados nos boxes **Fórum**, **Saiba que... e Pense e responda**.

Essa estruturação permite que os Volumes possam ser utilizados nas diferentes séries do Ensino Médio, de acordo com a proposta curricular que embasa o planejamento do professor e da sua escola, e com a distribuição da carga horária destinada à formação geral e aos itinerários formativos.

Outro aspecto a ser destacado é que como o mais indicado ao desenvolvimento das propostas é que sejam feitas de modo investigativo, não se considera como requisito de trabalho o conhecimento prévio dos estudantes. Consideramos que se não houver por parte dos estudantes algum conhecimento necessário para o desenvolvimento da atividade proposta, essa ausência de conhecimento passa também a ser um aspecto da investigação. Essa condição é também significativa para a flexibilidade de uso dos livros que compõem esta Coleção. O professor, ao diagnosticar a ausência de estabilidade no emprego de algum conhecimento requerido na situação proposta, deve indicar aos estudantes a necessidade de buscar apoio em outros materiais disponíveis ou na internet e em aplicativos.



## > ESTRUTURA DA OBRA

Esta obra foi elaborada tendo em vista atender à BNCC, contemplando propostas de trabalho que promovam o desenvolvimento das competências gerais, específicas e habilidades presentes nesse documento, sem, no entanto, deixar de lado suas características essenciais de atendimento às expectativas de professores e estudantes do Ensino Médio.

Cada um dos livros que compõem esta Coleção está estruturado com seções e boxes que possibilitam ao professor uma exploração mais dinâmica do material, podendo indicar aos estudantes por qual das propostas iniciar o trabalho.

A **Abertura** de Capítulo sempre apresenta uma contextualização interessante de aplicação do conteúdo que será abordado. Considerando a diversidade possível de uso dos conteúdos matemáticos, ora são apresentadas situações atuais, da história da Matemática, ora sobre alguma profissão, porém sempre tendo em vista o estabelecimento de uma relação entre o que está sendo apresentado e os conteúdos a serem desenvolvidos no Capítulo. O professor poderá usá-la para um levantamento diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já possuem sobre o conteúdo a ser desenvolvido. Além disso, estão também indicadas as habilidades e competências que os assuntos abordados no Capítulo possibilitam desenvolver.

A seção **Atividades resolvidas** tem por princípio a apresentação de uma forma organizada de resolução e de emprego da linguagem matemática. Um aspecto dessa seção a ser considerado e analisado, tanto pelos professores como pelos estudantes, é que há situações nas quais diferentes caminhos são discutidos para se chegar à solução de uma questão, buscando destacar o fato de que não há um único modo de resolução em Matemática e que os estudantes têm liberdade de criar estratégias próprias de resolução.

Com as **Atividades**, busca-se a familiarização dos estudantes com os conteúdos estudados no Capítulo, tanto com problemas envolvendo diferentes contextos do dia a dia como com questões específicas para a sistematização de procedimentos necessários para utilização em diferentes situações. Estão presentes nessa seção questões do Enem ou de vestibulares de instituições de Ensino Superior de todas as regiões do país e outras elaboradas pelos autores para que os estudantes tenham maiores oportunidades de desenvolvimento das competências e habilidades desenvolvidas em cada Capítulo.

A seção **Conexões** explora temas diversos, com foco na interdisciplinaridade, com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes. A



seção apresenta um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, explorando gráficos, infográficos, tabelas etc. que se conectam com o conteúdo tratado no Capítulo. As questões apresentadas nessa seção são principalmente voltadas a atividades investigativas a serem realizadas em duplas ou grupos colaborativos e não exigir processos reflexivos e/ou tomadas de decisão sobre intervenções na comunidade. Outro aspecto importante dessa seção é o fato de em muitas propostas os estudantes serem convidados a apresentar suas produções aos colegas e ao professor, o que possibilita o desenvolvimento de sua comunicação matemática.

A seção **História da Matemática** aborda fatos históricos ligados à Matemática, a fim de contextualizar o conteúdo abordado no Capítulo e/ou apresentar o desenvolvimento e a evolução de determinada ideia ou teoria, ao longo do tempo. A abordagem histórica é sempre um modo interessante de motivar os estudantes para as possibilidades de criação em Matemática e para destacar aspectos referentes à observação, análise e percepção de regularidades que estão por trás dessas descobertas.

**Explorando a tecnologia** é uma seção que promove o desenvolvimento e/ou aprofundamento de conhecimentos matemáticos, por meio de explorações de softwares livres, propiciando um trabalho interativo com alternativas para investigar possibilidades de resolução e de análise de consequências em uma representação ao se fazer modificações em outra, por exemplo. Para essas discussões, há orientações iniciais de como utilizar o software indicado para cada situação, além de indicação de endereço para a realização do *download* e orientações para sua instalação. O pensamento computacional também poderá ser desenvolvido por meio de atividades chamadas de *desplugadas*, por não dependerem de uso do computador, e que colocam em evidência o emprego da lógica de programação.

A seção **Atividades complementares** tem por objetivo apresentar questões do tipo múltipla escolha presentes em exames oficiais como Enem, olimpíadas nacionais e vestibulares realizados em todas as regiões brasileiras, priorizando os mais recentes. Sua presença no livro e as possíveis discussões a serem realizadas pelos professores a partir deles apontam para a necessidade da sistematização de alguns aspectos e procedimentos abordados no Capítulo.

Com a seção **Para refletir**, os estudantes são estimulados a realizar reflexões para identificar possíveis conexões com o que foi estudado no Capítulo e avaliar sua aprendizagem com as ações desenvolvidas no decorrer do trabalho. São ótimas oportunidades para a realização da autoavaliação pelos estudantes.

Além das seções, os Volumes apresentam também boxes que enriquecem as propostas apresentadas e ampliam as possibilidades de os estudantes desenvolverem as competências gerais da BNCC.

No boxe **Fórum** é apresentada uma situação referente a um tema contemporâneo, que possui alguma relação com o conteúdo abordado no Capítulo, seguido de algumas questões, com o intuito de promover debates e/ou trocas e compartilhamento de conhecimentos. Tais ações exigem a mobilização de estratégias de debate e de construção de argumentação coerente para defesa de seu ponto de vista. Além disso, há a possibilidade de ser utilizado em momentos *on-line* por meio de grupos fechados de discussão em *e-mail*, rede social ou aplicativos de troca de mensagens.

O **Pense e responda** é um boxe que traz perguntas curtas e diretas sobre propostas a serem investigadas pelos estudantes, incentivando-os a elaborar hipóteses e buscar sua comprovação ou negação.

O boxe **Saiba que...** tem como função principal fornecer uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo. Pode ser referente à teoria apresentada, a uma determinada forma de resolução de um problema ou, ainda, para implementar o conteúdo apresentado.

Nos boxes **Para ler**, **Para assistir**, **Para acessar** e **Para ouvir**, como o próprio nome indica, são fornecidas sugestões de livros, *links*, filmes, podcasts etc. Sua finalidade é a de fornecer um canal confiável com informações complementares a respeito do tópico que está em estudo.



## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA E COMENTADA

BONOMI, M. C.; LAURO, M. M. **Funções elementares, equações e inequações:** uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.

- Aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de softwares.

BOYER, C. **História da Matemática.** 4. ed. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

- O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017.** Brasília, DF: Presidência da República, 2017. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1 000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conhecida como o Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília, DF, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, habilidades e aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica.** Brasília, DF, 2013. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192). Acesso em: 14 ago. 2020.

- As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. **Guia alimentar para a população brasileira.** 2ª ed. Brasília, DF, 2014. Disponível em: [https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia\\_alimentar\\_populacao\\_brasileira\\_2ed.pdf](https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC:** contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao\\_temas\\_contemporaneos.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento explicativo sobre os Temas Contemporâneos Transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. In: DAYRELL, J.; CARRANO, P.; MAIA, C. L. **Juventude e Ensino Médio:** sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: [https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo\\_juventude-e-ensino-medio\\_2014.pdf](https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARDOSO, M. C.; HORA, D. M. **Competências e habilidades:** alguns desafios para a formação de professores. Disponível em: [http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer\\_histedbr/jornada/jornada11/artigos/7/artigo\\_simposio\\_7\\_713\\_micheli\\_ccardoso@yahoo.com.br.pdf](http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada11/artigos/7/artigo_simposio_7_713_micheli_ccardoso@yahoo.com.br.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.

- Texto sobre a formação de professores frente às novas demandas educativas no mundo contemporâneo.

CARVALHO, J. P. de. Um problema de Fibonacci. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 17. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta uma explicação sobre a história de Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais.** Campos dos Goytacazes: UENF, 2016.

- O material explora a utilização do software **GeoGebra** e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Reflexões sobre o trabalho colaborativo e seu uso em sala de aula.



- EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.
- O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática cronologicamente.
- FAJARDO, R. A. S. **Teoria dos Conjuntos.** IME-USP. São Paulo, 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Texto produzido para estudantes do curso de graduação, disciplina de Teoria dos Conjuntos. Nele o assunto é abordado de forma acadêmica, possibilitando o aprimoramento do estudo por parte do professor.
- HONÓRIO, H. L. G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática – estudos iniciais. In: EBRAPEM, XX. **Artigo** [...]. Paraná, 2016. Disponível em: [http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6\\_Hugo\\_Hono%CC%81rio.pdf](http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf). Acesso em: 14 ago. 2020.
- Reflexões sobre a metodologia ativa de sala de aula invertida a partir de sua aplicação prática.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.
- Livro que aborda os conceitos de conjuntos, números e funções.
- LUCKESI, C. **Tipificação da avaliação em educação:** uma questão epistemológica. Artigo 109, 2016. Disponível em: <http://luckesi.blogspot.com.br/>. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Nesse artigo, há discussões sobre as adjetivações aplicadas ao ato de avaliar, discutindo como são colocadas de acordo com os momentos de sua execução.
- MELO, M. C. P.; JUSTULIN, A. M. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, XV. **Anais** [...]. Londrina, 2019. Disponível em: [http://www.sbmeparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV\\_EPREM/paper/viewFile/1019/881](http://www.sbmeparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881). Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresentação teórica e prática da metodologia ativa de resolução de problemas.
- MONTEIRO, M. S.; CERRI, C. **História dos números complexos.** São Paulo: CAEM – IME-USP, 2011. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.
- MORÁN, J. **Mudando a educação com metodologias ativas.** Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. vol. II. Carlos Alberto de Souza e Ofélia Elisa Torres Morales (Org.). PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: <https://www.uniavan.edu.br/uploads/arquivo/N62vWDM7yb.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Discussões do pesquisador brasileiro sobre a importância do trabalho com metodologias ativas no ensino atual.
- PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.
- SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.
- Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.
- TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis: Vozes, 2002.
- Nessa obra, o autor discute e qualifica quais são os saberes que servem de base ao ofício de professor.
- TENENTE, L. 30% dos domicílios no Brasil não têm acesso à internet; veja números que mostram dificuldades no ensino à distância. **G1**, 26 maio 2020. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2020/05/26/66percent-dos-brasileiros-de-9-a-17-anos-nao-acessam-a-internet-em-casa-veja-numeros-que-mostram-dificuldades-no-ensino-a-distancia.ghtml>. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresenta alguns dos desafios do ensino remoto emergencial, necessário na pandemia, devido à limitação de acesso à internet e de equipamentos adequados para estudo.
- UNESCO. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos:** satisfação das necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien, 1990. Brasília, DF, 1990. Disponível em: [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291\\_por](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por). Acesso em: 14 ago. 2020.
- Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.
- WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas? **RPM**, Rio de Janeiro, n. 33. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.



## > COMENTÁRIOS E SUGESTÕES DE ABORDAGEM PARA ESTE VOLUME

Os conteúdos propostos e desenvolvidos nesta obra buscam despertar no estudante sua curiosidade intelectual, explorando diversas situações de forma reflexiva e crítica, seja no contexto da própria Matemática, do dia a dia e de outras áreas de conhecimento, interpretando e analisando dados para tomar decisões éticas e socialmente responsáveis. Nesse sentido, espera-se que o estudante reconheça a relação entre o conhecimento matemático e as práticas sociais, inerente à relação do ser humano com o mundo e à necessidade de resolver problemas diversos.

Do ponto de vista didático-pedagógico, os conceitos matemáticos em estudo devem ser bem fundamentados e possibilitar aos estudantes novos saberes que estimulem processos mais elaborados de reflexão e de abstração, dando sustentação ao pensamento que permite formular e resolver problemas, bem como construir de forma autônoma uma visão integrada da Matemática e de outras áreas. Para isso, as situações de aprendizagem devem ser planejadas tendo como perspectiva o protagonismo do estudante para que possa assumir uma postura ativa nos diversos contextos em que a Matemática está presente.

O objetivo deste material é oferecer subsídios para a atividade docente, que assume um papel relevante dentro do complexo processo de ensino e aprendizagem, de forma articulada com as propostas apresentadas no **Livro do estudante**.

Nesta parte das **Orientações para o professor**, são apresentadas algumas estratégias para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de forma a contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades previstas na BNCC. Além disso, há sugestões de atividades complementares e referências de outros materiais atualizados que podem ser utilizados. Vale pontuar que esta não pretende ser a única referência de consulta, ou ainda, apresentar soluções plenas para os desafios enfrentados pelos professores, mas constituir mais uma alternativa para auxiliar a atividade docente e a aprendizagem, contribuindo para otimização do tempo do professor quanto ao planejamento de suas aulas.

Este Volume é organizado em quatro capítulos e destacamos, entre seus objetivos, propiciar ao estudante oportunidades em que ele possa valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos pela humanidade para entender a realidade, utilizando a linguagem matemática para se expressar, escolhendo a representação mais adequada para cada situação (algébrica, gráfica, entre outras). Isso contribui para a formação de um cidadão capaz de ler, interpretar e comunicar informações em diversas áreas do conhecimento, em especial, utilizando linguagem científica, desenvolvendo as competências gerais **1** e **4**.

Além disso, as situações propostas, incluindo aquelas que fazem uso de tecnologias digitais de informação visam contribuir com a capacidade de argumentação, sempre com base em fatos e dados para justificar suas escolhas e tomadas de decisão, de maneira ética e socialmente responsável, contribuindo para desenvolver as competências gerais **5** e **7**.

O primeiro capítulo foca no estudo de matrizes e sua aplicação na resolução de sistemas de equações lineares. Esses assuntos permitem que os estudantes sejam capazes de construir modelos, matemáticos ou não, para resolver problemas em



diferentes contextos, o que favorece principalmente o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, a habilidade **EM13MAT301**. A representação gráfica da solução de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas e o uso de tecnologias na resolução de sistemas ampliam a capacidade de analisar a viabilidade de ações e a adequação das soluções propostas, construindo argumentos consistentes, colaborando com o desenvolvimento das competências específicas **1** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

O segundo capítulo explora a porcentagem a partir dos conceitos matemáticos de aumentos e descontos, juros simples e compostos, índices de inflação, sistemas de amortização de financiamento e empréstimo, e orçamento familiar, favorecendo a reflexão e a análise crítica de questões ligadas à construção de nossa sociedade, colaborando com o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, a habilidade **EM13MAT104**. O uso de tecnologias digitais para fazer simulações envolvendo problemas do dia a dia relacionados a esse contexto favorece a compreensão e o trabalho com esses conceitos, desenvolvendo as competências **2** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, as habilidades **EM13MAT203** e **EM13MAT303**.

O terceiro capítulo é dedicado à Matemática Financeira e traz situações em que são aplicados os conceitos estudados no capítulo anterior. Ao apresentar os sistemas de amortização mais utilizados, os estudantes são levados a analisar de maneira crítica as particularidades dos financiamentos, comparando os juros em cada tipo, colaborando com o desenvolvimento das competências específicas **2** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, as habilidades **EM13MAT203** e **EM13MAT303**. Ao explorar o orçamento familiar, são discutidos diversos conceitos que enriquecem a educação financeira dos estudantes, colaborando para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, a habilidade **EM13MAT104**. Também é explorado o conceito de inflação para que os estudantes se apropriem dos diferentes índices que mostram a variação no custo de vida, promovendo reflexões do uso responsável do dinheiro.

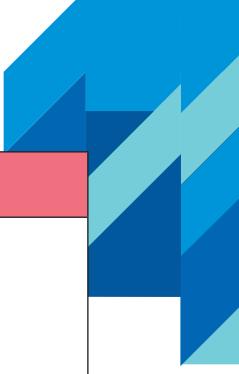
O quarto capítulo trata de grandezas e suas medidas, articulando fortemente com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. São apresentados textos de divulgação científica e dados expressos em diferentes escalas e unidades, o que propicia uma visão mais ampla da relação da Matemática com outras áreas, levando os estudantes a realizar conclusões mais precisas, refletindo a respeito da incerteza presente nas medições realizadas por instrumentos de medida e precisão. São exploradas, também, as unidades de medida usadas nas novas tecnologias de informação e comunicação. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, as habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT313** e **EM13MAT314**.

As atividades propostas buscam possibilitar aos estudantes o desenvolvimento da investigação e da reflexão. Na seção **Explorando a tecnologia** são utilizadas, com frequência, planilhas eletrônicas, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **5**. Temas como mobilidade urbana, cartão de crédito, imposto de renda e cartografia figuram na seção **Conexões**, contribuindo para um trabalho integrado com as áreas de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, o que possibilita analisar e compreender a realidade utilizando conhecimentos de diferentes áreas do conhecimento e favorecendo o desenvolvimento das competências

gerais **1, 4 e 7**. As questões coletivas, propostas nas **Aberturas** e no boxe **Fórum**, bem como em diversos momentos, oportunizam a construção de ideias, promovem o diálogo e o respeito mútuo.

No quadro a seguir são apresentados os principais tópicos trabalhados neste Volume e algumas das relações possíveis de serem feitas com outros temas explorados na coleção.

Tópicos	Temas relacionados
<b>Capítulo 1</b> <b>Matrizes e sistemas lineares</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Matrizes</li> <li>• Matriz quadrada</li> <li>• Igualdade de matrizes</li> <li>• Adição e subtração de matrizes</li> <li>• Matriz oposta</li> <li>• Multiplicação de um número real por uma matriz</li> <li>• Multiplicação de matrizes</li> <li>• Matriz inversa</li> <li>• Equações matriciais</li> <li>• Equação linear</li> <li>• Sistemas lineares <math>2 \times 2</math></li> <li>• Sistemas lineares <math>m \times n</math></li> <li>• Sistemas equivalentes</li> <li>• Matrizes associadas a um sistema linear</li> <li>• Sistemas lineares escalonados</li> <li>• Classificação de sistemas lineares escalonados</li> <li>• Escalonamento de sistemas lineares</li> </ul>
<b>Capítulo 2</b> <b>Porcentagem e juros</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Porcentagem</li> <li>• Aumentos e descontos</li> <li>• Aumentos e descontos sucessivos</li> <li>• Lucro e prejuízo</li> <li>• Juro simples</li> <li>• Juro composto</li> <li>• Juro simples e função afim</li> <li>• Juro composto e função exponencial</li> </ul>
<b>Capítulo 3</b> <b>Matemática financeira</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sistemas de amortização</li> <li>• Sistema Price</li> <li>• Sistema de Amortização Constante (SAC)</li> <li>• Orçamento familiar</li> <li>• Inflação</li> </ul>



	<b>Tópicos</b>	<b>Temas relacionados</b>
<b>Capítulo 4 Grandezas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sistema Internacional de Unidades (SI)</li> <li>• Grandezas derivadas e unidades de medida derivadas</li> <li>• Velocidade média</li> <li>• Densidade demográfica</li> <li>• Consumo de energia elétrica</li> <li>• Notação científica</li> <li>• Múltiplos e submúltiplos das unidades de medida</li> <li>• Unidades de medida astronômicas</li> <li>• Unidades de transferência e de armazenamento de dados</li> <li>• O bit e o byte</li> <li>• Os múltiplos do bit e do byte</li> <li>• Taxa de transferência</li> <li>• Precisão e instrumentos de medida</li> <li>• Média e desvio padrão</li> <li>• Instrumentos de medida de precisão</li> <li>• Algarismos significativos e duvidosos</li> <li>• Adição e subtração considerando algarismos significativos</li> <li>• Multiplicação e divisão considerando algarismos significativos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funções afim e linear</li> <li>• Proporcionalidade</li> <li>• Potências de base 10</li> </ul>

## Cronograma

O quadro a seguir apresenta uma sugestão de cronograma semestral, considerando cinco aulas semanais. No entanto, é importante que o professor avalie sua realidade e realize as adequações necessárias de modo a privilegiar o desenvolvimento dos estudantes de acordo com suas necessidades e com as escolhas feitas pela comunidade escolar, em especial, pelo próprio estudante.

<b>Semana (5 aulas)</b>	<b>Capítulo</b>	<b>Tópicos</b>
1 <sup>a</sup>	1	Abertura / Introdução / Matrizes / Matriz quadrada / Igualdade de matrizes / Adição e subtração de matrizes
2 <sup>a</sup>	1	Multiplicação de um número real por uma matriz / Multiplicação de matrizes / Matriz inversa / Equações matriciais / Conexões

Semana (5 aulas)	Capítulo	Tópicos
3 <sup>a</sup>	1	Sistemas lineares / Equação linear / Sistemas lineares $2 \times 2$
4 <sup>a</sup>	1	Sistemas lineares $m \times n$ / Matrizes associadas a um sistema linear / Sistemas lineares escalonados / Classificação de sistemas lineares escalonados
5 <sup>a</sup>	1	Escalonamento de sistemas lineares / História da Matemática / Explorando a tecnologia / Para refletir
6 <sup>a</sup>	2	Abertura / Introdução / Porcentagem / Aumentos e descontos
7 <sup>a</sup>	2	Lucro e prejuízo / Juros / Juro simples
8 <sup>a</sup>	2	Juro composto / Conexões / Juros e funções / Juro simples e função afim
9 <sup>a</sup>	2	Juro composto e função exponencial / Explorando a tecnologia / Para refletir
10 <sup>a</sup>	3	Abertura / Introdução / Sistemas de amortização / Sistema Price
11 <sup>a</sup>	3	Sistema de Amortização Constante (SAC) / História da Matemática / Orçamento familiar
12 <sup>a</sup>	3	Inflação / Conexões / Explorando a tecnologia / Para refletir
13 <sup>a</sup>	4	Abertura / Introdução / O Sistema Internacional de Unidades (SI) / Medidas muito grandes e medidas muito pequenas
14 <sup>a</sup>	4	Unidades de transferência e de armazenamento de dados / Utilizando as unidades de medida
15 <sup>a</sup>	4	Precisão e instrumentos de medida / Média e desvio padrão / Algarismos significativos e duvidosos
16 <sup>a</sup>	4	Adição e subtração considerando algarismos significativos / Multiplicação e divisão considerando algarismos significativos / Conexões / Explorando a tecnologia / Para refletir

Para todos os blocos semanais, estão disponíveis atividades resolvidas e atividades propostas. Recomenda-se a seleção de parte das atividades para ser desenvolvida em sala de aula (individualmente, em duplas ou grupos maiores) e outra parte para ser realizada fora do horário de aula. Além disso, é fundamental estabelecer um cronograma de avaliações que permita acompanhar os processos de aprendizagens dos estudantes no decorrer dos capítulos. No cronograma apresentado anteriormente, sugere-se que ocorra no fim de cada ciclo de duas semanas de estudo.



# Matrizes e sistemas lineares

## A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas, habilidades e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

► **Competências gerais da BNCC:** 1, 2, 4, 5 e 7

► **Competências específicas e habilidades:**

**Área de Matemática e suas Tecnologias**

- Competência específica 1
- Competência específica 3: **EM13MAT301**
- Competência específica 4

**Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**

- Competência específica 1
- Competência específica 3

► **Temas Contemporâneos Transversais:**

- Vida Familiar e Social
- Trabalho

## Orientações didáticas

### Abertura do Capítulo

A abertura deste Capítulo apresenta o enunciado da lei de Lavoisier: em uma reação química em um sistema fechado, os reagentes e os produtos apenas se arranjam, sem perda nem ganho de elementos. Em outras palavras, utilizando uma frase popular, “na natureza, nada se perde e nada se cria, tudo se transforma”. Aproveitar o momento para verificar se os estudantes já tinham ouvido falar de Lavoisier ou dessa frase.

Também é citada no texto inicial a noção de cálculo estequiométrico, utilizado no balanceamento de equações para determinar a quantidade de substâncias presentes em uma reação química.

Ao explorar esses assuntos, os estudantes estão trabalhando as competências gerais **1** e **2**, pois estão em contato com conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural, e exercitam a curiosidade intelectual recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo a reflexão e a análise crítica. Também desenvolvem a competência específica **3** de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, pois analisam situações com base no conhecimento científico.

Para ampliar os comentários a respeito de Lavoisier, pode-se apresentar o seguinte texto.

[...]

Na década de 1780, Lavoisier usou sua teoria do oxigênio para construir uma estrutura completamente nova para a química.

Ele esclareceu o que é um elemento químico: uma substância, disse ele, que não pode ser reduzida a nada mais simples.

Ele compilou uma lista de nada menos que 33 desses elementos e desenvolveu métodos para dividir compostos químicos em seus elementos componentes e calcular as proporções relativas de cada um.

Além disso, ele introduziu um moderno sistema de nomes que permite que as equações químicas sejam escritas em uma linguagem universal que seja entendida em todo o mundo.

Lavoisier apresentou tudo isso em um livro de 1789, intitulado *Traité Elementaire de Chimie* (ou Tratado Elementar de Química), publicação que lançou as bases para o futuro desta área da ciência.

Ele é considerado o pai da química moderna e dá nome à conhecida Lei de Lavoisier, ou Lei da Conservação das Massas, princípio de que nada se perde ou se cria (o conceito já havia sido apresentado antes por outro cientista, o russo Mikhail Lomonosov, mas o texto deste não repercutiu).

[...]

VENTURA, D. Antoine Lavoisier, o químico revolucionário que foi decapitado graças à disputa científica. **BBC News Mundo**, 28 dez. 2019. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-50861019>. Acesso em: 11 ago. 2020.

As questões de abertura deste Capítulo têm como objetivo verificar a compreensão dos estudantes a respeito do texto e levantar os conhecimentos prévios que eles têm sobre o assunto apresentado. Elas podem ser desenvolvidas em parceria com o professor de Química da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

A atividade **1** busca identificar se os estudantes já tiveram contato com alguma situação envolvendo uma reação química, seja real ou virtual. Como sugestão, propor a eles que assistam ao vídeo produzido pelo Canal Futura, disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=-Q1bLUfRauE>> (acesso em: 11 ago. 2020). Ele apresenta o que é uma reação química, as leis de Lavoisier e de Proust, o que é uma equação química e o motivo de precisar ser balanceada. O vídeo pode ser utilizado para promover o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301**.

A atividade **2** traz uma reflexão a respeito de proporção e equação no contexto das receitas culinárias. Espera-se que os estudantes recordem esses conceitos do Ensino Fundamental e concluam que as unidades de medida presentes nas receitas servem para indicar a quantidade correta de ingredientes de maneira equilibrada para atingir o resultado esperado para certo número de porções. Caso os ingredientes não sejam colocados nas quantidades indicadas, o resultado da receita não será o previsto.

A atividade **3** tem o objetivo de verificar o que os estudantes conhecem de cálculo estequiométrico. É importante que eles compartilhem as respostas dadas para verificar se associam esse cálculo a equações. Ao corrigir a questão, mencionar os métodos mais comuns de balanceamento de equações químicas: por tentativa (atribuem-se valores aos coeficientes da equação a fim de balanceá-la), algébrico (elaboram-se sistemas lineares para encontrar os coeficientes) e oxirredução (envolve cálculo com o número de oxidação dos elementos). Se possível, propor um trabalho de pesquisa sobre esse tema, de maneira integrada com o professor de Química da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.



# Introdução

O texto relaciona o estudo de matrizes a aplicações na tecnologia. Verificar o que os estudantes sabem a respeito da resolução de televisores e monitores. Eles podem investigar termos como 4k, HD, OLED e 5MP para enriquecer essa discussão.

Comentar que a resolução de um monitor, por exemplo, é uma matriz em que suas células são formadas por *pixels* (junção das palavras *picture* e *element*, ou seja, "elemento de imagem"). Um monitor com resolução, em *pixel*, de  $600 \times 800$  seria formado por uma matriz de 600 linhas por 800 colunas, contando com 480 000 *pixels*. Aumentando-se a resolução, por exemplo, para  $768 \times 1024$ , tem-se uma matriz com 786 432 *pixels*. Assim, quanto maior a resolução, maior é o número de células da matriz e, consequentemente, maior é o número de pontos de cores do monitor e melhor a qualidade da imagem.

## Matrizes

Iniciar esse tópico estabelecendo a relação entre matrizes e tabelas. Comentar que o termo tabela recebeu esse nome pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy, *tableau* (em francês). Verificar o que os estudantes recordam das tabelas. Espera-se que eles percebam que elas ajudam a organizar informações, permitindo uma rápida visualização e colaborando com a manipulação de dados.

Ao explorar a tabela do consumo de alimentos no 2º trimestre, propor aos estudantes que imaginem outros dados que possam ser colocados nessa tabela e como fariam para identificá-los. Por exemplo, pode-se inserir leite na primeira coluna e o consumo desse produto em cada mês (abril, maio e junho) nas colunas seguintes.

O boxe **Pense e responda** tem o objetivo de verificar se os estudantes compreenderam como se identifica um elemento de uma matriz. Para ampliar essa questão, pode-se propor a eles que escrevam uma matriz e peçam a um colega para identificar alguns elementos específicos. Ao final desse tópico, o boxe **Saiba que...** menciona que a matriz nula é aquela cujos elementos são todos iguais a zero.

## Matriz quadrada

Ao apresentar a diagonal principal na matriz quadrada, verificar o que os estudantes conseguem observar em relação a posição dos elementos  $a_{ij}$  da diagonal principal. Espera-se que eles notem que  $i = j$ . O mesmo questionamento pode ser feito em relação aos elementos  $a_{ij}$  da diagonal secundária para que eles percebam que  $i + j$  corresponde a uma unidade a mais do que a ordem da matriz.

O boxe **Pense e responda** leva os estudantes a concluir que a matriz identidade é formada apenas pelos números 0 e 1, sendo o número 1 apenas na diagonal principal.

### ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades utilizam os conceitos de matriz apresentados anteriormente para que os estudantes possam escrever uma matriz a partir da relação indicada entre seus índices. Verificar se os estudantes não confundem a indicação de linhas e colunas ao calcular o valor de cada elemento da matriz.

Para ampliar a atividade proposta 1, solicitar aos estudantes que utilizem a mesma correspondência entre letras e números do enunciado para elaborar a matriz codificada relativa ao nome deles.

A atividade proposta 3 pode ser articulada com outros conceitos da Matemática. Acredita-se que os primeiros quadrados mágicos tenham surgido há mais de 3 mil anos na China. Para saber mais a respeito da história dos quadrados mágicos, acessar o link <[http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public\\_html/Cadeiras/1Semestre/O%20que%20%C3%A9%20um%20quadrado%20m%C3%A1gico.pdf](http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/O%20que%20%C3%A9%20um%20quadrado%20m%C3%A1gico.pdf)> (acesso em: 11 ago. 2020). Como sugestão, propor aos estudantes que construam um quadrado mágico de ordem 3 com os números de 1 a 9.

A partir dos quadrados mágicos construídos, podem-se explorar diferentes assuntos. Por exemplo, questionar o valor da soma mágica de cada linha, coluna ou diagonal, explorando assim a noção de progressão aritmética (PA). Os estudantes podem verificar que os números do quadrado mágico formam uma PA de razão unitária (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) cuja soma dos termos é 45. Assim, a soma dos números de cada uma das linhas, das colunas ou das diagonais deve ser igual a 15, pois  $45 : 3 = 15$ .

Podem-se, também, explorar as diferentes possibilidades de obter soma 15:

$$\begin{aligned}1 + 5 + 9 &= 15 \\1 + 6 + 8 &= 15 \\2 + 4 + 9 &= 15 \\2 + 5 + 8 &= 15 \\2 + 6 + 7 &= 15 \\3 + 4 + 8 &= 15 \\3 + 5 + 7 &= 15 \\4 + 5 + 6 &= 15\end{aligned}$$

Como o número no centro do quadrado deve pertencer à diagonal principal, à diagonal secundária, à linha do meio e à coluna do meio, o único número que aparece quatro vezes nas possíveis somas é o número 5, portanto, ele deve aparecer sempre no meio desse quadrado mágico.

É uma boa oportunidade, também, para explorar o conceito de simetria ao analisar como os números estão distribuídos em diferentes quadrados mágicos, tendo o 5 como elemento central.

Para ampliar a atividade proposta 7, apresentar outras figuras planas regulares, por exemplo, o triângulo equilátero de lado unitário.

## Igualdade de matrizes

Esse tópico apresenta duas matrizes e leva os estudantes a comparar os elementos de cada matriz. É esperado que eles percebam que duas matrizes são iguais quando possuem elementos correspondentes iguais. Mostrar um exemplo de matrizes que têm o mesmo número de elementos e os mesmos valores apresentados, mas em posições diferentes, para que os estudantes notem que elas não são iguais, apesar de apresentarem os mesmos valores.

## Adição e subtração de matrizes

Esse tópico explora a adição e a subtração de matrizes a partir de uma situação contextualizada: doação de livros para bibliotecas. No primeiro boxe **Pense e responda**, explorar outras questões envolvendo adição de matrizes para que os estudantes percebam, antes da definição formal, como pode ser obtida a matriz soma. Por exemplo: “Quantos livros de autores brasileiros foram destinados a estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental?”. Espera-se que eles calculem  $72 + 98 = 170$ .



No segundo boxe **Pense e responda**, envolvendo a matriz diferença, discutir a existência dos números negativos para o contexto apresentado. Espera-se que os estudantes percebam que, considerando o segmento dos anos finais do Ensino Fundamental, foram doados menos livros para a Biblioteca Cecília Meireles, em comparação com a quantidade de livros doados à Biblioteca Rachel de Queiroz. Para ampliar essa discussão, pode-se propor aos estudantes que calculem a matriz  $B - A$  e comparar os valores obtidos em relação à matriz  $A - B$ .

### > ATIVIDADE RESOLVIDA E ATIVIDADES

Ao desenvolver a atividade resolvida **3**, verificar se os estudantes compreendem como foram obtidos os elementos da matriz  $A$ . É importante que eles consigam comparar os valores dos índices com base no que foi explicitado no enunciado, obtendo apenas os valores  $-1, 0$  e  $1$ .

As Atividades propostas exploram a igualdade entre matrizes e as operações de adição e subtração de matrizes. Compartilhar as estratégias utilizadas pelos estudantes durante a resolução dessas atividades.

Na atividade proposta **8**, após organizar os dados em duas matrizes, verificar se os estudantes fizeram essa organização corretamente e não confundiram a ordem das linhas e das colunas.

A atividade proposta **9** estimula os estudantes para que verifiquem propriedades envolvendo adição e subtração de matrizes. Para ampliar essa atividade, propor aos estudantes que elaborem três matrizes quadradas da ordem que escolherem. Depois, troquem, entre si, as matrizes elaboradas e verifiquem as mesmas propriedades nas matrizes elaboradas.

## Multiplicação de um número real por uma matriz

No boxe **Pense e responda**, pedir aos estudantes que recuperem os dados correspondentes à matriz soma obtida para perceber que a multiplicação, nesse caso, se dá ao calcular o dobro do valor de cada elemento.

No tópico **Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz**, propor exemplos para que os estudantes verifiquem a validade dessas propriedades.

## Multiplicação de matrizes

O boxe **Pense e responda** pode ser ampliado, buscando desenvolver aspectos da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Propor aos estudantes uma discussão a respeito de outros fatores, além do preço, que devem ser considerados na realização de compras, principalmente no caso de produtos perecíveis. Orientá-los sobre a importância da qualidade dos alimentos e, principalmente, a atenção que devem ter em relação à data de validade, verificando se o consumo do produto será realizado dentro do prazo de validade. Essa discussão pode ser desenvolvida com os professores de Biologia e de Química, de modo que os estudantes possam compreender os riscos de contaminação pelo consumo de alimentos estragados e evitar esse risco. A discussão desse tema colabora para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, em que fenômenos naturais e processos tecnológicos são analisados para propor ações individuais e coletivas que melhorem as condições de vida.

No tópico **Propriedades da multiplicação de matrizes**, ao trabalhar o boxe **Saiba que...**, questionar os estudantes sobre a possibilidade de  $A \cdot A = A^2$  valer para qualquer matriz. A partir da discussão sobre a necessidade de o número de colunas da primeira matriz ser igual ao número de linhas da segunda matriz, espera-se que eles concluam que a potenciação de matrizes somente é possível para matrizes quadradas.

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

A atividade resolvida **4** evidencia que o produto de matrizes vai existir quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. Portanto, nesse caso,  $A \cdot B$  é possível já que  $A$  tem duas colunas e  $B$  tem duas linhas, enquanto o produto  $B \cdot A$  não é possível, pois  $B$  tem três colunas e  $A$  tem duas linhas.

Para ampliar a atividade resolvida **5**, propor aos estudantes que escrevam a matriz do próprio nome ou a de algum colega e uma matriz de conversão para realizar a decodificação.

As Atividades propostas exploram o conceito de multiplicação de matrizes. Espera-se que os estudantes consigam justificar quando o produto de duas matrizes vai existir sem tentar calculá-lo.

Na atividade proposta **14**, verificar se os estudantes determinam os valores dos elementos de cada matriz antes de calcular as operações indicadas em cada item. Enfatizar a importância de ter atenção ao escrever esses elementos, pois isso influencia nos cálculos seguintes.

Um dos itens da atividade proposta **18** pede aos estudantes que elaborem um problema que possa ser resolvido com informações da atividade. Propor que compartilhem os problemas elaborados a fim de verificar quais conceitos matemáticos estão presentes nessas produções.

## Matriz inversa

Ao apresentar a observação de que “se a matriz quadrada  $A$  é invertível, então a sua inversa é única”, propor aos estudantes que tentem demonstrar esse fato. Ao estabelecer conjecturas sobre a veracidade de uma informação, os estudantes estão desenvolvendo a competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. A seguir, uma demonstração desse teorema:

Supondo que  $A_1$  e  $A_2$  são as matrizes inversas de  $A$ , então  $A_1 \cdot A = A \cdot A_2 = I_n$ . Assim, tem-se:

$$A_1 = A_1 \cdot I_n = A_1 \cdot (A \cdot A_2) = (A_1 \cdot A) \cdot A_2 = I_n \cdot A_2 = A_2$$

Portanto,  $A_1 = A_2$ .

O boxe **Pense e responda** possibilita ao estudante perceber que as matrizes  $A$  e  $B$  dadas são inversas, pois o produto delas é igual à matriz identidade.

## Equações matriciais

Ao desenvolver esse tópico, verificar o que os estudantes lembram do conceito de equação e verificar se conseguem explorar esse conceito no caso de matrizes. Propor outros exemplos de equações matriciais para que os estudantes calculem utilizando propriedades estudadas anteriormente neste Capítulo.



## > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades utilizam os conceitos de matriz inversa e equação matricial. Aproveitar cada situação para retomar esses conceitos e verificar possíveis dúvidas que os estudantes possam ter.

Ao desenvolver o primeiro item da atividade resolvida 6, verificar se os estudantes compreendem como os valores de  $a$  e  $c$ , da matriz  $A^{-1}$ , foram obtidos ao resolver o sistema formado pela igualdade de matrizes. Fazer o mesmo com os valores de  $b$  e  $d$  dessa mesma matriz.

Por meio dessas atividades, espera-se que os estudantes coloquem em prática os conceitos estudados sobre matriz inversa e equações matriciais. Ao corrigir as Atividades propostas, é importante verificar diferentes maneiras de resolução que possam ter surgido.

Para ampliar as operações com matrizes, pode-se refletir com os estudantes a respeito da divisão. É esperado que eles percebam que essa operação não é possível de ser realizada entre matrizes. O que pode ocorrer, no caso de matrizes que são invertíveis, é multiplicar uma matriz  $A$  pelo inverso da matriz  $B$ , porém nem todas matrizes são invertíveis, logo não existe divisão entre matrizes.

## > CONEXÕES

Essa seção traz uma aplicação de matrizes na gestão do trânsito urbano, em particular, no planejamento do tempo de funcionamento dos semáforos, explorando o Tema Transversal Contemporâneo **Trabalho**. Discutir o texto com os estudantes e verificar as impressões e os conhecimentos deles a respeito do assunto. Esse trabalho pode ser desenvolvido em parceria com os professores de Sociologia e de Geografia, da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

O texto a seguir traz algumas informações a respeito dos semáforos que funcionam com a alternância de indicadores luminosos e são utilizados para controle de trânsito.

[...] Cada indicador corresponde a uma fase do semáforo e possui um significado particular e único. Em geral a sequência é formada por verde, amarelo, vermelho e novamente o verde.

[...]

O sinal verde permite ao motorista seguir em frente no cruzamento, exceto que impedito por autoridade legal. Nesse momento, o usuário pode executar qualquer uma das manobras permitidas na interseção.

O sinal amarelo indica que os motoristas devem parar os veículos. Caso não seja possível, devem seguir em frente e atravessar a interseção. Essa fase é utilizada para garantir a limpeza completa do cruzamento.

O tempo do sinal amarelo varia de acordo com a velocidade da via e o comprimento do cruzamento. [...]

O sinal vermelho indica que os motoristas devem parar os veículos e permanecer parados até que recebam autorização de passagem por meio da luz verde.

O tempo decorrido entre o fim do verde de uma fase e o início do verde da fase seguinte é definido como período de entreverdes. Normalmente esse tempo corresponde ao tempo de amarelo somado ao vermelho de segurança.

O vermelho de segurança ou vermelho geral é o tempo em que todos os semáforos da interseção estão na fase vermelha. Normalmente é aplicado em interseções longas para garantir a limpeza do cruzamento.

[...]

LOPES, B. C.; GIUBERTI, H. **Aplicação das técnicas de engenharia de tráfego para análise e melhoria de uma interseção semaforizada**. Projeto de Graduação (Bacharelado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2011. Disponível em: [http://producao.ufes.br/sites/producao.ufes.br/files/field/anexo/2011\\_aplicacao\\_das\\_tecnicas\\_de\\_engenharia\\_de\\_trafego\\_para\\_analise\\_e\\_melhoria\\_de\\_uma\\_intersecao\\_semaforizada\\_2011\\_3.pdf](http://producao.ufes.br/sites/producao.ufes.br/files/field/anexo/2011_aplicacao_das_tecnicas_de_engenharia_de_trafego_para_analise_e_melhoria_de_uma_intersecao_semaforizada_2011_3.pdf). Acesso em: 11 ago. 2020.

Na atividade 1 os estudantes precisam pesquisar se há congestionamento no município em que moram e pensar em uma alternativa que seja possível para reduzir os problemas causados pelo tráfego intenso de veículos automotores. Essa atividade ajuda a desenvolver a competência geral 7, pois os estudantes precisam pesquisar e argumentar, com base em fatos, dados e informações confiáveis, a defesa da proposta elaborada por eles.

A atividade 2 propõe uma pesquisa a respeito da engenharia de tráfego. Acessar o link <<https://www.portaldotransito.com.br/educacao/a-engenharia-de-trafego-e-o-planejamento-urbano-para-um-transito-melhor-2/>> (acesso em: 11 ago. 2020) para obter informações a respeito desse tema.

A atividade 3 propõe a elaboração de um problema pelos estudantes com base no exemplo apresentado. É importante que esse problema e a respectiva resolução sejam apresentados ao restante da turma para verificar o que as produções têm de análogo e de diferente.

Para ampliar as pesquisas realizadas, os estudantes podem consultar o artigo “Modelos matemáticos para otimização do tráfego urbano semafORIZADO” para saber mais informações sobre modelos matemáticos e trânsito, disponível em <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2179-84512013000300008](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2179-84512013000300008)> (acesso em: 11 ago. 2020), e pesquisar a relação entre a quantidade de veículos nas cidades e a poluição do ar pelo link <<https://jornal.usp.br/?p=135194>> (acesso em: 11 ago. 2020).

## Sistemas lineares

O trabalho com sistemas lineares se inicia com a apresentação da noção de equação linear. Nesse momento, é interessante recordar com os estudantes a diferença entre incógnita (elemento desconhecido), usada em equações, e variável (elemento que varia), usada em funções, por exemplo. Esse tópico e os seguintes exploram a habilidade **EM13MAT301** ao resolver problemas com equações lineares simultâneas.

No tópico **Equação linear**, ao explorar o primeiro boxe **Pense e responda**, pedir aos estudantes que justifiquem a resposta dada. Espera-se que, com a informação “a quantidade de viagens de ônibus que vai fazer será o dobro da quantidade de viagens de trem”, os estudantes cheguem à equação  $x = 2z$ . Ao considerar  $y = 0$  (Andréa não vai utilizar o metrô), tem-se:

$$3 \cdot 2z + 0 + 2z = 120 \Rightarrow 8z = 120 \Rightarrow z = 15$$

Como  $x = 2z$ , então:

$$x = 2 \cdot 15 = 30$$

### FÓRUM

O trabalho com essa seção, que envolve o benefício em passagem estudantil, pode ser ampliado para desenvolver a competência específica 1 da área de **Matemática e suas Tecnologias**, questionando os estudantes como fazem o controle dos gastos com transporte para chegar à escola e quanto isso impacta na renda familiar. Assim, trabalha-se também o Tema Contemporâneo Transversal **Vida Familiar e Social**.

No primeiro item, a resposta depende do município em que os estudantes residem. Caso tenha estudantes que morem em municípios diferentes, ao comparar as respostas, verificar se o benefício concedido é o mesmo.

O segundo item possibilita aos estudantes refletirem sobre a importância desse tipo de benefício em relação ao orçamento das famílias. Nesse momento, é importante que eles argumentem com base em fatos, dados e informações confiáveis,



defendendo a opinião deles sobre o assunto, desenvolvendo, assim, a competência geral **7**. Essa discussão pode ser encaminhada por meio de um trabalho integrado com os professores da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

Caso o município não conte com esse tipo de benefício para os estudantes, sugerir que escrevam um projeto apresentando a criação de um programa desse tipo, com o auxílio dos professores e por meio de pesquisas de projetos análogos. Outra possibilidade é propor que pesquisem sobre esse benefício em municípios da região.

Se o município possuir esse tipo de benefício, pode-se propor aos estudantes que elaborem um cartaz contendo dados estatísticos do transporte municipal e a importância do benefício para a comunidade local. Com isso, eles desenvolvem a competência geral **4**, pois utilizam diferentes linguagens e conhecimentos matemáticos para expressar e compartilhar informações.

Após apresentar outros exemplos de equações lineares, verificar as respostas do segundo boxe **Pense e responda**. No primeiro item, os estudantes vão determinar duas possíveis soluções para a equação dada. Compartilhar as diferentes possibilidades de resposta. No segundo item, é esperado que eles percebam que a terna não é solução da equação dada, pois, ao substituir os valores, chega-se a uma sentença falsa.

## Sistemas lineares $2 \times 2$

Ao desenvolver o primeiro boxe **Pense e responda**, propor uma reflexão a respeito de como a disposição das incógnitas nas equações do sistema pode favorecer o método da adição ou o método da substituição. Os itens desse boxe levam os estudantes a analisar algumas possibilidades que têm ao resolver o sistema linear  $2 \times 2$ . Para ampliar essa discussão, comentar que, ao multiplicar uma equação por um número real, obtém-se uma equação equivalente, ou seja, que tem o mesmo conjunto solução. Da mesma maneira ocorre ao aplicar o método da adição, ou seja, substituir uma das equações por uma adição dela com outra equação do sistema.

No segundo boxe **Pense e responda** desse tópico, os estudantes podem refletir sobre a escolha da equação mais conveniente para isolar uma incógnita e resolver um sistema de equações lineares. É importante possibilitar a eles trocarem entre si a resolução do sistema de equações lineares, pelo método da adição, e promover uma análise dos métodos utilizados.

Ao desenvolver o tópico **Interpretação geométrica e classificação**, pedir aos estudantes que utilizem um software de geometria dinâmica para visualizar as representações gráficas das equações lineares.

Em relação ao boxe **Pense e responda** desse tópico, ao analisarem o sistema linear do item **a**, os estudantes podem substituir os valores das incógnitas  $x$  e  $y$ , respectivamente, por 4 e 2, relacionando o par ordenado (4, 2) à solução do sistema.

Comentar que, em alguns casos, é possível classificar um sistema em possível e indeterminado sem necessidade de resolver o sistema. Isso pode ser feito observando os coeficientes das incógnitas e os termos independentes das duas equações. Por exemplo, no sistema  $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$  é possível notar que os coeficientes das incógnitas  $x$  e  $y$  da segunda

equação são o dobro dos coeficientes das incógnitas da primeira equação e, além disso, o termo independente da segunda equação é o dobro do termo independente da primeira equação. Portanto, qualquer par ordenado que seja solução da primeira equação também será solução da segunda equação. Assim, a reta que representa a segunda equação é coincidente com a reta que representa a primeira equação; logo, o sistema é possível, pois tem solução, mas indeterminado, pois apresenta infinitas soluções.

O exemplo anterior é diferente do sistema  $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ , pois neste sistema o termo

independente da segunda equação não é o dobro do termo independente da primeira equação. Na primeira equação, a soma de dois números é 5 e, na segunda equação, o dobro da soma desses mesmos números também é 5, algo impossível de acontecer. Logo, o sistema não tem solução, sendo classificado como impossível.

### > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades ajudam a desenvolver a habilidade **EM13MAT301**, ao resolver problemas envolvendo equações lineares simultâneas, e a competência específica **4 de Matemática e suas Tecnologias**, pois são realizados diferentes registros matemáticos na busca da solução de problemas.

Ao desenvolver a atividade resolvida **12**, é possível retomar a discussão de observação dos valores dos coeficientes e do termo independente de cada equação para classificá-la. No item **a**, é possível observar que os coeficientes das incógnitas da segunda equação valem o dobro dos coeficientes das incógnitas da primeira equação e, ainda, o termo independente da segunda equação vale o dobro do termo independente da primeira equação. Assim, todo par ordenado que é solução de uma das equações também é solução da outra equação, logo o sistema é possível e indeterminado. No item **b**, apesar de os coeficientes das incógnitas da segunda equação serem o dobro dos coeficientes das incógnitas da primeira equação, o valor do termo independente da segunda equação não é o dobro do valor do termo independente da primeira equação. Assim, não existe nenhum par ordenado que seja solução das duas equações ao mesmo tempo; logo, o sistema é impossível.

A competência específica **3 de Matemática e suas Tecnologias** também pode ser desenvolvida, pois os estudantes utilizam conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar e construir modelos que ajudam a resolver problemas, analisando a plausibilidade dos resultados.

No trabalho com as atividades propostas, solicitar aos estudantes que compartilhem diferentes maneiras de resolver um problema caso surja essa possibilidade. Para auxiliar a classificação dos sistemas, eles podem retomar o esquema apresentado na teoria ou elaborar um esquema próprio.

Aproveitar a atividade proposta **35** para relembrar como resolver uma equação do 2º grau sem o uso de fórmulas. Nessa situação, para que a equação seja homogênea, é necessário que  $m^2 - 4$  seja igual a zero. Assim, o quadrado de  $m$  deve ser 4 e, portanto,  $m$  pode ser 2 ou  $-2$ .

Para ampliar as atividades propostas, pedir aos estudantes que elaborem uma situação-problema que possa ser resolvida por meio de um sistema linear. Eles podem se inspirar nas atividades propostas **39, 40 e 45**, que trazem questões contextualizadas. Depois, os estudantes podem trocar os problemas elaborados para resolver os dos colegas e, finalmente, conferir juntos as resoluções.



## Sistemas lineares $m \times n$

Esse tópico amplia a noção de sistemas lineares a partir das ideias utilizadas para sistemas lineares  $2 \times 2$ . Verificar se os estudantes percebem que o que foi estudado anteriormente é um caso particular dos sistemas lineares  $m \times n$ .

Ao resolver a questão proposta no boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes percebam que a terna ordenada é solução do sistema  $3 \times 3$  apresentado no exemplo.

## Matrizes associadas a um sistema linear

Após terem estudado matrizes e sistemas lineares separadamente, será nesse tópico que os estudantes conseguirão perceber que é possível associar uma matriz a um sistema linear. Em particular, quando o sistema tiver um mesmo número de incógnitas e de equações, então a matriz a qual o associamos será quadrada. Apresentar exemplos desse caso e propor aos estudantes que elaborem exemplos de matrizes que representam sistemas lineares.

### ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades exploram a relação entre sistemas lineares e matrizes. Verificar dúvidas que possam surgir durante o desenvolvimento de cada atividade.

Na atividade resolvida **13**, retomar o trabalho com sistemas lineares  $2 \times 2$  para que os estudantes reconheçam que os coeficientes das incógnitas  $x$  e  $z$  na equação **(I)** valem o dobro dos respectivos coeficientes na equação **(II)**, portanto, ao adicionar a equação **(I)** com o dobro da equação **(II)** multiplicado por  $-1$ , é possível eliminar os coeficientes, restando somente a incógnita  $y$ .

As atividades propostas ajudam a desenvolver a habilidade **EM13MAT301**, ao resolver e elaborar problemas com equações lineares simultâneas, bem como a competência específica **3 de Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes utilizam conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar e construir modelos que ajudam a resolver problemas, analisando a plausibilidade dos resultados, e a competência específica **4 de Matemática e suas Tecnologias**, pois são realizados diferentes registros matemáticos na busca da solução de problemas.

As atividades propostas **49, 50, 51, 53 e 56** trazem questões contextualizadas. Verificar se os estudantes compreendem cada uma dessas situações antes de tentarem escrever sistemas lineares para representá-las. Ao corrigi-las, propor aos estudantes que compartilhem diferentes maneiras de resolução caso isso tenha ocorrido. O trabalho com essas atividades contribui para o desenvolvimento da competência específica **1 de Matemática e suas Tecnologias**, pois são utilizados procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos.

## Sistemas lineares escalonados

No primeiro boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes percebam que, quando ocorre o escalonamento, o número de incógnitas, cujos coeficientes são diferentes de zero, nas equações decresce, chegando a uma equação com uma incógnita na condição mencionada anteriormente. Assim, é possível iniciar a resolução do sistema de equações lineares a partir da última equação.



No tópico **Classificação de sistemas lineares escalonados**, verificar se os estudantes compreendem o motivo que leva à classificação de cada exemplo. No exemplo **c**, comentar que o sistema não tem solução, pois não existe nenhum valor real para  $w$  que torne a equação  $0w = 6$  verdadeira; logo, o sistema desse exemplo é impossível.

No tópico **Escalonamento de sistemas lineares**, realizar cada etapa de escalonamento com os estudantes, pois é necessário que eles compreendam as operações realizadas. Enfatizar que essas operações são feitas sem alterar a solução do sistema inicial, por isso, é possível dizer que sistemas equivalentes são obtidos a cada operação. Desse modo, é importante que seja escrita a matriz completa do sistema, considerando zeros no caso de incógnitas que não estão explícitas no sistema.

O boxe **Saiba que...** retoma o comentário feito no tópico anterior: ao obter uma matriz com todos os coeficientes das incógnitas iguais a zero, tem-se um sistema impossível. No exemplo apresentado, considerando a última linha da matriz, chega-se à sentença  $0 = -4$ , que é falsa.

### > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

A atividade resolvida **15** retoma os conceitos de escalonamento de sistemas ao realizar operações possíveis para resolver o sistema proposto. Ao final, pedir aos estudantes que substituam os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  no sistema inicial para verificar que, de fato, são soluções dele.

As atividades propostas ajudam a desenvolver a habilidade **EM13MAT301**, ao resolver e elaborar problemas com equações lineares simultâneas, a competência específica **3 de Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes utilizam conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar e construir modelos que ajudam a resolver problemas, analisando a plausibilidade dos resultados, e a competência específica **4 de Matemática e suas Tecnologias**, pois são realizados diferentes registros matemáticos na busca da solução de problemas.

Enfatizar a importância de escrever a matriz completa ao realizar o processo de escalonamento dos sistemas. Antes que os estudantes iniciem as atividades, propor a eles que retomem quais operações podem ser feitas ao escalar um sistema. Ao corrigir as atividades, verificar dúvidas que possam ter surgido a fim de saná-las.

### HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O trabalho com essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1** e **2**, à medida em que o estudante pode perceber e valorizar a construção histórica do conhecimento e pode ter a curiosidade aguçada, por exemplo, quanto à pesquisa sobre o conceito de determinantes ou ao recorrer às abordagens das ciências para investigar, refletir e analisar criticamente causas e resolver problemas. Também evidencia a competência específica **5 de Matemática e suas Tecnologias**, pois mostra a investigação a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticos, observando padrões e identificando a necessidade ou não de demonstrações.

O texto apresenta uma importante contribuição de Leibniz para a Matemática. Após realizar a leitura, conversar com os estudantes a respeito do texto e verificar se já conheciam algo produzido por Leibniz. O texto a seguir traz mais informações sobre a vida dele.



### LEIBNIZ E NOSSO MUNDO DIGITAL

É amplamente conhecido o papel desempenhado por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) na criação dos cálculos Diferencial e Integral, independentemente do que, alguns anos antes, fizera Isaac Newton (1642 – 1727) nos mesmos campos. Mas pouca gente tem conhecimento de um trabalho escrito por ele em 15 de março de 1679, e que, três séculos mais tarde, demonstrou-se fundamental para o desenvolvimento das tecnologias digitais que hoje dominam o mundo em praticamente todas as áreas.

Leibniz, nascido em Leipzig, Alemanha, foi uma das mais brilhantes inteligências de todos os tempos, um verdadeiro gênio universal, cuja cultura abrangia, além da Matemática, o Direito, a História, a Filosofia, a Política, a Lógica, a Filologia, a Geologia e a Teologia. Entre 1672 e 1676, então um jovem diplomata, Leibniz viveu em Paris onde se tornou amigo de Christiaan Huygens, holandês radicado na Cidade Luz e um dos maiores físico-matemáticos da época. Foi Huygens que o apresentou à Matemática de alto nível, dando-lhe aulas e estimulando seu interesse por ela. Rapidamente Leibniz absorveu os conhecimentos então existentes e logo passou a fazer suas próprias descobertas nos grandes temas da época: o traçado analítico de tangentes, a quadratura de curvas (áreas) e as séries infinitas. Embora seus trabalhos sobre o Cálculo tenham sido publicados em 1684 (Cálculo Diferencial) e 1686 (Cálculo Integral), manuscritos preservados comprovam que ele já compreendera a essência dessas questões no ano de 1676. É oportuno lembrar que o nome Cálculo Diferencial (*Calculus Differentialis*) foi criação dele mesmo, enquanto Cálculo Integral (que ele chamara inicialmente de *Calculus Summatorius*) foi-lhe sugerido por seu amigo Johann Bernoulli (1667 – 1748), grande matemático suíço. Foi ele também que, pela primeira vez, utilizou a palavra “função” com seu significado atual.

[...]

GARBI, G. Leibniz e nosso mundo digital. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 84. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/84/1.html>. Acesso em: 12 ago. 2020.

### > EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Essa seção propõe aos estudantes que explorem o site **Matrix calculator**, disponível em <<https://matrixcalc.org/pt/>> (acesso em: 12 ago. 2020) para enriquecer o trabalho de escalonamento de sistemas. Esse trabalho colabora com o desenvolvimento da competência geral 1, pois são utilizados conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e digital, da competência geral 5, na medida em que explora o pensamento computacional e o uso de tecnologias digitais, e a competência específica 4 de **Matemática e suas Tecnologias**, pois são utilizados diferentes registros de representação matemáticos.

Além de fornecer métodos variados para a resolução de sistemas de equações lineares, o programa mostra cada uma das etapas realizadas, permitindo acompanhar as operações feitas até chegar à solução do sistema.

As questões propostas têm como objetivo verificar a compreensão dos estudantes ao utilizar esse programa. Propor outras questões que permitam levá-los a aplicar os conceitos estudados no Capítulo. Uma sugestão é que eles criem um sistema linear e peçam a um colega que o resolva, conferindo a resolução no programa.

Na atividade 1, espera-se que os estudantes identifiquem que o erro cometido no escalonamento foi em relação ao sinal do número 5, que deveria ser negativo, quando adicionaram o elemento  $a_{22}$  com  $(-2a_{12})$ . Esse erro interferiu no restante do processo de escalonamento e, consequentemente, na solução.

Na atividade 2, os estudantes precisam determinar o sistema escalonado equivalente ao sistema dado e verificar a solução no programa. Espera-se que eles encontrem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Como  $z = 3$  e  $y = 2$ , então  $x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$ .  
Assim, a solução desse sistema é  $S = \{(1, 2, 3)\}$ .

## ► ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Essas atividades ajudam a desenvolver a habilidade **EM13MAT301**, ao resolver e elaborar problemas com equações lineares simultâneas, a competência específica **3 de Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes utilizam conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar e construir modelos que ajudam a resolver problemas, analisando a plausibilidade dos resultados, e a competência específica **4 de Matemática e suas Tecnologias**, pois são realizados diferentes registros matemáticos na busca da solução de problemas.

Incentivar os estudantes a justificar, por escrito, a alternativa correta determinada em cada atividade, de modo que eles se acostumem a transpor na língua materna os pensamentos matemáticos utilizados nas resoluções. Vale observar que as atividades dessa seção podem ser resolvidas em grupos de trabalho e as resoluções podem ser socializadas com a turma. Assim os estudantes podem exercitar a capacidade de levantar hipóteses, validá-las e justificá-las coletivamente. Esse trabalho, desenvolvido em grupo, pode também figurar como uma avaliação do processo de aprendizagem dos estudantes, no qual eles poderão verificar se precisam retomar algum conceito que necessite ser mais bem trabalhado, bem como esclarecer dúvidas.

Na correção, verificar se surgiram diferentes maneiras de resolver uma mesma atividade. Como sugestão, pode-se propor aos estudantes que se inspirem em algumas das atividades contextualizadas e elaborem uma situação-problema que possa ser resolvida utilizando algum dos conceitos estudados no Capítulo. Depois, eles podem trocar a situação criada com um colega para resolver o problema do outro e, por fim, corrigirem juntos.

## ► PARA REFLETIR

Essa seção retoma brevemente os assuntos trabalhados no Capítulo. Discutir com os estudantes como foi o processo de aprendizado deles durante as aulas, propondo uma reflexão pessoal das atitudes enquanto estudantes e, também, das dificuldades que tiveram nesse processo. Propor que elaborem um esquema contendo os conceitos que estudaram, como os métodos utilizados para resolver sistemas, as classificações possíveis, palavras importantes que remetam a este Capítulo, entre outros tópicos importantes. Essa prática vai ajudá-los a responder às questões dessa seção.



CAPÍTULO

## 2

# Porcentagem e juros

## A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

- **Competências gerais:** 1, 2, 5, 6 e 7
- **Competências específicas e habilidades**

### Área de Matemática e suas Tecnologias

- Competência específica 1: **EM13MAT104**
- Competência específica 2: **EM13MAT203**
- Competência específica 3: **EM13MAT303**

### Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias

- Competência específica 2

- **Temas Contemporâneos Transversais**
  - Educação para o Consumo
  - Educação Financeira

## Orientações didáticas

### Abertura de Capítulo

O texto dessa abertura apresenta a *Black Friday*, evento em que empresas costumam oferecer descontos para a compra de seus produtos, como contexto para iniciar o trabalho com porcentagem. Discutir com os estudantes as informações do texto e verificar o que eles sabem a respeito desse evento. Caso já tenham participado, pedir que relatem o que observaram nos anúncios encontrados. Se julgar pertinente, apresentar aos estudantes o texto a seguir, que conta o surgimento desse evento.

[...]

A Black Friday acontece sempre após o Dia de Ação de Graças, que é celebrado nos Estados Unidos como um feriado para agradecer, comer e ficar em família. A data remonta à 1621 e marca o evento em que nativos americanos se juntaram aos colonos ingleses para uma ceia em comemoração às boas colheitas do ano [...]

Por aqui não faz sentido comemorar a Ação de Graças, já que se trata de um evento que simboliza a colonização britânica da América do Norte, mas a Black Friday definitivamente caiu no gosto brasileiro. Desde 2010, quando aconteceu a primeira Black Friday no Brasil, o número de lojas que resolveu aderir à moda só aumentou.

O termo Black Friday já foi utilizado para designar coisas diferentes. O primeiro registro do uso do termo vem de 1869, quando dois acionistas de Wall Street resolvem comprar grandes quantidades de ouro dos Estados Unidos, esperando vender por preços bem maiores. Mas em setembro daquele ano – numa sexta-feira – o mercado de ouro quebrou, deixando diversos investidores e empresas de Wall Street arruinadas – daí o “black” para se referir à crise daquela sexta-feira.

[...]

ROSSINI, C. M. Como surgiu a Black Friday?. **Superinteressante**, 28 nov. 2019.  
Disponível em: <https://super.abril.com.br/historia/como-surgiu-a-black-friday/>.  
Acesso em: 28 ago. 2020.

A discussão proposta na abertura deste Capítulo trabalha com o Tema Contemporâneo Transversal **Educação para o Consumo**. As questões têm como objetivos verificar a compreensão dos estudantes a respeito do texto e levantar os conhecimentos prévios relacionados a porcentagem. Elas ajudam a desenvolver a competência geral **7**, pois os estudantes precisam argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para defender pontos de vista. Além disso, podem promover o desenvolvimento da competência geral **6**, à medida que favorece o desenvolvimento da consciência crítica e da responsabilidade em oposição, por exemplo, ao consumismo. Também é possível, em conjunto com o professor de Biologia, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, explorar aspectos relacionados ao desenvolvimento da competência específica **2** dessa área. Para isso, pode-se relacionar o consumismo aos problemas ambientais, preferencialmente àqueles mais relacionados ao contexto dos estudantes, e, com isso, possibilitar aos estudantes fundamentarem suas decisões e ações com base em princípios éticos e responsáveis.

A atividade **1** evidencia a utilização da porcentagem para indicar os descontos nos anúncios. Como a porcentagem é uma medida que toma como parâmetro o valor 100, utilizá-las para indicar descontos é uma forma de atrair consumidores. O uso de porcentagem também pode facilitar na estimativa do valor do desconto. Para ampliar essa questão, pode-se propor a seguinte reflexão: “Um produto que custava R\$ 1.000,00 foi oferecido por R\$ 600,00 e outro que custava R\$ 2.000,00 foi oferecido por R\$ 1.600,00. Ambos tiveram uma redução de R\$ 400,00 no preço. Como fazer para verificar qual desses produtos teve maior desconto percentual?”. É possível que respondam a essa questão utilizando conceitos estudados no Ensino Fundamental. Como o desconto, em reais, foi o mesmo nos dois produtos, pode-se comparar o valor original deles. O segundo produto custa o dobro do primeiro, logo, percentualmente, o primeiro produto teve maior desconto (o primeiro produto teve um desconto de 40% e o segundo, de 20%).

A atividade **2** trata de compra à vista e parcelada, prática que costuma ser feita no comércio eletrônico. Espera-se que os estudantes percebam que na situação apresentada há juro, pois os preços à vista e a prazo são diferentes. Aproveitar esse momento para conversar com os estudantes a respeito do Código de Defesa do Consumidor (CDC), verificando se eles sabem que uma cópia desse código deve estar disponibilizada em qualquer loja física que venda produtos. A lei nº 8.078, de 11 de setembro de 1990 estabelece esse código. Para conhecê-la, acessar o link <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l8078compilado.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8078compilado.htm)> (acesso em: 28 ago. 2020).

Na atividade **3**, além dos cuidados com juro embutido, compras desnecessárias e endividamento, questionar os estudantes quais cuidados devem ser tomados em compras *on-line*, por exemplo, sobre a confiabilidade do site, o valor do frete ou o prazo de entrega.

## Introdução

Aproveitar esse momento para que os estudantes apresentem outras situações, além das financeiras, em que encontram porcentagens, orientando o desenvolvimento da aula e explorando situações-problema próximas a eles. Algumas situações possíveis: porcentagens em pesquisas estatísticas, porcentagem da eficácia de um medicamento, porcentagem de pessoas que participaram de certo evento.



## Porcentagem

Neste momento, é importante que os estudantes compreendam que porcentagem é uma razão em que o denominador é 100. Explorar o fato de essa razão poder ser representada de diferentes maneiras. A partir dos conceitos estudados no Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes recordem que é possível representar uma porcentagem com número decimal, fração, por escrito ou por figuras.

No tópico **Aumentos e descontos**, discutir o exemplo proposto com os estudantes e outras maneiras de interpretar a situação. Aproveitar esse momento para falar da importância do cálculo mental. Os comerciantes, no dia a dia, pela experiência nessa área de trabalho, muitas vezes, fazem os cálculos mentalmente utilizando diferentes estratégias. Esse tipo de conhecimento vai ao encontro da Etnomatemática, campo que analisa as práticas matemáticas em diferentes culturas, além de possibilitar desenvolver a competência geral 6, no que se refere à valorização dos saberes, advindas das práticas do trabalho, por exemplo. Nesse sentido, é importante também resgatar as estratégias de cálculo mental que os estudantes já trazem consigo. Muitos deles determinam porcentagens em suas práticas sociais e, por isso, já desenvolveram estratégias próprias de cálculo.

Pode-se retomar a discussão da abertura do Capítulo a respeito da *Black Friday* e propor a seguinte questão: “De quanto seria o aumento de um produto para que, com um desconto de 50% na *Black Friday*, ficasse com o preço original?”. Explicar que essa é uma prática antiética que algumas empresas adotam semanas antes da *Black Friday* para parecer que estão oferecendo um bom desconto. Nesse caso, pode-se considerar que um produto que custa  $x$  reais teve um aumento de  $y\%$  poucas semanas antes da *Black Friday*. Portanto, ele passou a custar  $x\left(1 + \frac{y}{100}\right)$ . No evento, foi anunciado desconto de 30%, logo, seu preço passou a ser  $0,7x\left(1 + \frac{y}{100}\right)$ . Para que esse valor fique igual ao preço original  $x$ , tem-se:

$$0,7x\left(1 + \frac{y}{100}\right) = x \Rightarrow 0,7\left(1 + \frac{y}{100}\right) = 1 \Rightarrow \frac{y}{100} = \frac{10}{7} - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{7} \cdot 100 \Rightarrow y \approx 43$$

Portanto, o produto sofreu um aumento de aproximadamente 43% antes do evento, o que pode ser verificado com exemplos. Um produto que custava R\$ 32,85, teve um aumento de 43% e passou a custar R\$ 47,00. Ao anunciar desconto de 30%, passou a ser vendido por R\$ 32,90, ou seja, aproximadamente pelo preço original.

Esse tipo de análise colabora para o desenvolvimento da competência específica 3 de **Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes utilizam estratégias e conceitos matemáticos para resolver diferentes problemas e analisam a plausibilidade dos resultados.

### FÓRUM

Essa seção traz à discussão as modalidades de pagamento à vista e a prazo, explorando o Tema Contemporâneo Transversal **Educação Financeira**. Ler o texto com os estudantes e verificar o que eles já conheciam a respeito dessas duas formas de pagamento. A questão proposta conduz a uma discussão desse tema.

Com o debate proposto nessa seção, espera-se que os estudantes percebam que a modalidade de pagamento a prazo surgiu devido aos altos índices da inflação e desemprego, servindo como um meio de o consumidor adquirir o produto e o comprador receber o valor combinado em parcelas.

Historicamente, uma das primeiras vezes que ocorreu um parcelamento de compras foi na indústria de máquinas de costura, que oferecia crédito às compradoras. No Brasil, muitas empresas cresceram nesse sistema de vendas,

particularmente utilizando carnês. Posteriormente, o cartão de crédito se modernizou e difundiu entre as classes sociais. Essa discussão colabora para o desenvolvimento da competência geral 1, pois são valorizados e utilizados conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e social para explicar a realidade, colaborando para uma sociedade democrática e inclusiva. Esse trabalho pode ser desenvolvido com o professor de História, da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

Os estudantes também precisam explicar as vantagens de comprar na modalidade a prazo. Discutir que esse tipo de venda costuma ser utilizado para valores mais elevados, mas que é preciso cuidado para analisar se as prestações poderão ser pagas sem comprometer o orçamento familiar e se o juro cobrado é razoável. Atualmente, as operadoras de cartão de crédito incentivam seu uso com acúmulo de pontos, que podem ser trocados por diversos bens e serviços, e isenção da mensalidade, caso o cartão seja utilizado acima de determinado valor mensal.

Para ampliar esse debate, conversar com os estudantes a respeito do planejamento orçamentário familiar e de bons exemplos de utilização do cartão de crédito. Pode-se apresentar a cartilha disponível no *link <<https://api.abecs.org.br/wp-content/uploads/2019/09/Carta%CC%83o-A-dica-e%CC%81-saber-usar.pdf>>* (acesso em: 28 ago. 2020), produzida pela Associação Brasileira das Empresas de Cartões de Crédito e Serviços (ABECS). Nessa cartilha, há explicações do funcionamento de um cartão de crédito, dicas que podem ser úteis na prática das compras e cuidados a serem tomados ao utilizar o cartão.

Pode-se propor aos estudantes a elaboração de um folheto contendo informações sobre o uso do cartão de crédito, como vantagens e desvantagens, e exemplos de usos conscientes para divulgar na escola a fim de trazer uma reflexão sobre o assunto. Dessa forma, desenvolve-se a competência específica 2 da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes estão propondo e participando de ações que investigam o mundo contemporâneo para tomar decisões a partir dos conhecimentos matemáticos.

No tópico **Aumentos e descontos sucessivos**, pode-se explorar o cálculo mental. Por exemplo, para determinar 20% de 500 é possível utilizar o fato de que 10% correspondem a 50; logo 20% correspondem ao dobro de 50, ou seja, 100. Essa associação pode ser utilizada para questionar os estudantes se, ao aplicar um aumento de 20% e, em seguida, um desconto de 20%, retorna-se ao valor original. Com base em discussões anteriores, espera-se que eles percebam que procedendo dessa maneira não se chega ao valor original.

Para exemplificar, considerar um reajuste de 20% em um produto que custa R\$ 1.000,00. Com o reajuste, ele passa a custar R\$ 1.200,00. Aplicando-se um desconto de 20%, ou seja, R\$ 240,00, o novo preço passa a ser R\$ 960,00, pois  $R\$ 1.200,00 - R\$ 240,00 = R\$ 960,00$ .

O trabalho com aumentos sucessivos deve ser realizado com cuidado, pois esse conceito será utilizado posteriormente ao explorar o conceito de juro composto. Comentar que a calculadora é muito utilizada nesses cálculos para facilitar a obtenção dos resultados, conforme mencionado no boxe **Saiba que...**, entretanto, é necessário conhecer os conceitos aplicados nos cálculos para manipular uma calculadora.

Esse tópico também pode ser ampliado por meio de outros contextos, por exemplo, discutir a respeito dos aumentos imobiliários. Em geral, ao alugar um imóvel, é combinado um valor de aluguel que sofre reajuste anualmente, ou seja, essa é uma situação que envolve aumentos sucessivos. Se julgar conveniente, solicitar aos estudantes que pesquisem os índices que são utilizados no cálculo dos reajustes de aluguéis, colaborando para o estudo do Tema Contemporâneo Transversal **Educação Financeira** e o desenvolvimento da competência específica 1 da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT104**, pois os estudantes estarão em contato com taxas e índices de natureza socioeconômica.



O texto a seguir traz informações, acerca do reajuste de aluguéis, que podem ser exploradas em sala de aula.

[...]

Todo aniversário de contrato vem acompanhado de um **reajuste de aluguel**. Mas você sabe como é feito o cálculo? A correção é calculada em cima do preço inicial da locação que foi negociado com o proprietário ou imobiliária.

[...]

Basta aplicar o percentual do índice previsto no contrato, que normalmente é o IGP-M. Você pode ver quanto ficará no site do Banco Central. É só colocar o período de início e final do contrato e escolher o indicador.

[...]

A maioria dos contratos imobiliários usa o Índice Geral de Preços de Mercado, **IGP-M**, como principal índice para calcular o reajuste do aluguel. Ele é popularmente conhecido como a “**inflação do aluguel**” e é baseado em três outros indicadores para ser calculado:

- **IPA-M**: Índice de Preços do Atacado-Mercado – Quem tem um peso de 60% no seu cálculo.
- **IPC-M**: Índice de Preços do Consumidor-Mercado – Com peso de 30% no cálculo.
- **INCC-M**: Índice Nacional de Custo da Construção-Mercado – Peso de 10% no cálculo.

A diversidade de fatores que é usado para calcular o IGP-M mostra a relevância dele. Ele é importante por ser apontado em vários setores econômicos. Na prática, acaba funcionando como um indicador macroeconômico.

[...]

O IGP-M interfere diretamente nas finanças dos brasileiros, porque está relacionado a gastos do dia a dia, como:

- Educação: Mensalidade de escolas e universidades
- Imóveis: Aluguéis de imóveis comerciais e residenciais
- Energia: Tarifa de energia elétrica
- Seguros: Algumas modalidades de seguro
- Saúde: Determinados planos de saúde

A conta para fazer o acréscimo consiste em pegar o índice do mês transformado em numeral decimal e multiplicar pelo valor do aluguel. Depois é só somar.

[...]

COMO é calculado o reajuste do seu aluguel?. **Estadão**, 28 mar. 2019. Disponível em: <https://imoveis.estadao.com.br/aluguel/como-e-calculado-o-reajuste-do-seu-aluguel/>. Acesso em: 28 ago. 2020.

O tópico **Lucro e prejuízo** traz termos utilizados em transações comerciais. Verificar o que os estudantes compreendem a respeito desses termos antes de desenvolver a teoria relacionada a eles.

Comentar que não são somente as empresas que podem ter lucro ou prejuízo. Isso pode acontecer com orçamento familiar ou até mesmo com um país. A imagem a seguir apresenta a situação fiscal do Brasil em 28 de agosto de 2020.

The screenshot shows the 'Portal da Transparéncia' homepage with a blue header. In the top right corner, there are links for 'Ir para o conteúdo', 'Ir para o menu', 'Ir para a busca', 'Ir para o rodapé', 'ACESSIBILIDADE', 'ALTO CONTRASTE', and 'MAPA DO SITE'. A search bar is located at the top right with the placeholder 'Busque por órgão, cidade, CNPJ, servidor'. Below the header, the text 'PORTAL DA TRANSPARÉNCIA' and 'CONTROLEADORIA-GERAL DA UNIÃO' is displayed. A navigation bar includes icons for 'Início', 'Home', 'Notícias', 'Transparéncia', 'Licitações', 'Contratos', 'Relatórios', 'Documentos', 'Glossário', and 'Ajuda'. A sidebar on the left says 'VOCÊ ESTÁ AQUI: Início > ORÇAMENTO ANUAL' and 'Orçamento anual'. The main content area features a large blue banner with the text 'ORÇAMENTO FISCAL E DE SEGURIDADE SOCIAL EM 2020' and 'ORÇAMENTO ATUALIZADO DA RECEITA R\$ 3,58 TRILHÕES'. To its right, it says 'ORÇAMENTO ATUALIZADO DA DESPESA R\$ 4,00 TRILHÕES'. Below this, a section titled 'Escolha o ano desejado:' shows buttons for the years 2016, 2017, 2018, 2019, and 2020, with 2020 being the selected year. At the bottom right of the page, there is a link 'HTTP://WWW.PORTALTRANSPARENCIA.GOV.BR/ORÇAMENTO'.

Se julgar pertinente, pedir aos estudantes que acessem o Portal de Transparência do Governo Federal pelo link <<http://www.portaltransparencia.gov.br/orcamento>> (acesso em: 28 ago. 2020), em que há informações orçamentárias do Brasil.

## ► ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades trazem situações com os conceitos de porcentagem. Aproveitar a atividade resolvida **1** para explorar o cálculo mental: 10% de R\$ 540,00 correspondem a R\$ 54,00. Logo, 20% correspondem ao dobro, ou seja, R\$ 108,00. Assim, o preço à vista do vestido é R\$ 432,00. Valorizar as diferentes estratégias de resolução para que os estudantes possam perceber qual eles consideram mais adequada para determinada situação.

Na atividade resolvida **2**, explicitar que o processo utilizado para resolver a situação é uma regra de três, já que foi utilizada a ideia de proporcionalidade. Aproveitar o contexto apresentado para discutir com os estudantes os custos que pesam sobre o salário de um trabalhador com registro em carteira. Pode ser solicitada uma pesquisa para investigar como funciona o cálculo do imposto de renda sobre o salário e outros descontos. Esse trabalho pode ser realizado em parceria com os professores de História e de Sociologia da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

Ao fazer as conversões de registros de representação na atividade proposta **1**, se necessário, retomar com os estudantes a noção de frações equivalentes.

Aproveitar os resultados da atividade proposta **3** para discutir a aproximação numérica no âmbito da Matemática financeira. Espera-se que os estudantes percebam que nem sempre vão obter resultados exatos ao calcular porcentagens e, dependendo do contexto, é necessário fazer aproximações. Nessa atividade, por se tratar da quantidade de habitantes, a resposta precisa ser um número natural.

Na atividade **6**, retomar a ideia de que três aumentos sucessivos de 5% correspondem a multiplicar o valor inicial por  $(1,05)^3$ . Esse tipo de raciocínio prepara os estudantes a explorar os juros compostos que serão estudados mais adiante.

Na atividade **9**, pode-se explorar a ideia de proporcionalidade. Se um desconto de 10% corresponde a R\$ 15,00, então o valor da raquete (100%) corresponde a R\$ 150,00, pois  $R\$ 15,00 \cdot 10 = R\$ 150,00$ . Com o desconto, os preços ficam igualados em R\$ 135,00.

## Juros

Aproveitar esse tópico para pedir aos estudantes que pesquisem a taxa Selic, definida pelo Banco Central do Brasil, que baliza as taxas de juros praticadas no país, além de servir como instrumento para controlar a inflação (que será tratada no próximo Capítulo). Quando há uma tendência de aumento da inflação, a taxa Selic sobe, fazendo que o crédito fique mais caro e as pessoas deixem de comprar, o que, em tese, diminui os preços dos produtos. O texto a seguir traz informações sobre essa taxa.

### Taxa Selic

A Selic é a taxa básica de juros da economia. É o principal instrumento de política monetária utilizado pelo Banco Central (BC) para controlar a inflação. Ela influencia todas as taxas de juros do país, como as taxas de juros dos empréstimos, dos financiamentos e das aplicações financeiras.



A taxa Selic refere-se à taxa de juros apurada nas operações de empréstimos de um dia entre as instituições financeiras que utilizam títulos públicos federais como garantia. O BC opera no mercado de títulos públicos para que a taxa Selic efetiva esteja em linha com a meta da Selic definida na reunião do Comitê de Política Monetária do BC (Copom).

#### Origem do nome “Selic”

O nome da taxa Selic vem da sigla do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia. Tal sistema é uma infraestrutura do mercado financeiro administrada pelo BC. Nele são transacionados títulos públicos federais. A taxa média ajustada dos financiamentos diários apurados nesse sistema corresponde à taxa Selic.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxa Selic**. Disponível em:  
<https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>. Acesso em: 28 ago. 2020.

Ao explorar o boxe **Saiba que...**, comentar que o ano comercial ter 360 dias facilita os cálculos contábeis, considerando todos os meses com 30 dias. Informar também que o ano civil considera todos os 365 dias do ano (366 no caso de ano bissexto), definido pela lei nº 810, de 6 de setembro de 1949.

Ao contrário do que muitos pensam, o ano civil não começa em 1º de janeiro e termina em 31 de dezembro, pois ele é contado a partir de qualquer dia do ano e termina no mesmo dia do ano seguinte, como afirma o artigo primeiro da referida lei:

[...]

Art. 1º Considera-se ano o período de doze meses contado do dia do início ao dia e mês correspondentes do ano seguinte.

[...]

BRASIL. **Lei n. 810, de 6 de setembro de 1949**. Define o ano civil.  
Brasília, DF: Presidência da República, 1949. Disponível em:  
[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/1930-1949/1810-49.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/1930-1949/1810-49.htm). Acesso em: 28 ago. 2020.

Ao desenvolver o tópico **Juro simples**, propor aos estudantes que pesquisem em boletos de compras, contribuições de condomínio, entre outros, o percentual correspondente à multa e juro de mora, para que percebam que o juro simples, em geral, é aplicado em dívidas de curto prazo.

Enfatizar que no cálculo de juro simples a taxa é dada em porcentagem e aplicada na forma decimal, por exemplo,  $5\% = 0,05$ . É importante destacar que as unidades de medida da taxa e do tempo devem estar relacionadas a um mesmo intervalo de tempo: ao mês, ao ano, ao semestre etc.

### ► ATIVIDADE RESOLVIDA E ATIVIDADES

A atividade resolvida **7** aplica os conceitos de juro simples. Pode-se propor alterações nessa atividade para levar os estudantes a observar algumas características. Por exemplo, ao considerar uma taxa de juro maior do que 2%, espera-se que eles concluam que o juro também seria maior, já que se trata de uma situação com grandezas diretamente proporcionais, e, consequentemente, o montante seria maior.

As atividades propostas apresentam situações de juro simples e colaboraram para o desenvolvimento da competência específica **3** de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT303**, pois os estudantes interpretam situações envolvendo juro simples, utilizam conceitos, definições e procedimentos matemáticos para construir modelos e resolver problemas analisando a plausibilidade das respostas.

Aproveitar a atividade proposta **20** para explorar o cálculo mental. Espera-se que os estudantes percebam que R\$ 150,00 correspondem a 30% do capital. Como se trata de uma aplicação a juro simples pelo período de dez meses, basta dividir 30% por 10, obtendo 3% ao mês. Isso não seria possível se o regime fosse a juros compostos, assunto que será explorado posteriormente.

Na atividade **25**, retomar que as unidades de medida da taxa de juros e do tempo de aplicação devem estar relacionadas a um mesmo intervalo de tempo. Para o item **c**, retomar que o cálculo é feito com base no mês comercial que considera 30 dias.

Para complementar essas atividades, propor aos estudantes que elaborem uma situação-problema envolvendo juro simples e os conceitos estudados anteriormente. Depois, eles devem trocar a situação elaborada entre os colegas para que um resolva a do outro. Por fim, pedir que confirmam juntos as resoluções.

No primeiro boxe **Pense e responda** do tópico **Juro composto**, explicar aos estudantes que em cálculos envolvendo quantias monetárias usamos apenas duas casas decimais após a vírgula, que indicam os centavos de real. Por isso, para obter o resultado final, realiza-se o arredondamento na segunda casa decimal, obtendo-se uma quantia inteira de centavos. Se necessário, recordar as regras de arredondamento. Se o algarismo da terceira casa decimal for menor do que 5, o algarismo da segunda casa decimal não se altera. Já se o algarismo da terceira casa decimal for igual ou maior do que 5, o algarismo da segunda casa decimal é aumentado em uma unidade. Orientar os estudantes a proceder dessa maneira ao trabalhar com valores monetários nas atividades propostas.

O segundo boxe **Pense e responda** desse mesmo tópico leva os estudantes a perceber a diferença entre a aplicação a juro composto e a aplicação a juro simples, considerando uma mesma taxa e um mesmo período.

Enfatizar que, assim como ocorreu no juro simples, ao trabalhar na modalidade do juro composto, é necessário que as unidades de medida da taxa e do tempo estejam relacionadas a um mesmo intervalo de tempo. Nesse caso, é recomendável converter o tempo para se adequar à taxa se estiver em dias, meses, semestres etc.

Ao explorar o boxe **Saiba que...**, salientar aos estudantes que, dependendo do modelo de calculadora científica utilizada, a ordem das teclas a serem pressionadas se altera. Caso seja possível, solicitar aos estudantes que tragam calculadoras científicas para a aula ou usem as disponíveis na maioria dos *smartphones*. Estimular que investiguem o processo de funcionamento da calculadora que tiverem em mãos e compartilhem com os colegas, caso sejam de modelos diferentes.

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades aplicam os conceitos de juro composto. Verificar se os estudantes percebem a diferença em relação ao juro simples estudado anteriormente. Por meio dessas atividades, os estudantes desenvolvem a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT303**, ao interpretar e comparar situações que envolvem juro simples e juro composto, aplicando procedimentos e conceitos matemáticos para resolver problemas em diversos contextos.

A atividade resolvida **9** enfatiza a comparação das duas modalidades de juros estudadas no Capítulo. Na atividade resolvida **10**, destacar que as unidades de medida da taxa e do tempo estão relacionadas a diferentes intervalos de tempo, por isso é realizada a conversão de 72 meses para 6 anos.



Propor aos estudantes que compartilhem as estratégias utilizadas na resolução das situações-problema das atividades propostas. Espera-se que eles apliquem os conceitos de juro simples e composto, sabendo diferenciá-los com base nas informações dos enunciados das atividades.

## Juros e funções

Nesse tópico, os estudantes comparam representações gráficas de funções associadas a juro simples e a juro composto. Com isso, eles desenvolvem a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT303**.

Nos tópicos **Juro simples e função afim** e **Juro composto e função exponencial**, enfatizar a associação da função afim ao juro simples e da função exponencial ao juro composto considerando como domínio os números naturais não nulos. Comentar que a representação gráfica ajuda a comparar visualmente duas aplicações, sejam em uma mesma modalidade ou em modalidades diferentes.

Comparar duas ou mais situações envolvendo juro composto a partir de seus gráficos permite compreender como o tempo (expoente da função) afeta o crescimento da curva, mostrando que, quanto mais um valor fica aplicado, ou uma dívida deixa de ser paga, o montante aumenta.

Para aprofundar a discussão, pode-se explorar o uso de planilhas eletrônicas, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **2** de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT203**. Podem-se explorar atividades em que a competência geral **2** seja desenvolvida, no que se refere à curiosidade intelectual, investigação, análise crítica, criatividade e investigar causas. Para isso, por exemplo, solicitar aos estudantes que elaborem situações-problema e as registrem na planilha eletrônica, comparando a evolução do montante no tempo no regime de juro simples e de juro composto à uma mesma taxa. Estimulá-los a utilizar os recursos da planilha eletrônica para que os cálculos sejam realizados de maneira automática dados o valor inicial, a taxa de juros e o tempo de aplicação. Eles também podem gerar os gráficos de cada situação, como no exemplo do tópico **Juro composto e função exponencial**, e para facilitar a análise e comparação do comportamento da evolução do montante. Esse trabalho pode ser complementado com a atividade indicada na seção **Explorando a tecnologia** deste Capítulo, apresentada mais adiante.

### ► ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades exploram a representação gráfica de funções relacionadas a juro simples e composto. Verificar a compreensão dos estudantes a respeito dos conceitos aplicados em cada atividade. Com essas atividades, os estudantes desenvolvem a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT303** ao explorar situações envolvendo juro simples e juro composto e ao diferenciá-las por meio de representações gráficas.

Na atividade resolvida **11**, é importante ressaltar que os gráficos são apresentados por uma linha contínua para melhor visualização. Conceitualmente, eles seriam representados por uma sequência de pontos, na medida em que a variável independente é o número de meses do empréstimo, ou seja, um número natural.

Nas atividades propostas **41** e **44**, comentar a importância da aproximação para obter o tempo de aplicação. Como se trata de meses, é necessário que as respostas sejam números naturais.

Na atividade **46**, discutir com os estudantes a diferença entre a taxa de juros nominal, que geralmente é aquela anunciada para tomar um empréstimo, e a taxa de juros real, que é a efetivamente cobrada do tomador do empréstimo. É essa taxa que compõe o CET (Custo Efetivo Total) do empréstimo e contempla, além da taxa de juros nominal, a previsão de inflação, o IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), taxas de administração, entre outras taxas. Assim, ao contratar um empréstimo, deve-se ficar atento ao CET, pois um banco pode oferecer uma taxa nominal melhor, mas, ao final, a taxa de juros real pode ser maior. A seguir há mais informações a respeito desse assunto.

[...]

**Taxa de juros simples** – aplicada/cobrada sempre sobre o capital inicial, que é o valor emprestado/investido. Não há cobrança de juros sobre juros acumulados no(s) período(s) anterior(es). Exemplo: em um empréstimo de R\$ 1.000, com taxa de juros simples de 8% a.a., com duração de 2 anos, o total de juros será R\$ 80 no primeiro ano e R\$ 80 no segundo ano. Ao final do contrato, o tomador irá devolver o principal e os juros simples de cada ano:  $R\$ 1.000 + R\$ 80 + R\$ 80 = R\$ 1.160$ .

**Taxa de juros composta** – para cada período do contrato (diário, mensal, anual etc.), há um “novo capital” para a cobrança da taxa de juros contratada. Esse “novo capital” é a soma do capital e do juro cobrado no período anterior. Exemplo: em um empréstimo de R\$ 1.000, com taxa de juros composta de 8% a.a., com duração de 2 anos, o total de juros será R\$ 80 no primeiro ano. No segundo ano, os juros vão ser somados ao capital ( $R\$ 1.000 + R\$ 80 = R\$ 1.080$ ), resultando em juros de R\$ 86 (8% de R\$ 1.080).

Os juros do primeiro ano (R\$ 80) são somados com os juros do segundo ano (R\$ 86), totalizando o valor de R\$ 1.166 que deverá ser devolvido ao fim do empréstimo.

**Taxa de juros real** – obtida pelo desconto da taxa de inflação da taxa de juros nominal de determinada transação. Exemplo: uma taxa de juros nominal mensal de 10% e uma inflação no período de 2% resultam em uma taxa de juros real de aproximadamente 7,84% [na fórmula completa:  $(1,10/1,02 - 1) * 100$  ].

[...]

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Entenda o juro**. Disponível em:  
<https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/entendajuro>. Acesso em: 28 ago. 2020

Esse tipo de discussão colabora para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT104**, pois leva os estudantes a interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, investigando processos de cálculo desses números.

### > EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Essa seção traz uma reflexão a respeito do uso de planilhas eletrônicas para auxiliar no cálculo e na análise do juro simples e do juro composto. Dessa forma, colabora-se para o desenvolvimento da competência geral **5**, pois os estudantes estão utilizando tecnologias digitais de maneira crítica, reflexiva e ética para se comunicar e resolver problemas. Estão também envolvidas as competências específicas **1, 2 e 3** de **Matemática e suas Tecnologias**, pois levam os estudantes a utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em variados contextos, sejam em questões socioeconômicas ou tecnológicas, além de aplicar esses conceitos para resolver problemas e avaliar plausibilidade dos resultados. Os estudantes exploram, ainda, a habilidade **EM13MAT203**, ao aplicar conceitos matemáticos no planejamento, execução e análise de ações que envolvem a utilização de aplicativos e a criação de planilhas para simular cálculos de juro simples e juro composto.



Ao criar a planilha eletrônica para o cálculo dos juros, é importante justificar cada passo do processo, bem como a utilização das fórmulas inseridas na planilha. As atividades ao final dessa seção servem para verificar o aprendizado dos estudantes em relação à criação e à utilização das planilhas eletrônicas para a análise de juros.

Na atividade 1, os estudantes comparam o montante obtido nas modalidades de juro simples e de juro composto. Espera-se que eles calculem a diferença obtida em dezembro e, para isso, basta realizar a diferença: R\$ 14.257,61 – R\$ 13.600,00 = R\$ 657,61.

Na atividade 2, espera-se que eles percebam que, no primeiro mês, o montante obtido é o mesmo, pois, ao considerar  $t = 1$  nas duas fórmulas, obtém-se o mesmo resultado, conforme mostrado a seguir.

$$\text{Juro simples: } M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow M = 10\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 1) = 10\,300$$

$$\text{Juro composto: } M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 10\,000 \cdot (1 + 0,03)^1 = 10\,300$$

Na atividade 3, os estudantes precisam reproduzir a planilha elaborada considerando um capital de R\$ 20.000,00 a uma taxa de 2% a.m. durante um ano. A seguir reproduzimos uma possível resposta.

	Mês	Tempo (t)	Montante (M) a juro simples	Montante (M) a juro composto
2	Janeiro	1	R\$ 20.400,00	R\$ 20.400,00
3	Fevereiro	2	R\$ 20.800,00	R\$ 20.808,00
4	Março	3	R\$ 21.200,00	R\$ 21.224,16
5	Abril	4	R\$ 21.600,00	R\$ 21.648,64
6	Maio	5	R\$ 22.000,00	R\$ 22.081,62
7	Junho	6	R\$ 22.400,00	R\$ 22.523,25
8	Julho	7	R\$ 22.800,00	R\$ 22.973,71
9	Agosto	8	R\$ 23.200,00	R\$ 23.433,19
10	Setembro	9	R\$ 23.600,00	R\$ 23.901,85
11	Outubro	10	R\$ 24.000,00	R\$ 24.379,89
12	Novembro	11	R\$ 24.400,00	R\$ 24.867,49
13	Dezembro	12	R\$ 24.800,00	R\$ 25.364,84

A atividade 4 leva os estudantes a refletir qual a modalidade de juro mais utilizada no cotidiano. Espera-se que eles percebam que o juro composto é o mais aplicado.

Para ampliar as atividades dessa seção, propor aos estudantes que elaborem uma situação-problema envolvendo planilha eletrônica e simulações de juros simples e compostos. A partir das criações, os estudantes devem elaborar questões que podem ser trocadas com os colegas para um responder às questões do outro com base na análise da planilha.

## > CONEXÕES

Essa seção traz uma reflexão a respeito dos juros do cartão de crédito, trabalhando os Temas Contemporâneos Transversais **Educação para o Consumo** e **Educação Financeira**. Também desenvolve a competência geral 7, pois os estudantes argumentam com base em fatos, dados e informações confiáveis, formulando e defendendo ideias referentes ao consumo responsável, e a competência específica 1 de **Matemática e suas Tecnologias**,

pois utilizam estratégias, conceitos e procedimentos para interpretar situações em diferentes contextos relacionados a questões socioeconômicas. Essa discussão colabora para o desenvolvimento da competência geral 1, pois são valorizados e utilizados conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e social para explicar a realidade, colaborando para uma sociedade democrática e inclusiva.

Explorar o infográfico e os textos dessa seção com os estudantes, verificando se eles compreendem o funcionamento de um cartão de crédito e os juros relacionados a ele. O boxe **Para acessar** indica um material que ajuda a aprofundar o estudo do cartão de crédito.

Se julgar oportuno, levar uma fatura de cartão de crédito para que os estudantes possam analisar os elementos que a compõe. Algumas questões podem auxiliar na análise da fatura, como: “Qual é o valor dessa fatura?”; “Qual é o valor do pagamento mínimo? Que percentual isso representa do valor total da fatura?”; “Suponha que esse valor seja refinanciado. Qual será o valor a pagar em seis meses? Qual é o percentual de juros pagos?”; “Suponha que você faça o pagamento mínimo e refinancie o restante. Quanto deverá pagar na próxima fatura?”.

As atividades dessa seção auxiliam a verificar a compreensão dos estudantes a respeito do cartão de crédito.

Na atividade 1, espera-se que os estudantes façam uma reflexão pessoal, analisando o que já conheciam desse assunto. É interessante solicitar que os estudantes compartilhem seus conhecimentos, de modo a valorizar os saberes que trazem de sua vivência cotidiana.

Na atividade 2, eles devem explicar o que é crédito rotativo. É esperado que eles percebam que, nessa modalidade de crédito, pode-se pagar qualquer valor acima do mínimo e o restante no mês seguinte.

A atividade 3 traz uma situação envolvendo cartão de crédito e juros. No item a, os estudantes devem calcular 15% de R\$ 850,00, ou seja,  $0,15 \cdot R\$ 850,00 = R\$ 127,50$ . No item b, eles devem calcular o valor da próxima fatura considerando que o valor mínimo da fatura do item a foi pago e que não haverá novas compras. Nesse caso, eles devem calcular 15,9% de  $(R\$ 850,00 - R\$ 127,50)$ , ou seja,  $0,159 \cdot R\$ 722,50 \approx R\$ 114,88$  e adicionar a R\$ 722,50, obtendo R\$ 837,38. Comentar que nesses cálculos foram realizadas aproximações considerando duas casas decimais.

A atividade 4 propõe uma pesquisa de taxas dos cartões de créditos do município em que os estudantes moram e a elaboração de problemas com base na pesquisa. Como complemento, sugerir aos estudantes que elaborem folhetos informativos com as principais informações obtidas na pesquisa e compartilhem com a comunidade, de modo a contribuir para uma tomada de decisão consciente e com base em fatos e dados. Assim, os estudantes se tornam agentes de mudança em sua comunidade, propiciando o desenvolvimento de atitudes cidadãs.

Na atividade 5, espera-se que eles percebam a presença dos conceitos de juros, taxas e porcentagem ao realizar as atividades dessa seção.

## > ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Essas atividades retomam os conceitos estudados no Capítulo: porcentagem, juro simples e juro composto. Espera-se que os estudantes consigam aplicar conceitos e procedimentos matemáticos para resolver as situações-problema apresentadas, desenvolvendo a competência específica 3 de **Matemática e suas Tecnologias**. Pedir que justifiquem por



meio de cálculos ou expliquem o raciocínio utilizado para obter a alternativa correta em cada atividade. Algumas atividades complementares podem ser selecionadas e utilizadas como parte do processo avaliativo dos estudantes.

Aproveitar o tema da atividade **2** para discutir com os estudantes o significado do Produto Interno Bruto (PIB). Essa discussão pode ser feita em parceria com os professores de Geografia e de Sociologia da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. O texto a seguir traz algumas informações sobre o PIB.

### O que é o PIB

O PIB é a soma de todos os bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente em um ano. Todos os países calculam o seu PIB nas suas respectivas moedas.

[...]

O PIB mede apenas os bens e serviços finais para evitar dupla contagem. Se um país produz R\$ 100 de trigo, R\$ 200 de farinha de trigo e R\$ 300 de pão, por exemplo, seu PIB será de R\$ 300, pois os valores da farinha e do trigo já estão embutidos no valor do pão.

Os bens e serviços finais que compõem o PIB são medidos no preço em que chegam ao consumidor. Dessa forma, levam em consideração também os impostos sobre os produtos comercializados.

O PIB não é o total da riqueza existente em um país. Esse é um equívoco muito comum, pois dá a sensação de que o PIB seria um estoque de valor que existe na economia, como uma espécie de tesouro nacional.

Na realidade, o PIB é um indicador de fluxo de novos bens e serviços finais produzidos durante um período. Se um país não produzir nada em um ano, o seu PIB será nulo.

[...]

IBGE. **Produto Interno Bruto – PIB**. Disponível em:  
<https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php>. Acesso em: 28 ago. 2020.

Na atividade complementar **11**, relembrar que uma aplicação a juro simples pode ser associada a uma função afim e uma aplicação a juro composto, a uma função exponencial, ambas tendo como domínio números naturais não nulos. Assim, tem-se uma progressão aritmética associada ao juro simples e uma progressão geométrica ao juro composto.

### ► PARA REFLETIR

Essa seção permite aos estudantes que realizem uma autoavaliação das aprendizagens realizadas neste Capítulo. Inicialmente, ela retoma o que foi estudado e propõe questões que auxiliam nessa retomada. Para ampliar esse resgate, solicitar aos estudantes que elaborem um esquema ou descrevam com as próprias palavras o que compreenderam dos conceitos estudados.

O primeiro item traz uma reflexão pessoal buscando identificar quais conceitos deste Capítulo os estudantes já conheciam. O segundo item retoma o conceito de aumentos consecutivos, levando os estudantes a concluir que o segundo aumento percentual é feito com base no aumento realizado anteriormente. No terceiro item, espera-se que os estudantes escolham a aplicação a juro composto, pois é a modalidade que rende mais nas condições dadas.

CAPÍTULO  
**3**

# Matemática financeira

## A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades para desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades, e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

**> Competências gerais da BNCC:** 1, 2, 4, 6 e 7

**> Competências específicas e habilidades:**

**Área de Matemática e suas Tecnologias**

- Competência específica 1: **EM13MAT104**
- Competência específica 2: **EM13MAT203**
- Competência específica 3: **EM13MAT303**

**Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**

- Competência específica 2
- Competência específica 3

**> Temas Contemporâneos Transversais:**

- Educação Financeira
- Educação para o Consumo
- Vida Familiar e Social

## Orientações didáticas

### Abertura de Capítulo

O texto da **Abertura** deste Capítulo e as questões propostas permitem trabalhar os Temas Contemporâneos Transversais **Educação para o Consumo** e **Educação Financeira**. Também colaboram para o desenvolvimento da competência geral **6**, pois os estudantes podem compartilhar e valorizar a diversidade dos saberes e vivências culturais, explorando aspectos da autonomia e responsabilidade no que se refere ao tema.

Ler o texto com os estudantes e discutir as opiniões deles a respeito do assunto apresentado. Neste Capítulo, são explorados conceitos relacionados à amortização, orçamento familiar, inflação, consumo consciente, impostos e encargos. Resgatar as experiências de vida dos estudantes em relação às finanças. Discutir sobre as formas de pagamento que eles conhecem e a importância de realizar um orçamento familiar saudável, sempre que possível poupando algum dinheiro, seja para imprevistos, seja para conseguir realizar algum projeto pessoal.

Na atividade **1**, incentivar os estudantes a compartilhar situações vivenciadas por eles relacionadas à venda e à compra de produtos e serviços, verificando o conhecimento



prévio que têm sobre o tema. Destacar que, quanto ao pagamento via boleto, no ato de pagar é gerado um boleto (informativo da compra) que contém a descrição do produto, o valor a ser pago, dados do comprador e do fornecedor. Também contém a descrição de serviços (garantias e fretes) e podem servir como comprovantes de pagamento. O valor do boleto deve ser pago em uma vez até a data de validade. No caso do cartão de crédito, comentar que o consumidor deve possuir um cartão de crédito oferecido por uma credora ou instituição bancária. O valor a ser pago pode ser parcelado em certa quantidade de vezes e incluir juros e taxas embutidos nos valores das parcelas. Quanto ao pagamento à vista, o valor total do produto é pago no ato da compra e pode ser efetuado via boleto, cartão de crédito ou débito ou com dinheiro. No pagamento via cheque, o valor do produto/serviço é descontado da conta do comprador e o fornecedor deve ir ao banco para realizar a transação. No pagamento via depósito, este pode ser feito em um banco físico ou digital. Em alguns casos, gera-se um boleto para realizar o pagamento. Comentar também sobre a Guia de Recolhimento da União (GRU). Em casos específicos, é gerado um “boleto” com destino à conta da União (banco nacional). Esse boleto contém informações da unidade gestora (quem recebe o pagamento), o código do recolhimento (os referidos serviços são categorizados e cada um possui um código único) e o valor a ser pago.

A atividade **2** leva os estudantes a explicar como escolhem a melhor forma de pagamento. Uma resposta possível é comparar os valores correspondentes nas condições dadas com base no tempo e na quantidade de vezes em que o bem é parcelado. Há situações em que os valores não são diferentes, considerando as duas opções de pagamento indicadas. Nesse caso, por exemplo, realizar o pagamento em prestações e investir o restante do dinheiro pode ser uma opção mais vantajosa, deixando o dinheiro “trabalhar” no período do parcelamento. Incentivar os estudantes a pesquisar situações e compartilhar com os colegas.

Aproveitar a atividade **3** para promover uma discussão dos cartões oferecidos por lojas que visam fidelizar o cliente. Muitas lojas oferecem descontos e baixos juros para quem paga com esse tipo de cartão, o que costuma ser viável para quem tem o hábito de comprar no mesmo estabelecimento com frequência ou realizar compras de grandes valores. Em alguns casos, a loja cobra uma taxa mensal ou anual pelo uso do cartão, por isso é importante analisar se há realmente vantagem em adquirir esse serviço. Cada loja estipula suas regras de uso do cartão, conforme estabelece sua instituição credora.

A atividade **4** trata da importância do orçamento, uma ferramenta que auxilia a administração das finanças, em que é possível reunir informações sobre receitas e despesas, verificar se é possível saldar as despesas com as receitas, ter uma ideia de como o dinheiro está sendo usado, controlar esse uso e, se possível, poupar. Pode-se incentivar os estudantes a conversar com adultos sobre o uso, na atualidade ou não, de cadernetas de compra e venda, comuns em padarias, armazéns e mercados. Explorar esse contexto pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **4**, por exemplo, na medida em que os estudantes podem utilizar diferentes linguagens para partilhar as informações produzindo sentido aos conteúdos explorados em sala de aula.

## Introdução

Esse tópico apresenta aos estudantes os assuntos que serão explorados no Capítulo. Verificar o que eles já ouviram falar a respeito desses assuntos e a importância de conhecê-los para organizar as finanças pessoais, por exemplo. Pode-se propor que pesquisem o motivo de muitos cofres terem formato de porco. Não há um consenso da sua origem,

mas são apresentadas diferentes versões que os estudantes podem encontrar. Uma delas diz respeito à tradição chinesa, na qual o porco é um símbolo de fartura.

## Sistemas de amortização

O trabalho com esse tópico colabora para o desenvolvimento das competências específicas **2** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes investigam ações do mundo contemporâneo relacionadas às finanças fazendo uso de tecnologias para mobilizar conceitos e procedimentos matemáticos, a fim de aplicá-los na interpretação e resolução de problemas em diversos contextos. Esse tópico também contribui para trabalhar as habilidades **EM13MAT203**, pois os estudantes aplicam conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise das ações envolvendo o controle de orçamento familiar e simuladores de juros para tomar decisões, e **EM13MAT303**, pois interpretam e comparam situações envolvendo juro.

Se necessário, inicialmente, retomar alguns conceitos como capital, montante, juro e prestação. Comentar que alguns financiamentos também incluem o pagamento de certas quantias preestabelecidas e que são feitas em datas combinadas.

O boxe **Pense e responda** traz uma reflexão a respeito do cálculo das prestações de um bem financiado. Incentivar os estudantes a se perguntarem sobre as situações de compra e venda já vivenciadas por eles. Podem ser listados termos que escutaram, como parcelamento em  $x$  vezes sem juros, desconto à vista etc. Aproveitar para verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre situações envolvendo uso do dinheiro e pedir que analisem as situações de forma crítica, identificando aspectos nos quais é possível gastar de forma mais consciente e econômica, explorando o Tema Contemporâneo Transversal **Educação para o Consumo**.

No tópico **Sistema Price**, criar condições para que os estudantes possam concluir que, nesse sistema de amortização, o valor amortizado cresce, enquanto o valor pago a título de juros decresce, mas o valor da prestação é mantido fixo.

No primeiro item do boxe **Pense e responda**, possibilitar aos estudantes compreenderem que, na primeira parcela, a quantia correspondente aos juros é maior do que o valor amortizado no saldo devedor. Destacar para os estudantes que, nas parcelas iniciais, os juros cobrados são maiores e vão diminuindo com o tempo, pois estão associados ao saldo devedor. Este tem uma redução menos acelerada no início, pois os valores amortizados nas parcelas iniciais são menores quando comparados com as parcelas posteriores. No segundo item, para calcular o valor do juros na quarta prestação, os estudantes podem determinar 2,5% de R\$ 30.282,42, que é o saldo devedor correspondente à terceira parcela, como indicado na planilha, obtendo o valor de R\$ 757,06.

No boxe **Saiba que...**, espera-se que os estudantes percebam que, nesse sistema de amortização, pode ser mais vantajoso antecipar parcelas no início do contrato, quando a parcela correspondente aos juros é maior.

No tópico **Sistema de Amortização Constante (SAC)**, comentar que esse modelo costuma ser utilizado no financiamento de bens com valores maiores, por exemplo, de imóveis. Destacar que, ao financiar um imóvel, em geral, os dois sistemas de financiamento são oferecidos para que o cliente escolha.

O boxe **Saiba que...** compara o comportamento do saldo devedor ao longo do tempo nos dois sistemas de amortização estudados. Pode-se propor aos estudantes que pesquisem outros sistemas de financiamento utilizados, como o Sistema Americano de Amortização (SAA), em que o tomador do empréstimo paga somente os juros durante o prazo do empréstimo, quitando o principal ao final do prazo. Pessoas que não conseguem quitar completamente a fatura do cartão de crédito, por exemplo, adotam essa estratégia até conseguirem o valor do principal, quando, então, quitam a fatura.



## ► ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades colaboram para o desenvolvimento das competências gerais **6** e **7**, pois são apresentadas situações relacionadas a diversas profissões, em que os estudantes podem refletir e tomar escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e, também, argumentar com base em fatos e dados para defender ideias e pontos de vista em relação ao cuidado de si mesmos.

Na atividade resolvida **1**, explorar com os estudantes as diferentes funções presentes nas calculadoras dos *smartphones*. É possível, também, utilizar aplicativos gratuitos de calculadoras científicas, inclusive emuladores das calculadoras mais aplicadas em cálculos financeiros. Aproveitar para relembrar as regras de arredondamento. Como se trata de valores monetários, o arredondamento deve ser feito para duas casas decimais, permanecendo o mesmo algarismo, caso a terceira casa decimal seja menor do que cinco, ou aumentando em uma unidade, caso a terceira casa decimal seja maior ou igual a cinco.

Destacar para os estudantes que a proposta da atividade resolvida **2** é perceber como o uso da planilha eletrônica traz praticidade para trabalhar com cálculos que, realizados sem o uso de computador, podem ser trabalhosos. É importante justificar cada uma das etapas de construção da planilha, para que os estudantes as associem aos processos explorados anteriormente. Se possível, desenvolver essa atividade com os estudantes na sala de informática da escola. Verificar, com antecedência, se a unidade escolar conta com essa possibilidade e se é necessário fazer a reserva da sala. O **LibreOffice** pode ser baixado em: <<https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/>> (acesso em: 30 ago. 2020).

Comentar que nas planilhas elaboradas na atividade resolvida **2** pode-se alterar o valor das variáveis (valor emprestado, taxa de juro e número de meses) fazendo outras simulações. Isso pode ser utilizado para resolver algumas atividades desse tema.

Pode-se aprofundar a atividade resolvida **2** pedindo aos estudantes que acessem sites dos principais bancos brasileiros para fazer simulações de financiamento de imóveis. Esse trabalho pode compor o processo avaliativo dos estudantes. Com essa análise, os estudantes estão desenvolvendo a competência específica **2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT203**, pois investigam o mundo contemporâneo a fim de tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, mobilizando e articulando procedimentos e conceitos matemáticos, com o uso de planilhas eletrônicas.

O Banco Central do Brasil oferece, no site <<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAQ/jsp/index.jsp>> (acesso em: 30 ago. 2020), a calculadora do cidadão, que permite calcular diferentes parâmetros de um financiamento, tais como valor da prestação, taxa de juros, tempo de financiamento dado um valor de prestação, entre outras opções.

No item **a** da atividade proposta **1**, espera-se problematizar os fatores que estão relacionados quando se precisa tomar uma decisão, como a de escolher o sistema de amortização em um empréstimo ou financiamento. Embora na situação hipotética considere-se a mesma taxa de juros e o mesmo período, o que normalmente não acontece na realidade, a ideia é a de que os estudantes tenham uma situação um pouco mais simplificada para fazer comparações. Destacar, além da diferença verificada entre as quantias, o impacto dos valores correspondentes às primeiras prestações no orçamento de quem está tomando o empréstimo. Incentivar o debate entre os estudantes, propondo questões provocativas que consideram diferentes cenários. Por exemplo, se Marília não tiver como comprometer mais de mil reais em prestações, terá de optar pelo sistema Price, ainda que, ao quitar toda a dívida, terá pagado um montante maior de juros.

No item **b** da atividade **1**, se as planilhas forem construídas pelos estudantes, como sugerido anteriormente na atividade resolvida **2**, eles podem verificar com mais detalhes os pontos destacados, podendo inclusive adicionar todos os valores de juros, dispostos nas colunas **D** e **J**. Eles podem digitar, por exemplo, na célula **D79**: =soma(D6:D78) e pressionar **Enter**, e na célula **J79**: =soma(J6:J78) e pressionar **Enter**, e, então, comparar os valores.

## HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Essa seção contribui para o desenvolvimento da competência geral **1**, pois são valorizados os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, e a competência geral **6**, pois permite valorizar a diversidade dos saberes e vivências culturais para apropriar-se de conhecimentos e experiências que possibilitam entender as relações próprias do mundo do trabalho.

Após ler o texto com os estudantes, verificar o que eles conhecem a respeito do Renascimento e das Ciências Contábeis. Esse trabalho pode ser desenvolvido em parceria com o professor de História, da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. Aproveitar para falar do curso de Ensino Superior destinado para essa formação específica. O texto a seguir pode ser apresentado aos estudantes.

[...]

É a Ciência Social que tem por objetivo medir, para INFORMAR, os aspectos quantitativos e qualitativos do patrimônio das entidades. Constitui instrumento para gestão e controle, além de representar um sustentáculo da democracia econômica, já que, por seu intermédio, a sociedade é informada sobre o resultado da aplicação dos recursos conferidos às entidades.

[...]

Contadores são profissionais que lidam com a área financeira, econômica e patrimonial. São os responsáveis pelo planejamento, coordenação e controle das contas e dos lançamentos de uma empresa, formando um quadro do patrimônio, dos fluxos de transações, de produção e de renda.

[...]

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Ciências contábeis**: São Paulo: descrição do curso. São Paulo, 2020. Disponível em: <https://prceu.usp.br/uspprofissoes/profissoes/ciencias-contabeis/>. Acesso em: 30 ago. 2020.

Caso algum estudante já tenha ouvido falar do método de partidas dobradas, aproveitar o boxe **Saiba que...** para que esse estudante compartilhe o que sabe. Para mais informações sobre o método, também conhecido como método veneziano, pode-se consultar o artigo **Epistemologia do método das partidas dobradas: considerações sobre aspectos históricos e métodos de ensino**, disponível em: <<https://revistas.unasp.edu.br/actanegocios/article/view/1020>> (acesso em: 30 ago. 2020), em que os autores apresentam reflexões sobre o método em seus aspectos teóricos e conceituais.

## Orçamento familiar

Esse tópico colabora para o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias, habilidades **EM13MAT104** e **EM13MAT203**, respectivamente, pois os estudantes interpretam taxas e índices de natureza socioeconômica, investigando os processos de cálculos desses números e aplicam conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a criação de planilhas para controle de orçamento familiar. Com isso, exploram-se os Temas Contemporâneos Transversais **Educação Financeira, Educação para o Consumo e Vida Familiar e Social**.

Ao discutir o primeiro boxe **Pense e responda**, conversar com os estudantes a respeito do percentual de comprometimento da renda familiar recomendado por especialistas em finanças domésticas. No máximo, 50% da renda familiar deve ser composta por gastos essenciais (moradia, alimentação e transporte). São gastos que muitas vezes podem ser



racionalizados, mas não eliminados. A outra metade pode ser economizada, gasta com empréstimos, se necessário, ou com qualidade de vida (lazer e restaurantes, por exemplo), despesas consideradas acessórias. No caso de empréstimos ou financiamentos, recomenda-se não ultrapassar 30% da renda e, sempre que possível, tentar separar 20% da renda mensal para poupança e investimentos.

Nesse momento, pode-se aprofundar a discussão a respeito do empréstimo consignado, uma modalidade muito utilizada por trabalhadores, aposentados e pensionistas, que apresenta como vantagens: taxas de juros menores, facilidade de contratação, já que o valor das prestações é descontado diretamente do salário, e prazos mais longos para pagar. Como desvantagens, pode-se citar: risco de perder o emprego, contrair uma dívida a longo prazo e não ser possível adiar o desconto na folha de pagamento. Além disso, é importante considerar alguns fatores, conforme apresentado no texto a seguir.

#### Pontos a observar no consignado

- A parcela cabe no seu bolso e não compromete o pagamento de outras contas que você já tem?
- Você tem uma dívida cara, no cheque especial ou no rotativo do cartão de crédito, por exemplo? Como os juros são muito maiores nessas duas modalidades, é vantajoso usar o consignado para quitá-las. Dessa forma, você reduzirá o valor total que irá pagar de juros.
- Você vai começar um negócio ou pretende fazer uma pequena reforma em casa? Nessas situações, o consignado pode ser uma ótima alternativa, pois permite financiar os materiais em um prazo mais longo.

#### Quando não usar o crédito consignado?

- Para pagar compras do dia a dia. Se você precisa de empréstimos para isso, o mais adequado é rever seu orçamento, cortar gastos ou aumentar sua renda.
- Para fazer investimentos financeiros. Ainda que mais baixos, os juros do crédito consignado são muito superiores ao rendimento das aplicações oferecidas pelas instituições financeiras.
- Alguém te pedir dinheiro emprestado. Se um familiar ou amigo pedir que contrate o empréstimo em seu nome, não aceite. Essa pessoa pode acabar se enrolando e quem irá pagar a dívida é você.

[...]

CARLA, J. Empréstimo consignado: como funciona? **Serasa ensina**. Disponível em: <https://www.serasa.com.br/ensina/seu-credito/emprestimo-consignado/>. Acesso em: 30 ago. 2020.

Após apresentar os componentes de um orçamento familiar, o segundo boxe **Pense e responda** traz um questionamento para verificar se os estudantes percebem que podem cortar alguma despesa variável ou, no caso daquelas que não podem ser cortadas, fazer alguma economia em relação ao consumo.

Após apresentar a planilha elaborada para a situação da família de Alice, no quarto boxe **Pense e responda**, comentar com os estudantes o fato de que conhecer os gastos realizados permite fazer análise e corte de gastos. Por exemplo: se essa família se empenhar em reduzir o consumo de luz e água, pode reduzir as despesas. Além disso, podem rever o plano de telefone, pesquisar preços em diferentes supermercados, entre outras atitudes.

Pode-se aproveitar esse momento e propor aos estudantes, como tarefa, que elaborem uma planilha com o orçamento da família deles, incluindo todos os gastos. Para isso, sugere-se indicar o *link* <[https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/cidadania\\_como\\_orcamento](https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/cidadania_como_orcamento)> (acesso em: 19 ago. 2020), do Banco Central do Brasil, que explica com detalhes, por meio de texto e vídeo, como montar um orçamento familiar. A seguir, reproduzimos um trecho desse texto.

**1. Anote suas receitas e despesas**

Comece anotando todas as suas receitas e despesas. Reserve uma pequena parte do seu tempo para registrar todos os seus gastos diários e torne isso um hábito. Não é preciso fornecer muitos detalhes, apenas anote com o que ou onde gastou (padaria, mercado, ônibus, gasolina, restaurante, contas pagas), a quantia gasta e o meio de pagamento utilizado (cheque, dinheiro, cartão ou outros).

**2. Agrupe as receitas e despesas**

Agrupe as despesas e as receitas do mês em categorias. Ao longo do mês, você pode receber dinheiro, ou seja, obter receitas, de diversos locais ou de diversas fontes (salário, recebimento de aluguel, um amigo que lhe devolve um dinheiro que você emprestou). Da mesma forma, você gasta seu dinheiro nos mais variados tipos de produtos e serviços (compra de roupa, supermercado, padaria, conta de luz, gasolina, prestação da casa, aluguel).

[...]

**3. Analise a situação com atenção**

Ao terminar o mês, organize os grupos de receitas e despesas que você criou. Nesse momento, forma-se um retrato fiel de como você adquire renda (recebe dinheiro) e de como gasta seu dinheiro ao longo de um mês (gera despesas).

Com os dados já organizados, dedique um tempo precioso para refletir sobre eles. Verifique se o que você recebe está sendo suficiente para cobrir suas despesas. Se for insuficiente, estude opções para solucionar o problema. Você pode aumentar suas receitas, diminuir suas despesas ou mesmo fazer as duas coisas.

[...]

**4. Planeje o próximo mês**

Tendo como base seus registros organizados e suas análises, agora você é capaz de planejar o orçamento do mês seguinte. Se você seguir os passos anteriores, terá condições de estimar (calcular) quanto e como quer usar o dinheiro do próximo mês. Com base no mês anterior, procure elaborar o orçamento, estimando as receitas que você deve receber ao longo do próximo mês e também as despesas, de acordo com o seu padrão de consumo. Lembre-se de agrupar seus gastos por categoria, pois isso facilita que a estimativa fique mais próxima do real.

[...]

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Como eu faço um orçamento pessoal ou familiar.**  
Brasília, DF, 2020. Disponível em: [https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/cidadania\\_como\\_orcamento](https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/cidadania_como_orcamento). Acesso em: 30 ago. 2020.

Em seguida, os estudantes podem comparar a natureza e o percentual dos gastos com aqueles encontrados nas pesquisas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em sua Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) 2017-2018, disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101670.pdf>> (acesso em: 30 ago. 2020).

## FÓRUM

O trabalho com consumo sustentável nessa seção colabora para o desenvolvimento das competências gerais **4** e **7**, pois os estudantes utilizam diferentes linguagens para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias, argumentando com base em fatos, dados e informações confiáveis para defender pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos e a consciência socioambiental, cuidando de si e do planeta. Também desenvolve a competência específica **2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao propor e participar de ações que investigam o mundo contemporâneo para tomar decisões voltadas à sustentabilidade, e as competências específicas **2** e **3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, pois precisam se perceber como parte da



dinâmica da vida e do planeta e elaborar argumentos com base em decisões éticas e responsáveis para propor soluções de demandas locais, comunicando-as por diferentes meios. Esse trabalho pode ser desenvolvido em parceria com o professor de Biologia, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Após ler o texto com os estudantes, discutir a questão proposta. Pode-se estabelecer uma relação com o orçamento familiar, incentivando os estudantes a discutir com suas famílias o desperdício de alimentos. Uma sugestão é apresentar o site <<https://www.semdesperdicio.org/>> (acesso em: 30 ago. 2020), que traz diferentes materiais com objetivo de incentivar a redução de perdas de alimentos em toda a cadeia de produção.

Outro tema que pode ser discutido nesse boxe é a redução do consumo de água que colabora para a diminuição dos gastos familiares, além de contribuir com o uso sustentável e consciente dos recursos naturais. Os estudantes podem pesquisar exemplos de economia de água. A seguir, há uma notícia sobre isso.

[...]

Em meio a um racionamento sem precedentes, a população do Distrito Federal conseguiu reduzir o consumo de água em 12,2% e fechou 2017 com o menor índice dos últimos anos, segundo balanço divulgado pela Companhia de Saneamento Ambiental do DF (Caesb). No ano passado, o consumo total ficou em 144,6 milhões de metros cúbicos ( $m^3$ ), o que dá uma média de 129 litros por habitante por dia. São exatamente 18 litros de água a menos consumidos diariamente por cada pessoa em relação ao ano anterior (2016), quando a média ficou em 147 litros por habitante.

Segundo a Caesb, com esse resultado, o DF aproxima-se do índice recomendado pela Organização Mundial da Saúde (OMS), que é 110 litros *per capita* por dia. Para a companhia, os dados demonstram evolução na consciência do uso racional da água pela população e o êxito das campanhas educativas feitas no Distrito Federal.

O resultado também posiciona o DF em um índice de consumo inferior à média nacional, que está em 154,1 litros diários por habitante, de acordo com dados do Sistema Nacional de Informações sobre o Saneamento (Snis) do Ministério das Cidades, referentes a 2016.

[...]

VILELA, P. R. Moradores economizam 18 litros de água por dia e DF se aproxima da meta mundial. **Agência Brasil**, Brasília, DF, 11 mar. 2018. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2018-03/moradores-economizam-18-litros-de-agua-por-dia-e-df-se-aproxima-da-meta>. Acesso em: 30 ago. 2020.

## Inflação

O trabalho com esse tópico desenvolve a competência geral **2**, pois os estudantes exercitam a curiosidade intelectual e recorrem à abordagem própria das ciências, investigando e refletindo causas para elaborar e testar hipóteses. Também desenvolvem as competências específicas **1** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações socioeconômicas, em particular, a habilidade **EM13MAT104**, que trata de taxas e índices, como a inflação, e ao aplicar conceitos matemáticos para resolver problemas em contextos variados, como na habilidade **EM13MAT303**, ao comparar os juros.

Ao desenvolver esse tópico, espera-se que os estudantes possam ter uma ideia do significado de inflação. Inicialmente, pedir que façam uma breve lista de assuntos ligados à inflação que tenham lido ou ouvido nos noticiários e/ou nas redes sociais. Por exemplo: a inflação e o mercado financeiro, o impacto da inflação na economia, o preço de determinado produto aumentou conforme a inflação. Socializar algumas respostas para iniciar o trabalho.

No boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes compreendam que uma inflação alta desestimula o investimento, prejudica o crescimento da economia do país, gera aumento de preços de produtos e serviços, diminuindo o poder de compra das pessoas. Além disso, aumenta o custo da dívida pública, levando o governo a investir menos. É importante também considerar que uma inflação alta prejudica particularmente as camadas menos favorecidas da população, que têm menos instrumentos para se proteger da alta de preços.

Comentar que uma inflação negativa, a deflação, pode ser prejudicial tanto quanto a inflação alta. Comerciantes podem ter prejuízo ao vender seus estoques por preços menores do que o valor que pagaram no momento da compra dessas mercadorias. Famílias e empresas podem adiar consumo e investimento, provocando maior queda de preços por falta de demanda.

Em **Para assistir** e em **Para acessar** há sugestões de materiais que ajudam a compreender melhor os efeitos da inflação. Explorar esses materiais pode contribuir para a ampliação do conteúdo.

### > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Na atividade resolvida **3**, solicitar aos estudantes que confirmam os cálculos realizados utilizando a calculadora apresentada anteriormente no boxe **Para acessar**, ou a calculadora do cidadão, do Banco Central do Brasil, disponível em <<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAOPublico/exibirFormCorrecaoValores.do?method=exibirFormCorrecaoValores&aba=1>> (acesso em: 30 ago. 2020).

Na atividade proposta **7**, explorar a leitura e a interpretação do gráfico, promovendo outros questionamentos que auxiliam a compreendê-lo. Por exemplo: “O que justificaria o aumento da inflação no período outubro-dezembro de 2019?”. Espera-se que os estudantes percebam que esse é o período de compras de Natal, em que a demanda aumenta bastante. “Por que houve uma queda acentuada na inflação no período janeiro-junho de 2020?”. Nesse caso, trata-se da influência da pandemia da covid-19, que fez os consumidores ficarem mais tempo em casa e paralisou muitas atividades econômicas.

### > CONEXÕES

A competência geral **6** destaca a importância de os estudantes apropriarem-se de conhecimentos que permitam o entendimento das relações próprias do mundo do trabalho, auxiliando em escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida. Isso é contemplado nessa seção com a discussão do Imposto sobre a Renda Retido na Fonte (IRRF). Também se exploram o Tema Contemporâneo Transversal **Educação Financeira** e as competências específicas **1** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes utilizam estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações de natureza socioeconômica, em particular, a habilidade **EM13MAT104**, que trata de taxas e índices, como o imposto de renda, e aplicam esses conceitos em modelos matemáticos para resolver problemas em variados contextos.

Ler o texto a respeito do IRRF com os estudantes e verificar o que eles já sabiam desse assunto. Caso algum deles queira compartilhar uma experiência vivenciada por algum familiar no processo de declaração desse imposto, é interessante separar um momento da aula para isso. Antes de responderem às questões propostas, pode-se apresentar o texto a seguir, para complementar o assunto.



[...] o Imposto de Renda é o tributo que possui o maior potencial progressivo, com aplicação da equidade horizontal e vertical. Por este mesmo motivo, esse imposto recebe maior atenção na literatura, com maior disponibilidade de comparações de dados e estimativas para uma análise interpaíses.

Seu princípio parte da tributação da renda auferida pelo indivíduo (no Brasil, *a pessoa física*) durante um período determinado. Ao fim do período, o indivíduo é requerido a declarar toda essa renda, discriminando-a entre tipos específicos, caso haja tratamentos diferenciados na tributação de cada uma. Paralelamente à declaração das rendas, o indivíduo deve declarar gastos específicos que podem ser abatidos para fins de cálculo do montante total a ser pago (denominados deduções), como gastos com educação, saúde, dívidas, destaque para aposentadoria, entre outros. Além das deduções, algumas fontes de renda podem ser isentas de tributação, o que também diminui a renda tributável. Por fim, sobre o montante tributável, são aplicadas alíquotas escalonadas, de modo a aferir o montante devido. Em alguns países, como Estados Unidos, Canadá e Itália, existe o crédito tributário, que é um valor atribuído de acordo com certos pré-requisitos que diminuem a renda tributável e, consequentemente, o montante devido pelo contribuinte. [...]

FERNANDES, R. C.; CAMPOLINA, B.; SILVEIRA, F. G. Imposto de renda e distribuição de renda no Brasil. **Texto para discussão**, Brasília, DF, n. 2449, fev. 2019. Disponível em: [http://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/9136/1/TD\\_2449.pdf](http://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/9136/1/TD_2449.pdf). Acesso em: 30 ago. 2020.

A atividade 1 busca diferenciar o trabalhador formal do informal. Espera-se que os estudantes compreendam que o primeiro tipo de trabalhador tem vínculo empregatício na carteira de trabalho; o segundo, não tem. Ambos precisam fazer a declaração com base nos modelos indicados no site da Receita Federal. Pode-se aproveitar essa questão para falar da carteira de trabalho, verificando o que os estudantes conhecem dela. Esse trabalho pode ser desenvolvido em parceria com os professores de História e de Geografia, da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. O texto a seguir trata um pouco disso.

[...]

Elaborada no governo de Getúlio Vargas, no poder desde 1930, a Carteira Profissional foi instituída no país em 21 de março de 1932. A iniciativa alinhava-se à política de proteção ao trabalhador praticada pelo presidente, em meio a um processo de urbanização e de modernização do Brasil. Naquele momento, ocorria uma mudança na economia, que deixava de ser agrária e se tornava industrial. Era necessário regular o trabalhador urbano, e Vargas, ao instituir uma legislação trabalhista – com previsão de jornada de trabalho, lei de férias, direito à aposentadoria, regulação do trabalho da mulher e do menor –, exercia o controle social sobre as relações entre trabalhadores, empregadores e sindicatos.

Com o decreto 21.175, a nova carteira tornou-se documento obrigatório a todas as pessoas maiores de 16 anos, sem distinção de sexo, que desejasse trabalhar no comércio ou na indústria brasileira. [...]

[...]

BARBOSA, A. Vargas cria carteira profissional nos anos 30, em meio à modernização do país. **O Globo**, 3 maio 2017. Disponível em: <https://acervo.oglobo.globo.com/em-destaque/vargas-cria-carteira-profissional-nos-anos-30-em-meio-modernizacao-do-pais-21071368>. Acesso em: 30 ago. 2020.

Comentar que os direitos trabalhistas tiveram alterações com o passar das décadas, assim como o modelo de carteira de trabalho. Em 2020, foi lançada a carteira de trabalho digital. Segundo o site do Governo Federal:

[...]

Visando modernizar o acesso às informações da vida laboral do trabalhador, o Ministério da Economia lança a CARTEIRA DE TRABALHO DIGITAL, em substituição à Carteira de Trabalho física, disponível para os cidadãos através de Aplicativo para celular nas versões iOS e Android e Web.

Para acessar o documento, basta baixar gratuitamente o aplicativo na loja virtual (Apple Store, da Apple, e no Play Store, do Android). Ou acessar via Web, por meio do link <https://servicos.mte.gov.br/>

E quem já tem cadastro no sistema acesso.gov.br, basta usar seu login e senha de acesso no App Carteira de Trabalho Digital.

[...]

Os benefícios esperados com a Carteira de Trabalho Digital serão:

- Maior aproveitamento das vagas disponíveis, reduzindo o tempo médio de atendimento;
- Agilidade no acesso às informações trabalhistas consolidadas em um único ambiente, possibilitando ao trabalhador fiscalizar seus vínculos trabalhistas;
- Integração das bases de dados do Ministério da Economia.

BRASIL. Ministério do Trabalho. Portal Emprega Brasil. **Carteira de trabalho digital**. Brasília, DF, c2020. Disponível em: <https://empregabrasil.mte.gov.br/carteira-de-trabalho-digital/>. Acesso em: 30 ago. 2020.

Na atividade **2** os estudantes precisam calcular o desconto mensal do imposto de renda com base no salário de dois trabalhadores (R\$ 6.000,00 e R\$ 20.000,00), já realizados os descontos do INSS e considerando a tabela de incidência mensal do imposto de renda. Espera-se que os estudantes percebam que esses dois salários estão na faixa que é atendida pela alíquota de 27,5% e R\$ 869,36 de parcela a deduzir. Assim, tem-se:

- 27,5% de 6.000,00 =  $0,275 \cdot 6\ 000 = 1\ 650$
- $1\ 650 - 869,36 = 780,64$
- 27,5% de 20.000,00 =  $0,275 \cdot 20\ 000 = 5\ 500$
- $5\ 500 - 869,36 = 4\ 630,64$

Portanto, o desconto no salário desses funcionários será de R\$ 780,64 e R\$ 4.630,64.

Verificar se os estudantes percebem que, a partir do salário de R\$ 4.664,68, o valor da alíquota é o mesmo. Isso mostra que pessoas que têm renda muito alta têm deduzida a mesma parcela de quem recebe uma quantia a partir de R\$ 4.664,68. Comentar que quem ganha mais, paga mais impostos, porém poderiam existir mais faixas de progressão das alíquotas. Uma sugestão de leitura sobre o tema é a dissertação **Uma abordagem sobre matemática financeira e educação financeira no ensino médio**, disponível em <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/fevereiro2016/mathematica\\_dissertacoes/dissertacao\\_gelson\\_pietras.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/fevereiro2016/mathematica_dissertacoes/dissertacao_gelson_pietras.pdf)> (acesso em: 30 ago. 2020).

A atividade **3** traz uma reflexão para os estudantes a respeito da aplicação e da distribuição de recursos recolhidos por tributos. Incentivar os estudantes a refletir e a fiscalizar o destino dos recursos recolhidos por meio dos tributos, pois os governos devem garantir a prestação de serviços e os direitos dos cidadãos: saúde, educação, moradia, trabalho, previdência social, segurança, proteção à maternidade e à infância, assistência aos desamparados, alimentação, transporte, entre outros.

### > EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Essa seção contempla as competências gerais **4, 6 e 7**, pois os estudantes utilizam diferentes linguagens para se expressar e compartilhar informações, valorizam a diversidade dos saberes e vivências para se apropriar dos conhecimentos e entender as relações do



mundo do trabalho e argumentam com base em fatos, dados e informações confiáveis para formular e defender ideias, pontos de vistas. Essa seção também contribui para o desenvolvimento da competência específica **2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT203**.

Ao criar a calculadora de antecipação do imposto de renda na planilha eletrônica, é importante justificar cada passo do processo e a maneira como as fórmulas são inseridas na planilha. Após o exemplo do uso da calculadora, podem-se explorar outras situações, como o cálculo para a antecipação em diferentes bancos ou quanto renderia o valor da restituição em alguma aplicação financeira.

A atividade ao final da seção tem como objetivo verificar se os estudantes compreenderam a utilização da calculadora de antecipação criada, considerando R\$ 2.500,00 a restituir em um lote programado para 7 meses após o envio da declaração com 0,6% de reajuste mensal feito pela Receita Federal.

No item **a**, deve-se calcular o valor a restituir na liberação do lote. Assim, o valor, em reais, a restituir é dado por:

$$2\,500 \cdot (1 + 0,006)^7 = 2\,606,91$$

É importante comentar que esse valor é aproximado com duas casas decimais.

No item **b**, deve-se considerar uma antecipação da restituição após 5 meses do envio da declaração, ou seja, faltando 2 meses para que ela seja restituída, a uma taxa de 2% ao mês. Assim, o valor, em reais, a restituir antecipadamente é dado por:

$$\frac{2\,500}{(1 + 0,02)^2} = 2\,402,92$$

No item **c**, deve-se calcular a taxa a ser aplicada sobre o valor antecipado, durante 2 meses, de modo que o montante seja o mesmo que o liberado pela Receita Federal após 7 meses da entrega da declaração. Assim:

$$2\,402,92 \cdot (1 + x)^2 = 2\,606,91 \Rightarrow (1 + x) \approx 1,04158 \Rightarrow x = 0,04158$$

Portanto, a taxa mensal deve ser aproximadamente 4,158%.

## ► ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Essas atividades retomam conceitos estudados no Capítulo. Espera-se que os estudantes consigam justificar a escolha da alternativa correta utilizando argumentos e procedimentos matemáticos. Pode-se propor a eles que elaborem um mapa mental contendo informações importantes de cada tópico estudado para auxiliar na resolução dos problemas.

Na atividade **1**, deve-se comparar o Sistema de Amortização Constante (SAC) com o Sistema Price de amortização. Na atividade **3**, se necessário, retomar a discussão a respeito da inflação. A atividade **4** apresenta um contexto de operações financeiras utilizando um gráfico. É interessante aproveitar essas atividades para o trabalho em grupo possibilitando aos estudantes a troca de conhecimento.

## ► PARA REFLETIR

Essa seção retoma os tópicos que foram estudados no Capítulo, proporcionando um momento de reflexão dos estudantes a respeito do aprendizado deles e de atitudes tomadas ao longo das aulas. É importante que eles compartilhem as impressões que tiveram dos assuntos explorados, servindo como um momento de autoavaliação. Para isso, são propostas questões individuais que auxiliam nessa reflexão.

Para ampliar esse momento, propor aos estudantes que escolham um dos temas estudados e elaborem uma situação-problema para que um colega a resolva. Por fim, podem conferir juntos as resoluções.

## A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas, habilidades, e listado o Tema Contemporâneo Transversal trabalhado. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

➤ **Competências gerais da BNCC:** 2, 5 e 7

➤ **Competências específicas e habilidades:**

**Área de Matemática e suas Tecnologias**

- Competência específica 1: **EM13MAT103**
- Competência específica 3: **EM13MAT313 e EM13MAT314**

**Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**

- Competência específica 1
- Competência específica 3

➤ **Tema Contemporâneo Transversal:**

- Ciência e Tecnologia

## Orientações didáticas

### Abertura de Capítulo

As grandezas e as unidades de medidas estão presentes em quase todas as ações do ser humano, desde as mais comuns, como fazer uma receita de bolo, até as mais complexas, tais como navegação aérea, produção industrial e desenvolvimento de novas tecnologias. Assim, além da Matemática, há importantes conexões que se podem fazer com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Ao ler o texto de abertura, os estudantes podem mencionar as grandezas e as unidades de medida que conhecem citando outros exemplos do cotidiano que lembrarem. Nesse momento, é possível desenvolver aspectos da competência geral 5, à medida que eles precisam se comunicar e compartilhar informações com os colegas. Se possível, para ampliar esse desenvolvimento, possibilite que sejam utilizadas tecnologias digitais de informação para que eles façam pesquisas sobre o tema.

Na atividade 1, espera-se que os estudantes percebam que para determinar o comprimento aproximado de uma ponte, em quilômetro, considerando que ela tem 3 milhas de comprimento, é necessário saber a quantos quilômetros uma milha corresponde. Comentar que uma milha equivale a, aproximadamente, 1,6 km. Portanto, 3 milhas equivalem a aproximadamente 4,8 km ( $3 \cdot 1,6 = 4,8$ ).

A atividade 2 propõe uma pesquisa de outras unidades de medida com base no que foi apresentado no texto entre unidades de medida no Brasil e nos Estados Unidos. Algumas



possíveis respostas para a atividade 2: nos Estados Unidos usa-se galão para indicar volume, sendo um galão correspondente a aproximadamente 3,8 litros; uma jarda corresponde a aproximadamente 91,44 cm; um pé corresponde a aproximadamente 30,48 cm.

A atividade 3 propõe uma investigação da implementação do Sistema Internacional de Unidades (SI). Na pesquisa dos estudantes é importante que eles percebam que há questões políticas, históricas e sociais envolvidas nesse tipo de mudança, de modo que algumas passam a ser quase impossíveis, dado o impacto que acarretariam. Verificar a possibilidade de realizar esse trabalho de forma integrada com os professores das áreas de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**.

Se julgar apropriado, pode-se utilizar textos, como os indicados a seguir, para estimular a curiosidade dos estudantes quanto à pesquisa sobre o tema.

[...]

A necessidade de medir é muito antiga e remonta à origem das civilizações. Por longo tempo cada país, cada região, teve seu próprio sistema de medidas. Essas unidades de medidas, entretanto, eram geralmente arbitrárias e imprecisas, como por exemplo, aquelas baseadas no corpo humano: palmo, pé, polegada, braça, côvado.

Isso criava muitos problemas para o comércio, porque as pessoas de uma região não estavam familiarizadas com o sistema de medir das outras regiões, e também porque os padrões adotados eram, muitas vezes, subjetivos. As quantidades eram expressas em unidades de medir pouco confiáveis, diferentes umas das outras e que não tinham correspondência entre si.

A necessidade de converter uma medida em outra era tão importante quanto a necessidade de converter uma moeda em outra. Na verdade, em muitos países, inclusive no Brasil dos tempos do Império, a instituição que cuidava da moeda também cuidava do sistema de medidas.

[...]

Muitos países adotaram o sistema métrico, inclusive o Brasil, aderindo à **Convenção do Metro**. Entretanto, apesar das qualidades inegáveis do Sistema Métrico Decimal – simplicidade, coerência e harmonia – não foi possível torná-lo universal. Além disso, o desenvolvimento científico e tecnológico passou a exigir medições cada vez mais precisas e diversificadas. Em 1960, o Sistema Métrico Decimal foi substituído pelo Sistema Internacional de Unidades - SI mais complexo e sofisticado que o anterior.

[...]

INSTITUTO DE PESOS E MEDIDAS DO ESTADO DE SÃO PAULO.

**Sistema Internacional de Unidades:** SI. São Paulo, c2013. Disponível em: [http://www.ipem.sp.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=346](http://www.ipem.sp.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=346). Acesso em: 30 ago. 2020.

[...]

Feita para orbitar Marte como o primeiro satélite meteorológico interplanetário, a sonda desapareceu em 1999 porque a equipe da NASA usou o sistema anglosaxão de unidades (que utiliza medidas como polegadas, milhas e galões) enquanto uma das empresas contratadas usou o sistema decimal (baseado no metro, no quilo e no litro).

O satélite de U\$ 125 milhões se aproximou demais de Marte quando tentava manobrar em direção à órbita do planeta, e acredita-se que ele tenha sido destruído ao entrar em contato com a atmosfera.

Uma investigação determinou que a causa do desaparecimento foi um “erro de conversão das unidades inglesas para as métricas” em uma parte do sistema de computação que operava a sonda a partir da Terra.

[...]

OS DEZ maiores erros de cálculo da ciência e da engenharia. **BBC News**, 31 maio 2014. Disponível em: [https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/05/140530\\_eros\\_ciencia\\_engenharia\\_rb](https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/05/140530_eros_ciencia_engenharia_rb). Acesso em: 30 ago. 2020.

Pode-se aproveitar essa discussão inicial para explorar outras unidades de medida de distância do sistema imperial, tais como o pé, unidade de medida usada para medir a altitude de aviões, ou a jarda, usada nos jogos de futebol americano. É também um bom momento para situar as unidades de medida no desenvolvimento histórico das sociedades.

## Introdução

O trabalho com grandezas e medidas é iniciado pela retomada das ideias de grandeza e de medição. Pode-se propor aos estudantes que listem algumas de suas características, tais como altura, cor dos olhos, idade, massa, entre outras. Em seguida, pode-se solicitar que meçam aquelas em que é possível realizar uma medição. Nesse momento, eles poderão perceber que nem todas essas características podem ser medidas, momento propício para destacar a noção de grandeza como algo que pode ser medido.

O tópico **O Sistema Internacional de Unidades (SI)** apresenta as principais grandezas utilizadas nesse sistema explorando o Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia**. É importante que os estudantes compreendam a ideia de grandeza base. Se julgar apropriado, pode-se explorar textos que tratem dessa temática, como o sugerido a seguir, e que favoreçam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**, de modo que os estudantes interpretem e compreendam textos científicos ou divulgados pela mídia que empregam unidades de medida de grandezas e conversões adotadas ou não pelo SI.

### Unidades e instrumentos de medida

Se lhe for dito que um jogador norte-americano de beisebol tem 5 pés e 10 polegadas de altura e que um jogador brasileiro de futebol tem altura de 1,80 m, você é capaz de comparar essas medidas e dizer qual dos dois é o mais alto? Mesmo as pessoas que podem fazer essa comparação se sentem mais seguras se todas as medidas forem dadas usando um mesmo sistema de unidades. Para evitar imprecisão na transmissão de informações e a perda de tempo em conversões entre unidades diferentes (como pés e metros), a comunidade científica mundial adotou um sistema único de unidades de medidas há mais de 50 anos.

Historicamente, o fato de cada país ou região estabelecer seu próprio referencial de medidas gerou uma série de confusões. Em alguns casos, as confusões ainda ocorrem atualmente. Para medir volumes de líquidos, por exemplo, os norte-americanos adotam o “galão americano” (equivalente a 3,8 litros); já os ingleses usam o “galão imperial” (4,5 litros). O fato de ainda haver mais de um sistema de unidades para medidas iguais (milhas e quilômetros para distâncias, por exemplo) pode ser fonte de dores de cabeça e prejuízos. Chegou-se a cogitar, em dezembro de 1999, que a sonda *Mars Polar Lander* da NASA, planejada para pouso no polo sul de Marte, acabou sendo destruída em uma queda de, estima-se, pelo menos 1 800 m, por causa de uma confusão entre pés e metros em seu programa de navegação. Esse acidente, cuja causa ainda gera controvérsia, causou um prejuízo de mais de 160 milhões de dólares.

As primeiras unidades de medida usadas na história eram diretamente relacionadas com partes do corpo humano, tais como:

- O pé já era usado na antiguidade pelos gregos, que dividiam um “pé” em 16 “dedos”. Os romanos, por sua vez, dividiram o seu “pé” em 12 “dedos”.
- Cada “dedo” romano equivalia à espessura de um polegar, daí o nome “polegada”, ainda em uso. O rei Eduardo II da Inglaterra, no século XIV, estabeleceu um padrão curioso: cada polegada deveria equivaler ao comprimento de três grãos de cevada secos colocados em fila.



- A braça, inicialmente, equivalia efetivamente ao comprimento de uma mão à outra de uma pessoa com os braços completamente abertos. Uma braça, atualmente, equivale a 1,83 m. Essa unidade é ainda usada para medir a profundidade de oceanos.

No período em que uma comunidade científica começou a ser estabelecida na Europa, o sistema imperial britânico de medidas competia com o sistema métrico, criado e defendido pela França desde a época da Revolução Francesa (final do século XVIII). No sistema britânico, que ainda está parcialmente em uso no Reino Unido, algumas ex-colônias britânicas, como a Nova Zelândia, e, mais intensamente, nos EUA, 12 polegadas são equivalentes a um pé e três pés são equivalentes a uma jarda. Como uma polegada equivale a 2,54 cm, um pé equivale a 30,48 cm e uma jarda a 91,44 cm. O problema do sistema imperial não está nessas equivalências complicadas com o sistema métrico, uma vez que quem usa o sistema imperial no dia a dia ignora qualquer outro sistema, assim como, no Brasil, o sistema imperial é ignorado. O ponto que mais complica o sistema imperial é a falta de uniformidade nas relações entre unidades (12 polegadas, 3 pés). Nesse ponto, o sistema métrico se mostra muito mais simples: a unidade básica é o metro (m), que é dividido em 100 centímetros, cada centímetro sendo dividido em 10 milímetros (mm). Ou seja, todas as unidades se relacionam entre si por múltiplos de 10, o que torna as conversões muito mais simples de serem feitas.

É naturalmente problemático para qualquer pessoa compreender os resultados de medidas feitas em um sistema com o qual não esteja familiarizado no dia a dia. Dizer que um automóvel é capaz de fazer 20 milhas por galão de gasolina não significa muito para quem é acostumado com quilômetros por litro. Sem converter essas unidades naquelas mais habituais para nós brasileiros, fica difícil decidirmos se esse automóvel é econômico ou não. Porém, se nos for dito que esse consumo é equivalente a, aproximadamente, 8 km/litro de gasolina, podemos reconhecer esse carro como pouco econômico.

Uma vez que a atividade científica é caracterizada pela busca da ausência de dubiedade, a adoção de um sistema de medidas padronizado foi uma questão amplamente debatida por uma série de comitês em todo o mundo. Apesar de o sistema métrico já ser usado em muito mais países do que o sistema imperial britânico e, mesmo dentro deste sistema haver dissidências (os EUA criaram suas próprias referências: o galão americano, por exemplo, é diferente do galão inglês), o debate demorou a produzir um sistema-padrão a ser usado em trabalhos científicos.

No final da década de 1950, além do metro, foram adicionados outros tipos de unidades de medida ao sistema métrico, que passou a ser oficialmente denominado *Système International d'Unités*, abreviado SI (Sistema Internacional de Unidades) e se tornou o sistema-padrão da Ciência. [...]

[...]

SCHROEDER, C. Unidades e instrumentos de medida. *Ensino de Física para as séries iniciais*: atividades mãos na massa. Rio de Janeiro: UFRJ/Instituto de Física. Disponível em: <https://www.if.ufrj.br/~marta/minicurso-ufrgs/versao-html-abrir-index/>. Acesso em: 30 ago. 2020.

No tópico **Grandezas derivadas e unidades de medida derivadas**, podem-se articular as grandezas apresentadas com outros componentes curriculares, como Química (concentração de massa) e Física (velocidade e aceleração). No caso de concentração, além dos diferentes exemplos conceituais estudados na área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, é interessante relacionar ao cotidiano dos estudantes, promovendo o desenvolvimento da competência específica 1 da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Pode-se, por exemplo, solicitar que tragam para a aula etiquetas de informação nutricional de diferentes produtos (leite, suco, mel, azeite) para analisar esses dados.

No tópico **Densidade demográfica**, após discutir com os estudantes como se expressa a densidade demográfica de certa região, propor que pesquisem a densidade demográfica do estado em que residem. Eles podem consultar o site do IBGE, <<https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=10&uf=00>> (acesso: 30 ago. 2020), para realizar essa pesquisa. Verificar como eles interpretam os dados obtidos. Em seguida, podem determinar

a densidade demográfica do município ou do bairro em que residem, por meio de dados populacionais e de área do município, comumente disponibilizados nos endereços eletrônicos das secretarias municipais.

## FÓRUM

O trabalho com essa seção favorece o desenvolvimento da competência geral 7, pois os estudantes podem argumentar com base em fatos e informações obtidas a partir de fontes confiáveis, além de explorar a consciência socioambiental e o cuidado com o planeta.

Verificar o que os estudantes compreendem em relação ao significado das palavras “populoso” e “povoado”. É importante que analisem o mapa apresentado e verifiquem aproximadamente onde se encontra a região em que residem.

Com a proposta do fórum, espera-se que eles compreendam que nos locais densamente povoados há maior incidência de problemas relacionados à prestação de serviços, como na área de educação, de saúde ou de transporte, além de problemas de moradia, saneamento básico e emprego. Entretanto, em locais pouco povoados esses problemas também são verificados. Se possível, desenvolver essa discussão de maneira integrada com os professores da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, investigando os fatores que contribuem para que nessas regiões haja carência de emprego, infraestrutura, serviços etc., o que costuma contribuir para acentuar a migração.

A solução passa, principalmente, pelo estímulo do Estado à ocupação dessas regiões por empresas; mas, para isso, é preciso desenvolver a infraestrutura para recebê-las (mão de obra, estradas, saneamento básico, luz, entre outras).

No tópico **Velocidade média**, além de ser possível estabelecer uma abordagem integrada com o professor de Física, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, pode-se explorar o contexto social dos estudantes. Por exemplo, solicitar a eles que determinem quantos quilômetros são percorridos diariamente para irem de onde moram até a escola e registrar o tempo utilizado para fazer esse percurso, determinando a velocidade média de seu deslocamento. A partir desses dados e conhecendo o meio de transporte dos estudantes (caminhada, bicicleta, ônibus, metrô etc.) pode-se concluir a velocidade média para o deslocamento utilizando cada um desses meios de transporte. Esse tipo de atividade colabora para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT314** ao resolver problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão, como a velocidade.

Ao explorar o boxe **Pense e responda**, os estudantes podem associar o uso das unidades de medida base para estabelecer outras unidades de medida. Além disso, podem compreender a velocidade como a razão entre a distância percorrida (dada em metro) e o tempo utilizado para realizar o percurso (dado em segundo), ou seja, sua unidade de medida é derivada: o metro por segundo (m/s).

No tópico **Consumo de energia elétrica**, aproveitar a etiqueta de eficiência energética para recordar o que foi discutido anteriormente a respeito dos símbolos das unidades de medida, ressaltando que eles devem ser representados por letras minúsculas, exceto quando são associados a nomes de pessoas, como o caso de Watt. Novamente, os estudantes podem associar o consumo de energia, no contexto dado, como sendo a razão entre a unidade de medida quilowatt hora (kWh) e o ciclo, referente ao uso do equipamento elétrico.



Pode-se, também, solicitar aos estudantes que verifiquem as informações dos selos das lavadoras ou de outros equipamentos que utilizam em suas residências para realizar comparações, por exemplo, estabelecer relação entre a capacidade de lavagem (em kg) e o consumo de água da lavadora (em L/ciclo).

O boxe **Pense e responda** propõe uma pesquisa sobre a tarifa de energia cobrada na região em que os estudantes residem. Para ampliá-lo, pode-se pedir a eles que comparem diferentes tipos de lâmpadas, analisando a potência, o preço e a vida útil, explorando o Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia**. Isso colabora com o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois os estudantes interpretam situações das Ciências da Natureza envolvidas no contexto socioeconômico a partir de conceitos matemáticos. Também colabora com o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, pois os estudantes investigam situações e aplicam o conhecimento científico e tecnológico para analisar as implicações no mundo.

A partir dos dados levantados para essa comparação, os estudantes podem refletir a respeito dos seguintes itens, abordando o Tema Contemporâneo Transversal **Vida Familiar e Social**.

- Considerando os tipos de lâmpadas pesquisados, qual seria o custo anual (365 dias) de uma lâmpada que fique ligada 8 horas por dia em todos os dias do ano?
- Considerando o preço e a vida útil de cada tipo de lâmpada, qual seria o custo do investimento de cada uma por hora?

Nesse sentido, os estudantes podem complementar a pesquisa e o estudo com o conteúdo do boxe **Para acessar**, sugerindo-se um aprofundamento sobre o consumo eficiente de energia.

## Medidas muito grandes e medidas muito pequenas

Esse tópico colabora com o desenvolvimento da competência geral **2**, pois recorre-se à abordagem própria das ciências, incluindo investigação, reflexão e análise crítica para investigar causas e criar soluções em diferentes áreas, e da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar e construir modelos analisando a plausibilidade dos resultados, em particular, a habilidade **EM13MAT313**, que trata da utilização da notação científica para expressar uma medida.

Para complementar a abordagem inicial, pode-se apresentar o seguinte texto aos estudantes.

### O que é um googol?

É uma unidade de medida muito grande. Ela é igual a 10 elevado a 100, ou seja, 1 seguido de 100 zeros! Esse absurdo numérico foi criado pelo matemático Edward Kasner em 1938. O nome não significa nada, foi uma sugestão de um sobrinho, Milton Sirotta. Kasner procurava um número que explicasse – ou se aproximasse – de algo que parecesse infinito. O googol é tão grande que é muito maior do que a quantidade de partículas no Universo, por exemplo. [...]

MONTEIRO, G. O que é um googol? **Superinteressante**, 4 jul. 2018. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-um-googol/>. Acesso em: 30 ago. 2020.

Espera-se que os estudantes percebam que existem grandezas que podem ser expressas por números muito grandes ou números muito pequenos, sendo necessário criar um modo de escrever esses números.

No tópico **Notação científica**, é importante resgatar os conhecimentos que os estudantes possuem sobre potenciação, assunto explorado no Ensino Fundamental, incluindo as potências de expoente negativo.

No tópico **Múltiplos e submúltiplos das unidades de medida**, os estudantes poderão associar os fatores aos prefixos e aos símbolos utilizados para representar os múltiplos e submúltiplos de unidades de medida.

No tópico **Unidades de medida astronômicas**, propor aos estudantes que pesquisem informações sobre as dimensões e distâncias relacionadas aos planetas, por exemplo, a fim de que possam fazer comparações. Com isso, eles aplicam os conceitos de notação científica e obtêm informações relacionadas à área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, favorecendo o desenvolvimento da competência específica 1 dessa área.

## Unidades de transferência e de armazenamento de dados

Esse tópico explora o Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia** ao analisar unidades de transferência de dados muito utilizadas em diferentes contextos do cotidiano.

Para compreender as unidades de armazenamento de dados, pode-se propor pesquisa sobre a tabela ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*), usada por grande parte da indústria de computadores para trocar informações, e solicitar aos estudantes que representem seus nomes no sistema binário, ou oferecer algumas palavras no sistema binário e solicitar que descubram que palavras são essas. Com isso, eles podem perceber, por exemplo, quantos bytes seriam necessários para armazenar seus nomes no computador e, ainda, quantos nomes iguais aos seus caberiam em um disco rígido. Isso favorece o desenvolvimento da competência específica 1 da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, a habilidade **EM13MAT103** que trata da compreensão de textos científicos que empregam unidades de medida de armazenamento e velocidade de transferência de dados. Explorar outros contextos em que unidades de medida de armazenamento de dados aparecem também pode favorecer a assimilação do conteúdo.

Com os tópicos **Entendendo o bit e o byte** e **Os múltiplos do bit e do byte**, os estudantes poderão ampliar a noção de armazenamento digital, além de associar os múltiplos do bit e do byte à potência de base 2, por exemplo.

Para o desenvolvimento do tópico **Taxa de transferência**, os estudantes podem retomar a ideia de grandezas derivadas e perceber que a taxa de transferência é determinada por meio de uma razão, pois, por exemplo, a velocidade de conexão para download é usualmente dada em megabits por segundo, Mbps.

No boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes percebam que a maioria das empresas utiliza esse mesmo recurso, indicado no exemplo, em suas peças publicitárias. Isso se dá, justamente, porque as pessoas, em geral, não compreendem a diferença entre as grandezas e as unidades de medida, e essa confusão faz com que elas imaginem que a internet será muito mais rápida do que ela realmente é. Alinhado ao boxe **Saiba que...**, com base na pesquisa dos estudantes, eles podem comparar quais planos oferecem internet de banda larga.



# Utilizando as unidades de medida

Esse tópico explora a aplicação das unidades de medida. Espera-se que os estudantes recordem situações vivenciadas no Ensino Fundamental e fora do espaço escolar em que já utilizaram as unidades de medida.

Pode-se, por exemplo, sugerir que os estudantes investiguem em que ocasiões a tensão de 127 V é mais vantajosa do que a tensão de 220 V. Essa pesquisa pode ser alinhada com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Ao explorar a imagem que traz especificações técnicas de uma geladeira, os estudantes poderão explorar diferentes grandezas e medidas. Se considerar conveniente, pode-se destacar a diferença entre massa e força-peso, retomando a ideia de grandezas de base e de grandezas derivadas do SI.

Com o boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes percebam que, apesar do milímetro ser uma unidade de medida usual, pode não ser considerada a melhor unidade de medida para se usar e talvez fosse melhor o centímetro ou o metro. Esse contexto pode ser ampliado solicitando aos estudantes que pesquisem como as especificações técnicas da geladeira seriam representadas em um país que utiliza o sistema imperial de unidades de medida, por exemplo.

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades exploram os conceitos estudados até o momento, colaborando para o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, em particular, as habilidades **EM13MAT103** e **EM13MAT314** ao interpretar e compreender textos científicos que empregam unidades de medida e resolver problemas envolvendo grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras.

Possibilitar aos estudantes que compartilhem as respostas dadas às atividades. Verificar se encontram outras dificuldades de leitura do gráfico proposto na atividade resolvida **3**.

As atividades propostas possibilitam aos estudantes aplicar os conceitos estudados a respeito de grandezas e unidades de medida. Algumas propõem pesquisas e elaboração de problemas. É importante que os estudantes compartilhem as estratégias de resolução e os problemas elaborados de modo que possam estabelecer comparações e promover uma ampliação no repertório de situações de aprendizagem, desenvolvendo a criatividade e a capacidade de argumentação.

Para ampliar o trabalho com as atividades, pode-se propor que pesquisem algum texto científico que contenha unidades de medida e elaborem questões de interpretação desse texto para que um colega as responda, enquanto ele faz o mesmo com as questões do colega. Por fim, podem conferir juntos as resoluções.

# Precisão e instrumentos de medida

A ideia de precisão e de exatidão, importante para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, colabora para a compreensão das medidas estatísticas.

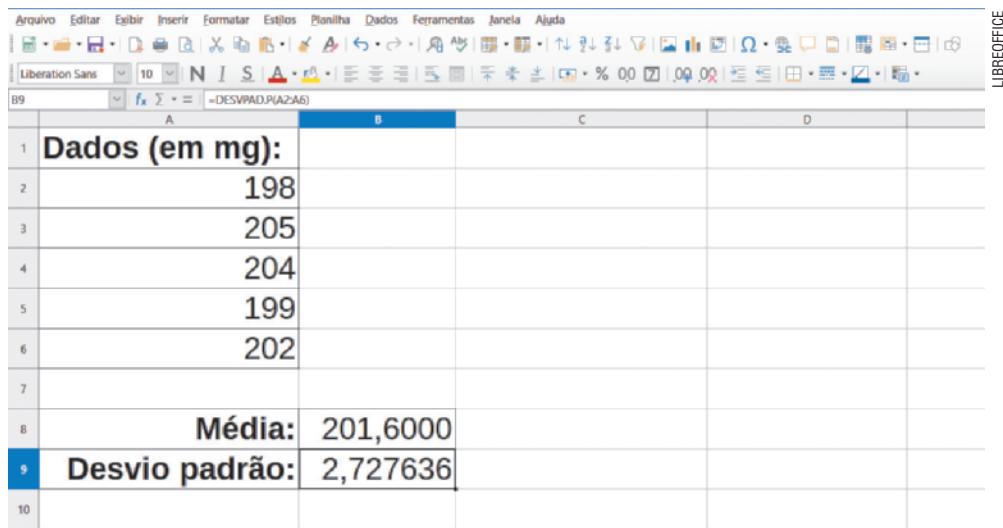
Para ampliar o conteúdo proposto nesse tópico, pode-se explorar outros contextos, como a utilização de medidores na culinária (colher de sopa, xícara de chá), que são precisos, pois a cada vez que são utilizados, a quantidade do ingrediente será praticamente a mesma, mas não são exatos, não podendo ser usados, por exemplo, em experimentos químicos.

O boxe **Pense e responda** contribui para reforçar a ideia de exatidão. E espera-se que os estudantes percebam que, como exatidão é um atributo qualitativo, basta calibrar a exigência da exatidão. Por exemplo, se considerarmos que exatidão é acertar o centro do alvo (ponto vermelho), nenhum deles terá sido exato.

No tópico **Média e desvio padrão**, retomar as noções relativas às medidas de tendência central, particularmente a ideia de média. Comentar que nem sempre a média permite fazer inferências razoáveis a respeito de um conjunto de dados e, por isso, outras medidas de tendência central e dispersão são essenciais para a análise de dados estatísticos.

Com o boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes percebam que, por se tratar de um medicamento, um desvio padrão de 2,728 mg pode ser significativo, mas que seria necessário verificar a exigência de qualidade de cada medicamento. Enfatizar que, quanto menor o desvio padrão, mais os valores do conjunto de dados estão concentrados em torno da média.

Para ampliar o trabalho com esse conteúdo, sugere-se explorar atividades com o uso de planilhas eletrônicas, possibilitando aos estudantes utilizar seus recursos de cálculo para manipular os dados nelas e verificar como a média e o desvio padrão de cada conjunto de dados se comportam. A seguir, um exemplo de como os dados podem ser disponibilizados no **LibreOffice Calc**, utilizando as fórmulas  $=MÉDIA(A2:A6)$  e  $=DESVPAD.P(A2:A6)$  para a média e o desvio padrão, respectivamente, do conjunto de dados listados na coluna **A**, da linha 2 à linha 6.



The screenshot shows a LibreOffice Calc spreadsheet window. The menu bar includes Arquivo, Editar, Exibir, Inserir, Formatar, Estilos, Planilha, Dados, Ferramentas, Janela, and Ajuda. The toolbar has various icons for file operations, text, and data manipulation. The formula bar shows the formula  $=DESVPAD.P(A2:A6)$ . The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D
1	<b>Dados (em mg):</b>			
2	198			
3	205			
4	204			
5	199			
6	202			
7				
8	<b>Média:</b>	201,6000		
9	<b>Desvio padrão:</b>	2,727636		
10				

O tópico **Instrumentos de medida de precisão** apresenta alguns instrumentos utilizados em diferentes áreas em que é necessária a precisão na medida. Pode-se conversar com os estudantes a respeito de profissões em que esses instrumentos são utilizados. Por exemplo, o torneiro mecânico ao usinar peças que vão ser encaixadas em outras, como é o caso de engrenagens, necessita produzir uma peça priorizando a precisão nas medidas, pois isso interfere no funcionamento do mecanismo em que ela será alocada. Para complementar esse tópico, pode-se propor aos estudantes que pesquisem informações sobre o cronômetro e sua utilização. Além disso, pode-se propor atividades em conjunto com professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, em que os estudantes possam, se possível, utilizar alguns instrumentos de medidas de precisão.



# Algarismos significativos e duvidosos

Ao apresentar a noção de algarismos significativos e de algarismos duvidosos, reforçar que eles adquirem sentido quando estamos fazendo uma medição, e que toda medida contém erro, mesmo aquelas obtidas com instrumentos de medida que contam com maior precisão. Esse trabalho colabora para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313**. O boxe **Pense e responda** pode colaborar para esse desenvolvimento também, pois os estudantes poderão justificar, por exemplo, que como a régua é graduada em milímetro, é necessário fazer estimativa quando a medida está entre um milímetro e outro. O algarismo 3, nesse contexto, sugere que Carlos considerou a medida mais próxima a 251 mm, enquanto o algarismo 7 indica que João considerou a medida mais próxima a 252 mm.

No tópico **Como reconhecer os algarismos significativos**, os estudantes poderão compreender esse reconhecimento por meio do uso da notação científica. Pode-se propor que comparem a massa da Terra e a de um elétron ou que pesquisem outras informações numéricas para comparar os algarismos significativos de cada uma delas.

No boxe **Pense e responda**, após a escrever os números na notação científica, é possível identificar 5 algarismos significativos para a medida da massa da Terra e 8, para a do elétron.

Nos tópicos **Adição e subtração considerando algarismos significativos** e **Multiplicação e divisão considerando algarismos significativos**, os estudantes poderão explorar e compreender como realizar essas operações e como fazer os arredondamentos considerando os algarismos significativos dos números.

## > ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades possibilitam resgatar as noções de medidas, precisão e algarismos significativos. Na atividade resolvida **5**, verificar se os estudantes compreendem o significado do símbolo  $\text{---}$ . Se necessário, explicar que ele indica que o valor à esquerda está incluído no intervalo e o valor à direita não. Assim,  $1,50 \text{---} 1,60$  representa o intervalo das medidas de altura  $h$  tais que  $1,50 \leq h < 1,60$ .

Na atividade proposta **12**, é possível fazer os seguintes questionamentos: “500 mg correspondem a quantos gramas?”, “É possível determinar essa medida em uma balança de cozinha?”. Com perguntas como essas, espera-se que os estudantes verifiquem que 500 mg corresponde a 0,5 g e que é um valor que balanças comuns não conseguem determinar. Pode-se propor que pesquisem qual a massa mínima que é possível determinar nas balanças utilizadas em estabelecimentos comerciais, como padarias e lojas de cereais próximas de onde residem. Perguntas semelhantes a essas podem ser feitas para as outras atividades de modo a estimular a curiosidade dos estudantes e, também, propor-lhes que elaborem outras situações com base no contexto das atividades propostas.

## > CONEXÕES

O trabalho desenvolvido nessa seção, ao explorar a Cartografia, pode ser realizado em parceria com os professores da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. As atividades propostas podem favorecer o desenvolvimento da competência geral **2**, pois os estudantes poderão recorrer à imaginação, à investigação e à análise crítica das

informações. A competência geral **5** também pode ser desenvolvida, à medida que os estudantes precisam compartilhar informações adquiridas por meio de tecnologias digitais, utilizando os conhecimentos matemáticos para se expressar.

Inicialmente, verificar o que os estudantes conhecem a respeito do assunto. Espera-se que eles se lembrem do que estudaram sobre escala no Ensino Fundamental.

Aproveitar o boxe **Saiba que...** para retomar a discussão a respeito de estimativas de áreas e sobre a precisão ou exatidão das medidas. Para ampliar o assunto, é possível explorar as diferentes projeções cartográficas possíveis, desenvolvendo um trabalho integrado com o professor de Geografia, da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, por exemplo, à medida que os estudantes podem verificar que, em cada tipo de projeção, alguns aspectos técnicos ou políticos são valorizados, como a definição dos países que ocupam posição de destaque no mapa, ou como a projeção escolhida faz parecer que alguns países têm extensão territorial e área maiores (ou menores) do que realmente têm.

Na atividade **1** os estudantes precisam refletir a respeito de alguma experiência que tiveram construindo um mapa ou utilizando uma escala. Na atividade **2**, espera-se que os estudantes percebam que a escala serve para indicar o tamanho real de certa região no mapa.

Para realizar a atividade **3**, os estudantes podem consultar mapas digitais, disponibilizados na internet. Há, inclusive, diversos endereços eletrônicos que possibilitam o cálculo automático do consumo de combustível e de gastos com frete, por exemplo. Ao final da atividade, propor que os grupos compartilhem o planejamento da viagem. Na atividade **4**, espera-se que os estudantes percebam que são utilizados conceitos de razão e proporção, de escala, grandezas e medidas, precisão etc.

### > EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Ao trabalhar a conversão de medidas computacionais, os estudantes compreendem e utilizam tecnologias digitais de informação de forma crítica e significativa, podendo desenvolver a competência geral **5**. Retomar o que foi estudado anteriormente e verificar o que os estudantes sabem sobre a taxa de transmissão de dados anunciada pelas operadoras, destacando que, em geral, a anunciada não é efetivamente realizada. Para enfatizar isso, os estudantes elaboram, nessa seção, um procedimento que, tendo como entrada a taxa de transmissão anunciada, ofereça como saída a taxa de transmissão real.

É importante realizar o passo a passo de cada conversão indicada nessa seção e possibilitar que os estudantes discutam e compartilhem outros meios de organizar as informações e de obter as conversões desejadas para que, assim, possam desenvolver o pensamento computacional.

A atividade proposta ao final da seção pode auxiliar a verificar a compreensão dos estudantes sobre o trabalho realizado. Para isso, eles elaboram dois fluxogramas. Antes de realizar essa atividade, explorar com eles a simbologia associada a esse tipo de representação, como entrada e saída de dados, tomada de decisões e ações realizadas.

No item **a**, espera-se que os estudantes compreendam que  $1\text{ GB} = 1\,024\text{ MB}$ . Assim, o fluxograma elaborado por eles deve considerar que dada uma medida  $x$ , em GB, para obter o equivalente a MB, basta multiplicar  $x$  por 1 024, ou seja,  $1\,024x$ .



De forma análoga, no item **b**, deve-se converter uma taxa de transmissão que está em Mb/s para MiB/s. Para isso, o fluxograma elaborado pelos estudantes deve considerar converter a taxa que está em Mb/s para MB/s e converter o valor indicado na taxa MB/s para MiB/s.

## ► ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Essas atividades buscam resgatar diversos conceitos explorados neste Capítulo, tais como densidade demográfica, velocidade média, grandezas microscópicas e astronômicas, potências de base 10, transformação de unidades e medidas com algarismos significativos. É conveniente possibilitar que os estudantes resolvam as atividades por meio de um trabalho em grupo, por exemplo, ou promover ações pedagógicas que possibilitem compartilhar as estratégias de resolução. Esse trabalho, desenvolvido em grupo, pode também figurar como uma avaliação do processo de aprendizagem dos estudantes, no qual eles poderão verificar se precisam retomar algum conceito que necessite ser mais bem trabalhado, bem como esclarecer dúvidas.

Pedir aos estudantes que justifiquem a escolha da alternativa correta em cada atividade, para exercitar a escrita na língua materna, aplicando os conceitos matemáticos estudados. Para complementar essas atividades, solicitar que escolham um dos temas estudados, elaborem uma situação-problema com base nesse tema e troquem-na com um colega, para que um resolva a situação elaborada pelo outro. Por fim, peça que confirmem juntos as resoluções.

## ► PARA REFLETIR

Essa seção permite que os estudantes façam uma autoavaliação das aprendizagens realizadas durante o estudo proposto neste Capítulo. Estimula, também, o retorno a conceitos que eles acreditam não estarem ainda bem consolidados. Nesse momento, é importante conversar com eles a respeito das dificuldades encontradas durante as aulas. As questões propostas nessa seção auxiliam nessa reflexão.

Na primeira questão, os estudantes precisam relembrar quais conteúdos eles já conheciam antes de iniciar os trabalhos do Capítulo.

Na segunda questão, espera-se que os estudantes percebam que apenas as unidades do SI não são suficientes para a interação com a realidade, pois o contexto e a localidade devem ser considerados, por exemplo.

A terceira questão possibilita aos estudantes retomarem o conceito de precisão. Espera-se que eles apresentem exemplos que exigem a obrigatoriedade dessa precisão, como na usinagem de uma engrenagem ou na cronometragem de uma corrida. Compartilhar os exemplos apresentados para que o restante da turma possa comparar as respostas obtidas e debater sobre elas.



# RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES

## Capítulo 1 • Matrizes e sistemas lineares

### Atividades

1. Ao associar as letras do alfabeto aos números de acordo com o quadro fornecido pelo enunciado, obtém-se:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{U} - 21 & \mathbf{M} - 13 & \mathbf{T} - 20 \\ \mathbf{N} - 14 & \mathbf{O} - 15 & \mathbf{E} - 5 \\ \mathbf{I} - 9 & \mathbf{N} - 14 & \mathbf{S} - 19 \end{array}$$

$$\text{Portanto, } \begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$$

Resposta: alternativa **b**.

2. A representação genérica de uma matriz  $3 \times 3$  é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Como,  $a_{ij} = 3i - j^2$ , então:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3 \cdot 1 - 1^2 = 3 - 1 \Rightarrow a_{11} = 2 \\ a_{12} &= 3 \cdot 1 - 2^2 = 3 - 4 \Rightarrow a_{12} = -1 \\ a_{13} &= 3 \cdot 1 - 3^2 = 3 - 9 \Rightarrow a_{13} = -6 \\ a_{21} &= 3 \cdot 2 - 1^2 = 6 - 1 \Rightarrow a_{21} = 5 \\ a_{22} &= 3 \cdot 2 - 2^2 = 6 - 4 \Rightarrow a_{22} = 2 \\ a_{23} &= 3 \cdot 2 - 3^2 = 6 - 9 \Rightarrow a_{23} = -3 \\ a_{31} &= 3 \cdot 3 - 1^2 = 9 - 1 \Rightarrow a_{31} = 8 \\ a_{32} &= 3 \cdot 3 - 2^2 - 9 - 4 \Rightarrow a_{32} = 5 \\ a_{33} &= 3 \cdot 3 - 3^2 = 9 - 9 \Rightarrow a_{33} = 0 \end{aligned}$$

Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Matriz A:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} &= 7 + 4 + 1 = 12 \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} &= 5 + 4 + 3 = 12 \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 7 + 0 + 5 = 12 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 2 + 4 + 6 = 12 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} &= 3 + 8 + 1 = 12 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} &= 7 + 2 + 3 = 12 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} &= 0 + 4 + 8 = 12 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} &= 5 + 6 + 1 = 12 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz A forma um quadrado mágico.

Matriz B:

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44} &= 16 + 10 + 7 + 1 = 34 \\ b_{14} + b_{23} + b_{32} + b_{41} &= 13 + 11 + 6 + 4 = 34 \\ b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} &= 16 + 3 + 2 + 13 = 34 \\ b_{21} + b_{22} + b_{23} + b_{24} &= 5 + 10 + 11 + 8 = 34 \\ b_{31} + b_{32} + b_{33} + b_{34} &= 9 + 6 + 7 + 12 = 34 \\ b_{41} + b_{42} + b_{43} + b_{44} &= 4 + 15 + 14 + 1 = 34 \\ b_{11} + b_{21} + b_{31} + b_{41} &= 16 + 5 + 9 + 4 = 34 \\ b_{12} + b_{22} + b_{32} + b_{42} &= 3 + 10 + 6 + 15 = 34 \\ b_{13} + b_{23} + b_{33} + b_{43} &= 2 + 11 + 7 + 14 = 34 \\ b_{14} + b_{24} + b_{34} + b_{44} &= 13 + 8 + 12 + 1 = 34 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz B forma um quadrado mágico.

Matriz C:

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{22} + c_{33} &= 2 + 5 + 9 = 16 \\ c_{13} + c_{22} + c_{31} &= 4 + 5 + 6 = 15 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz C não forma um quadrado mágico.

4. Considerando a ordem da matriz e os respectivos valores de  $i$  e  $j$ , obtém-se:

a]

$i$	$j$	$2i - j$
1	1	1
1	2	0
1	3	-1

$$A = (1 \quad 0 \quad -1)$$

b]

		$i \leq j$	$i > j$
$i$	$j$	$i + j$	$i - j$
1	1	2	-
1	2	3	-
2	1	-	1
2	2	4	-
3	1	-	2
3	2	-	1
4	1	-	3
4	2	-	2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

c]

		$i \neq j$	$i = j$	
$i$	$j$	$i + j$	$(-1)^{i+j}$	0
1	1	—	—	0
1	2	3	-1	—
1	3	4	1	—
2	1	3	-1	—
2	2	—	—	0
2	3	5	-1	—
3	1	4	1	—
3	2	5	-1	—
3	3	—	—	0

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Segundo a matriz do enunciado o tempo de treinamento do atleta **B** no terceiro dia corresponde ao elemento  $a_{23}$ . Como  $a_{ij} = 30i + 10j$ , obtém-se:

$$a_{23} = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 60 + 30 = 90$$

90 min = 1 hora + 30 minutos

Resposta: alternativa **a**.

6. A diagonal principal é composta pelos elementos:  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  e  $a_{44}$ . Como  $a_{ij} = i - j$ , obtém-se:

$$a_{11} = 1 - 1 = 0$$

$$a_{22} = 2 - 2 = 0$$

$$a_{33} = 3 - 3 = 0$$

$$a_{44} = 4 - 4 = 0$$

Diagonal secundária é composta pelos elementos:  $a_{14}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{32}$  e  $a_{41}$ , obtém-se:

$$a_{14} = 1 - 4 = -3$$

$$a_{23} = 2 - 3 = -1$$

$$a_{32} = 3 - 2 = 1$$

$$a_{41} = 4 - 1 = 3$$

Portanto,

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) + (a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41}) = (0 + 0 + 0 + 0) + (-3 - 1 + 1 + 3) = 0$$

7. Considerando as possíveis distâncias entre os vértices do quadrado, pode-se obter:

- Quando  $i = j$ , a distância será 0;

- Quando  $i$  e  $j$  forem números consecutivos, a distância será 1;

- Quando  $i$  e  $j$  não forem números consecutivos e  $i \neq j$ , a distância será  $\sqrt{2}$ , pois será a diagonal do quadrado de lado 1. Logo:

$$a_{11} = 0$$

$$a_{22} = 0 \quad a_{21} = a_{12} = 1$$

$$a_{23} = a_{32} = 1$$

$$a_{31} = a_{13} = \sqrt{2}$$

$$a_{33} = 0$$

$$a_{34} = a_{43} = 1$$

$$a_{44} = 0$$

$$a_{14} = a_{41} = 1$$

$$a_{42} = a_{24} = \sqrt{2}$$

$$\text{Portanto, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resposta: alternativa **b**.

8. a] Com as informações obtidas na tabela, é possível determinar as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 340 & 410 \\ 105 & 87 \\ 96 & 134 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 180 & 152 \\ 64 & 36 \\ 113 & 88 \end{bmatrix}$$

- b] Somando os elementos correspondentes de cada matriz, obtém-se:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 520 & 562 \\ 169 & 123 \\ 209 & 222 \end{bmatrix}$$

9. A partir das informações do enunciado, conclui-se:

a]  $A + B = B + A$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b]  $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A + B) + C = \left( \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

c)  $B + 0_{2 \times 2} = B$

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

d)  $C + (-C) = 0_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**10.** Pela definição, pode-se admitir que  $c_{23} = a_{23} + b_{23}$ . Logo:

$$a_{23} = 2 + 3 = 5$$

$$b_{23} = 2 - 3 = -1$$

$$c_{23} = a_{23} + b_{23} = 5 + (-1) \Rightarrow c_{23} = 4$$

**11.** Considerando as informações do enunciado, obtém-se

$$\text{a)] } 2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)] } -3B = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 0 & (-3) \cdot (-1) & (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot 2 & (-3) \cdot 0 & (-3) \cdot 6 \\ (-3) \cdot 1 & (-3) \cdot 1 & (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & -18 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)] } \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} \frac{0}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{0}{2} & \frac{6}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d)] } 3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & 12 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & 24 \\ 2 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

**12.** Conforme o enunciado, considerando  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,  $X =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ obtém-se}$$

a]  $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$

$$2 \left( 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = (2 \cdot 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

b]  $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

$$2 \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

c]  $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$

$$(2+3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

d]  $1 \cdot Y = Y$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

13. Considerando as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & -6 & 15 \end{bmatrix}$ , deve-se calcular as seguintes expressões:

a)  $\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 12 \\ 14 & -10 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

b)  $-4A - \frac{2}{3}B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -20 & 16 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 6 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -26 & 20 & -22 \end{bmatrix}$

14. Considerando as informações do enunciado, pode-se concluir que as matrizes  $A$  e  $B$  são:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Portanto, para cada item, obtém-se:

a)  $C = 2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

b)  $D = \frac{1}{2}A - \frac{1}{4}B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

15. a) Como uma matriz é  $3 \times 4$  e a outra é  $4 \times 2$ , é possível multiplicar e o resultado será uma outra matriz,  $A$ , de ordem  $3 \times 2$ . Portanto, cada elemento será:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 1$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 14 \\ a_{21} &= 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) = -6 \\ a_{22} &= 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 18 \\ a_{31} &= (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) = -16 \\ a_{32} &= (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -6 & 18 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Como uma matriz é  $2 \times 2$  e a outra é  $3 \times 2$ , não é possível determinar o produto.

- c) Como uma matriz é  $3 \times 1$  e a outra é  $1 \times 3$ , é possível multiplicar e o resultado será uma outra matriz,  $C$ , de ordem  $3 \times 3$ . Portanto, cada elemento será:

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ -1)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3 \cdot 2 = 6 \\ c_{12} &= 3 \cdot 4 = 12 \\ c_{13} &= 3 \cdot (-1) = -3 \\ c_{21} &= 1 \cdot 2 = 2 \\ c_{22} &= 1 \cdot 4 = 4 \\ c_{23} &= 1 \cdot (-1) = -1 \\ c_{31} &= (-2) \cdot 2 = -4 \\ c_{32} &= (-2) \cdot 4 = -8 \\ c_{33} &= (-2) \cdot (-1) = 2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

16. Considerando as matrizes do enunciado, conclui-se que:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As matrizes  $A$  e  $B$  não comutam, pois  $AB \neq BA$ .

17. O elemento  $c_{32}$  é o resultado da multiplicação da linha 3 da matriz  $A$  com a coluna 2 da matriz  $B$ . Como  $a_{ij} = i + j$  e  $b_{ij} = 2i + j$ , então:

$$\begin{aligned} c_{32} &= a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} \\ c_{32} &= (3 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 2) + (3 + 2) \cdot (2 \cdot 2 + 2) + (3 + 3) \cdot (2 \cdot 3 + 2) \\ c_{32} &= 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 8 \Rightarrow c_{32} = 94 \end{aligned}$$

- 18.** a) Segundo o enunciado, a matriz que representa a quantidade de zíperes, por tamanho, em cada modelo de mochila é:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- b) A matriz que representa a quantidade de mochilas, por modelo, no último trimestre é:

$$E = \begin{bmatrix} 50 & 100 & 200 \\ 50 & 150 & 100 \end{bmatrix}$$

- c) Ao calcular o produto  $T \cdot E$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 & 100 & 200 \\ 50 & 150 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 700 & 1000 \\ 250 & 650 & 700 \\ 150 & 400 & 400 \end{bmatrix}$$

A posição que corresponde à quantidade de zíperes utilizados nas mochilas médias no mês de novembro é a segunda linha e segunda coluna. Portanto, 650 zíperes.

- d) Exemplo de resposta:

Problema: Se em janeiro a fábrica receber uma encomenda de 122 mochilas do modelo **X** e 108 do modelo **Y** e, em fevereiro, 105 mochilas do modelo **X** e 97 do modelo **Y**, qual matriz representa o total de zíperes por tamanho em cada mês?

Resolução:

A matriz  $E$  que representa a encomenda é:

$$E = \begin{bmatrix} 122 & 105 \\ 108 & 97 \end{bmatrix}$$

Portanto, se  $Z$  é a matriz que representa o total de zíperes por tamanho em cada mês do bimestre em questão, então:

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 122 & 105 \\ 108 & 97 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 704 & 614 \\ 568 & 404 \\ 338 & 299 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 19.** Aplicando a definição de matriz inversa, obtém-se:

a)  $A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(I) \begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ a = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} 3b + 4d = 0 \\ b = 1 \Rightarrow d = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)] } B \cdot B^{-1} &= I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Como  $0 \neq 1$ , concluímos que  $B$  não é invertível.

$$\text{c)] } C \cdot C^{-1} = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (I) \begin{cases} a = 1 \\ a + 3d + g = 0 \\ a + 2d = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 1 + 3d + g = 0 \\ 1 + 2d = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - \frac{3}{2} - g = 0 \Rightarrow g = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(II) \begin{cases} b = 0 \\ b + 3e + h = 1 \\ b + 2e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3e + h = 1 \\ 2e = 0 \Rightarrow e = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 1$$

$$(III) \begin{cases} c = 0 \\ c + 3f + i = 0 \\ c + 2f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3f + i = \\ 2f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} + i =$$

$$= 0 \Rightarrow i = -\frac{3}{2}$$

Portanto,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- 20.** Ao calcular a matriz inversa de  $A$ , obtém-se:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I) \begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ 7a + 5c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se  $a = 5; c = -7$ .

$$(II) \begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ 7b + 5d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Resolvendo o sistema, obtém-se  $b = -2; d = 3$ .

Assim:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} AB + A^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \\ AB + A^{-1} &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**21.** Sejam  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , vamos calcular  $B^{-1}$ :

Seja  $B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , temos que  $B \cdot B^{-1} = I_2$ , então:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2} \text{ e } d = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  e como  $A \cdot B^{-1} = C$ , então:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Enfim,  $A - B + C =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

**22.** Sejam  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  e  $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}$ , sabe-se que

$M^{-1} = N$ , logo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2+2p & -1+2q \\ 2+4p & -1+4q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+2p=1 \\ -1+2q=0 \end{cases} \Rightarrow p = -\frac{1}{2} \text{ e } q = \frac{1}{2}$$

Logo,  $p + q = 0$ .

**23.** Simplificando a equação, obtém-se:

$$\frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C \Rightarrow 3(X-A) = 2(B+X) + 6C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 3A + 2B + 6C$$

Como  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes, logo:

$$\begin{aligned} X &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & -6 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \\ X &= \begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**24.** Simplificando a equação, obtém-se:

$$A \cdot X + I = B \Rightarrow A \cdot X = B - I$$

Como  $B$  e  $I$  são matrizes, obtém-se:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 17 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot X = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$$

Considerando que  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 17 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 4a+c & 4b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolvendo os sistemas

$$\begin{cases} a+2c=13 \\ 4a+c=17 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } c = 5$$

$$\begin{cases} b+2d=5 \\ 4b+d=6 \end{cases} \Rightarrow b = 1 \text{ e } d = 2$$

Portanto:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**25.** Simplificando a equação, obtém-se:

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B$$

Como  $A \cdot A^{-1} = I$ , então:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo os sistemas, obtém-se:

$$(I) \begin{cases} a+d+g=1 \\ -d+g=0 \\ g=0 \end{cases} \Rightarrow g = 0, d = 0 \text{ e } a = 1$$

$$(II) \begin{cases} b+e+h=0 \\ -e+h=1 \\ h=0 \end{cases} \Rightarrow h = 0, e = -1 \text{ e } b = 1$$

$$(III) \begin{cases} c + f + i = 0 \\ -f + i = 0 \Rightarrow i = 1, f = 1; c = -2 \\ i = 1 \end{cases}$$

Assim:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**26.** Pela definição de matriz inversa, conclui-se:

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow X = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo os sistemas, obtém-se:

$$(I) \begin{cases} 3a + c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } c = -5$$

$$(II) \begin{cases} 3b + d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \text{ e } d = 3$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

**27.** Ao analisar a ordem da matriz  $X$ , obtém-se:

$$A_{2 \times 2} \cdot X_{n \times p} = B_{2 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow X_{2 \times 1}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} 4x_{11} + x_{21} = 24 \\ 2x_{11} - x_{21} = 6 \end{cases} \Rightarrow x_{11} = 5; x_{21} = 4 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**28.** Ao resolver a equação matricial, obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -a \\ a & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y & (I) \\ 4x - ay = 3 & (II) \\ ax - 4y = -1 & (III) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtém-se:  $4(2 - y) - ay = 3$

Substituindo (I) em (III), obtém-se:  $a(2 - y) - 4y = -1$

Assim:

$$\begin{cases} 4y + ay = 5 \\ -4y - ay + 2a = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se que  $a = 2$  e  $y = \frac{5}{6}$ .  
Portanto,  $a = 2$ .

**29.** Como cada letra do alfabeto corresponde a um número, temos a seguinte tabela de correspondência:

A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7
H	I	J	K	L	M	N
8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U
15	16	17	18	19	20	21
V	W	X	Y	Z		
22	23	24	25	26		

Utilizando a tabela acima, a mensagem recebida por Tatiana, flor, é representada pela matriz  $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$ .

Assim, conclui-se que  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$ , em que  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Identificando os elementos da matriz  $A$  como

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ obtém-se: } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b & -a+b \\ c+2d & -c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

A partir dessa igualdade, obtém-se os sistemas de equações:

$$\begin{cases} a + 2b = 6 \\ -a + b = 12 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c + 2d = 15 \\ -c + d = 18 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtém-se:  $a = -6$ ;  $b = 6$ ;  $c = -7$  e  $d = 11$ .

$$\text{Logo, } A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Resposta: alternativa **b**.

**30.** Somente a equação **a** é linear, as demais apresentam produto de incógnitas ou incógnita com expoente diferente de 1.

**31.** Considerando a equação  $2x - 3y = 9$ , é necessário substituir as coordenadas dos pontos e verificar se o resultado representa uma solução da equação. Logo:

$$\cdot 2 \cdot 0 - 3(-3) = 9$$

Portanto,  $(0, -3)$  é solução.

$$\cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$$

Portanto,  $(1, 2)$  não é solução.

$$\cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 9$$

Portanto,  $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$  é solução.

$$\cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot 0 = -1$$

Portanto,  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  não é solução.

Os pares ordenados que representam uma solução são

$$(0, -3) \text{ e } \left(4, -\frac{1}{3}\right).$$

**32.** a) Ao verificar se a terna  $(0, -3, 2)$  é solução da equação  $4x - 2y + z = 8$ , obtém-se:

$$4 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 2 = 8 \Rightarrow 8 = 8$$

Portanto,  $(0, -3, 2)$  é solução.

b) Sugestão de resposta:

$$\text{Se } z = 0, \text{ então: } 4x - 2y = 8$$

Ao considerar que  $x = 3$ , obtém-se que  $y = 2$ .

Portanto,  $(3, 2, 0)$  é uma solução.

**33.** Não, pois qualquer que seja o par ordenado  $(a, b)$  temos que  $0a + 0b \neq 4$ .

**34.** Como  $(-1, 2, -3)$  é solução da equação  $2a - 4b + mc = 0$ , então:

$$2(-1) - 4(2) + m(-3) = 0 \Rightarrow m = -\frac{10}{3}$$

**35.** Uma equação é homogênea quando for igual a 0. Então, a equação  $x - 4y + z = m^2 - 4$  será homogênea se  $m^2 - 4 = 0$ . Logo:

Resolvendo a equação do 2º grau  $m^2 - 4 = 0$ , obtém-se as raízes  $m_1 = 2$  e  $m_2 = -2$ .

Portanto,  $m = 2$  ou  $m = -2$ .

**36.** Substituindo  $x$  por  $a$  e  $y$  por  $6 - 2a$  na equação, obtém-se:

$$2a + (6 - 2a) = 2a + 6 - 2a = 6$$

Ou seja,  $(a, 6 - 2a)$  é solução da equação para qualquer valor de  $a$ .

**37.** Substituindo a coordenada  $(-1, 2)$  no sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} -1 - 4 \cdot 2 = -9 \\ 3 \cdot (-1) + 2 = -1 \end{cases}$$

Como a coordenada satisfaz a ambas as equações, então  $(-1, 2)$  é solução do sistema.

**38.** Uma opção para resolver o sistema é multiplicar a segunda equação por  $-2$ , ou seja:

$$\begin{cases} 2x - y = 15 \\ x + 3y = 25 \xrightarrow{x(-2)} \begin{cases} 2x - y = 15 \\ -2x - 6y = -50 \end{cases} \end{cases}$$

Somando ambas as equações, obtém-se:

$$-7y = -35 \Rightarrow y = 5$$

Substituindo  $y$  na primeira equação, obtém-se:

$$2x - 5 = 15 \Rightarrow x = 10$$

Portanto,  $S = \{(10, 5)\}$ .

**39.** Vamos identificar as variáveis  $m$  e  $a$  como sendo a distância percorrida pelo trabalhador de motocicleta e automóvel, respectivamente, e considerar 7 centavos como 0,07 reais. Portanto, a partir do enunciado, conclui-se:

$$\begin{cases} 0,21a + 0,07m = 70 \\ a + m = 550 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 100, obtém-se:

$$\begin{cases} 21a + 7m = 7\ 000 \\ a + m = 550 \end{cases}$$

Da segunda equação obtém-se que  $a = 550 - m$ . Substituindo na primeira equação e resolvendo, obtém-se que  $m = 325$ .

Substituindo o valor  $m$  na segunda equação, obtém-se que  $a = 225$ .

Assim, o trabalhador deve percorrer 325 km de motocicleta e 225 km de automóvel para que o custo total mensal seja R\$ 70,00.

**40.** a) Considerando as caixas do tipo A como  $x$  e as caixas do tipo B como  $y$ , com base nas informações do enunciado, é possível escrever:

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 56x + 72y = 3\ 840 \end{cases}$$

b) Da primeira equação obtém-se que  $x = 58 - y$ . Substituindo esse resultado na segunda equação, obtém-se:

$$56(58 - y) + 72y = 3\ 840 \Rightarrow 16y = 592 \Rightarrow y = 37$$

Substituindo o valor de  $y$  na primeira equação, obtém-se que  $x = 21$ .

O caminhão levará 21 caixas do tipo A e 37 caixas do tipo B.

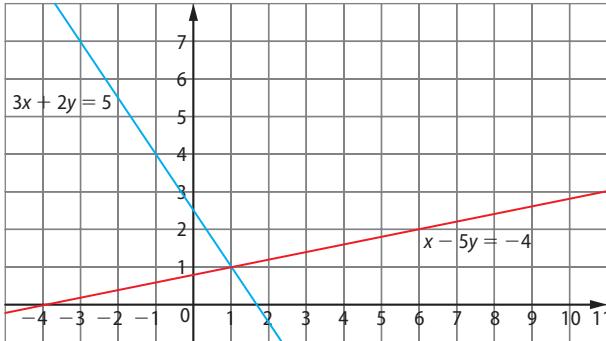
**41.** Resolvendo o sistema  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ , obtém-se  $x = 4$  e  $y = 3$ .

Substituindo os valores encontrados para  $x$  e  $y$  no segundo sistema, temos:

$$\begin{cases} -4 + 5 \cdot 3 = 11(V) \\ 3 \cdot (4) - 3 = 9 \ (V) \end{cases}$$

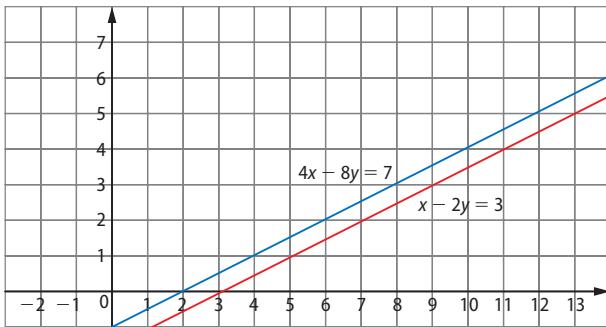
Assim, os sistemas têm o mesmo conjunto solução, ou seja,  $S = \{(4, 3)\}$ .

**42. a]**



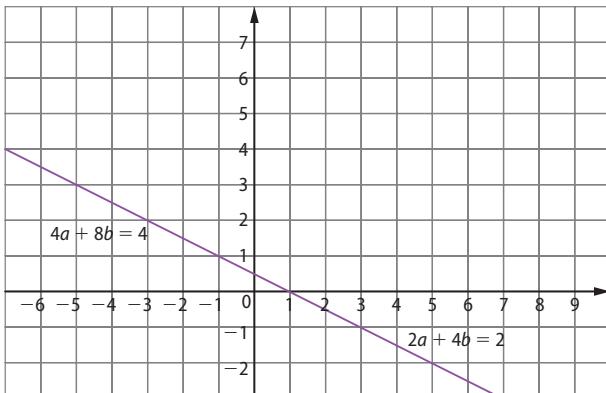
Como há uma intersecção, o sistema é possível e determinado.

b)



Como as retas são paralelas, o sistema é impossível.

c)



Como as retas são paralelas e coincidentes, o sistema é possível e indeterminado.

**43. Ao multiplicar a primeira equação por  $-3$ , obtém-se:**

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x + my = 8 \end{cases} \xrightarrow{x(-3)} \begin{cases} -3x + 9y = -18 \\ 3x + my = 8 \end{cases}$$

Ao somar ambas as equações, obtém-se:

$$(9 + m)y = -10$$

Para que o sistema tenha solução  $9 + m \neq 0$ , Logo:

$$m \neq -9$$

Portanto,  $\{m \in \mathbb{R} \mid m \neq -9\}$

**44. Ao multiplicar a primeira equação por  $-2$ , obtém-se:**

$$\begin{cases} x\sqrt{3} + y = 5 \\ 2x\sqrt{3} + 2y = k \end{cases} \xrightarrow{x(-2)} \begin{cases} -2x\sqrt{3} - 2y = -10 \\ 2x\sqrt{3} + 2y = k \end{cases}$$

Ao somar ambas as equações, obtém-se:

$$0 = -10 + k \Rightarrow k = 10$$

**45. Ao multiplicar a segunda equação por  $-2$ , obtém-se:**

$$\begin{cases} 40x + 20y = 200 \\ 20x + 40y = 200 \end{cases} \xrightarrow{x(-2)} \begin{cases} 40x + 20y = 200 \\ -40x - 80y = -400 \end{cases}$$

Somando ambas as equações, obtém-se:

$$y = \frac{20}{6} \approx 3,33$$

Substituindo o valor encontrado para  $y$  em  $40x + 20y = 200$ , obtém-se:

$$x = \frac{20}{6} \approx 3,33$$

Como a ração  $X$  é a mais barata deve-se comprar 4 sacos. Logo, o inteiro mais próximo do total de sacos a serem comprados para minimizar o custo é 7.

**46. Ao multiplicar a primeira equação por  $-4$  e associando os termos semelhantes, obtém-se:**

$$\begin{cases} \frac{a-2}{4} + \frac{1-b}{2} = a - 3b \\ \frac{a+2}{3} = \frac{a+2b}{4} \end{cases} \xrightarrow{x(-4)} \begin{cases} -a + 2b = -4a + 12b \\ 4a + 8 = 3a + 6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10b = 3a \\ a = 6b - 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se as soluções  $a = 10$  e  $b = 3$ .

Portanto, o sistema é SPD.

**47. Ao somar ambas as equações, obtém-se:**

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x - 16 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Substituindo o valor de  $x$  na primeira equação, obtém-se:

$$5x + 4y + 2 = 0 \Rightarrow 5 \cdot 2 + 4y + 2 = 0 \Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3$$

Assim, o sistema admite uma única solução.

Resposta: alternativa b.

**48. a] Para verificar se a terna é uma solução, devem-se substituir  $x_1, x_2$  e  $x_3$  pela terna  $(2, -1, 1)$ . Logo:**

$$2 \cdot (2) + 3 \cdot (-1) - (1) = 0 \text{ (Verdadeiro)}$$

$$(2) - 2 \cdot (-1) + (1) = 5 \text{ (Verdadeiro)}$$

$$-(2) + (-1) + (1) = -2 \text{ (Verdadeiro)}$$

Portanto, a terna é solução do sistema.

**b]** Ao substituirmos a terna  $(0, 0, 0)$  no sistema, verificamos que na segunda e na terceira linhas obtém-se absurdos ( $0 = 5$  e  $0 = -2$ ) logo, a terna não é solução do sistema.

**49.** Do enunciado, obtém-se o sistema a seguir:

$$\begin{cases} m + p + q = 58 & (\text{I}) \\ 2m + 3p + 4q = 166 & (\text{II}) \\ 4q = 40 & (\text{III}) \end{cases}$$

De (III), temos:

$$4q = 40 \Rightarrow q = 10$$

Substituindo  $q = 10$  nas equações (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} m + p = 48 & (\text{IV}) \\ 2m + 3p = 126 & (\text{V}) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (IV) por  $-3$  e adicionando a (V), obtém-se:

$$m = 18$$

Substituindo o valor de  $m$  na equação (IV) obtém-se que  $p = 30$ .

Como  $p$  são os quartos triplos e  $m$  são os quartos duplos, temos que  $30 - 18 = 12$ .

Resposta: alternativa **c.**

**50.** Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, alimentos dos tipos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e considerando as informações do enunciado, conclui-se:

$$\begin{cases} 40x + 80y + 120z = 3\,600 \\ 100x + 50y + 50z = 2\,500 \\ 120x + 30y + 60z = 2\,700 \end{cases}$$

Simplificando as equações, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 90 & (\text{I}) \\ 2x + y + z = 50 & (\text{II}) \\ 4x + y + 2z = 90 & (\text{III}) \end{cases}$$

Isolando  $x$  em (I) e substituindo em (II) e (III), obtém-se:

$$\begin{cases} 2(90 - 2y - 3z) + y + z = 50 \\ 4(90 - 2y - 3z) + y + 2z = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y - 5z = -130 \\ -7y - 10z = -270 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se que  $z = 20$

Assim, a mistura deve ter 20 gramas do alimento  $C$ .

**51.** Denotando como  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_0$  o comprimento, em passos, da pista 1, da pista 2 e da ponte, respectivamente, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 2p_1 + p_0 + p_2 = 1157 & (\text{I}) \\ p_1 + p_0 + p_2 = 757 & (\text{II}) \\ 7p_1 = 8p_2 & (\text{III}) \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II) e reescrevendo a equação (III), temos:

$$\begin{cases} p_1 = 400 \\ p_2 = \frac{7p_1}{8} \end{cases}$$

Portanto, resolvendo o sistema, obtém-se que  $p_2 = 350$ .

Logo, o comprimento da ponte é:

$$p_0 = 757 - 400 - 350 = 7$$

Resposta: alternativa **c.**

**52.** Ao escrever cada item na forma matricial, obtém-se:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

**53.** Do enunciado, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = y + z & (\text{I}) \\ x + y = 2\,300 & (\text{II}) \\ (x + y) + 2y + (z + y) = 5\,400 & (\text{III}) \end{cases}$$

Reescrevendo a equação (III) e substituindo a equação (I) em (II) e (III), obtém-se:

$$\begin{cases} 2y + z = 2\,300 & (\text{IV}) \\ 5y + 2z = 500 & (\text{V}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 2\,300 \\ -y = -800 \end{cases}$$

Assim, obtém-se que  $y = 800$ . Substituindo o valor de  $y$  na equação (IV) obtém-se que  $z = 700$  e substituindo o valor de  $y$  e  $z$  em (I), obtém-se  $x = 1\,500$ .

O valor da gratificação recebida foi de R\$ 800,00.

**54.** Ao multiplicar cada matriz, pode-se escrevê-la na forma de sistema linear, da seguinte maneira:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2a - 5b \\ 3a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 5b = -4 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} -4m + n \\ 3m + 5n - 2p \\ m + 6p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4m + n = 1 \\ 3m + 5n - 2p = 2 \\ m + 6p = 3 \end{cases}$$

**55.** Transformando o sistema matricial na forma de sistema linear e resolvendo-o, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 5 & (\text{I}) \\ x + 2y + 4z = 4 & (\text{II}) \\ 2x + y + 2z = -1 & (\text{III}) \end{cases}$$

Isolando  $x$  em (II) e substituindo em (I) e (III), obtém-se:

$$x = -2y - 4z + 4$$

$$\begin{cases} -(-2y - 4z + 4) + y - z = 5 \\ 2(-2y - 4z + 4) + y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 3z = 9 & (\text{IV}) \\ -3y - 6z = -9 & (\text{V}) \end{cases}$$

Ao somar ambas as equações, obtém-se:

$$-3z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Substituindo  $z = 0$  em (IV):

$$3y = 9 \Rightarrow y = 3$$

Substituindo os valores de  $y$  e  $z$ , na equação (II), obtém-se:

$$x = -2y - 4z + 4 \Rightarrow x = -2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 + 4 \Rightarrow x = -2$$

Portanto,  $S = \{(-2, 3, 0)\}$ .

- 56.** Considerando as informações do enunciado, pode-se elaborar o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 8x + 9y + 10z = 93 \\ 9x + 9y + 7z = 80 \\ 8x + 8y + 7z = 75 \end{cases}$$

Ao representar na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 7 \\ 8 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93 \\ 80 \\ 75 \end{bmatrix}$$

- 57.** a) Considerando o sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 70 \quad (\text{I}) \\ 4y = 80 \quad (\text{II}) \end{cases}$ , da

equação (II), obtém-se:

$$4y = 80 \Rightarrow y = 20$$

Substituindo o valor encontrado para  $y$  na equação (I), obtém-se:

$$3x + 2y = 70 \Rightarrow 3x + 2 \cdot 20 = 70 \Rightarrow x = 10$$

Portanto,  $S = \{(10, 20)\}$ .

- b) Considerando o sistema  $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \quad (\text{I}) \\ y - z = 4 \quad (\text{II}) \\ 7z = 21 \quad (\text{III}) \end{cases}$

equação (III), obtém-se:

$$7z = 21 \Rightarrow z = 3$$

Substituindo o valor encontrado para  $z$  na equação (II), obtém-se:

$$y - z = 4 \Rightarrow y = 7$$

Substituindo os valores encontrados para  $y$  e  $z$  na equação (I), obtém-se:

$$x + y + 2z = 1 \Rightarrow x = -12$$

Portanto,  $S = \{(-12, 7, 3)\}$ .

- c) Considerando o sistema  $\begin{cases} a - 3b + 2c - d = -1 \quad (\text{I}) \\ 5b - 3c + d = 3 \quad (\text{II}) \\ \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 1 \quad (\text{III}) \\ \frac{1}{5}d = \frac{1}{5} \quad (\text{IV}) \end{cases}$ , da

equação (IV), obtém-se:

$$\frac{1}{5}d = \frac{1}{5} \Rightarrow d = 1$$

Substituindo o valor encontrado para  $d$  na equação (III), obtém-se:

$$\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 1 \Rightarrow c = 1$$

Substituindo os valores encontrados para  $c$  e  $d$  na equação (II), obtém-se:

$$5b - 3c + d = 3 \Rightarrow b = 1$$

Substituindo os valores encontrados para  $b$ ,  $c$  e  $d$  na equação (I), obtém-se:

$$a - 3b + 2c - d = -1 \Rightarrow a = 1$$

Portanto,  $S = \{(1, 1, 1, 1)\}$ .

- d) Considerando o sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \quad (\text{I}) \\ 3y - 5z = 2 \quad (\text{II}) \\ 0z = 1 \quad (\text{III}) \end{cases}$$

Por (III), verificamos que não existe nenhum número real para  $z$  que satisfaça essa equação. Portanto,  $S = \emptyset$ .

- 58.** a) Isolando a variável  $x$  na primeira equação, obtém-se:

$$2x + y = 13 \Rightarrow 2x = 13 - y \Rightarrow x = \frac{13 - y}{2}$$

Na segunda equação do sistema,  $0y = 0$ ,  $y$  pode assumir qualquer valor. Fazendo  $y = \lambda$ , em que  $\lambda$  pode assumir qualquer valor real, obtém-se a solução geral:

$$\text{Portanto, } S = \left\{ \left( \frac{13 - \lambda}{2}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- b) Multiplicando as matrizes  $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ , obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} -4a + 5b = -8 \\ 0a + 0b = 0 \end{cases}$$

A equação  $0a + 0b = 0$  é satisfeita para qualquer  $a$  e  $b$ . Assim, fazendo  $a = \lambda$ , em que  $\lambda$  pode assumir qualquer valor real, obtemos a solução geral.

Da equação  $-4a + 5b = -8$ , temos:  $-4\lambda + 5b = -8 \Rightarrow b = \frac{-8 + 4\lambda}{5}$

$$\text{Portanto, } S = \left\{ \left( \lambda, \frac{-8 + 4\lambda}{5} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 59.** a) Multiplicando as matrizes  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ , obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 8 \\ 0x + 5y + 3z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = -6 \end{cases}$$

Como não existe nenhuma terna  $(x, y, z)$  que satisfaça a equação  $0x + 0y + 0z = -6$ , o sistema é impossível.

Portanto,  $S = \emptyset$ .

- b) Multiplicando as matrizes  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ , obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \quad (\text{I}) \\ 0x + y + z = 0 \quad (\text{II}) \\ 0x + 0y + 2z = 4 \quad (\text{III}) \end{cases}$$

Da equação (III), obtém-se:  $z = 2$ .

Substituindo o valor encontrado para  $z$  na equação (II), obtém-se:

$$y = -2$$

Substituindo os valores encontrados para  $y$  e  $z$  na equação (I), obtém-se:

$$x - 2y + 3z = 3 \Rightarrow x = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 + 3 \Rightarrow x = -7$$

Portanto,  $S = \{(-7, -2, 2)\}$ .

60.  $\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 & (\text{I}) \\ -y + 5z - 4t = 5 & (\text{II}) \\ 6z - t = 2 & (\text{III}) \end{cases}$

Isolando  $z$  na equação (III), obtém-se:

$$6z - t = 2 \Rightarrow z = \frac{t+2}{6}$$

Substituindo a expressão encontrada para  $z$  na equação (II), obtém-se:

$$\begin{aligned} -y + 5z - 4t = 5 &\Rightarrow y = 5\left(\frac{t+2}{6}\right) - 4t - 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{-19t - 20}{6} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões encontradas para  $y$  e  $z$  na equação (I), obtém-se:

$$x + y - 2z + t = 1 \Rightarrow x = -y + 2z - t + 1 \Rightarrow x = -\left(\frac{-19t - 20}{6}\right) + 2\left(\frac{t+2}{6}\right) - t + 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{19t + 20}{6} + \frac{2t + 4}{6} - \frac{6t}{6} + \frac{6}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{15t}{6} + \frac{30}{6} \Rightarrow x = \frac{5t}{2} + 5 \end{aligned}$$

Assim, para cada valor atribuído a  $t$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , obtém-se a solução:

$$S = \left\{ \left( \frac{5t}{2} + 5, \frac{-19t - 20}{6}, \frac{t+2}{6}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

61. Transformando cada sistema de equação linear na forma matricial, obtém-se:

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{-2L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_3 + L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2 + L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_3 + L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Assim, conclui-se que  $t = 4$ . Resolvendo o sistema conclui-se que  $z = 3$ ,  $y = -2$  e  $x = 1$ .

Portanto,  $S = \{(1, -2, 3, 4)\}$ ; sistema possível e determinado.

b) Trocando as duas primeiras linhas de posição, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -2L_1 + L_2 \\ L_3 - L_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pela última linha da matriz, obtém-se que  $0z = 0$ , portanto o sistema é possível e indeterminado. Considerando que  $z = \lambda$ , obtém-se:

$$y = 1 \text{ e } x = 3 - 2\lambda$$

$$\text{Portanto, } S = \{(3 - 2\lambda, 1, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- 62.** Transformando cada sistema de equação linear na forma matricial e, em seguida, escalonando a matriz completa, obtém-se:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{-2L_1 + L_2} \quad \quad \quad$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} 3L_3 + L_2 \\ -4L_3 + L_4 \end{matrix}} \quad \quad \quad$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{-L_3 + L_4} \quad \quad \quad$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right]$$

Portanto, o sistema escalonado é:  $\Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \\ z - 7t = 1 \\ t = 8 \end{cases}$

Logo,  $t = 8$ .

- 63.** Transformando cada sistema de equação linear na forma matricial e, em seguida, escalonando a matriz completa, obtém-se:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 18 \\ 1 & 3 & 5 & -1 & 50 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 64 \\ 3 & 5 & -7 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - 3L_1 \end{matrix}} \quad \quad \quad$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 32 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 28 \\ 0 & 2 & -10 & 1 & -50 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} L_3 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 - L_2 \end{matrix}} \quad \quad \quad$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 12 \\ 0 & 0 & -14 & 2 & -82 \end{array} \right] \xrightarrow{L_4 + L_3} \quad \quad \quad$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 32 \\ 0 & 0 & -14 & \frac{7}{2} & -70 \\ 0 & 0 & -14 & 2 & -82 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - L_4} \quad \quad \quad$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 32 \\ 0 & 0 & -14 & \frac{7}{2} & -70 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 12 \end{array} \right]$$

Então, reescrevendo a matriz na forma de sistema linear, obtém-se:

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ 2y + 4z - t = 32 \\ -14z + \frac{7}{2}t = -70 \\ \frac{3}{2}t = 12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se  $x = 5$ ,  $y = 6$ ,  $z = 7$  e  $t = 8$ .

Portanto,  $S = \{(5, 6, 7, 8)\}$ .

- 64. a)** Considerando  $m = 4$  e substituindo no sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + my = 10' \end{cases} \text{ ao multiplicar a primeira equação por }$$

2, obtém-se:  $\begin{cases} 6x - 4y = 16 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$

Somando as duas equações, obtém-se:

$$8x = 26 \Rightarrow x = \frac{13}{4}$$

Substituindo o valor de  $x$  em qualquer uma das equações, obtém-se  $y = \frac{7}{8}$ .

$$\text{Portanto, } S = \left\{ \left( \frac{13}{4}, \frac{7}{8} \right) \right\}.$$

b]  $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + my = 10 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por  $(-2)$  e a segunda por  $3$ , obtém-se:

$$\begin{cases} -6x + 4y = -16 \\ 6x + 3my = 30 \end{cases}$$

Somando ambas as equações, obtém-se:

$$(4 + 3m)y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{4 + 3m}$$

Para que o sistema seja SPD,  $4 + 3m \neq 0$ ,

$$\text{Logo, } m \neq -\frac{4}{3}.$$

### Atividades complementares

1. Fazendo a correspondência entre a matriz dada e os elementos genéricos de uma matriz, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}$$

Agora vamos verificar, dentre as alternativas, qual levará a uma despesa mínima.

a]  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$

$$(53 + 87 + 36) \cdot 1\,000 = 176\,000$$

Despesa: R\$ 176.000,00

b]  $a_{11}, a_{23}, a_{32}$

$$(53 + 41 + 92) \cdot 1\,000 = 186\,000$$

Despesa: R\$ 186.000,00

c]  $a_{12}, a_{23}, a_{31}$

$$(96 + 41 + 60) \cdot 1\,000 = 197\,000$$

Despesa: R\$ 197.000,00

d]  $a_{13}, a_{22}, a_{31}$

$$(37 + 87 + 60) \cdot 1\,000 = 184\,000$$

Despesa: R\$ 184.000,00

Logo, a despesa mínima será R\$ 176.000,00.

Resposta: alternativa a.

2. Calculando a expressão  $2A - B$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resposta: alternativa b.

3. a] Falsa. A quantidade de produtos  $P_2$  vendidos pela loja  $L_2$  é 10.

- b] Falsa. A quantidade de produtos  $P_1$  vendidos pela loja  $L_3$  é 20.

- c] Falsa. A soma das quantidades de produtos  $P_3$  vendidos pelas três lojas é 39.

- d] Falsa.  $P_1 = 69; P_2 = 33; P_3 = 39$

- e] Verdadeira. A soma das quantidades dos produtos do tipo  $P_1$  e  $P_2$  vendidos na loja  $L_1$  é  $30 + 15 = 45$ .

Resposta: alternativa e.

4. Seja  $C$  o produto entre as matrizes  $A$  e  $B$ , logo:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = 3$$

$$c_{12} = (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 16$$

$$c_{21} = 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 13$$

$$c_{22} = 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{Portanto, } C = \begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$$

Resposta: alternativa a.

5. Calculando os quadrados das matrizes  $A$  e  $B$ , obtém-se:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Com esses valores calcula-se a expressão:

$$\begin{aligned} 2A^2 + 4B^2 &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resposta: alternativa b.

6. Para encontrar o ponto de encontro das bicicletas, é necessário resolver o sistema:

$$\begin{cases} s - 20t = 10 \Rightarrow s = 10 + 20t \\ s + 10t = 70 \Rightarrow s = 70 - 10t \end{cases}$$

As bicicletas se encontram quando estiverem na mesma posição. Igualando as funções horárias:

$$10 + 20t = 70 - 10t \Rightarrow 30t = 60 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

Resposta: alternativa **c**.

7. Como o sanduíche de 250 g possui 500 calorias, então cada grama de sanduíche possui 2 calorias. Analogamente, como a porção de batatas possui 200 g e 560 calorias, cada grama de batata possui 2,8 calorias.

Logo, a expressão algébrica que relaciona corretamente  $x$ ,  $y$  e a quantidade de calorias para a refeição é dada por:

$$2x + 2,8y = 462$$

Resposta: alternativa **a**.

$$P = \frac{102,5}{100} \cdot 92\,250 = 94\,556$$

Depois de 2 anos, a cidade terá aproximadamente 94 556 habitantes.

4. Considerando  $p$  uma página e  $x$  a porcentagem a ser reduzida, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$p \quad 100\%$$

$$\frac{1}{4}p \quad x\%$$

$$x = \frac{\frac{1}{4}p \cdot 100}{p} = 25$$

Portanto, para a página ser reduzida a um quarto, deverá ser digitado 25%.

5. Segundo o enunciado, é solicitada a porcentagem que representa 20% de 30%, ou seja:

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{600}{10\,000} = \frac{6}{100} \text{ ou } 6\%$$

6. Considerando a taxa  $i$  aplicada em 3 anos seguidos:

$$i = (1,05)(1,05)(1,05) = (1,05)^3 = 1,157625$$

Aplicando essa taxa no preço inicial:

$$200 \cdot 1,157625 = 231,53$$

Daqui a 3 anos, a mercadoria custará aproximadamente R\$ 231,53.

7. a] O primeiro trecho da viagem corresponde a 40% de todo o trajeto, ou seja:

$$40\% \text{ de } 800 \text{ km} \Rightarrow \frac{40}{100} \cdot 800 = 320$$

Portanto, a distância percorrida no primeiro trecho é 320 km.

- b] O segundo trecho da viagem corresponde a 55% do restante do trajeto, isto é:

$$55\% \text{ de } (800 - 320) \text{ km}$$

$$\frac{55}{100} \cdot 480 = 264$$

Portanto, a distância percorrida no segundo trecho é 264 km.

- c] A distância percorrida no terceiro trecho é:

$$(800 - 320 - 264) \text{ km} = 216 \text{ km}$$

Se o motorista mantiver uma velocidade média de 90 km/h, o tempo de percurso nesse trecho será de:

$$\frac{216}{90} = 2,4 \Rightarrow 2,4 \text{ h ou } 2\text{h}24 \text{ min}$$

8. Segundo as informações contidas no enunciado, o preço do ar-condicionado com o acréscimo será:

$$\text{Valor total} = 8\,000(1 + 0,08) = 8\,000 \cdot 1,08 = 8\,640$$

Como a parcela é a metade do valor total, cada prestação será de R\$ 4.320,00.

- 9.** Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se:

$$\frac{90}{100}(x+15) = x \Rightarrow 90x + 1\,050 = 100x \Rightarrow x = 135$$

O preço da raquete na loja *B* será R\$ 135,00.

- 10. a)** Não. Supondo o desconto de 15% no pagamento à vista, o valor total será de  $0,85 \cdot 8\,000 = 6\,800$ .

Por outro lado, a aplicação de R\$ 4.000,00, em um mês, no mercado financeiro tem rendimento:  
 $1,25 \cdot 4\,000 = 5\,000$ .

Logo, é mais vantajosa a compra à vista, pois seu custo total será de R\$ 6.800,00; a prazo, o investimento será de R\$ 8.000,00 menos o retorno investido de R\$ 1.000,00, o que resultará em R\$ 7.000,00.

- b]** Considerando o preço à vista com desconto:

$$P_v = 8\,000 - \left(\frac{x}{100}\right) \cdot 8\,000$$

Considerando a diferença entre o preço à vista e a primeira parcela:

$$8\,000 - \left(\frac{x}{100}\right) \cdot 8\,000 - 4\,000$$

Aplicando a taxa de 25% ao mês sobre a diferença:

$$\left(8\,000 - \left(\frac{x}{100}\right) \cdot 8\,000 - 4\,000\right) \cdot 1,25 \Rightarrow \\ \Rightarrow (4\,000 - 80x) \cdot 1,25 \Rightarrow 5\,000 - 100x$$

Para que o valor de  $x$  se torne indiferente, esse investimento deve ser igual ao valor da segunda parcela de R\$ 4.000,00, ou seja:

$$5\,000 - 100x = 4\,000 \Rightarrow 100x = 1\,000 \Rightarrow x = 10$$

- 11. a)** Se um vendedor conseguir obter R\$ 120.000,00 em vendas, ele terá 1% de comissão sobre as vendas mais um bônus de R\$ 600,00 pela meta atingida, ou seja:

$$120\,000 \cdot \frac{1}{100} + 600 = 1800$$

O vendedor receberá R\$ 1.800,00 de comissão.

- b)** Para receber R\$ 3.900,00 de comissão, ele precisará vender mais de R\$ 120.000,00. Portanto, ele terá uma comissão de 1,2% e um bônus de R\$ 900,00. Logo:

$$x \cdot \frac{1,2}{100} + 900 = 3\,900 \Rightarrow \frac{1,2x}{100} = 3\,000 \Rightarrow x = 250\,000$$

O vendedor precisará vender R\$ 250.000,00.

- c)** A comissão máxima recebida pela primeira faixa de bonificação é:  $80\,000 \cdot \frac{0,8}{100} = 640$

A comissão mínima recebida pela segunda faixa de bonificação é:

$$80\,000 \cdot \frac{1}{100} + 600 = 1400$$

Portanto, R\$ 1.000,00 não é um valor válido para a comissão; pois, se ele vender até R\$ 80.000,00, deverá receber R\$ 640,00, e se vender mais do que R\$ 80.000,00, deverá receber, no mínimo, R\$ 1.400,00.

- 12.** Sendo  $x$ , em reais, o preço inicial da mercadoria, conclui-se:  
 $x(1 + 0,18)(1 - 0,05) = x + 302,5 \Rightarrow x(1,18)(0,95) - x = 302,5$

$$1,121x - x = 302,5 \Rightarrow x = \frac{302,5}{0,121} = 2\,500$$

O preço inicial da mercadoria era R\$ 2.500,00.

- 13.** Como o preço de custo foi de R\$ 250,00 e o lucro foi estipulado em 18%, então o preço de venda será:

$$250,00 + 18\% \cdot 250,00 = 250 + 45 = 295$$

O preço de venda deve ser R\$ 295,00.

- 14.** O preço de custo da mercadoria foi R\$ 860,00. Para que o lucro de revenda dela seja de 20%:

$$860 \cdot (1 + 0,2) = 860 \cdot 1,2 = 1\,032$$

A mercadoria deve ser vendida por R\$ 1.032,00.

- 15.** O preço de custo de dez sacas de batatas foi R\$ 210,00. Então, cada saca custou R\$ 21,00.

Seja  $x$  o preço de venda. Então:

$$\frac{x - 21}{x} = 0,20 \Rightarrow 0,20x = x - 21 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,8x = 21 \Rightarrow x = 26,25$$

Cada saca deverá ser revendida por R\$ 26,25.

- 16.** Como o preço com desconto de 17% era R\$ 478,08, o preço de etiqueta era:

$$x - \frac{17}{100}x = 478,08 \Rightarrow 83x = 47\,808 \Rightarrow x = 576$$

Como a coleção é composta de 18 volumes, então, cada volume custa:

$$\frac{576}{18} = 32 \Rightarrow \text{R\$ } 32,00$$

Resposta: alternativa **e**.

- 17.** Segundo o enunciado, pode-se concluir que:

$$39 \cdot (1 - 0,2) = 1,3C$$

O primeiro membro refere-se ao valor sem os impostos e o segundo, ao valor equivalente a um lucro de 30% sobre o valor de custo. Logo:

$$C = \frac{39 \cdot 0,8}{1,3} \Rightarrow C = 24$$

O preço de custo é R\$ 24,00.

- 18.** Segundo o enunciado, pode-se concluir que:

$$240(1 - 0,2) = C \Rightarrow C = 192$$

O preço de custo é R\$ 192,00.

- 19.** Sejam  $V$  o preço de venda e  $C$  o preço de custo, ambos em

reais:  $\begin{cases} V - C = 2\,000 \\ 0,9V - C = 0,2C \end{cases}$

Resolvendo o sistema:  $C = 6\,000$ .

O preço de custo é R\$ 6.000,00.

- 20.** Segundo os dados fornecidos pelo enunciado, pode-se concluir:

$$150 = 500 \cdot i \cdot 10$$

$$5000i = 150$$

$$i = \frac{150}{5000} = \frac{30}{1000} = 0,03 \text{ ou } 3\% \text{ a. m.}$$

- 21.** A situação descreve uma suposta aplicação, em regime de juro simples, de 1,5% ao mês, em que, durante um ano, o investidor fará depósitos mensais de R\$ 200,00.

Sabendo que, como a aplicação é simples e sempre de 1,5%, então o juro mensal será de  $R\$ 200,00 \cdot 0,015 = R\$ 3,00$ .

Assim, a primeira aplicação, depois de um ano, terá o rendimento de:

$$200 + 12 \cdot 3 = 236$$

A segunda aplicação terá um período de 11 meses, ou seja:

$$200 + 11 \cdot 3 = 233$$

A terceira aplicação terá um período de 10 meses, ou seja:

$$200 + 10 \cdot 3 = 230$$

E assim por diante. A última parcela terá um acréscimo de R\$ 3,00, e o montante será de R\$ 203,00.

Então o montante, ou seja, a soma do valor total será de:  $236 + 233 + 230 + \dots + 206 + 203$

Adicionando a primeira parcela à última, a segunda parcela à penúltima e assim por diante, obtém-se seis valores iguais a 439. Então, o montante será:

$$M = 6 \cdot 439 = 2634$$

O montante após um ano será de R\$ 2.634,00.

- 22.** a) Segundo o enunciado, entre 10 e 11 horas, o preço do melão foi reduzido em 20%, ou seja:

$$2(1 - 0,2) = 1,60$$

O melão custava R\$ 1,60.

b)  $x$  = melões vendidos entre 10 e 11 horas

$y$  = melões vendidos após as 11 horas

$z$  = melões vendidos antes das 10 horas

$$z = 300 - (x + y)$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{6} \cdot 300 \Rightarrow x + y = 250 \\ 1,6x + 1,3y + 2z = 461 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtém-se que  $z = 50$ . Resolvendo o sistema:

$$x = 120 \text{ e } y = 130$$

Antes das 10 horas, foram vendidos 50 melões; entre 10 e 11 horas, foram vendidos 120 melões; depois das 11 horas, foram vendidos 130 melões.

- 23.** Considerando as informações contidas no enunciado e que 3 meses e 20 dias equivalem a 110 dias, conclui-se:

$$440 = 48000 \cdot i \cdot 110 \Rightarrow 440 = 48000 \cdot 110 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{440}{48000 \cdot 110} = \frac{4}{48000} = \frac{1}{12000} \text{ a.d.}$$

Como a taxa deve ser mensal:

$$\frac{1}{12000} \cdot 30 = \frac{1}{400} \text{ ou } 0,25\% \text{ a.m.}$$

- 24.** Calculando o valor da entrada:

$$20\% \cdot 3000,00 = 0,2 \cdot 3000,00 = 600,00$$

Valor financiado:  $3000 - 600 = 2400$

Portanto, considerando a fórmula do montante

$$M = C(1 + i \cdot t):$$

$$2760 = 2400(1 + i \cdot 5) \Rightarrow i = \frac{2760 - 2400}{12000} = 0,03 \text{ ou } 3\% \text{ a.m.}$$

- 25.** Segundo as informações contidas no enunciado, pode-se concluir que:

a]  $J = 7000 \cdot 2,5\% \cdot 4 \Rightarrow J = 7000 \cdot 0,1 = 700 \Rightarrow J = R\$ 700,00$

b]  $J = 7000 \cdot 3\% \cdot 12 \Rightarrow J = 7000 \cdot 0,36 = 2520,00 \Rightarrow J = R\$ 2.520,00$

c] Como a taxa rende ao dia, o tempo também deve estar nessa unidade. Logo 3 meses equivalem a 90 dias. Portanto:

$$J = 7000 \cdot 0,15\% \cdot 90 \Rightarrow J = 7000 \cdot 0,135 = R\$ 945,00$$

- 26.** O período indicado no enunciado é de 2 meses. Logo:

$$J = 1800,00 \cdot 0,027 \cdot 2 \Rightarrow J = R\$ 97,20$$

- 27.** Considerando as informações contidas no enunciado:

$$6000 = C \cdot 0,06 \cdot 4 \Rightarrow 6000 = C \cdot 0,24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{6000}{0,24} = 25000$$

O capital é de R\$ 25.000,00.

- 28.** Segundo as informações do enunciado, para calcular o juro no período determinado:

$$J = 12000 \cdot 1,5\% \cdot 9 \Rightarrow J = 12000 \cdot 0,135 = 1620$$

Logo, o montante será:

$$M = C + J \Rightarrow M = 12000 + 1620 = 13620,00$$

O montante será de R\$ 13.620,00.

- 29.** Segundo as informações do enunciado, para calcular o juro no período determinado, deve-se:

$$J = M - C \Rightarrow J = 9200 - 8000 = 1200$$

Logo:

$$1200 = 8000 \cdot i \cdot 6 \Rightarrow 1200 = 48000 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{1200}{48000} = 0,025 \text{ ou } 2,5\% \text{ a.m.}$$

- 30.** Considerando as informações contidas no enunciado:

$$M = 200000(1,007)^6 = 200000 \cdot 1,042742 = 208548,38 \Rightarrow M = R\$ 208.548,38$$

- 31.** Considerando as informações contidas no enunciado:

$$M = 200000(1,006)^8 = 200000 \cdot 1,0490 = 20980 \Rightarrow M = R\$ 20.980,00$$

- 32.** Considerando as informações contidas no enunciado: a taxa é de 20% a.a., então, semestralmente, serão 10%; o período é  $n = 7$ , pois está capitalizado semestralmente. Logo:

$$M = 10000(1,10)^7 = 10000 \cdot 1,9487171 = 19487,17 \Rightarrow M = R\$ 19.487,17$$

- 33.** Considerando as informações contidas no enunciado:  
 $8\ 000 = C(1,02)^6 \Rightarrow 8\ 000 = C \cdot 1,126162419 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow C = R\$ 7.103,77$
- 34.** Segundo as alternativas do enunciado, devem-se considerar dois casos: se João esperar 2 meses ou esperar 3 meses. Logo:  
 Caso João espere dois meses:  
 $M = 20\ 000(1,02)^2 = 20\ 000 \cdot 1,0404 = 20\ 808$   
 Ou seja, ainda faltarão R\$ 192,00.  
 Se ele esperar três meses:  
 $M = 20\ 000(1,02)^3 = 20\ 000 \cdot 1,061208 = 21\ 224,16$   
 Ou seja, sobrarão R\$ 224,16.  
 Resposta: alternativa **c**.
- 35.** 01) Verdadeira. O preço de custo da televisão foi:  
 $75\% \text{ --- } 300$   
 $100\% \text{ --- } P_{\text{custo}}$   
 $P_{\text{custo}} = \frac{300 \cdot 100}{75} \Rightarrow P_{\text{custo}} = 400$
- 02) Verdadeira. O preço de custo do fogão foi:  
 $120\% \text{ --- } 300$   
 $100\% \text{ --- } P_{\text{custo}}$   
 $P_{\text{custo}} = \frac{300 \cdot 100}{120} \Rightarrow P_{\text{custo}} = 250$
- 04) Verdadeira. Os dois objetos custaram, juntos:  
 $R\$ 400,00 + R\$ 250,00 = R\$ 650,00$
- 08) Verdadeira. Após a venda, Pedro teve: Venda – Custo =  $R\$ 600,00 - R\$ 650,00 = -R\$ 50,00$  (prejuízo de R\$ 50,00)  
 Resposta:  $01 + 02 + 04 + 08 = 15$
- 36.** Considerando as informações contidas no enunciado:  
 $M = 40\ 000(1,16)^2 = 40\ 000 \cdot 1,3456 = 53\ 824$   
 $J = M - C \Rightarrow J = 53\ 824 - 40\ 000 = 13\ 824$   
 Os juros obtidos foram de R\$ 13.824,00.
- 37.** Considerando as informações contidas no enunciado para cada item:  
 a)  $M = 4\ 000(1,04)^3 = 4\ 000 \cdot 1,124864 = 4\ 499,46 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow M = R\$ 4.499,46$   
 b)  $M = 4\ 000(1,02)^{120} = 4\ 000 \cdot 10,765163 = 43\ 060,65 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow M = R\$ 43.060,65$   
 c)  $M = 4\ 000(1,0002)^{450} = 4\ 000 \cdot 1,09416 = 4\ 376,64 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow M = R\$ 4.376,64$
- 38.** Considerando as informações contidas no enunciado e, também, que o regime é de juro composto:  
 $M = 5\ 000(1,03)^5 = 5\ 000 \cdot 1,15927 = 5\ 796,35$   
 O montante será R\$ 5.796,35.  
 Os juros obtidos na operação serão:  
 $J = M - C \Rightarrow J = 5\ 796,35 - 5\ 000 = 796,35 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow J = R\$ 796,35$
- 39.** Considerando a aplicação no regime de juro simples:  
 $M = C(1 + 1 \cdot t) \Rightarrow M = C(1 + 0,36) \Rightarrow M = 1,36C$

- Considerando a aplicação no regime de juro composto:  
 $M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = C(1 + 0,06)^6 = 1,1418C$   
 Comparando ambos os resultados:  
 $1,418C = 1,36C + 2\ 633,36 \Rightarrow 0,058C = 2\ 633,36 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow C = 45\ 402,75$   
 Como o capital foi aplicado em regime de juro simples:  
 $J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 45\ 402,75 \cdot 0,12 \cdot 3 = 45\ 402,75 \cdot 0,36 = 16\ 345$   
 João recebeu R\$ 16.345,00 de juros.
- 40.** Resposta pessoal. Sugestão de problema: Por motivos financeiros, Carla deixou de pagar a fatura de seu cartão de crédito. Sabendo que a fatura do cartão fechou em R\$ 2.000,00 e que não foi incluído nenhum tipo de multa, qual foi o valor da fatura depois de 3 meses?  
 Resolução:  
 De acordo com a tabela, a taxa do cartão de crédito é 286,9% ao ano ou aproximadamente 23,87% ao mês.  
 Logo:  
 $M = 2\ 000(1,2387)^3 = 2\ 000 \cdot 1,900 = 3\ 800,00$   
 Depois de 3 meses essa fatura será de aproximadamente R\$ 3.800,00 ou quase o dobro do valor da fatura inicial.
- 41.** Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se que o montante será:  
 $M = 18\ 000 + 6\ 390 = 24\ 390$   
 Logo, o tempo necessário será:  
 $24\ 390 = 18\ 000(1,028)^x \Rightarrow 1,028^x = \frac{24\ 390}{18\ 000} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 1,028^x = 1,355 \Rightarrow x \log 1,028 = \log 1,355 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \frac{\log 1,355}{\log 1,028} \approx 11$   
 Portanto, o prazo é 12 meses.
- 42.** I) Falsa, pois:  
 $P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t \Rightarrow P(3) = 50\ 000 \cdot (1 + 0,02)^3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow P(3) \approx 53\ 060 \Rightarrow P(3) = 53\ 060 \text{ habitantes}$
- II) Falsa, pois:  
 $P_x(2) = 19\ 600 \cdot (1 + 0,02)^2 \Rightarrow P_x(2) = 20\ 392 \text{ habitantes}$   
 $P_y(2) = 28\ 900 \cdot (1 + 0,05)^2 \Rightarrow P_y(2) \approx 31\ 862 \text{ habitantes}$   
 Logo:  $\frac{P_x(2)}{P_y(2)} = \frac{20\ 392}{31\ 862} \approx 0,6 \text{ ou } \frac{3}{5}$
- III) Verdadeira, pois:  
 $P_x(2) = 129\ 600 \cdot (1 + 0,05)^2 \Rightarrow P_x(2) = 142\ 884 \text{ habitantes}$   
 $P_y(2) = 12\ 2500 \cdot (1 + 0,08)^2 \Rightarrow P_y(2) = 142\ 884 \text{ habitantes}$
- IV) Falsa, pois:  
 $P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t \Rightarrow \frac{P(T)}{P(0)} = (1 + i)^t \Rightarrow t \cdot \log(1 + i) =$   
 $= \log \frac{P(t)}{P(0)} \Rightarrow \log(1 + i) = \frac{\log P(t) - \log P(0)}{t} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow i = 10^{\frac{\log P(t) - \log P(0)}{t}} - 1$
- V) Verdadeira, pois:  
 Calculando  $P(0)$ :

$$44\,100 = P(0) \cdot (1 + 0,05)^5 \Rightarrow P(0) = \frac{44\,100}{(1,05)^5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(0) \approx 34\,553$  habitantes

Para dois anos, deve-se fazer  $t = 3$ . Logo:

$$P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t \Rightarrow P(3) = 34\,553 \cdot (1 + 0,05)^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow P(3) = 34\,553 \cdot (1,05)^3$$

$P(3) \approx 40\,000$  habitantes.

Resposta: F, F, V, F, V.

**43.** Considerando as informações contidas no enunciado:

a] Para ter um capital  $x$  duplicado:

$$2x = x(1,05)^y \Rightarrow 2 = (1,05)^y \Rightarrow \log 2 = y \log 1,05 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{\log 2}{\log 1,05} = 14,20$$

Como 0,20 de 30 dias equivale a 6 dias, serão necessários 14 meses e 6 dias.

b] Para ter um capital  $x$  triplicado:

$$3x = x(1,05)^y \Rightarrow \log 3 = y \cdot \log 1,05 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{\log 3}{\log 1,05} = 22,51$$

Como 0,51 de 30 dias equivale a aproximadamente 16 dias, serão necessários 22 meses e 16 dias.

**44.** Considerando as informações contidas no enunciado:

a]  $85\,400 = 80\,000(1,022)^t \Rightarrow (1,022)^t = 1,0675 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log(1,0675)}{\log(1,022)} \approx 3$$

Aproximadamente 3 meses.

b]  $134\,868,80 = 80\,000(1,022)^t \Rightarrow (1,022)^t = 1,68586 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\log(1,68586)}{\log(1,022)} = 24$$

Portanto, 2 anos.

**45.** Considerando as informações contidas no enunciado, pode-se resolver o problema utilizando radiciação:

$$36\,087 = 24\,000(1 + x)^7 \Rightarrow (1 + x)^7 = \frac{36\,087}{24\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + x)^7 = 1,503625 \Rightarrow 1 + x = \sqrt[7]{1,502625} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1,06 - 1 \Rightarrow x = 0,06 \text{ ou } 6\% \text{ a.m.}$$

**46.** Considerando as informações do enunciado, obtém-se os seguintes dados:

$$C = 20\,000,00; M = 27\,220,00; t = 12 \text{ meses}$$

Substituindo-se os valores:

$$27\,220 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{12}$$

$$(1 + i)^{12} = \frac{27\,220}{20\,000} \Rightarrow (1 + i)^{12} = 1,361 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + i = 1,361^{\frac{1}{12}} \Rightarrow 1 + i = 1,026 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 2,6\% \text{ ao mês}$$

A taxa anual será:  $2,6\% \cdot 12 \approx 31,2\%$

Resposta: alternativa **b**.

**47. a]** Considerando as proporções fornecidas no enunciado:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow I_2 = \frac{5I_1}{4}$$

$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{\frac{5I_1}{4}}{I_3} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{I_1}{I_3} = \frac{2}{5} \Rightarrow I_3 = \frac{5I_1}{2}$$

Como  $I_1 + I_2 + I_3 = 57\,000$ , então:

$$I_1 + \frac{5I_1}{4} + \frac{5I_1}{2} = 57\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4I_1 + 5I_1 + 10I_1}{4} = 57\,000 \Rightarrow I_1 = 12\,000$$

Logo:

$$I_2 = \frac{5I_1}{4} = 15\,000$$

$$I_3 = \frac{5I_1}{2} = 30\,000$$

Resposta: R\$ 12.000,00; R\$ 15.000,00; R\$ 30.000,00.

b] Segundo a fórmula do montante  $M = C(1 + i)^t$ , obtém-se:

$$12\,738 = 12\,000(1 + 0,01)^t$$

$$\frac{12\,738}{12\,000} = 1,01^t \Rightarrow 1,06 = 1,01^t \Rightarrow \log 1,06 = 1,01^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,0253 = t \cdot 0,0043 \Rightarrow t \approx 6$$

Aproximadamente, 6 meses.

c]  $M = C(1 + i \cdot t) \Rightarrow 25\,800 = 15\,000(1 + i \cdot 24) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{25\,800}{15\,000} = 1 + 24i \Rightarrow 1,72 = 1 + 24i \Rightarrow 0,72 = -24i \Rightarrow i = 0,03 \text{ ou } 3\% \text{ a.m.}$$

## Atividades complementares

1. De acordo com as informações do enunciado, o gasto do hospital com doenças relacionadas ao uso do cigarro foi de R\$ 500.000,00 e, no próximo ano, sofrerá um aumento de 15%, logo:

$$500\,000 \cdot 0,15 = 75\,000$$

O aumento será de R\$ 75.000,00.

Resposta: alternativa **a**.

2. Considerando as cotas do PIB de 2015 a 2018:

$$1,02 \cdot 0,95 \cdot 1,03 = 0,998$$

Ou seja, um decrescimento de aproximadamente 0,2%.

Resposta: alternativa **a**.

3. Considerando que Ricardo pagou  $x$  pela bicicleta, pode-se afirmar que ele vendeu por  $1,2x$ , pois conseguiu 20% a mais. Como o lucro foi de R\$ 150,00, então:

$$1,2x - x = 150 \Rightarrow 0,2x = 150 \Rightarrow x = 750$$

Logo, o preço que Ricardo recebeu pela bicicleta é:

$$750 \cdot 1,2 = 900$$

Ricardo vendeu a bicicleta por R\$ 900,00.

Resposta: alternativa **e**.

- 4.** Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se:
- $$3\ 600 = 8\ 000 \cdot 0,15 \cdot t \Rightarrow t = \frac{3\ 600}{8\ 000 \cdot 0,15} = 3$$
- Resposta: alternativa **b**.
- 5.** Considerando as informações do enunciado:
- $$\begin{aligned} J &= [8\ 500 (1 + 0,0078)^{12} - 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow J = 8\ 500 [1,0977217 - 1] \Rightarrow \\ &\Rightarrow J = 8\ 500 \cdot 0,0977217 \Rightarrow J = 830,63 \end{aligned}$$
- Resposta: alternativa **c**.
- 6.** Primeira aplicação do sr. Paulo:
- $$M_1 = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow M_1 = C + 0,12C = 1,12C$$
- Segunda aplicação:
- $$M_2 = 1,12C + 1,12C \cdot 3\% \cdot 9 \Rightarrow M_2 = 1,12C + 1,12C \cdot 0,27 = 1,4224C$$
- Considerando o resultado anterior em uma única aplicação de 12 meses:
- $$1,4224C = C + C \cdot i \cdot 12 \Rightarrow 1,4224 = 1 + 12 \cdot i \Rightarrow i = \frac{0,4224}{12} = 0,0352 \text{ ou } 3,52\% \text{ a.m.}$$
- Resposta: alternativa **d**.
- 7.** O preço  $P$  à vista tem um desconto de 10% sobre o preço do produto, ou seja, à vista, o produto sai por 0,9 $P$ . Como será dada a metade da entrada, temos que o valor a ser financiado será 0,4 $P$ . Logo:
- $$0,5P = 0,4P(1 + i \cdot 1) \Rightarrow 0,1P = 0,4P \cdot i \Rightarrow i = \frac{0,1P}{0,4P} = 0,25$$
- ou 25% a.m.
- Resposta: alternativa **a**.
- 8.** Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se:  $i = 6\%$  a.m.;  $M = 1\ 960$ ;  $t = 1$  ano e 4 meses ou 16 meses. Logo:
- $$\begin{aligned} M &= C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow 1\ 960 = C \cdot (1 + 0,06 \cdot 16) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1,96 \cdot C = 1\ 960 \Rightarrow C = 1\ 000 \end{aligned}$$
- Resposta: alternativa **a**.
- 9.** A entrada para a compra do veículo corresponde a 60% de 30 000, ou seja, 18 000 ( $0,6 \cdot 30\ 000 = 18\ 000$ ). O restante, R\$ 12.000,00, será acrescido de 2% de juros durante 5 meses:
- $$J = 0,02 \cdot 5 \Rightarrow J = 10\%$$
- Logo:
- $$M = 12\ 000 + 0,10 \cdot 12\ 000 = 13\ 200$$
- Então, o valor de cada parcela será:  $p = \frac{13\ 200}{5} \Rightarrow p = 2\ 640$
- Resposta: alternativa **c**.
- 10.** Como Eudes gastou 30% de uma quantia que recebeu, então sobraram 70% para ser aplicado. Como a quantia recebida foi de R\$ 150.000,00, então:
- $$C = 70\% \text{ de } 150\ 000 = 105\ 000$$
- Para que o montante seja de 136 500, Eudes receberá de juros:

- $J = 136\ 500 - 105\ 000 \Rightarrow J = 31\ 500$   
Como a taxa é de 20% a.a., Eudes deve aguardar:  
 $J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 31\ 500 = 105\ 000 \cdot 0,2 \cdot t \Rightarrow t = 1,5$   
Portanto, o tempo será de 1 ano e 6 meses.  
Resposta: alternativa **b**.
- 11.** Analisando os valores das parcelas pagas ao:
- amigo: 1 000, 1 100, 1 200, 1 300 – (os valores representam uma progressão aritmética de razão 100);  
banco: 1 000, 1 100, 1 210, 1 331 – (os valores representam uma progressão geométrica de razão 1,1).  
Resposta: alternativa **d**.
- 12.** No início do 1º mês,  
 $C_1 = 10\ 000$  e  $i = 0,01$ . Daí:  $M_1 = 10\ 000 \cdot (1 + 0,01) \Rightarrow M_1 = 10\ 100$   
No final do 1º mês, após a doação:  
 $M_2 = 10\ 100 - 100 \Rightarrow M_2 = 10\ 000$   
No início do 2º mês,  $C_2 = C_1 = 10\ 000$ ,  $i = 0,01$  e  $M_3 = M_2 = 1\ 000$ . Logo, no final do 2º mês:  $M_4 = M_1 = 10\ 100$   
Não havendo doação,  $M_4 = 10\ 100$  que, aplicado, vai gerar:  
 $M_5 = 10\ 100 \cdot (1,01) \Rightarrow M_5 = 10\ 201$   
No final do 3º mês, haverá doação, então:  
 $M_6 = 10\ 201 - 100 \Rightarrow M_6 = 10\ 101$   
Resposta: alternativa **b**.
- 13.** Após 3 anos de uso, o preço do automóvel é dado por  $V(3) = V_0 \cdot (0,8)^3 = 0,512 \cdot V_0 = 51,2\% \cdot V_0$ . Assim, decorridos 3 anos, temos que o valor do automóvel é 51,2% do valor inicial, o que mostra uma desvalorização de 48,8% ou, aproximadamente 49%.  
Resposta: alternativa **c**.
- 14.** Considerando as informações contidas no enunciado, conclui-se:  $A = 1\ 370$ ;  $i = 25\%$  a.a. e  $M = 480$ . Substituindo na expressão dada, podemos encontrar  $n$ . Assim:
- $$\begin{aligned} M &= A \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 5\ 480 = 1\ 370 \cdot (1 + 0,25)^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5\ 480}{1\ 370} = 1,25^n \Rightarrow 1,25^n = 4 \end{aligned}$$
- Aplicando o logaritmo nos dois membros:  
 $\log 1,25^n = \log 4 \Rightarrow n \cdot \log 1,25 = \log 4 \Rightarrow$
- $$\Rightarrow n \cdot \log \frac{125}{100} = \log^2 \Rightarrow n(\log 125 - \log 100) = 2 \log 2 \Rightarrow$$
- $$\Rightarrow n(3 \log 5 - 2) = 2 \log 2 \Rightarrow$$
- $$\Rightarrow n[3(\log 10 - \log 2) - 2] = 2 \log 2 \Rightarrow$$
- $$\Rightarrow n[3(1 - \log 2) - 2] = 2 \log 2 \Rightarrow$$
- $$\Rightarrow n = \frac{2 \log 2}{1 - 3 \log 2} \Rightarrow n = \frac{2 \cdot 0,30}{1 - 3 \cdot 0,30} \Rightarrow n = 6$$
- Resposta: alternativa **a**.
- 15.** De acordo com as informações do enunciado, o custo de produção deve ser considerado como:  
 $C(x) = 0,4 \cdot (3,8x) + 570 \Rightarrow C(x) = 1,52x + 570$ . Para que a receita seja maior do que ou igual ao custo:  
 $R(x) \geq C(x) \Rightarrow 3,8x \geq 1,52x + 570 \Rightarrow x \geq 250$

Portanto, o número mínimo de tubos que devem ser vendidos é 250, que pertence ao intervalo [248; 260].

Resposta: alternativa **b**.

- 16.** Considerando as informações contidas no enunciado:

$$M = 15\ 000(1,02)^{10} = 15\ 000(1,02^5)^2 = 15\ 000(1,1)^2 = \\ = 15\ 000 \cdot 1,21 = 18\ 150,00$$

Resposta: alternativa **b**.

- 17.** Analisando a situação mês a mês:

1º mês: depósito de R\$ 2.300,00

2º mês: rendimento dado por  $M = 2\ 300(1,02) = 2\ 346$

Depósito de R\$ 2.300,00

Saldo no 2º mês = R\$ 4.646,00

3º mês: rendimento dado por  $M = 4\ 646(1,02) = 4\ 738,92$

Depósito de R\$ 2.300,00

Saldo no 3º mês = R\$ 7.038,92

Resposta: alternativa **c**.

- 18.** César aplicou R\$ 10.000,00 a uma taxa de juro composto igual a  $i$ . Em reais, após um ano, o montante da aplicação será  $10\ 000 \cdot (1 + i)$ .

Depois de sacar R\$ 7.000,00, o restante permanece aplicado, ou seja:

$$10\ 000 \cdot (1 + i) - 7\ 000 = 3\ 000 + 10\ 000i$$

No ano seguinte, o montante dessa aplicação é:

$$(3\ 000 + 10\ 000i)(1 + i) = 6\ 000$$

Portanto:

$$(3 + 10i)(1 + i) = 6 \Rightarrow 10i^2 + 13i - 3 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtém-se a raiz  $i = 0,2$ . A raiz negativa deve ser desconsiderada, pois  $i > 0$ .

Dessa forma:  $(4i - 1)^2 = (4 \cdot 0,2 - 1)^2 = 0,04$

Resposta: alternativa **d**.

- 19.** Pelo enunciado, sabemos que depois de um investimento de 2 anos, o montante era de R\$ 2.012,85, e, depois de 3 anos, era de R\$ 2.314,77. Portanto, não se sabe o capital investido nem a taxa anual da aplicação.

Entretanto, utilizando-se essas informações, é possível organizar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\ 314,77 = C(1+i)^3 \\ 2\ 012,85 = C(1+i)^2 \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação pela segunda:

$$\begin{cases} 2\ 314,77 = C(1+i)^3 \\ 2\ 012,85 = C(1+i)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2\ 314,77}{2\ 012,85} = \frac{C(1+i)^3}{C(1+i)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1+i = \frac{2\ 317,77}{2\ 012,85} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i \approx 1,15 - 1 = 0,15$$

Então, substituindo a taxa na segunda equação:

$$2\ 012,85 = C(1 + 0,15)^2 \Rightarrow 2\ 012,85 = C \cdot 1,3225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\ 012,85}{1,3225} \approx 1522$$

Resposta: alternativa **c**.

## Capítulo 3 · Matemática financeira

### Atividades

- 1.** a] A primeira prestação é mais alta no SAC. Resposta pessoal. Espera-se, com a segunda questão, problematizar os fatores que estão relacionados quando precisamos tomar uma decisão como a de escolher o sistema de amortização em um empréstimo ou financiamento. Embora na situação hipotética estejamos considerando a mesma taxa de juro e o mesmo período, o que normalmente não acontece na realidade, a ideia é a de os estudantes terem uma situação mais simplificada para fazer comparações.

- b] Resposta possível: Nas primeiras prestações, o valor amortizado no SAC é maior do que no Sistema Price. Sim. Nas planilhas que foram construídas pelos estudantes, é possível observar com mais detalhes os pontos destacados, podendo inclusive adicionar todos os valores de juro, dispostos nas colunas **D** e **J** da resolução sugerida na seção anterior. Por exemplo, ao digitar, na célula **D79**, “=soma(D6:D78)” e pressionar **Enter**; e, na célula **J79**, “=soma(J6:J78)”, e pressionar **Enter**; é possível comparar os valores.

- 2.** a] Para calcular o valor amortizado, basta dividir o valor financiado pelo número de prestações, nesse caso:

$$\frac{25\ 000}{8} = 3125$$

Logo, a amortização esperada é de R\$ 3.125,00.

- b] Para calcular o valor amortizado, primeiro deve-se subtrair a entrada do valor total:

$$40\ 000 - 12\ 000 = 28\ 000$$

Depois, dividir o restante do valor financiado pelo número de prestações, nesse caso:

$$\frac{28\ 000}{10} = 2\ 800$$

Logo, a amortização esperada é de R\$ 2.800,00

- 3.** a] Como a entrada é 25% do valor, considera-se então que o valor financiado será 75% do total:

$$75\ 000 : \frac{75}{100} = 56\ 250$$

O valor a ser financiado é R\$ 56.250,00.

- b] Sugere-se que todo o cálculo seja feito na calculadora, utilizando a fórmula:

$$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

Para o capital (**V**), considera-se o valor encontrado no item **a**, desconsiderando a entrada. Para a taxa (**i**), consideramos 2% a.m. ou 0,02. E para o tempo (**n**), 48 meses. Substituindo os valores:

$$P = \frac{56\ 250(1+0,02)^{48} \cdot 0,02}{(1+0,02)^{48} - 1} \Rightarrow P = 1\ 833,85$$

Logo, a parcela será de R\$ 1.833,85.

c] Dividimos o valor financiado pelo número de prestações, nesse caso:  $\frac{56\,250}{48} = 1\,171,875$

Logo, a amortização esperada é de R\$ 1.171,88.

d] Para essa atividade, devem-se utilizar as fórmulas de amortização Price e SAC e lançá-las na planilha, conforme orientação no Livro do estudante. O estudante deve atentar às posições na planilha, bem como aos parênteses no lugar correto. Sistema Price: R\$ 31.774,96; SAC: R\$ 27.562,50.

4. Do enunciado, pode-se concluir que o valor do capital é R\$ 1.700,00 ( $2\,100 - 400$ ), o valor da taxa é 4% e o valor do prazo financiado é 10 meses.

Para calcular o valor de cada parcela, utiliza-se a fórmula:

$$P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow P = \frac{1700(1+0,04)^{10} \cdot 0,04}{(1+0,04)^{10} - 1} = 209,59$$

Resposta: alternativa **c**.

5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes construam o quadro em um software gratuito e comparem com os colegas as possíveis soluções. Uma sugestão é:

Descrição	Receita	Despesas	Despesas previstas – próximo mês	Despesas realizadas – próximo mês
Aposentadoria	R\$ 2.258,00			
Salário	R\$ 1.725,00			
Conta de água		R\$ 78,00	R\$ 78,00	<b>R\$ 98,00</b>
Conta de luz		R\$ 145,60	R\$ 145,60	R\$ 145,60
Telefone		R\$ 289,90	R\$ 289,90	R\$ 289,90
Conta de gás		R\$ 91,50	R\$ 91,50	<b>R\$ 101,50</b>
Faculdade		R\$ 1.098,00	R\$ 1.098,00	R\$ 1.098,00
Transporte		R\$ 480,00	R\$ 480,00	R\$ 480,00
Supermercado		R\$ 965,00	<b>R\$ 810,00</b>	<b>R\$ 810,00</b>
Outros gastos		R\$ 430,00	R\$ 430,00	<b>R\$ 450,00</b>
<b>Total</b>	R\$ 3.983,00	R\$ 3.578,00	R\$ 3.423,00	R\$ 3.473,00
<b>Saldo</b>		R\$ 405,00	<b>R\$ 560</b>	<b>R\$ 510,00</b>

6. Resposta pessoal. Esses são alguns índices que podem ser resultado da pesquisa dos estudantes: IGP (Índice Geral de Preços); IPA (Índice de Preços no Atacado); INPC (Índice Nacional de Preços ao Consumidor); INCC (Índice Nacional do Custo da Construção); CUB (Custo Unitário Básico); IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado).

7. a] De acordo com o gráfico, pode-se dizer que a curva atinge o pico por volta de dezembro de 2019 com o valor de aproximadamente 4,3%.  
 b] Julho e outubro de 2019; janeiro, abril e julho de 2020.  
 c] Resposta pessoal. Uma resposta possível: Nos períodos considerados, o índice inflacionário teve um pico entre novembro e dezembro de 2019 e atingiu o menor valor entre maio e junho de 2020.
8. Resposta pessoal. Sugestão: os estudantes podem pesquisar serviços básicos relacionados a uma família de dois adultos com um filho e uma família sem filhos e realizar a comparação do impacto no custo de vida dessas duas famílias.

## Atividades complementares

**1.** Julgando cada afirmação, conclui-se:

- Incorrecta, pois as amortizações são constantes, mas as parcelas são decrescentes.
- Correta, pois a primeira parte da prestação é composta dos juros, dessa forma, a amortização aumenta, conforme os juros caem.
- Incorrecta, pois, no sistema Price, as parcelas se mantêm constantes, enquanto no SAC elas diminuem com o passar do tempo.

Resposta: alternativa **b**.

**2.** Do enunciado, conclui-se que o valor do capital é R\$ 1.000,00 ( $1350 - 350$ ), o valor da taxa de juros é 3%

$$\text{e o prazo é de 5 meses. Então, como } P = V \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}.$$

$$P = \frac{1000(1+0,03)^5 \cdot 0,03}{(1+0,03)^5 - 1} \Rightarrow P = 217,50$$

Portanto, maior do que R\$ 215,00 e menor do que R\$ 220,00.

Resposta: alternativa **d**.

**3.** Avaliando cada afirmação, conclui-se que:

- Correta: visto que a inflação depende de vários índices de preços.
- Incorrecta, visto que o aumento dos preços não é, necessariamente, incontrolável.
- Incorrecta, pois a inflação não é medida somente pelos gastos, ela também depende de outros fatores.
- Incorrecta, pois o aumento da massa salarial causa deflação.
- Incorrecta, pois aumento do crédito não é definição da inflação, é a causa.

Resposta: alternativa **a**.

**4.** Foram feitas quatro operações:

- a primeira assim que ele passa a primeira vez por  $V_i$ , depois que ele vende a metade;
- depois que ele passa por  $V_m$ , quando investiu no mesmo que já tinha;
- em seguida, ele passa novamente por  $V_i$ , na terceira operação, quando vende novamente a metade do que tem;
- por fim, na quarta operação, ele sobe e passa por  $V_o$ , vendendo tudo o que tem.

Logo, o investidor fez 4 operações.

Resposta: alternativa **b**.

## Capítulo 4 • Grandezas

### Atividades

**1.** Para calcular o tempo necessário, em segundos, para a luz percorrer, no vácuo, a distância equivalente a 1 parsec precisa-se fazer:

$$3 \cdot 10^5 \text{ km/s} = \frac{3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}}{t} \Rightarrow 1,028 \cdot 10^8 \text{ s.}$$

Portanto, a luz leva aproximadamente  $1,028 \cdot 10^8$  s para percorrer a distância de um parsec.

**2.** Para escrever 7 bilhões em notação científica, primeiro precisa-se saber quantos zeros acompanha o 7, ou seja, 7 bilhões é equivalente a 7 000 000 000.

Agora, conta-se a quantidade de zeros após o número inteiro e multiplica-se por 10 elevado pela quantidade de zeros obtida.

Portanto  $7\ 000\ 000\ 000 = 7,0 \cdot 10^9$ .

**3.** Para saber o valor gasto por Rosa para manter um aparelho de 150 W ligado 5 horas por dia, durante 30 dias, é necessário descobrir qual é o consumo, em kWh, desse aparelho.

Para isso, basta dividir 150 W por 1 000 W para encontrar o valor em kW, já que  $1000 \text{ W} = 1 \text{ kW}$ .

Em seguida, multiplica-se o valor obtido pela quantidade de dias que será utilizada no mês. E, por fim, multiplica-se pelo valor da tarifa. Ou seja:

$$(150 : 1000) \cdot 5 \cdot 30 \cdot 0,56 = 12,60.$$

Portanto, o gasto para manter o equipamento funcionando nesse período foi de R\$ 12,60.

- 4.** Para saber o valor da conta a ser paga, primeiro deve-se calcular o gasto do aparelho ligado 3 horas, durante 22 dias.

Para isso, é necessário descobrir o consumo, em kWh, desse aparelho, ou seja, precisa-se dividir 250 W por 1 000 W e, em seguida, multiplicar pela quantidade de dias e pelo valor da tarifa. Ou seja:

$$(250 : 1\,000) \cdot 3 \cdot 22 \cdot 0,86 = 14,19.$$

A conta de energia de Rosa ficaria:

$$234,50 + 14,19 = 248,69.$$

Portanto, o conselho é sim, Ana deve comprar o micro-ondas, pois a conta de energia elétrica ficaria em R\$ 248,69, portanto abaixo de R\$ 275,00.

- 5.** Primeiro precisa-se converter o tempo para hora: 8h30 é o mesmo que 8,5 h.

No enunciado é dito que a distância entre as duas cidades é de 500 km. Assim, pode-se escrever:

$$V_m = \frac{500 \text{ km}}{8,5 \text{ h}} = 58,8 \text{ km/h}$$

Portanto, a velocidade média é 58,8 km/h.

- 6.** A densidade demográfica corresponde à distribuição de uma população em determinada área. Dessa forma, conclui-se:

• **Número de habitantes:** 20 milhões =  $20 \cdot 10^6$

• **Área:** 800 000 km<sup>2</sup>

$$\text{Então: } d = \frac{20 \cdot 10^6}{800\,000} = 25$$

Resposta: alternativa **b**.

- 7.** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes pesquisem sobre duas cidades ou regiões de sua preferência e anotem as informações: área e número de habitantes. Essas informações pode ser encontradas no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (<<https://www.ibge.gov.br/pt/inicio.html>>, acesso em: 18 jul. 2020).

Sugestão de problema: Calcule a densidade demográfica das cidades de Campinas - SP e de Ribeirão Preto - SP.

Para calcular a densidade demográfica dessas duas cidades, é necessário fazer a média de quantas pessoas habitam determinada área de determinado lugar.

O cálculo é dado pela razão entre o total de habitantes de determinada região e a área dessa região:

$$d = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área}}. \text{ Logo:}$$

$$\text{Campinas: } d = \frac{1\,194\,094}{797,6} = 1\,497,10 \text{ hab/ km}^2$$

$$\text{Ribeirão Preto: } d = \frac{703\,293}{650\,916} = 1,080 \text{ hab/ km}^2$$

- 8.** a] Para calcular quantos bits equivalem a 4,3 GB, basta multiplicar

$$4,3 \cdot 8,6 \text{ bilhões} = 36,98 \text{ bilhões de bits.}$$

- b] Para calcular quantos bits equivalem a 2 GB, basta multiplicar

$$2 \cdot 8,6 \text{ bilhões} = 17,2 \text{ bilhões de bits.}$$

- c] Para calcular quantos bits equivalem a 3,2 GB, basta multiplicar

$$3,2 \cdot 8,6 \text{ bilhões} = 27,52 \text{ bilhões de bits.}$$

- 9.** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes elaborem um problema sobre essa temática. Sugestão: dadas as informações na etiqueta de um chuveiro elétrico, calculem o valor de um banho de aproximadamente 15 minutos todos os dias de um mês. A tarifa equivale R\$ 0,86 por kWh.

Para resolver esse problema, precisa-se saber o consumo do aparelho ligado 15 minutos, durante 30 dias. Mas, antes, devem-se transformar 15 minutos em horas, ou seja: 0,25 hora.

Para calcular o consumo, em kWh, desse aparelho, será necessário dividir 5 550 W por 1 000 W e, em seguida, multiplicar pela quantidade de dias e pelo valor da tarifa, ou seja:

$$(5\,550 : 1\,000) \cdot 0,25 \cdot 30 \cdot 0,86 = 35,79.$$

O valor do banho de 15 minutos por dia, durante um mês, é aproximadamente 35,79 reais.

- 10.** a] Para representar em notação científica, com duas casas decimais, a população estimada em cada região do gráfico de setores, precisa-se separar por região. Ou seja:

Sul:  $\approx 2,74 \cdot 10^7$  habitantes;

Norte:  $\approx 1,59 \cdot 10^7$  habitantes;

Nordeste:  $\approx 5,31 \cdot 10^7$  habitantes;

Sudeste:  $\approx 8,04 \cdot 10^7$  habitantes;

Centro-Oeste:  $\approx 1,41 \cdot 10^7$  habitantes.

- b] Para calcular o percentual que cada região representa em relação à população brasileira, é necessário somar a quantidade da população de cada região para saber o total da população brasileira.

Em seguida, é preciso calcular a razão entre a população de cada região pelo total da população brasileira e multiplicar o resultado por 100 para ter o valor em porcentagem.

Portanto, o resultado para cada região é:

$$\text{Sul: } \frac{27386891}{190755799} \cdot 100 \approx 14,36\%;$$

$$\text{Norte: } \frac{15864454}{190755799} \cdot 100 \approx 8,33\%;$$

$$\text{Nordeste: } \frac{53081950}{190755799} \cdot 100 \approx 27,83\%;$$

$$\text{Sudeste: } \frac{80364410}{190755799} \cdot 100 \approx 42,14\%;$$

$$\text{Centro-Oeste: } \frac{14058084}{190755799} \cdot 100 \approx 7,34\%;$$

- 11.** Sabe-se que 1 hectare equivale a  $10\,000\text{ m}^2$ . Para calcular o valor de 60 ha, precisa-se fazer:  $60 \cdot 10\,000 = 600\,000$ .

Portanto o terreno tem  $60\,000\text{ m}^2$ .

- 12.** Para decidir qual farmacêutico teve melhor desempenho, será necessário calcular o desvio padrão da medição de cada um. Aquele que apresentar menor valor, será o que teve melhor desempenho. Sendo assim:

Farmacêutico 1:

$$\bar{x}_1 = \frac{497 + 497 + 503 + 503 + 500}{5} = \frac{2\,500}{5} = 500$$

$$D_{p_1} = \sqrt{\frac{(497 - 500)^2 + (497 - 500)^2 + (503 - 500)^2 + (503 - 500)^2 + (500 - 500)^2}{5}}$$

$$D_{p_1} = \sqrt{\frac{9 + 9 + 9 + 9 + 0}{5}} \approx 2,68$$

Farmacêutico 2:

$$\bar{x}_2 = \frac{497 + 502 + 498 + 503 + 500}{5} = \frac{2\,500}{5} = 500$$

$$D_{p_2} = \sqrt{\frac{(497 - 500)^2 + (502 - 500)^2 + (498 - 500)^2 + (503 - 500)^2 + (500 - 500)^2}{5}}$$

$$D_{p_2} = \sqrt{\frac{9 + 4 + 4 + 9 + 0}{5}} \approx 2,28$$

Portanto, como o desvio padrão do segundo farmacêutico é menor do que o do primeiro, pode-se concluir que o segundo farmacêutico teve melhor desempenho.

- 13.** Para encontrar a quantidade de algarismos significativos, é preciso contar da esquerda para a direita, a partir do primeiro algarismo diferente de zero, e indicar quantos algarismos são. Logo:

a] 4,288 possui 4 algarismos significativos.

b] 23,38025 possui 7 algarismos significativos.

- c] 1,000002 possui 7 algarismos significativos.
- d] 02,300005 possui 8 algarismos significativos.
- e] 2750,1 possui 5 algarismos significativos.

- 14.** Ao escrever um algarismo em notação científica tem-se a noção de ordem de grandeza, além de evidenciar os números significativos, servindo, inclusive para fazer a comparação com outro que também esteja escrito em notação científica. Dessa forma, tem-se:
- a]  $2,345 \cdot 10^2$ , com 4 algarismos significativos;
  - b]  $2,51 \cdot 10^{-1}$ , com 3 algarismos significativos.
- 15.** O algarismo duvidoso é aquele que não está visível na escala de medição do instrumento. No caso da situação apresentada no enunciado, o algarismo duvidoso de Ana é o 2, e no caso de Clara é o 3. Isso acontece porque, no instrumento de medida, esses números não estão explícitos e cada uma delas fez uma estimativa diferente.
- 16.** Para calcular a adição de algarismos significativos, o resultado deverá ser dado de acordo com a menor quantidade de casas decimais entre as parcelas. Logo:
- a]  $12,35 + 2,345 = 14,695 \Rightarrow$  Arredondando: 14,70  
Transformando em notação científica, obtém-se:  $1,470 \cdot 10^{-1}$  metros.  
Ao realizar a multiplicação, o resultado deve ter a mesma quantidade de algarismos significativos à direita do número com a menor quantidade de algarismos significativos à direita envolvidos nesse cálculo. Logo:  
b]  $22,3402 \cdot 3,100 = 69,25462$ . Arredondando: 69,255.  
Transformando em notação científica:  $6,9255 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2$
- 17.** a) A medição não necessita ser precisa, pois, ao fazer a receita do bolo, acrescentar um pouco a mais ou colocar um pouco a menos, não vai influenciar no resultado. Porém, no caso do fermento biológico, se for utilizada uma medida muito menor do que a solicitada, o bolo pode não ficar do tamanho ideal.  
b) A medição deve ser precisa. Por se tratar de uma medicação, a quantidade de cada substância deve ser precisa para não causar problemas de saúde ou reações adversas.  
c) A medição deve ser precisa, pois, nesse caso, qualquer erro poderá ocasionar um acidente.
- 18.** Ao realizar a multiplicação de 2,00 m por 3,5 m, obtém-se o resultado 7,0  $\text{m}^2$ . Portanto, o resultado deve ter a mesma quantidade de algarismos significativos do número envolvido no cálculo com a menor quantidade e algarismos significativos entre eles, ou seja, 2 algarismos significativos.
- 19.** a) Nas 4 medidas aferidas, todos os algarismos são significativos. Os algarismos significativos duvidosos são: 2, 4, 1 e 3, respectivamente.  
b) Para fazer a conversão de centímetro para metro, basta dividir o valor em centímetro por 100, dessa forma:  
$$\begin{aligned}\cdot 14,92 : 100 &= 0,1492 = 1,492 \cdot 10^{-1} \\ \cdot 15,04 : 100 &= 0,1504 = 1,504 \cdot 10^{-1} \\ \cdot 15,21 : 100 &= 0,1521 = 1,521 \cdot 10^{-1} \\ \cdot 15,43 : 100 &= 0,1543 = 1,543 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$
- 20.** Para encontrar a quantidade de algarismos significativos, é preciso contar da esquerda para a direita, a partir do primeiro algarismo diferente de zero e indicar quantos algarismos são. Logo:
- a] 238 possui 3 algarismos significativos;
  - b] 2,345 possui 4 algarismos significativos;
  - c] 1,0025 possui 5 algarismos significativos;
  - d] 2,300 possui 4 algarismos significativos;
  - e] 25600 possui 3 algarismos significativos.
- 21.** Resposta pessoal. Uma possibilidade é que a medida seja de aproximadamente 13,24 cm, sendo que os algarismos 1, 3 e 2 são os algarismos significativos exatos e o 4, o algarismo significativo duvidoso.

### Atividades complementares

- 1.** O objetivo desse exercício é determinar o volume de petróleo que vazou do petroleiro. Para isso, será preciso calcular o volume, em  $\text{m}^3$ , do sólido que estava acima dos três compartimentos, ou seja:  
$$V = 3 \cdot 10 \cdot 60 = 1800.$$

Em seguida, será necessário calcular o volume do sólido  $C$ , ou seja:

$$V = 7 \cdot 10 \cdot 20 = 1400.$$

Como o volume dos dois sólidos equivale ao volume do petróleo derramado:

$$1800 + 1400 = 3200.$$

Portanto, o volume do petróleo derramado é de  $3200 \text{ m}^3$ .

Resposta: alternativa **d**.

- 2.** Do enunciado obtém-se que  $d = 1000 \text{ km}$  e  $V_m = 4 \text{ km/h}$ . Portanto precisa-se calcular o tempo que as águas demorarão para percorrer todo o percurso. Para isso, deve-se considerar que a velocidade média é dada por:

$$V_m = \frac{s}{t} \Rightarrow 4 \text{ km/h} = \frac{1000 \text{ km}}{t} \Rightarrow t = 250 \text{ horas.}$$

Para descobrir a quantidade de dias, basta dividir 250 por 24 (pois 1 dia tem 24 horas) para obter 10,41.

Porém, como o valor para dia é uma medida exata, devem-se considerar 10 dias.

Resposta: alternativa **b**.

- 3.** Do enunciado, obtém-se que uma molécula de fulereno possui  $0,7 \text{ nm}$  de diâmetro, ou seja, seu raio mede aproximadamente  $0,35 \text{ nm}$ .

Sabe-se que um nanômetro corresponde a  $0,000000001 \text{ m}$ , ou seja,  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ . Logo:

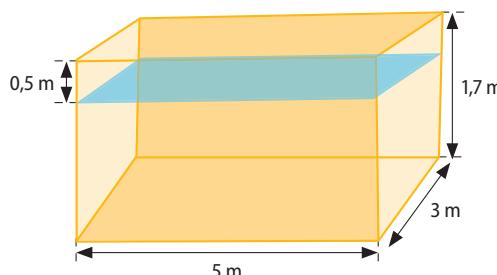
$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3 \cdot (0,35 \cdot 10^{-9})^2 = 1,47 \cdot 10^{-18}$$

Resposta: alternativa **d**.

- 4.** A partir do enunciado, sabe-se que a piscina tem a base retangular e profundidade constante igual a  $1,7 \text{ m}$ , metro, com largura e comprimento iguais a  $3 \text{ m}$ etros e  $5 \text{ m}$ etros, respectivamente. Sabe-se também que o nível da lâmina da água dessa piscina é mantido a  $50 \text{ cm}$  de distância da borda.

Dessa forma, para saber a quantidade de produto a ser adicionado, será preciso encontrar o volume dessa piscina. Para isso, é necessário saber a largura, o comprimento e a altura. Logo:

$$\text{Altura: } 1,7 - 0,5 = 1,2$$



$$V = 5 \cdot 3 \cdot 1,2 = 18 \text{ m}^3$$

Assim, como para cada metro cúbico de água, deve-se acrescentar  $1,5 \text{ ml}$  do produto, conclui-se:

$$18 \cdot 1,5 = 27.$$

Portanto, a quantidade de produto que deve ser adicionada à piscina será de  $27 \text{ ml}$ .

Resposta: alternativa **b**.

- 5.** Para escrever um décimo de bilionésimo de metro em potência de  $10$ , basta descobrir quanto vale um décimo de bilionésimo de metro. Desse modo, sabe-se que um nanômetro ( $\text{nm}$ ) equivale a um bilionésimo de metro, ou seja,  $0,000000001 \text{ m}$ . Assim, um décimo de bilionésimo equivale a:

$$\frac{1}{10} \cdot 10^{-9} = 10^{-10}$$

Resposta: alternativa **c**.

- 6.** Para realizar a adição de algarismos significativos, o resultado deverá ser dado de acordo com a menor quantidade de casas decimais entre as parcelas. Desse modo, conclui-se:

$$28,7 + 1,03 = 29,73, \text{ ou seja, } 29,7.$$

Resposta: alternativa **a**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD  
REPRODUÇÃO PROIBIDA

# HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas  
De um povo heroico o brado retumbante,  
E o sol da liberdade, em raios fulgidos,  
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade  
Conseguimos conquistar com braço forte,  
Em teu seio, ó liberdade,  
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,  
Idolatrada,  
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido  
De amor e de esperança à terra desce,  
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,  
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,  
És belo, és forte, impávido colosso,  
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,  
Entre outras mil,  
És tu, Brasil,  
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,  
Pátria amada,  
Brasil!

Música: Francisco Manuel da Silva

Deitado eternamente em berço esplêndido,  
Ao som do mar e à luz do céu profundo,  
Fulguras, ó Brasil, florão da América,  
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida  
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;  
"Nossos bosques têm mais vida",  
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,  
Idolatrada,  
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo  
O lábaro que ostentas estrelado,  
E diga o verde-louro desta flâmula  
- Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,  
Verás que um filho teu não foge à luta,  
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,  
Entre outras mil,  
És tu, Brasil,  
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,  
Pátria amada,  
Brasil!

