PRISMA

Matemática

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

> ENSINO MÉDIO

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0226P21202
CÓDIGO DO VOLUME
0226P21202135
PNLD 2021 • Objeto 2 | Material de divulgação
Versão submetida à avaliação

MANUAL DO PROFESSOR

Bonjorno
Giovanni Jr.
Paulo Câmara

FTD

PRISMA

MANUAL DO PROFESSOR

José Roberto Bonjorno

- Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras “Professor Carlos Pasquale”.
- Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
- Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1973.

José Ruy Giovanni Júnior

- Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
- Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

Paulo Roberto Câmara de Sousa

- Mestre em Educação pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB).
- Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE).
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
- Professor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1974.
- Professor de programas de formação continuada e pós-graduação desde 1990.
- Professor do Departamento de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste – UFPE.

Matemática

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

> ENSINO MÉDIO

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

FTD

1ª edição
São Paulo – 2020

Direção-geral Ricardo Tavares de Oliveira
Direção editorial adjunta Luiz Tonolli
Gerência editorial Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita
Edição Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)
Alan Mazoni Alves, André Luiz Ramos de Oliveira, Bianca Cristina Fratelli, Carlos Eduardo Bayer Simões Esteves, Camila Silvestre, Cristina Silva dos Santos, João Alves de Souza Neto, Juliana Montagner, Lísias Cruz, Luciana Moura, Luís Felipe Porto Mendes, Marcos Antonio Silva, Teresa Christina Dias, Valéria Elvira Prete
Preparação e Revisão Maria Clara Paes (sup.)
Ana Lúcia P. Horn, Carolina Ramos Manley, Daniela Nanni, Danielle Costa, Desirée Araújo, Eliana Vila Nova de Souza, Jussara Rodrigues Gomes, Pedro Henrique Fandi, Priscilla Freitas, Yara Affonso
Gerência de produção e arte Ricardo Borges
Design Daniela Máximo (coord.), Sergio Cândido
Imagem de capa Silense/iStock/Getty Images
Arte e Produção Isabel Cristina Corandin Marques (sup.)
Adriana Maria Nery de Souza, Débora Jóia, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, Kleber Bellomo Cavalcante, Nadir Fernandes Racheti, Rodrigo Bastos Marchini, Maria Paula Santo Siqueira (assist.)
Diagramação VSA Produções
Coordenação de imagens e textos Elaine Bueno Koga
Licenciamento de textos Érica Brambila, Bárbara Clara (assist.)
Iconografia Priscilla Liberato Narciso, Ana Isabela Pithan Maraschin (trat. imagens)
Ilustrações Alberto De Stefano, Alex Argozino, Selma Caparroz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bonjorno, José Roberto
Prisma matemática : geometria e trigonometria : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 1. ed. – São Paulo : Editora FTD, 2020.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5742-020-1 (Aluno)
ISBN 978-65-5742-021-8 (Professor)

1. Matemática (ensino médio) I. Júnior, José Ruy Giovanni. II. Sousa, Paulo Roberto Câmara de. III. Título.

20-43447 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Aline Graziele Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

APRESENTAÇÃO

Este livro tem o objetivo de estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la em seu dia a dia e na continuação dos seus estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo e responsável. Na sociedade contemporânea é muito importante que você seja capaz de ler a realidade, enfrentar novos desafios e tomar decisões éticas e fundamentadas.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Desejamos que essa obra contribua para que você reflita e interfira na sociedade em que está inserido a partir de conhecimentos cientificamente fundamentados.

Bons estudos!

Os Autores

CONHEÇA SEU LIVRO

Ícones das Atividades

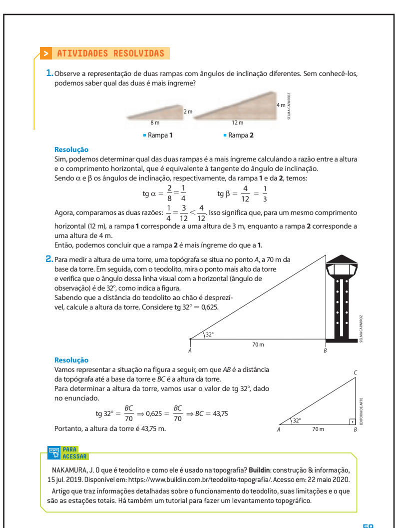
CALCULADORA

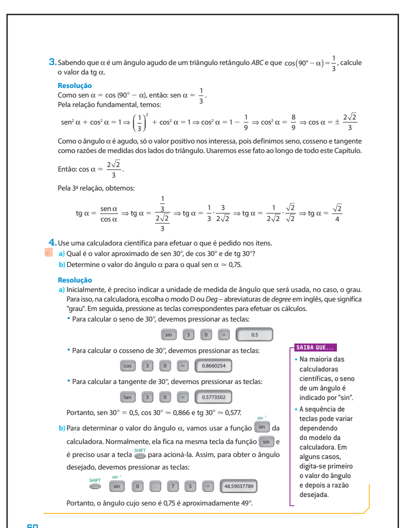
ATIVIDADE EM GRUPO

ATIVIDADE EM DUPLA

Abertura de Capítulo

Nas páginas de abertura você é convidado a observar textos e/ou imagens relacionados ao conteúdo do Capítulo e responder a questões que têm como objetivo proporcionar um momento de reflexão a respeito do contexto apresentado. Além disso, são apresentadas as competências gerais, competências específicas e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que se pretende desenvolver com o estudo do Capítulo.



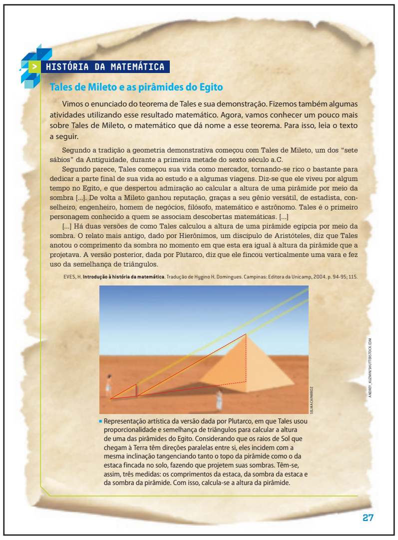


Atividades resolvidas e Atividades

As atividades resolvidas apresentam uma forma organizada de resolução e deve ser um momento de reflexão e busca de outras formas de resolução. Já as atividades são variadas e visam a prática do conteúdo em estudo. Há também oportunidade de elaboração, análise de atividades e compartilhamento com seus colegas e o professor.

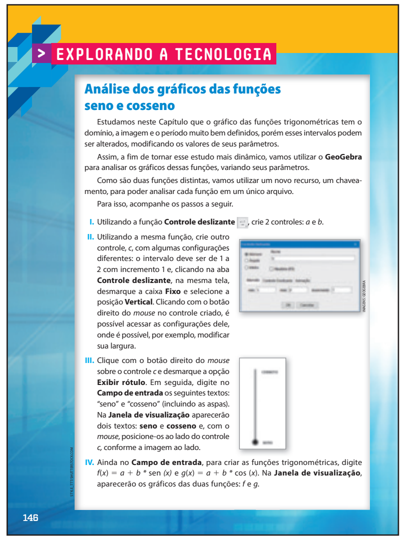
Fórum

É uma oportunidade de trocar e compartilhar ideias com seus colegas e o professor a partir de temas contemporâneos.



História da Matemática

Nesta seção você vai ter a oportunidade de ler textos de história da Matemática relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados no Capítulo.

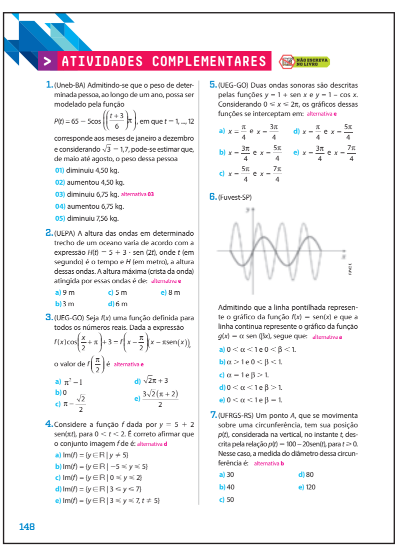


Explorando a tecnologia

Nesta seção você vai ter a oportunidade de aprofundar conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais.

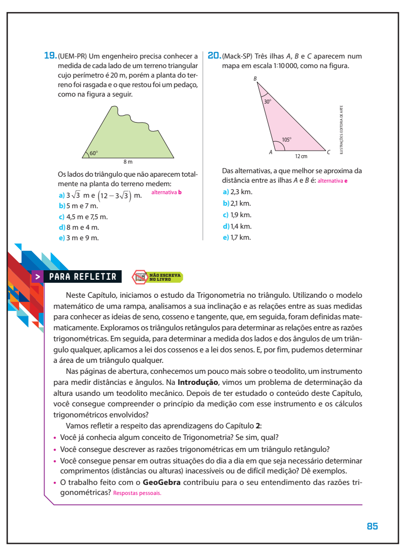
Conexões

Nesta seção você vai explorar temas diversos relacionados ao conteúdo em estudo, com a finalidade de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico por meio de atividades investigativas, pesquisas e discussão com os colegas.



Atividades complementares

Nesta seção você vai encontrar questões de exames oficiais relacionadas aos conteúdos estudados. É uma oportunidade de você verificar seu conhecimento em relação ao que estudou no Capítulo.



Para refletir

Neste momento você vai ter a oportunidade de refletir sobre o que estudou em cada um dos capítulos e fazer uma autoavaliação de seu desempenho.

Glossário

Explicação de termos matemáticos ou da língua portuguesa.

Pense e responda

Momentos que valorizam, por meio de questões, sua participação na construção de seu conhecimento para que você interaja, investigue e reflita sobre o conteúdo em estudo.

Para ler • Para assistir Para acessar • Para ouvir

Sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. a fim de complementar o conteúdo do livro.

Saiba que...

Apresentação de uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo.

SUMÁRIO

KENISHIROTIE/SHUTTERSTOCK.COM

PARAMEPRIZMA/SHUTTERSTOCK.COM

NESTE VOLUME

Os conteúdos desenvolvidos neste Volume buscam proporcionar que você, estudante, exercite sua curiosidade intelectual, investigando diversas situações de forma reflexiva e crítica, seja no contexto da própria Matemática ou em outros contextos, interpretando dados para tomar decisões éticas e socialmente responsáveis.

O uso das tecnologias oferece recursos interativos que ampliam as possibilidades de estudo, permitindo melhor compreensão dos conceitos envolvidos, desenvolvem a autonomia e a curiosidade, contribuindo para que você seja protagonista do seu aprendizado.

Objetivos do Volume:

- Compreender e fazer uso de diferentes linguagens matemáticas (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de se comunicar, ler e interpretar situações do dia a dia.
- Apropriar-se do conceito de transformações geométricas e das propriedades relacionadas para analisar elementos da natureza e de diferentes produções humanas, bem como construir figuras e modelos geométricos que possibilitem compreender e solucionar problemas do dia a dia.
- Analisar e compreender situações envolvendo fenômenos periódicos que podem ser modelados por funções trigonométricas.
- Utilizar representações que possibilitem a aplicação de relações métricas e trigonométricas na resolução de problemas, consolidando as noções de congruência e de semelhança de polígonos.
- Compreender e utilizar diferentes registros de representação matemática (algébrico, geométrico e computacional) para descrever processos de resolução de problemas e verificação de resultados.
- Refletir e debater sobre questões relacionadas à localização geográfica, por meio de instrumentos e conceitos matemáticos, à análise de topografia e de relevo, à influência do Sol e da Lua no movimento das marés, bem como o uso de tecnologia como estratégia utilizada na conservação e na preservação do meio ambiente.
- Estimular discussões justas e respeitosas, a fim de promover a socialização de ideias, a prática colaborativa e o respeito ao outro e às diferenças.

Justificativas dos objetivos:

Por meio dos objetivos apresentados, pretende-se que você seja capaz de utilizar a linguagem matemática para se expressar, escolhendo a representação mais adequada para cada situação (algébrica, gráfica etc). Isso contribui para o desenvolvimento do pensamento científico e do raciocínio lógico, para sua formação como cidadão crítico e reflexivo, que investiga, pesquisa e utiliza diferentes representações para comunicar informações em diversas áreas de conhecimento, em especial, utilizando a linguagem científica.

Além disso, as situações propostas visam contribuir com sua capacidade de argumentação, sempre com base em fatos e dados para justificar suas escolhas e tomadas de decisão, de maneira ética e socialmente responsável.

O estudo das transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composição delas) e homotéticas (ampliação e redução) permite que você seja capaz de construir modelos e resolver problemas em diferentes contextos, além de analisar construções e manifestações artísticas de diferentes povos e culturas.

A compreensão de conceitos como razões métricas e trigonométricas, e a consolidação das noções de congruência e de semelhança de figuras planas permitem a interpretação e resolução de problemas matemáticos e de contextos diversos, assim como o estudo das funções trigonométricas favorece a compreensão, a representação e a construção de modelos referentes a fenômenos periódicos de diferentes áreas de conhecimento.

As atividades relacionadas à construção de algoritmos e suas formas de representação contribuem para o desenvolvimento do pensamento computacional e do raciocínio lógico. Aquelas relacionadas à elaboração de problemas favorecem a investigação de situações e promovem a reflexão e a consolidação dos conceitos estudados a partir da construção do pensamento matemático.

A análise e a reflexão de situações envolvendo temas das Ciências da Natureza, a partir de textos de divulgação científica, dados expressos em diferentes representações, permitem uma visão mais ampla, contribuindo para que você alcance conclusões mais precisas e desenvolva argumentos consistentes. Assim como o debate sobre diferentes manifestações artísticas e culturais, a reflexão sobre perspectivas de diferentes grupos sociais corroboram para uma formação crítica e cidadã.

As atividades que propõem discussões coletivas contribuem para a socialização de ideias e a colaboração, mobilizam a descoberta e a pesquisa como estratégia de aprendizagem, estimulam o respeito às diferenças e desenvolvem a capacidade de argumentação e a tomada de decisões.

CAPÍTULO

1

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 2, 3, 7 e 9
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1: EM13MAT105
  - Competência específica 3: EM13MAT308 e EM13MAT315
  - Competência específica 4: EM13MAT405
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Proporcionalidade e semelhança

Não deixe seus olhos enganarem você!

Observe atentamente e descobrirá que há muito mais a ser visto nesta obra de arte: o contraste das cores, as formas, a dualidade, a proporção... E é sobre proporcionalidade e semelhança que vamos tratar neste Capítulo. Convidamos você a viajar pelo mundo "matemágico" de Escher!

Os padrões geométricos são um dos principais componentes das obras do artista holandês M. C. Escher (1898-1972), que ganhou notoriedade por meio de suas "construções impossíveis" e seus padrões de figuras que se encaixam perfeitamente. Para conseguir esse efeito, Escher utilizou uma técnica que a partir de uma figura compunha outra. Com uma visão fantasiosa do mundo, suas obras nos permitem observar a realidade de um modo fascinante.

Fontes de pesquisa: BIOGRAPHY. **The Official M.C. Escher Website**, 2020. Disponível em: https://mcescher.com/about/biography/; FERREIRA, D.; CARLINI, J. M. Escher e o ensino da Geometria. **Regrasp**, v. 2, n. 3, jun. 2017. Disponível em: http://seer.spo.ifsp.edu.br/index.php/regrasp/article/view/65. Acessos em: 11 maio 2020.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item.

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Vocês já conheciam alguma obra de Escher? Troquem informações. Se necessário, façam uma breve pesquisa sobre o artista e suas principais obras.

2. Observem a obra de Escher reproduzida e respondam às questões.

a) O que mais lhes chama a atenção? Por quê?

b) Como vocês descreveriam essa imagem para alguém que não pode vê-la?

c) Vocês conseguem identificar padrões nessa pintura? De que modo eles aparecem?

3. Grande parte dos trabalhos de Escher foi feita usando as técnicas de litografia e xilografia. Vocês sabem o que são essas técnicas? Pesquisem a respeito.

- Obra **Regular division reptiles**, do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher.

Introdução

Você já parou para pensar por que os cartões de crédito têm esse formato?

Além de questões práticas, como caber no bolso, nas carteiras e nas máquinas de cartão, esse formato foi pensado por ter harmonia entre suas dimensões, sendo agradável aos olhos. Isso porque a razão entre as dimensões do cartão é próxima da razão áurea.

DENPHOTOS/SHUTTERSTOCK.COM

■ Os cartões de débito ou de crédito são muito utilizados no pagamento de compras feitas pelo *e-commerce*.

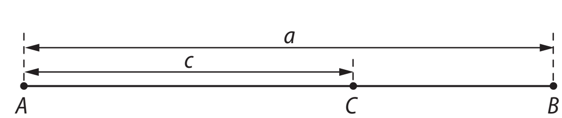
PENSE E RESPONDA

- Você se recorda do que é uma razão? Pesquise a definição dessa palavra, pois ela será muito utilizada ao longo deste Capítulo. Ver as **Orientações para o professor**.
- Você já ouviu falar na razão áurea? Pesquise a respeito: como ela é obtida, qual é o seu valor e outras informações que desejar. A razão áurea é obtida ao realizar a divisão de um segmento em média e extrema razões e vale $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62$.
- De acordo com a ISO/IEC 7810:2019, as medidas de um cartão de crédito são padronizadas e devem ser 85,60 mm × 53,98 mm × 0,76 mm. Calcule a razão entre a medida do comprimento e da altura de um cartão e verifique se esse valor é próximo da razão áurea. 85,60 : 53,98 ≃ 1,58. Esse é um valor bem próximo ao valor da razão áurea.
- Você conhece outros objetos, obras de arte ou itens da natureza que estejam relacionados com a razão áurea? Reúna-se a um colega e pesquisem a respeito. Pesquisa dos estudantes. Espera-se que eles mencionem a espiral áurea, o retângulo áureo, a disposição de sementes e folhas de algumas plantas.

A razão áurea é um caso particular da proporcionalidade entre segmentos. Para determiná-la, dividimos um segmento em média e extrema razões. Para isso, dado um segmento $\overline{AB}$ de medida a, precisamos determinar o ponto C tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

SAIBA QUE...

O segmento de reta com extremidades nos pontos A e B é indicado pela notação $\overline{AB}$ e a medida desse segmento de reta é indicada por AB ou med($\overline{AB}$).



EDITORIA DE ARTE

■ Fazendo os cálculos, obtemos $\frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62$.

Proporcionalidade

Segmentos de reta proporcionais

Podemos comparar as medidas de dois segmentos de reta por meio de uma razão. Definimos que a **razão entre dois segmentos de reta** é o quociente entre as respectivas medidas desses segmentos, tomadas na mesma unidade. Por exemplo, a razão entre as medidas de dois segmentos de reta, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de medidas respectivamente iguais a 16 cm e 80 cm, é dada por:

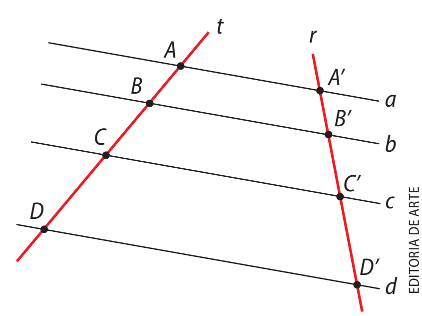
$$\frac{AB}{CD} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} \text{ ou } 0{,}2$$

Dizemos que a razão entre AB e CD é $\frac{1}{5}$ ou 0,2. A ordem de leitura e escrita de uma razão é importante. Assim, a razão entre CD e AB é $\frac{80}{16} = 5$, ou seja, se $AB \neq CD$, temos que $\frac{AB}{CD} \neq \frac{CD}{AB}$.

Agora, considere os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$. Dizemos que, nesta ordem, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são **proporcionais** se, e somente se, a razão entre as medidas dos dois primeiros segmentos de reta for igual à razão entre as medidas dos dois últimos, ou seja: $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$

Feixe de retas paralelas

Duas ou mais retas paralelas entre si, pertencentes a um mesmo plano, formam um **feixe de retas paralelas**. Uma reta que cruza esse feixe de paralelas é chamada de **reta transversal**. Na figura ao lado, as retas a, b, c e d formam um feixe de retas paralelas, e as retas r e t são as transversais. Além disso, definimos:



$a \parallel b \parallel c \parallel d$

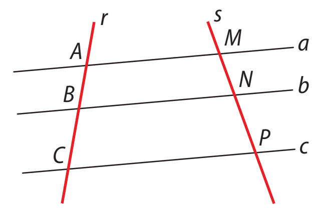
- A e A' são **pontos correspondentes**, assim como B e B', C e C', D e D'.
- $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são **segmentos correspondentes**, assim como $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, $\overline{BD}$ e $\overline{B'D'}$.

Teorema de Tales

A proporcionalidade pode ser utilizada em diversos casos do nosso cotidiano. O **teorema de Tales**, que veremos a seguir, trata da relação entre os segmentos de reta determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais. É por meio dele que conseguimos realizar alguns cálculos, como aqueles para determinar distâncias inacessíveis.

Vamos enunciar o teorema e, em seguida, apresentar sua demonstração.

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então dois segmentos quaisquer de uma das retas transversais são proporcionais aos segmentos correspondentes da outra.



$$a \,//\, b \,//\, c \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

$\frac{BC}{AB} = \frac{NP}{MN}$; $\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{MP}{MN}$

PENSE E RESPONDA

A partir da figura apresentada, quais outras proporções podem ser consideradas pelo teorema de Tales?

Com base nessa figura, podemos considerar outras proporções, como: $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$ ou $\frac{AC}{BC} = \frac{MP}{NP}$.

SAIBA QUE...

Tales, matemático e filósofo que viveu no século VI a.C., era natural da cidade de Mileto, na Grécia, por isso ficou conhecido como Tales de Mileto.

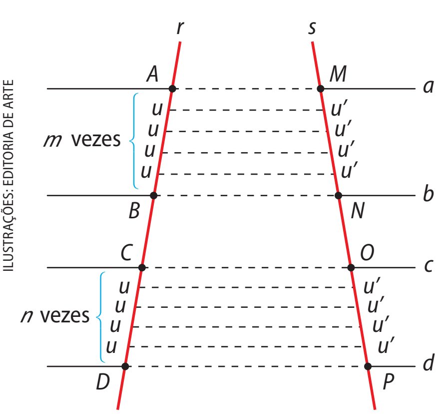
Demonstração

Vamos demonstrar esse teorema para o caso em que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis, ou seja, existe um segmento u que é um submúltiplo comum desses segmentos, e no caso em que os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$ também são comensuráveis, ou seja, existe um segmento u' que é submúltiplo comum desses segmentos. No entanto, o teorema de Tales também é válido no caso em que os pares de segmentos são incomensuráveis, isto é, para segmentos que não têm esse submúltiplo comum.

Para fazer essa demonstração vamos utilizar o resultado da seguinte propriedade, que também pode ser demonstrada.

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas e um segmento de uma delas é dividido pelo feixe em p partes congruentes entre si, então o segmento correspondente da outra transversal também é dividido em p partes congruentes entre si.

Considere duas retas r e s, transversais a um feixe de retas paralelas, como mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Vamos supor que exista um segmento de medida u e dois números inteiros m e n tais que: $AB = m \cdot u$ e $CD = n \cdot u$

Estabelecendo a razão $\frac{AB}{CD}$, temos: $\frac{AB}{CD} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$ (I)

Traçando retas paralelas ao feixe, pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pela propriedade enunciada anteriormente, $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$ ficam divididos, respectivamente, em m e n partes iguais a u'.

Assim, temos: $\frac{MN}{OP} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} = \frac{m}{n}$ (II)

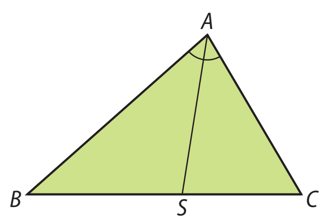
Comparando (I) e (II), obtemos: $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{OP}$.

Teorema da bissetriz interna de um triângulo

Dando continuidade aos estudos de proporcionalidade, agora veremos um resultado que envolve a bissetriz de um triângulo, denominado **teorema da bissetriz interna de um triângulo**.

No triângulo ABC a seguir, se $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$, então:

> A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, sobre o lado oposto, segmentos de reta que são proporcionais aos lados do triângulo que formam o ângulo considerado.



$$\frac{BS}{SC} = \frac{AB}{AC} \text{ ou } \frac{BS}{AB} = \frac{SC}{AC}$$

Para demonstrar esse teorema, vamos utilizar o teorema de Tales.

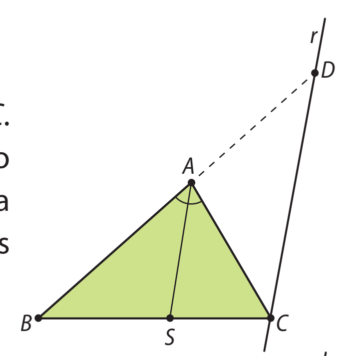
PENSE E RESPONDA

Você se recorda do que é a bissetriz de um triângulo? Pesquise a definição e registre em seu caderno.

Ver as **Orientações para o professor**.

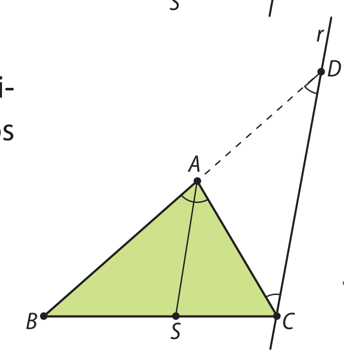
Demonstração

Considere uma reta r paralela à bissetriz $\overline{AS}$ passando pelo vértice C. Prolongando o lado $\overline{AB}$, determinamos o ponto D, que é a intersecção da reta suporte do lado $\overline{AB}$ com a reta r. A reta r e a reta suporte da bissetriz $\overline{AS}$ formam um feixe de retas paralelas, e as retas suporte dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são transversais a esse feixe, como mostra a imagem.



Pelo teorema de Tales, temos que: $\frac{AB}{AD} = \frac{BS}{SC}$ (I)

Para poder chegar à expressão que representa o teorema, precisamos mostrar que $AD = AC$. Para isso, vamos observar os ângulos formados nessa construção e indicados na figura ao lado:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $B\hat{A}S \cong S\hat{A}C$, pois $\overline{AS}$ é a bissetriz de $B\hat{A}C$.
  símbolo de congruência
- $B\hat{A}S \cong A\hat{D}C$, pois são ângulos correspondentes.
- $S\hat{A}C \cong A\hat{C}D$, pois são ângulos alternos internos.

Dessas relações, concluímos que $A\hat{D}C \cong A\hat{C}D$. Assim, o triângulo ACD é isósceles e, então, $AC = AD$. (II)

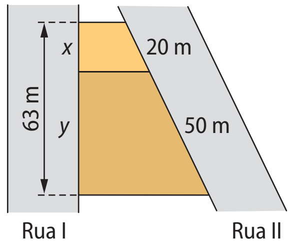
Substituindo (II) em (I), obtemos: $\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC}$

PENSE E RESPONDA

O que significa dizer que dois ângulos são congruentes?
Significa dizer que têm a mesma medida.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. A figura a seguir representa dois terrenos cujas laterais são paralelas. De acordo com a figura, determine as medidas *x* e *y*.



Resolução

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{20 + 50}{20} = \frac{x + y}{x} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{20 + 50}{50} = \frac{x + y}{y} \quad \text{(II)}$$

Substituindo $x + y$ por 63 em (I), temos:

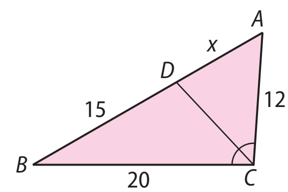
$$\frac{70}{20} = \frac{63}{x} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{63}{x} \Rightarrow 7x = 126 \Rightarrow x = 18$$

Substituindo $x + y$ por 63 em (II), temos:

$$\frac{70}{50} = \frac{63}{y} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{63}{y} \Rightarrow 7y = 315 \Rightarrow y = 45$$

Portanto, as medidas são $x = 18$ m e $y = 45$ m.

2. Na figura a seguir, $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$. Determine a medida *x* indicada.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

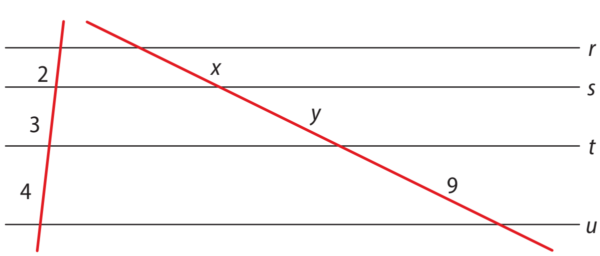
$$\frac{20}{15} = \frac{12}{x} \Rightarrow 20x = 15 \cdot 12 \Rightarrow x = 9$$

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Uma pessoa tem 1,95 m de altura e, em determinado instante, sua sombra mede 2,60 m. Calcule a razão entre a medida da altura da pessoa e a medida de sua sombra naquele instante. $\frac{3}{4}$

2. Na figura a seguir, as retas *r*, *s*, *t* e *u* são paralelas. Com as informações fornecidas, deseja-se calcular as medidas *x* e *y* indicadas.

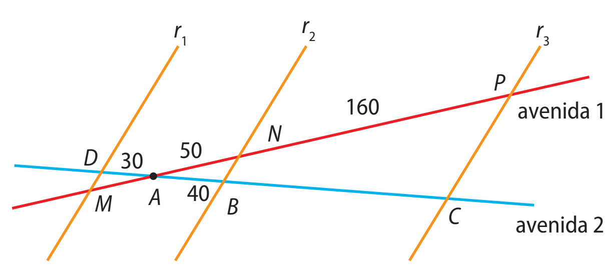


a) A partir das informações dadas, é possível resolver o problema?

2. a) Sim. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Se for possível, resolva o problema. Se não for possível, indique quais informações estão faltando para que as medidas possam ser encontradas. $x = 4{,}5$; $y = 6{,}75$

3. Duas avenidas se encontram em um ponto *A*. Essas avenidas cruzam três ruas, r_1, r_2 e r_3, que são paralelas entre si. Os segmentos de reta $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ representam quarteirões da avenida 2. Na figura, estão indicados os comprimentos, em metro, de alguns quarteirões.

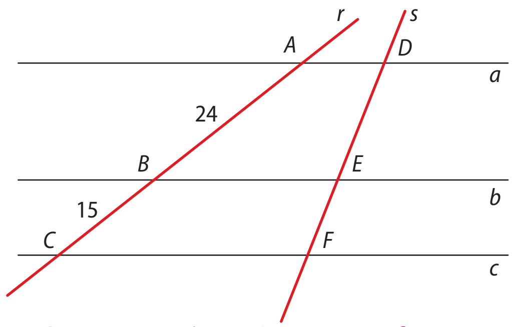


Determine os comprimentos dos quarteirões representados pelos segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$. $BC = 128$ m; $AM = 37{,}5$ m

4. Sabemos que *AB*, *CD*, *MN* e *PQ* são proporcionais nessa ordem. Sabendo que $AB = (x + 3)$ cm, $CD = (x - 2)$ cm, $MN = 40$ cm e $PQ = 30$ cm, calcule as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
$AB = 20$ cm; $CD = 15$ cm

5. b) Resposta possível: É preciso saber a medida de um dos segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{DF}$.

5. Observe a figura a seguir, em que as retas *a*, *b* e *c* são paralelas. As medidas são dadas em centímetro.



5. a) Não. Ver as **Orientações para o professor**.

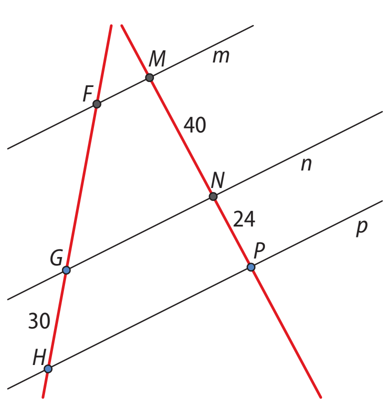
Deseja-se determinar as medidas dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

a) A partir das informações dadas, é possível resolver o problema?

b) Se for possível, resolva o problema. Se não for possível, indique quais informações estão faltando para que as medidas possam ser encontradas.

6. Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são proporcionais. A soma das medidas dos dois primeiros segmentos equivale a 12, e a diferença entre eles é igual a 2. Com relação aos dois últimos segmentos, sabemos que a medida do primeiro é o triplo da medida do segundo menos duas unidades. Nessas condições, determine a soma das medidas de todos os segmentos. 15

7. Clara precisa resolver o seguinte problema em sua aula de Matemática:

> Na figura a seguir, as retas *m*, *n* e *p* são paralelas. Determine a medida do segmento $\overline{FH}$.
>
> 
>

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

7. a) Sim. Espera-se que os estudantes justifiquem utilizando o teorema de Tales.

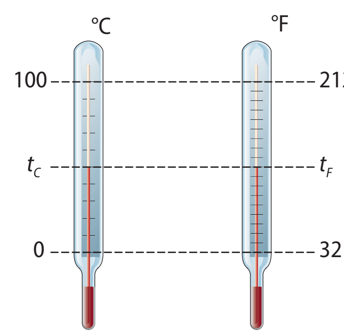
Para resolver o problema, ela utilizou a proporção $\dfrac{FH-30}{30}=\dfrac{40}{24}$. Reúna-se a um colega e respondam às questões. **7. c)** Sim, por exemplo, $\dfrac{FH}{30}=\dfrac{64}{24}$.

a) A proporção apresentada por Clara está correta? Justifiquem a resposta.

b) Essa proporção resolve o problema? Justifiquem a resposta. **7. b)** Sim. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Existe outra proporção que resolve o problema? Se sim, escrevam-na.

8. A unidade de medida de temperatura usada no Brasil é o grau Celsius (°C). Em alguns países do mundo, como nos Estados Unidos, a unidade de medida padrão é o grau Fahrenheit (°F). Para converter uma medida de temperatura de uma unidade para outra, usamos uma escala de correspondência, como indica a figura a seguir.



SELMA CAPARROZ

Agora, observe a fotografia:

JORDI_COR/SHUTTERSTOCK.COM

Qual é a temperatura indicada na fotografia na escala Celsius? aproximadamente 38,28 °C

9. Os lados de um triângulo medem 7 cm, 14 cm e 15 cm. Determine a medida do menor segmento que a bissetriz interna determina sobre o lado maior. 5 cm

Ver as **Orientações para o professor**.

Transformações isométricas

Na abertura deste Capítulo, conhecemos um pouco do trabalho do artista M. C. Escher. Vamos retomar esse tema, observando uma de suas obras, denominada **Limite quadrado**, e fazendo relações entre elementos dessa obra e o conteúdo matemático que estudaremos a seguir.

PENSE E RESPONDA

Observe os dois peixes vermelhos no centro da obra e responda às questões.

- Eles têm o mesmo formato? E o que podemos dizer sobre o tamanho deles?
- Partindo de um dos peixes, que movimentos podemos fazer para chegar ao outro?

Ver as **Orientações para o professor**.

■ Obra **Limite quadrado**, de 1954, de M. C. Escher.

PENSE E RESPONDA

- Você sabe quais são as isometrias existentes e quais são suas características?
- Pesquise o significado da palavra isometria.

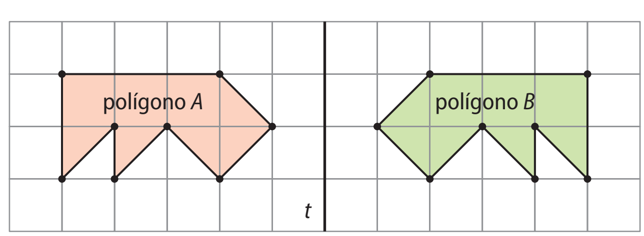
Ver as **Orientações para o professor**.

Situações como a dos peixes centrais do quadro de Escher exprimem um conceito denominado **transformações isométricas**. Esse tipo de transformação tem a característica de alterar a posição de uma figura e manter sua forma e seu tamanho. As transformações isométricas também são chamadas de **isometrias**.

Agora, vamos conhecer melhor cada uma das isometrias.

Reflexão

Observe a imagem a seguir, em que aplicamos uma transformação ao polígono *A* para obter o polígono *B*.



EDITORIA DE ARTE

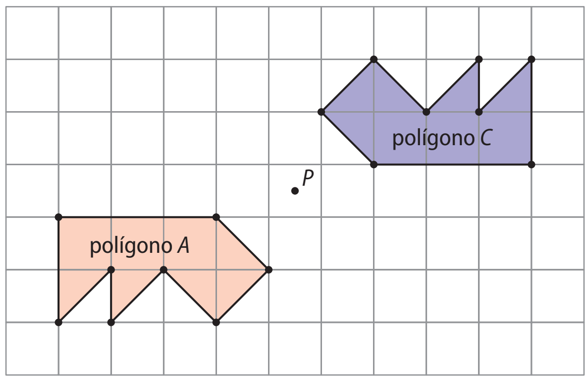
SAIBA QUE...

Na reflexão em relação a uma reta, ao dobrar a folha na linha da reta de reflexão, as duas figuras ficam exatamente sobrepostas.

Essa transformação é chamada de **reflexão em relação a uma reta**, nesse caso, a reta *t*. Esse tipo de reflexão gera uma figura congruente à original, mas em uma posição diferente em relação à reta *t*.

Ao realizar a reflexão de um polígono, qualquer segmento de reta é transformado em um segmento de reta com o mesmo comprimento e qualquer ângulo é transformado em um ângulo congruente.

Outra possibilidade é fazer a **reflexão em relação a um ponto**. Assim como na reflexão em relação a uma reta, esse tipo de reflexão gera uma figura congruente à original, mas em uma posição diferente, agora em relação ao ponto de reflexão. Utilizando o mesmo polígono *A* do exemplo anterior, ao refleti-lo em relação ao ponto *P*, obtemos o polígono *C*. Veja na figura a seguir.



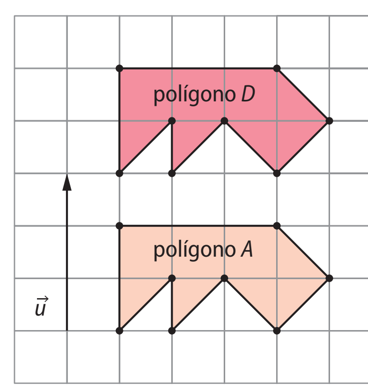
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

- Sabendo que a translação é um tipo de isometria, o que podemos afirmar a respeito dela? Ver as **Orientações para o professor**.
- Você sabe o que é translação? Você já ouviu essa palavra em algum outro contexto? Junte-se a um colega, procurem no dicionário o significado da palavra e tentem identificar o que essa isometria faz com as figuras.
Ver as **Orientações para o professor**.

Translação

Observe a imagem ao lado, em que transladamos o polígono *A* e obtivemos o polígono *D*.



Tomando o lado do quadradinho da malha como unidade, observe que todos os pontos do polígono *A* foram deslocados três unidades na direção vertical e para cima. A translação é o deslocamento de todos os pontos de uma figura realizado com base em um vetor que indica o comprimento, a direção e o sentido desse deslocamento. A translação pode ser feita em qualquer direção.

PENSE E RESPONDA

- Nas páginas de abertura deste Capítulo, conhecemos uma das obras de Escher, **Regular division reptiles**. Retome a aquarela e indique um exemplo de translação. Qual seria o vetor de translação?
Ver as **Orientações para o professor.**
- Você sabe o que é um vetor do ponto de vista das Ciências Exatas? Pesquise em livros e na internet. Pesquisa dos estudantes. Espera-se que os contextos da Cinemática vetorial sejam mencionados, entre outros.
- Junte-se a um colega e pesquisem em quais situações os vetores são utilizados. Pesquisa do estudante.

Rotação

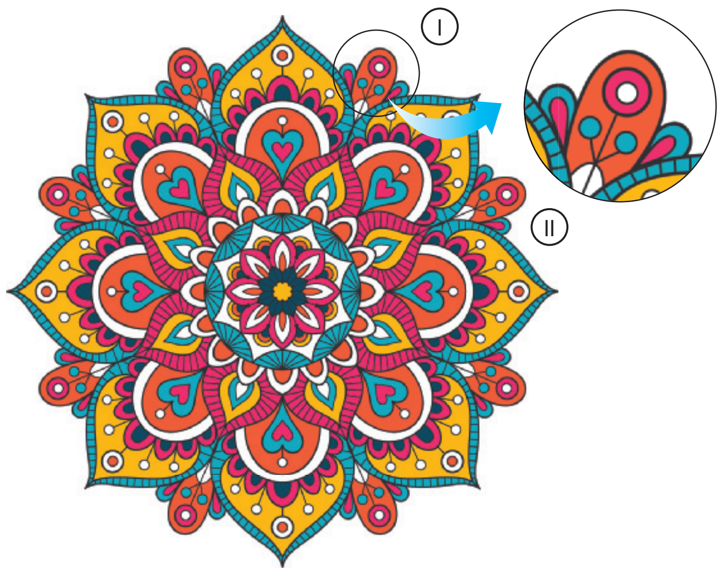
Você conhece as mandalas? Além de serem um elemento frequentemente utilizado na arquitetura e decoração, em algumas culturas as mandalas também são símbolo de harmonia e equilíbrio. Veja uma mandala na figura a seguir.

Ver as **Orientações para o professor**.

PENSE E RESPONDA

- Como você descreveria o movimento de sair do elemento destacado I e se sobrepor ao próximo II, considerando o sentido horário?
- Indique outro elemento da mandala que também se repete e descreva como obter essas repetições.

Ver as **Orientações para o professor**.



FAIRY-N/SHUTTERSTOCK.COM

Note que alguns elementos que compõem a mandala se repetem de acordo com um padrão. O elemento destacado no *zoom*, por exemplo, se repete outras sete vezes.

A transformação que obtém as repetições do elemento destacado da mandala é chamada de **rotação em relação a um ponto**. Nessa rotação, todos os pontos de uma figura se movimentam, girando em torno de um ponto, também chamado de centro de rotação.

Para realizar a rotação, além do centro de rotação, é preciso um **ângulo orientado** para saber quanto devemos rotacionar a figura e em que sentido. Por exemplo, no caso do elemento destacado da mandala, para sair de I e chegar ao II, indicados na figura anterior, precisamos rotacionar o elemento em I em torno do ponto central 45° no sentido horário.

As isometrias podem ser identificadas em obras de arte, construções, elementos de decoração, estampas em geral, como de roupas e de papel de parede, e também estão presentes na natureza.

LUCIANO SIQUEIRA/SHUTTERSTOCK.COM

Os tecidos possuem grande variedade de estampas; muitas delas apresentam isometrias em sua composição, como o tecido com estampa geométrica da fotografia.

FÓRUM

As representações visuais em comunidades indígenas trazem consigo, além do apelo visual, informações culturais relacionadas a saberes transmitidos de geração para geração.

Nas imagens a seguir, temos exemplos desses grafismos, que fazem parte da arte da cestaria de arumã, feita pelo povo baniwa, do Alto Xingu.

FABIO COLOMBINI

ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

▪ Balaios confeccionados pelo povo baniwa a partir de talo de arumã e corante natural.

Converse com os colegas e o professor sobre as questões a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

- Você já conhecia esse tipo de grafismo? Eles apresentam algum tipo de isometria? Resposta pessoal.
- Pesquise sobre a arte dos povos indígenas do Brasil e da sua região. Selecione alguns grafismos pesquisados, apresente as imagens e discuta a respeito da importância da valorização da arte indígena. Pesquisa do estudante.

Congruência de triângulos

No Ensino Fundamental, você já deve ter estudado o conceito de figuras congruentes. Voltemos ao exemplo dos peixes centrais na obra de Escher da página 18. Partindo de um deles e realizando uma rotação de 180° em relação a um ponto conveniente, obtemos o outro peixe. Isso quer dizer que, se forem sobrepostos, os desenhos dos peixes coincidem exatamente. Nesse caso, dizemos que as figuras são congruentes.

De modo semelhante, dois polígonos com o mesmo número de lados são congruentes se pudermos sobrepô-los exatamente, fazendo com que coincidam.

PENSE E RESPONDA

Quais elementos devemos observar para determinar se dois polígonos com o mesmo número de lados são congruentes? Ver as **Orientações para o professor**.

No caso dos triângulos, estabelecida a correspondência entre os vértices, dizemos que:

> Dois triângulos são congruentes quando têm os lados e os ângulos internos correspondentes congruentes.

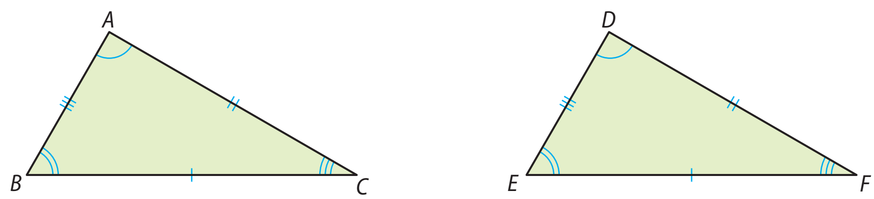
Ver as **Orientações para o professor**.

PENSE E RESPONDA

- Na imagem dos triângulos *ABC* e *DEF*, o que identifica os lados congruentes e os ângulos congruentes?
- Para o exemplo desses triângulos, poderíamos ter escrito $\triangle ACB \cong \triangle DEF$? Justifique.

Ver as **Orientações para o professor**.

Considere os triângulos *ABC* e *DEF* a seguir:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesses triângulos, os ângulos internos correspondentes têm a mesma medida, ou seja, são congruentes. Do mesmo modo, os lados correspondentes têm a mesma medida, portanto, também são congruentes. Assim, podemos escrever:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \quad \text{e} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{array} \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

símbolo de congruência

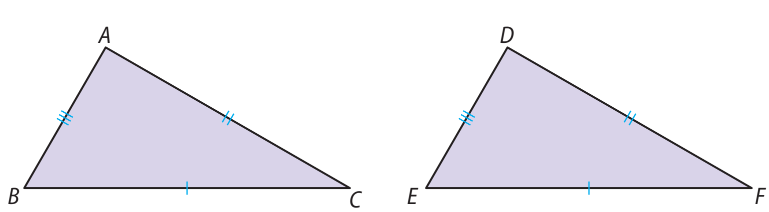
Casos de congruência de triângulos

Vimos que, para determinar se dois triângulos são congruentes, verificamos se os seus lados e os seus ângulos correspondentes são congruentes.

No entanto, existem algumas condições que, quando satisfeitas, nos garantem que dois triângulos são congruentes sem precisar verificar os três lados e os três ângulos. Essas condições são chamadas de **casos de congruência de triângulos** e podem ser demonstradas. Apresentaremos, a seguir, esses casos

1º caso: Lado, Lado, Lado (LLL)

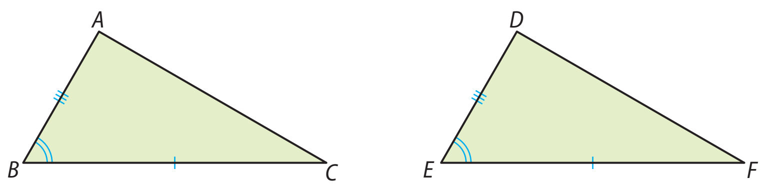
> Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

2º caso: Lado, Ângulo, Lado (LAL)

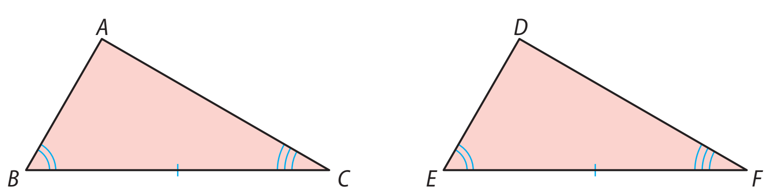
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo interno compreendido entre esses lados correspondentes congruentes.



$$\left.\begin{array}{r}\overline{AB} \cong \overline{DE}\\ \hat{B} \cong \hat{E}\\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

3º caso: Ângulo, Lado, Ângulo (ALA)

Dois triângulos são congruentes quando possuem dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos correspondentes congruentes.

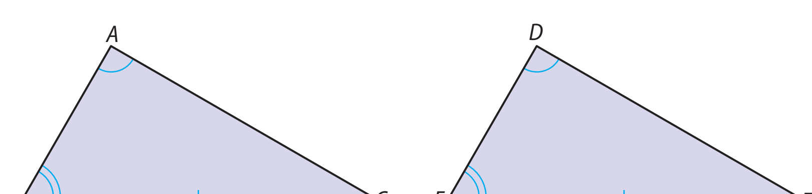


$$\left.\begin{array}{r}\hat{B} \cong \hat{E}\\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\\ \hat{C} \cong \hat{F}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

4º caso: Lado, Ângulo, Ângulo Oposto (LAA_0)

Dois triângulos são congruentes quando possuem um lado, um ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado correspondentes congruentes.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



$$\left.\begin{array}{r}\overline{BC} \cong \overline{EF}\\ \hat{B} \cong \hat{E}\\ \hat{A} \cong \hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

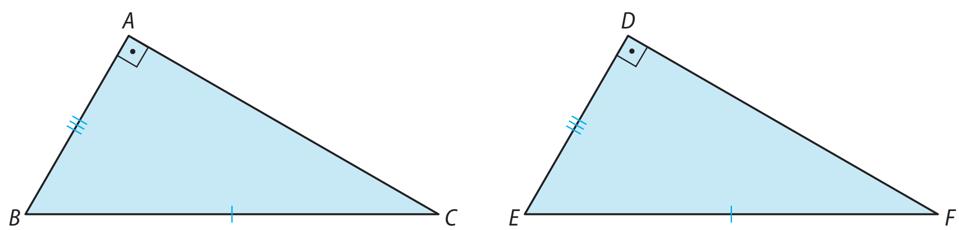
Caso de congruência no triângulo retângulo

PENSE E RESPONDA

Que nome recebem os lados de um triângulo retângulo? Identifique-os na imagem a seguir.

Catetos e hipotenusa. Na imagem, os lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ são os catetos. Os lados $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ são as hipotenusas.

Dois triângulos retângulos são congruentes quando possuem a hipotenusa e um dos catetos respectivamente congruentes.



EDITORIA DE ARTE

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{D} \\ \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Algumas aplicações da congruência de triângulos são no cálculo de distâncias, na determinação de elementos desconhecidos de triângulos e na demonstração de diversas propriedades importantes em Geometria.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Observe as imagens a seguir e verifique se, em cada caso, a figura **2** resulta da reflexão da figura **1** em relação à reta *r*. Justifique.

a)

Figura **1**

HELEN STEBAKOV/ SHUTTERSTOCK.COM

r

Figura **2**

b)

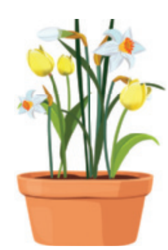


Figura **1**

r

Figura **2**

ONYXPRJ/SHUTTERSTOCK.COM

Resolução

a) Observando a imagem, percebemos que, se dobrássemos a folha na linha da reta *r*, as duas figuras se sobreporiam exatamente. Assim, podemos concluir que a figura **2** é a reflexão da figura **1** em relação à reta *r*.

Outro modo de verificar é traçar segmentos de reta unindo os respectivos pontos de cada figura. Se todos eles forem paralelos entre si e a reta *r* for a mediatriz de todos eles, então as figuras são reflexão uma da outra.

b) Realizando o mesmo procedimento do item anterior, verifica-se que as duas figuras não ficam perfeitamente sobrepostas. Portanto, a figura **2** não é a reflexão da figura **1** em relação à reta *r*.

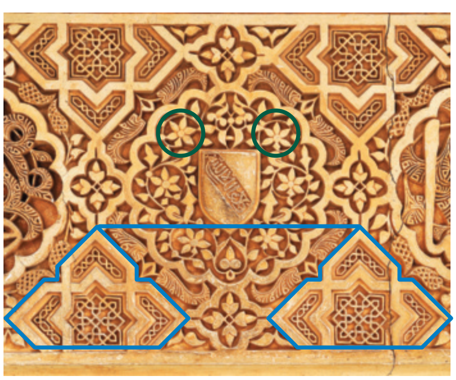
4. Observe a imagem e identifique as isometrias presentes.

FOTOS: JOSERPIZARRO/SHUTTERSTOCK.COM

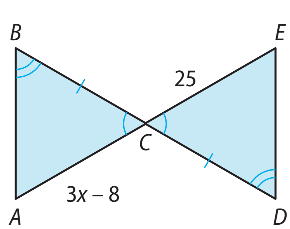
▪ Detalhe do interior do Palácio de Alhambra (Espanha). Esse palácio foi uma das inspirações de M. C. Escher para suas obras. Fotografia de 2013.

Resolução

Podemos identificar pelo menos uma translação e uma rotação na imagem. Veja, a seguir, a translação indicada em azul e a rotação indicada em verde.



5. Observe a figura a seguir e determine o valor de *x*.



Resolução

De acordo com a figura, os lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, assim como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ e os ângulos $B\hat{C}A$ e $E\hat{C}D$ (opostos pelo vértice).

Então, pelo caso ALA de congruência, podemos afirmar que $\triangle BCA \cong \triangle DCE$. Observe que a congruência desses triângulos só é possível com essa correspondência entre os vértices. Como os triângulos são congruentes, temos $\overline{AC} \cong \overline{CE}$. Assim:

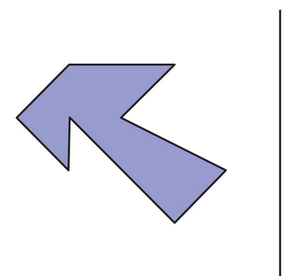
$3x - 8 = 25$

$3x = 25 + 8$

$3x = 33$

$x = 11$

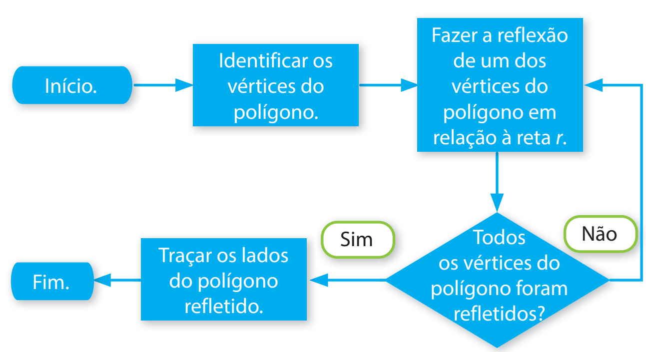
6. Construa um fluxograma que indique os passos para desenhar a reflexão em relação à reta *r* do polígono mostrado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Para fazer a reflexão de um polígono em relação a uma reta, fazemos a reflexão de seus vértices e, em seguida, traçamos os lados do polígono. O fluxograma a seguir indica os passos necessários para essa construção.



PENSE E RESPONDA

- Faz diferença o vértice escolhido para começar o processo? Explique.
- Esse processo serve para refletir qualquer polígono em relação a uma reta?

Ver as **Orientações para o professor**.

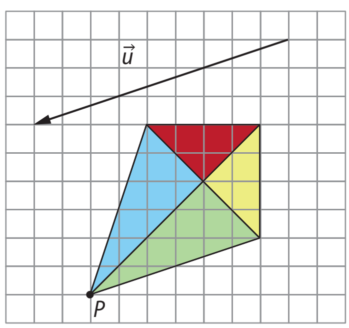
> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

10. Identifique as isometrias utilizadas no painel a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

SELMA CAPARROZ

11. Observe a figura da pipa representada em uma malha quadriculada, conforme mostrado a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.



Agora, desenhe no caderno as figuras obtidas a partir de cada uma das transformações a seguir.

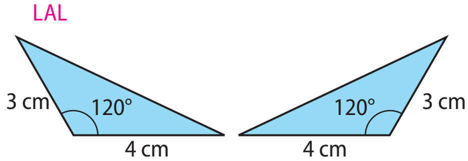
a) A translação indicada pelo vetor $\vec{u}$.

b) A rotação de 180° em torno do ponto P no sentido anti-horário.

- Como ficaria a figura se, no item **b**, mantendo o ângulo e o centro de rotação, fizéssemos a rotação em sentido horário?

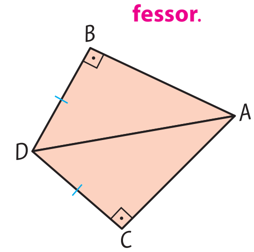
12. No par de triângulos a seguir, identifique o caso de congruência.

LAL

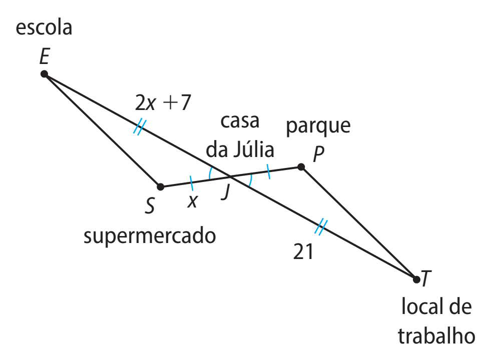


13. Dois triângulos ABC e MNP são congruentes. O perímetro do triângulo ABC é 68 cm. Os lados do triângulo MNP medem $5q$, $q + 6$ e $3q + 8$. Determine o valor de q. $q = 6$

14. Na figura, $BD = DC$ e $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos retos. Prove que $AB = AC$. Ver as **Orientações para o professor**.



15. A casa de Júlia está situada na metade do caminho entre sua escola e seu local de trabalho. Júlia observou que sua casa também fica exatamente na metade do caminho entre o supermercado e o parque. Sabe-se que a distância entre a escola e a casa de Júlia é de $(2x + 7)$ km, e a distância da casa de Júlia até seu local de trabalho é de 21 km. A distância entre o supermercado e a casa de Júlia é x km, conforme o esquema a seguir. Para ir até o parque, saindo de sua casa, quantos quilômetros Júlia deverá percorrer? 7 km



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

16. Considerando os casos de congruência entre triângulos e as aplicações apresentadas até aqui, reúna-se a um colega e elaborem um problema envolvendo um dos casos de congruência. Resolvam o problema e, em seguida, troquem com outra dupla, para que resolvam o problema elaborado pelo outro grupo. Verifiquem se a maneira como seus colegas resolveram é parecida ou igual à de vocês. Conversem sobre as formas de resolução. Produção dos estudantes. Ver as **Orientações para o professor**.

17. Construa um fluxograma com os passos que indicam a translação de um polígono por um vetor $\vec{u}$. Ver as **Orientações para o professor**.

Ficaria igual. Espera-se que os estudantes percebam que ao rotacionar 180°, não importa qual é o sentido da rotação, obtém-se a mesma figura.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Tales de Mileto e as pirâmides do Egito

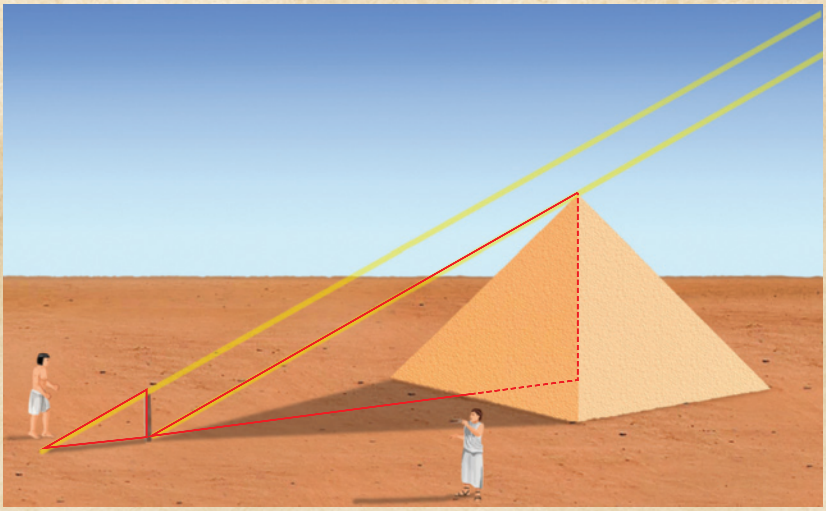
Vimos o enunciado do teorema de Tales e sua demonstração. Fizemos também algumas atividades utilizando esse resultado matemático. Agora, vamos conhecer um pouco mais sobre Tales de Mileto, o matemático que dá nome a esse teorema. Para isso, leia o texto a seguir.

Segundo a tradição a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.

Segundo parece, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra [...]. De volta a Mileto ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. [...]

[...] Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 94-95; 115.



Representação artística da versão dada por Plutarco, em que Tales usou proporcionalidade e semelhança de triângulos para calcular a altura de uma das pirâmides do Egito. Considerando que os raios de Sol que chegam à Terra têm direções paralelas entre si, eles incidem com a mesma inclinação tangenciando tanto o topo da pirâmide como o da estaca fincada no solo, fazendo que projetem suas sombras. Têm-se, assim, três medidas: os comprimentos da estaca, da sombra da estaca e da sombra da pirâmide. Com isso, calcula-se a altura da pirâmide.

ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK.COM

Figuras semelhantes

Semelhança é a característica do que é semelhante. Na linguagem do dia a dia, dois objetos são semelhantes quando são "parecidos".

Em Matemática, o conceito de semelhança é diferente daquele de uso cotidiano. Podemos associar a ideia de figuras semelhantes à ampliação ou redução de uma imagem, mantendo proporcionalmente a sua forma.

É o que acontece, por exemplo, quando damos *zoom* em uma foto no celular ou no computador: ela é ampliada, mas as proporções são mantidas.


FEYLITE/SHUTTERSTOCK.COM

▪ O gesto de "pinça" é utilizado para dar *zoom* em imagens no celular.

Agora, observe as imagens a seguir em que a fotografia foi ampliada da situação **A** para a situação **B**.

4,5 cm

3 cm

▪ Figura **A**

6 cm

4 cm


ANETAPICS/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Figura **B**

Quando ampliamos (ou reduzimos) a fotografia, as medidas dos ângulos são preservadas e as medidas dos segmentos correspondentes aos da fotografia original são aumentadas (ou reduzidas) na mesma razão.

Ao calcular a razão entre as medidas da fotografia, obtemos a razão de proporcionalidade entre as medidas, assunto do qual trataremos mais adiante.

$$\frac{4{,}5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

razão de proporcionalidade

Assim, dizemos que a fotografia original e a ampliada (ou a reduzida) são **figuras semelhantes**. Observe que qualquer segmento traçado na Figura **B** tem que medir 1,5 vezes a medida do segmento correspondente na Figura **A**.

Vamos formalizar esse conceito de semelhança para os polígonos.

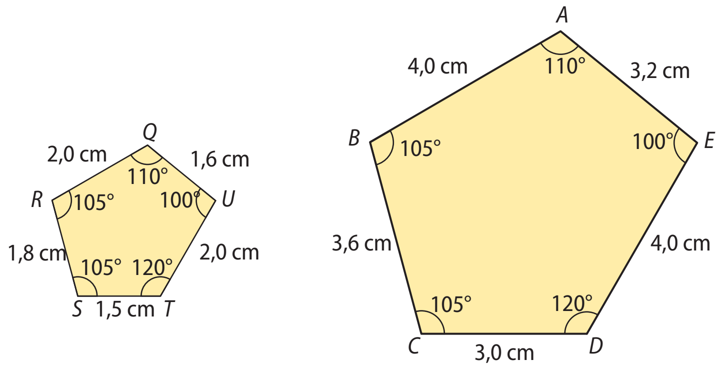
PENSE E RESPONDA

Mantendo a razão de proporcionalidade da fotografia, qual deve ser a medida da maior dimensão, sabendo que a medida da menor é 15 cm?

22,5 cm

Polígonos semelhantes

Considere os pentágonos *QRSTU* e *ABCDE* representados a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Vamos analisar alguns de seus elementos.

Comparando as medidas dos ângulos internos, observe que $\hat{Q}$ e $\hat{A}$ possuem a mesma medida: 110°. Também podemos indicar como:

$$\text{med}(\hat{Q}) = \text{med}(\hat{A}) = 110°$$

Comparando os demais pares de ângulos, ordenadamente, temos:

$\text{med}(\hat{R}) = \text{med}(\hat{B}) = 105°$ $\quad$ $\text{med}(\hat{T}) = \text{med}(\hat{D}) = 120°$

$\text{med}(\hat{S}) = \text{med}(\hat{C}) = 105°$ $\quad$ $\text{med}(\hat{U}) = \text{med}(\hat{E}) = 100°$

Note que os ângulos correspondentes dos pentágonos têm a mesma medida, isto é, são congruentes. Nesse caso, escrevemos:

$$\hat{Q} \cong \hat{A} \qquad \hat{R} \cong \hat{B} \qquad \hat{S} \cong \hat{C} \qquad \hat{T} \cong \hat{D} \qquad \hat{U} \cong \hat{E}$$

Analisando as medidas dos lados correspondentes, *QR* e *AB*, temos:

$$QR = 2{,}0 \text{ cm e } AB = 4{,}0 \text{ cm}$$

Comparando, ordenadamente, os pares de lados correspondentes, temos:

$RS = 1{,}8$ cm e $BC = 3{,}6$ cm $\quad$ $TU = 2{,}0$ cm e $DE = 4{,}0$ cm

$ST = 1{,}5$ cm e $CD = 3{,}0$ cm $\quad$ $UQ = 1{,}6$ cm e $EA = 3{,}2$ cm

Perceba que os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{2{,}0}{4{,}0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{ST}{CD} = \frac{1{,}5}{3{,}0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{UQ}{EA} = \frac{1{,}6}{3{,}2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{RS}{BC} = \frac{1{,}8}{3{,}6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{TU}{DE} = \frac{2{,}0}{4{,}0} = \frac{1}{2}$$

Como os ângulos internos são ordenadamente congruentes e os lados correspondentes dos pentágonos são proporcionais, dizemos que os pentágonos *QRSTU* e *ABCDE* são semelhantes.

Indicamos: pentágono *QRSTU* $\sim$ pentágono *ABCDE*

símbolo de semelhança

PENSE E RESPONDA

Duas figuras congruentes são sempre semelhantes. E a recíproca, é verdadeira? Explique.

Ver as **Orientações para o professor**.

SAIBA QUE...

Os ângulos $\hat{Q}$ e $\hat{A}$ são **ângulos correspondentes**, assim como os pares de ângulos $\hat{R}$ e $\hat{B}$, $\hat{S}$ e $\hat{C}$, $\hat{T}$ e $\hat{D}$, $\hat{U}$ e $\hat{E}$.

Podemos definir que:

Dois polígonos são **semelhantes** quando satisfazem duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

SAIBA QUE...

Se duas figuras **A** e **B** são semelhantes e têm, nessa ordem, razão de semelhança $k > 1$, então a figura **A** é uma ampliação da figura **B**. Se a razão de semelhança for $k < 1$, então a figura **A** é uma redução da figura **B**.

Observações:

- Os lados (ou ângulos) correspondentes também são chamados de lados (ou ângulos) **homólogos**.
- O número k obtido pela razão entre as medidas dos lados homólogos é chamado de **razão de semelhança**. No exemplo dado, temos $k = \frac{1}{2}$.
- Duas figuras **congruentes** têm razão de semelhança k igual a 1. É o que acontece, por exemplo, quando aplicamos alguma das isometrias em uma figura: reflexão, translação, rotação ou uma combinação delas.

Se dois polígonos são semelhantes e têm razão k, então a razão entre as respectivas alturas, perímetros, ou qualquer outra medida linear também é k.

Sim, eles têm o mesmo formato, no entanto, possuem tamanhos diferentes. Espera-se que os estudantes percebam que o tamanho dos peixes vai diminuindo do centro para as extremidades da obra.

Transformações homotéticas

Vamos retomar o quadro de Escher da página 18.

PENSE E RESPONDA

Observe os peixes vermelhos destacados na xilogravura e responda:

- Eles têm o mesmo formato? O que podemos afirmar sobre o seu tamanho?

■ Obra **Limite quadrado**, de M. C. Escher.

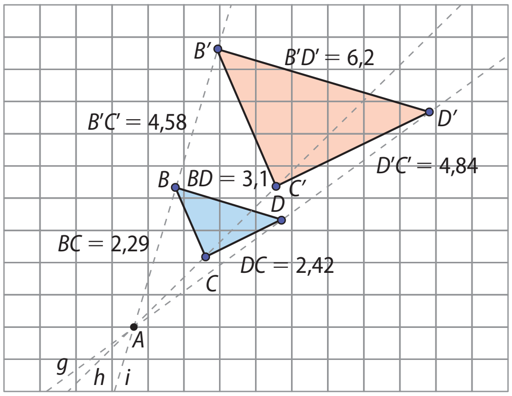
Considerando um dos peixes vermelhos que foram destacados na xilogravura, o outro pode ser obtido a partir dele por meio de uma **transformação homotética**. Nesse tipo de transformação, o tamanho das figuras é alterado, porém a nova figura é semelhante à figura original. As transformações homotéticas também são chamadas de **homotetias** e mantêm a proporcionalidade das medidas lineares.

A ampliação e a redução são exemplos de homotetias. Para ampliar ou reduzir um polígono, fixa-se um ponto e, a partir desse ponto, são traçadas semirretas que passam pelos vértices do polígono. A redução ou a ampliação é obtida traçando-se segmentos paralelos aos lados do polígono original de acordo com uma medida determinada.

O ponto fixado, que é origem das semirretas, é chamado de **centro de homotetia**. A medida determinada é a **razão de homotetia** k. Quando $k > 0$, a homotetia é chamada **direta** e quando $k < 0$, a homotetia é **inversa**.

Por exemplo, vamos determinar a razão de homotetia k entre os triângulos *BCD* e *B'C'D'* da figura. O ponto *A* é o centro de homotetia. A correspondência estabelecida entre os vértices do triângulo original e os do ampliado é tal que:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD}{AD} = k$$



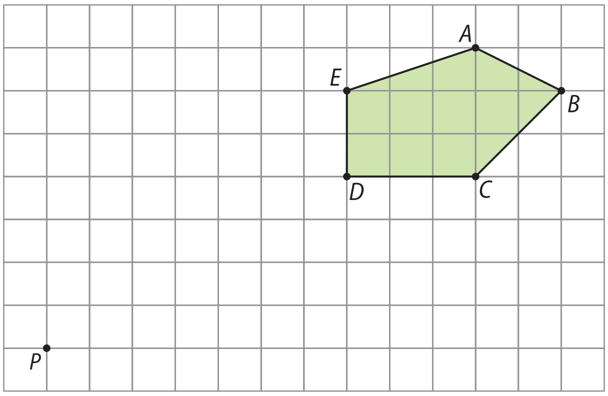
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como a homotetia preserva a proporcionalidade das medidas lineares, ao determinar a razão entre as medidas dos lados dos dois triângulos, estaremos determinando a razão de homotetia k. Assim:

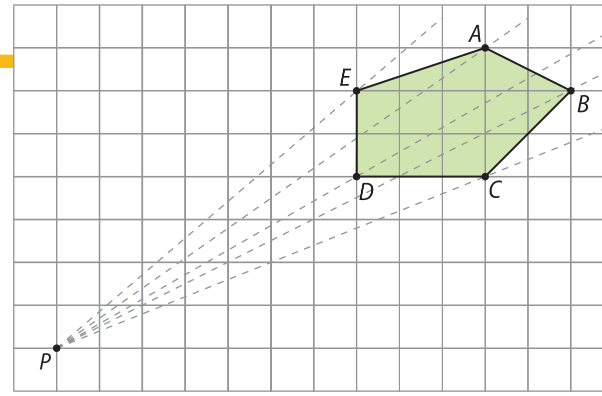
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{4,58}{2,29} = 2 \qquad \frac{B'D'}{BD} = \frac{6,2}{3,1} = 2 \qquad \frac{D'C'}{DC} = \frac{4,84}{2,42} = 2$$

Portanto, a razão de homotetia entre os triângulos é $k = 2$, isto é, o triângulo *B'C'D'* é uma ampliação do triângulo *BCD* com razão 2.

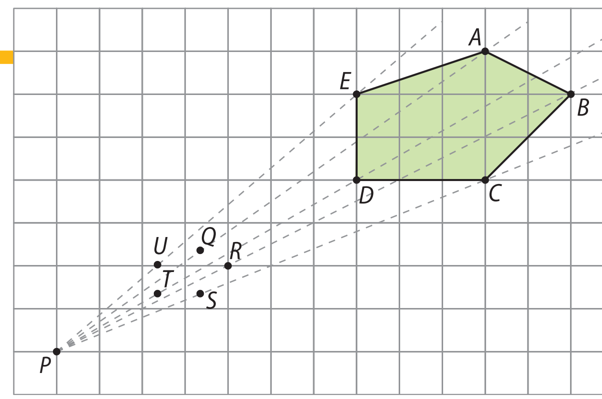
Agora, vamos ver como construir um polígono de modo que ele seja a redução de outro polígono. Veja, na figura a seguir, o polígono *ABCDE*. O ponto *P* é o centro da homotetia, e a razão k é de $\frac{1}{3}$, ou seja, o novo polígono será três vezes menor do que o original.



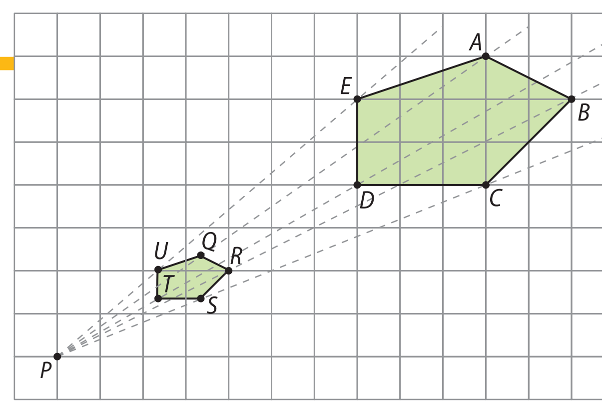
1) Traçamos as semirretas com origem em *P* e que passam por cada vértice.



2) Determinamos os vértices do novo polígono reduzido. Por exemplo, o ponto *Q*, correspondente ao ponto *A*, deverá estar na semirreta $\overrightarrow{PA}$, de modo que $\dfrac{PQ}{PA} = k = \dfrac{1}{3}$.



3) Unimos os vértices para construir o polígono reduzido, semelhante ao original com razão $\dfrac{1}{3}$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

- Reúna-se a mais um colega e reproduzam a sequência de passos para fazer uma redução (ou ampliação) usando o *software* **GeoGebra**.
- Utilizem a ferramenta **Homotetia** do **GeoGebra** para conferir o trabalho feito.
- O que acontece quando uma razão de homotetia negativa é inserida?

Ver as **Orientações para o professor**.

As isometrias e as homotetias estão muito presentes nas diversas formas de arte. Nosso cérebro e nossos olhos tendem a compreender as transformações do plano como algo harmônico, agradável aos olhos.

Como vimos na abertura deste Capítulo, o artista gráfico holandês Escher é um dos representantes da categoria que utilizou muito as transformações no plano em suas obras.

PARA ACESSAR

SALA de atividades: pavimentação: sala 2. **Clubes de Matemática da OBMEP**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/. Acesso em: 15 jun. 2020.

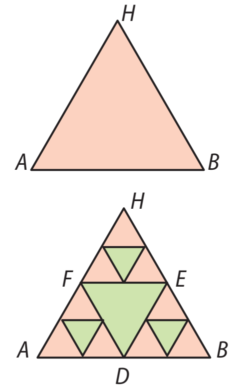
Nesse *site* há textos, vídeo e atividades que envolvem as obras de Escher e Matemática.

Ampliações e reduções estão presentes na geometria fractal. **Fractal** é um vocábulo criado pelo matemático polonês Benoît Mandelbrot (1924-2010), em 1967. Essa palavra vem do latim *fractus*, cujo significado é fragmento, proveniente de fragmentar, quebrar.

Observe, ao lado, o um triângulo equilátero *AHB*. Para obter um fractal desse triângulo, marcamos o ponto médio de cada lado dele e ligamos os três pontos médios, obtendo outro triângulo equilátero *FDE*. O triângulo *AHB* ficou dividido em quatro triângulos congruentes. Efetuamos o mesmo procedimento em cada triângulo obtido, e assim sucessivamente.

Esse processo infinito, que segue uma regra fixa aplicada repetidamente, é chamado de **iteração**. O resultado de cada iteração é o ponto de partida para a próxima iteração.

Perceba que cada triângulo interno ao triângulo original é semelhante a ele. Assim, um fractal tem como característica a **autossimilaridade**, ou seja, cada parte é similar ao todo do fractal.

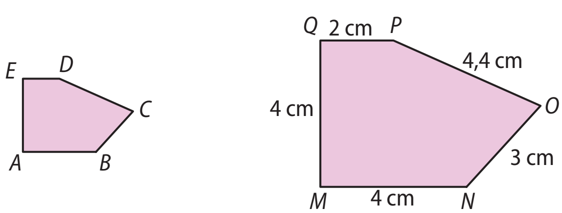


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ Esse fractal é conhecido como triângulo de Sierpinski, em homenagem ao matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

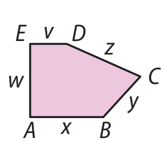
> ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Os pentágonos *ABCDE* e *MNOPQ* são semelhantes. Sabendo que o perímetro do pentágono *ABCDE* é 8,7 cm, determine a medida de seus lados.



Resolução

Indicando as medidas dos lados do pentágono *ABCDE* por *x*, *y*, *z*, *v* e *w*, como mostrado na imagem, escrevemos a expressão que indica a razão de semelhança:



$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NO} = \frac{CD}{OP} = \frac{DE}{PQ} = \frac{EA}{QM} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4,4} = \frac{v}{2} = \frac{w}{4}$$

Indicando o perímetro dos polígonos por *P*, temos:

$P_{MNOPQ} = 2 + 4,4 + 3 + 4 + 4 = 17,4$

Como observado anteriormente, a razão entre os perímetros de polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança entre eles. Assim:

$$\frac{P_{ABCDE}}{P_{MNOPQ}} = \frac{8,7}{17,4} = 0,5 = \frac{1}{2}$$

Além disso, podemos escrever:

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{y}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1,5$$

$$\frac{z}{4,4} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 2,2$$

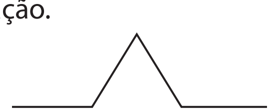
$$\frac{v}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 1$$

$$\frac{w}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow w = 2$$

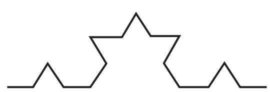
Portanto, *AB* = 2 cm, *BC* = 1,5 cm, *CD* = 2,2 cm, *DE* = 1 cm e *EA* = 2 cm.

8. Na página anterior, vimos como construir o triângulo de Sierpinski. Um outro fractal bastante conhecido é a curva de Koch. Ela é atribuída ao matemático sueco Niels Koch (1870-1924), que a apresentou em um artigo em 1906. Essa curva é construída a partir de um processo recursivo, utilizando iterações, assim como o triângulo de Sierpinski.
A sequência de iterações a seguir mostra como a curva de Koch é formada. Observe-a, determine a regra de construção desse fractal e faça a terceira iteração.

figura inicial



1ª iteração



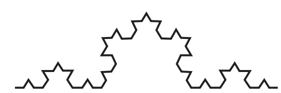
2ª iteração

Resolução

Observando cada iteração feita, podemos determinar a sequência de passos que determina a formação da curva de Koch:

1) Divida um segmento de reta em 3 partes iguais.
2) Substitua o segmento do meio por dois segmentos de mesma medida do segmento retirado de modo a obter um triângulo equilátero sem a base.
3) Repita os passos 1 e 2 com os segmentos de reta da nova figura.

Aplicando essa sequência de ações na figura da 2ª iteração, obtemos a 3ª iteração.



3ª iteração

PARA ASSISTIR **PARA LER**

FRACTAL em forma de floco de neve de Koch. 2014. Vídeo (9min12s). Publicado por Khan Academy. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/geometry-volume-surface-area/koch-snowflake/v/koch-snowflake-fractal. Acesso em: 16 jun. 2020.

Conheça um pouco mais a respeito da formação da curva de Koch com esse vídeo.

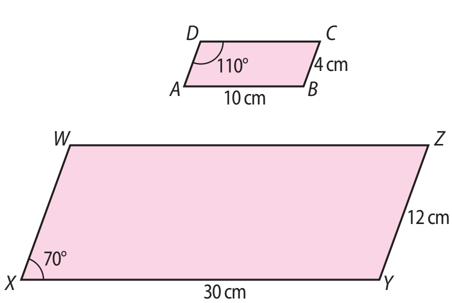
VAZ, C. L. D.; NERI Jr., E. dos P. Curvas e sua arte. *In*: VAZ, C. L. D.; NERI Jr., E. dos P. **Artemática**: explorando o potencial artístico da matemática. Belém: EditAedi, 2018. *E-book*. Disponível em: http://editaedi.ufpa.br/ebooks/artematica/curva-koch.html. Acesso em: 16 jun. 2020.

Explore algumas atividades envolvendo a curva de Koch.

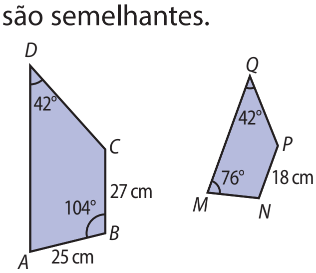
ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

18. Verifique se os paralelogramos *ABCD* e *XYZW* são semelhantes. São semelhantes.



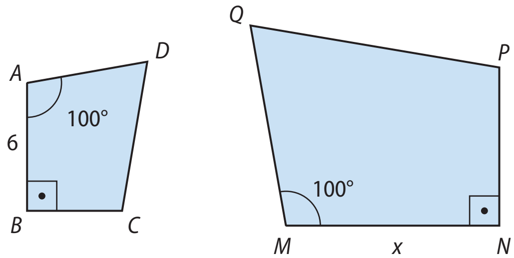
19. Os trapézios *ABCD* e *MNPQ* representados a seguir são semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Reúna-se a um colega e elaborem duas perguntas que envolvam os dados dessas figuras e responda-as.
Produção dos estudantes. Ver as **Orientações para o professor**.

20. Os quadriláteros *ABCD* e *MNPQ* a seguir são semelhantes e o lado *AB* do primeiro corresponde ao lado *MN* do segundo. Se a razão de semelhança do quadrilátero *ABCD* para o quadrilátero *MNPQ* é de $\frac{3}{5}$, determine a medida do lado *MN* do quadrilátero *MNPQ*. 10



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

21. Um estudante representou no papel a planta de sua sala de aula, que tem a forma retangular. A sala tem 8 m de comprimento por 4,5 m de largura. No desenho feito pelo estudante, o comprimento era 16 cm, a largura, 9 cm e os ângulos internos eram retos.

a) Justifique por que o desenho ficou semelhante à sala de aula original. Ver as **Orientações para o professor.**

b) Qual é a razão de semelhança utilizada?

c) Se o estudante quiser construir uma maquete da sala, usando a mesma escala, qual deverá ser a altura da maquete, se a altura real da sala é 2,8 m? 5,6 cm

b) $k = 50$ ou $k = \frac{1}{50}$

22. A razão de semelhança entre dois decágonos regulares é $\frac{3}{5}$. Se o perímetro do decágono que possui o maior lado é 720 mm, qual é a medida do lado, em centímetro, do outro decágono? 4,32 cm

23. Os tampos de duas mesas retangulares são semelhantes. A razão de semelhança entre as medidas dos lados do maior para o menor é 1,5. Se as dimensões do tampo da mesa menor são 3,5 m e 2,5 m, determine o perímetro do tampo da mesa maior. 18 m


MUKLIS SETIAWAN/ SHUTTERSTOCK.COM

24. Crie uma figura em uma folha de papel quadriculado. Escolha uma razão de homotetia e aplique a transformação, que pode ser uma ampliação ou redução. Analise o resultado e faça um registro sobre a sua construção considerando a figura inicial. Produção dos estudantes.

25. Reúna-se a mais dois colegas, acessem o *site* oficial do artista M. C. Escher <https://mcecher.com/> (acesso em: 15 jun. 2020) e escolham uma de suas obras que tenha pelo menos um tipo de transformação no plano. Em seguida, identifiquem-nas e montem um esquema para apresentar ao restante da turma.
A resposta depende da escolha dos estudantes.

PARA ACESSAR

METAMORPHOSIS MACHINE. Disponível em: https://escher.ntr.nl/en/mmm. Acesso em: 16 jun. 2020.

Nesse *site*, você pode criar sua própria obra com base na obra **Metamorfose II**, de Escher.

Professor, o *site* indicado está em inglês, mas seu uso é intuitivo. É possível trabalhar com o professor de Língua Inglesa para acessá-lo.

26. Já vimos vários exemplos de fractais, como o triângulo de Sierpinski. Agora, vamos conhecer mais um. Siga os passos a seguir para realizar a construção. Faça três iterações.

I) Construa um quadrado de lado medindo 3 cm.

II) Divida esse quadrado em nove quadrados menores. Para isso, divida cada lado em três partes iguais.

III) Pinte o quadrado menor central.

IV) Repita os passos **II** e **III** para os demais quadrados da figura que não estão pintados.

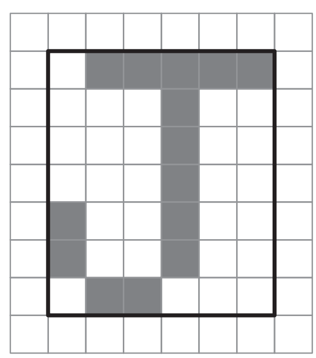
Agora, pesquise a respeito da figura obtida e descubra o nome desse fractal. Tapete de Sierpinski.

27. A curva de Peano também é um fractal. Para construí-la, existe uma regra de iteração. Pesquise como construir essa curva e construa uma parte dela. Depois, apresente aos colegas e ao professor a sua construção.
Produção do estudante.

Ampliando e reduzindo em telas

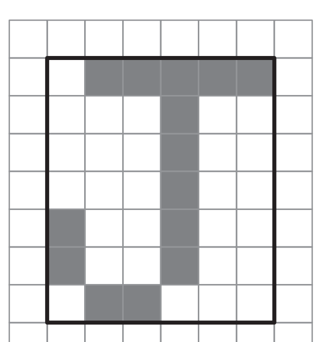
O computador é uma máquina que pode ser programada, o que significa que é possível criar uma sequência de instruções para que ele execute determinada função. Para programá-lo, é necessário usar uma linguagem de programação, para garantir que as instruções sejam passadas de maneira precisa e coesa. Essas linguagens de programação são escritas por nós, seres humanos, e interpretadas pelo computador como uma linguagem de máquina, que é uma grande sequência de números.

Se os computadores só armazenam números, como eles reproduzem as imagens? Primeiro, é necessário pensar em como são as telas. Os visores de computadores são compostos por uma grade de pontos, cada um desses pontos é chamado de ***pixel***. Em uma tela em preto e branco, o *pixel* pode assumir uma dessas duas cores. Dessa maneira, não só as imagens, como tudo que aparece em uma tela é formado por uma junção de *pixels* pretos e brancos, como a letra **J** a seguir:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, para que o computador armazene a imagem, basta que ele guarde quais *pixels* são de cada cor. Uma possível maneira de fazer isso é associar uma sequência de números a cada linha de tal maneira que descreva quais devem ser brancos e quais devem ser pretos. Investigue a imagem a seguir e observe como essa associação é feita para a letra **J**!



- Linha 1: 1, 5
- Linha 2: 3, 1, 2
- Linha 3: 3, 1, 2
- Linha 4: 3, 1, 2
- Linha 5: 0, 1, 2, 1, 2
- Linha 6: 0, 1, 2, 1, 2
- Linha 7: 1, 2, 3

PENSE E RESPONDA

Observe a sequência descrita para armazenar a imagem da letra **J** e responda:

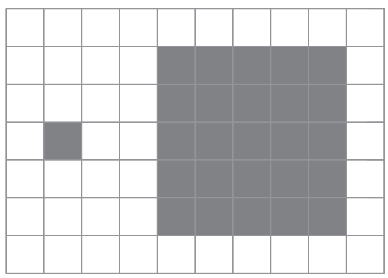
- Qual é o motivo de esses valores estarem atrelados a essas linhas?
- Por que algumas começam com zero? Qual é o impacto na imagem?
- O que as linhas com o mesmo código têm em comum?

Ver as **Orientações para o professor**.

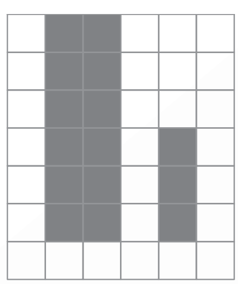
ESSL/SHUTTERSTOCK.COM

O primeiro dígito do código se refere à quantidade de *pixels* brancos que estão mais à esquerda da tela. Já o segundo dígito descreve quantos *pixels* pretos existem depois dos brancos. O terceiro indica quantos brancos há a seguir, e assim por diante até obter toda a informação da linha dessa sequência numérica. Esse processo é feito linha a linha. Observe que, se o primeiro *pixel* for preto, o código começará com um zero.

As imagens na tela podem ser ampliadas e as proporções são mantidas. Observe como ficaria a ampliação de um *pixel* em cinco vezes, isto é, a figura semelhante a um único *pixel* com razão de semelhança 5:



Da mesma maneira, as imagens podem ser reduzidas. Observe agora como seria a redução de um retângulo 6×2 com razão de semelhança 0,5:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Agora, faça o que se pede na atividade a seguir. **NÃO ESCREVA NO LIVRO**

- Em uma malha quadriculada:

a) desvende a imagem armazenada por um computador com o seguinte código: Ver as **Orientações para o professor**.

3, 1, 3	0, 7	0, 1, 1, 3, 1, 1
2, 1, 1, 1, 2	0, 1, 5, 1	0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 3, 1, 1	0, 1, 5, 1	0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
0, 1, 5, 1	0, 1, 5, 1	0, 7

b) crie uma nova figura, com base na imagem do item anterior, com razão de semelhança 2 e escreva o código de armazenamento dessa imagem. Ver as **Orientações para o professor**.

ESSL/SHUTTERSTOCK.COM

Semelhança de triângulos

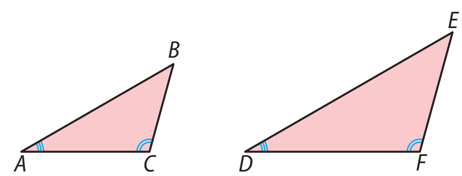
Vimos que, estabelecida uma correspondência entre os vértices, dois polígonos são semelhantes quando se verificam duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Entretanto, os triângulos constituem um caso especial. É possível estabelecer um conjunto de critérios mínimos que garantam a semelhança entre dois triângulos sem que seja necessário verificar as três congruências dos ângulos e a proporcionalidade entre todos os lados. Esses conjuntos de critérios podem ser demonstrados e são conhecidos como **casos de semelhança**. A seguir, apresentamos três deles.

Casos de semelhança de triângulos

1º caso: Ângulo, Ângulo (AA)

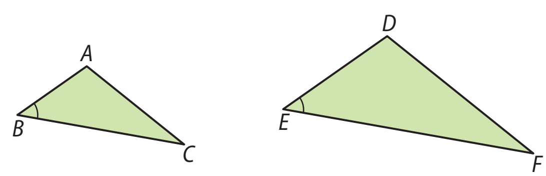
Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{C} \cong \hat{F}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

2º caso: Lado, Ângulo, Lado (LAL)

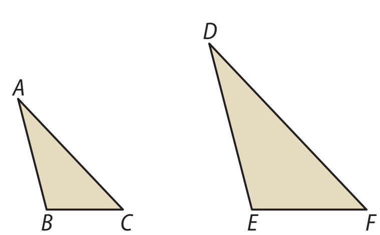
Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \cong \hat{E} \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

3º caso: Lado, Lado, Lado (LLL)

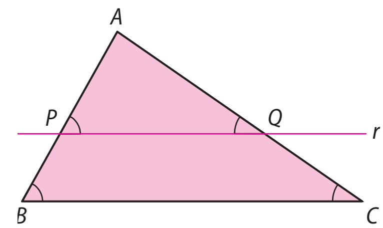
Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Teorema fundamental da semelhança



Vamos, agora, trabalhar com um teorema bastante utilizado na resolução de exercícios e atividades, conhecido como teorema fundamental da semelhança. Ele também é útil na demonstração de outras proposições matemáticas.

Consideremos o triângulo *ABC* ao lado. Nele, vamos traçar uma reta *r*, paralela ao lado $\overline{BC}$, que vai intersectar o lado $\overline{AB}$ no ponto *P* e o lado $\overline{AC}$ no ponto *Q*.

Do paralelismo de *r* com o lado $\overline{BC}$, temos: $\hat{P} \cong \hat{B}$ e $\hat{Q} \cong \hat{C}$, que são ângulos correspondentes.

Assim, os triângulos *APQ* e *ABC* têm ângulos ordenadamente congruentes. Portanto, pelo caso AA de semelhança, concluímos que $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

Assim, acabamos de provar que:

> Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Consequências da semelhança de triângulos

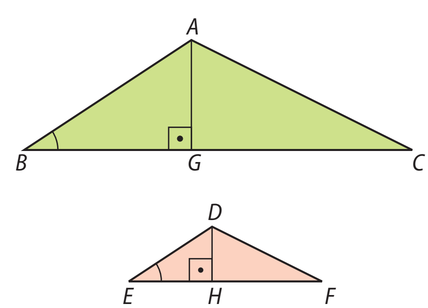
A partir da semelhança de triângulos, algumas consequências podem ser demonstradas. A seguir, apresentamos algumas delas.

1ª consequência

> Se a razão de semelhança entre as medidas dos lados de dois triângulos é igual a *k*, então:
> - a razão entre os perímetros também é *k*;
> - a razão entre as medidas de duas alturas homólogas também é *k*;
> - a razão entre as medidas de duas bissetrizes homólogas também é *k*;
> - a razão entre as áreas é igual a k^2.

Vamos demonstrar que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes (de razão de semelhança *k*) é k^2.

Demonstração



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considere dois triângulos *ABC* e *DEF* tais que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, como mostram as figuras ao lado. Então, pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

Traçando as alturas homólogas $\overline{AG}$ e $\overline{DH}$, temos, pelo caso AA de semelhança, $\triangle ABG \sim \triangle DEH$. Então, podemos escrever: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AG}{DH} = k$

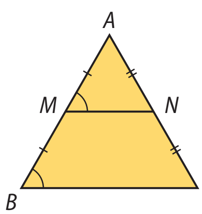
Calculando as respectivas áreas, indicadas por S, temos:

Área $\triangle ABC$: $S_1 = \dfrac{BC \cdot AG}{2}$ Área $\triangle DEF$: $S_2 = \dfrac{EF \cdot DH}{2}$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{BC \cdot AG}{2}}{\dfrac{EF \cdot DH}{2}} = \frac{BC \cdot AG}{EF \cdot DH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH} = k \cdot k = k^2$$

2ª consequência

Se um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então esse segmento de reta é paralelo ao terceiro lado e sua medida é metade da medida do terceiro lado.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Pelo teorema fundamental da semelhança, temos $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Logo, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{2}$ e, portanto, $MN = \dfrac{BC}{2}$.

3ª consequência

Se, pelo ponto médio de um lado de um triângulo, traçarmos uma reta paralela a outro de seus lados, ela encontrará o terceiro lado em seu ponto médio.

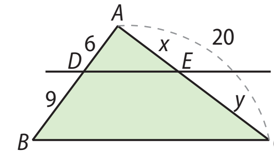
Na figura anterior, $\overline{MN} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ e $AN \cong NC$ (N é ponto médio de $\overline{AC}$).

> ATIVIDADE RESOLVIDA

9. Em um triângulo ABC, uma reta r é paralela ao lado $\overline{BC}$ e divide o lado $\overline{AB}$ em dois segmentos de reta cujas medidas são 6 cm e 9 cm. Se o lado $\overline{AC}$ do triângulo mede 20 cm, determine as medidas dos segmentos de reta formados pela intersecção da reta r com o lado $\overline{AC}$.

Resolução

Com os dados do enunciado do problema, fazemos essa figura, em que x e y representam as medidas dos segmentos de reta $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$, respectivamente, determinados em $\overline{AC}$ pela reta r.



Pelo teorema fundamental da semelhança, os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Então, podemos escrever:

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{x} \Rightarrow \dfrac{15}{6} = \dfrac{20}{x} \Rightarrow 15x = 120 \Rightarrow x = 8$

$x + y = 20 \Rightarrow 8 + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 8 \Rightarrow y = 12$

Portanto, $x = 8$ cm e $y = 12$ cm.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

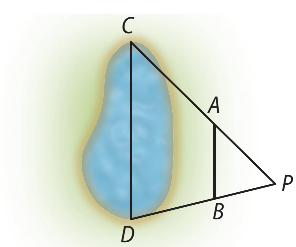
28. (UEMA) Um prédio e um poste projetam simultaneamente sombras de 20 m e 4 m, respectivamente. Se a altura do poste é 5 m, pode-se concluir que a altura do prédio é: alternativa **a**

a) 25 m
b) 20 m
c) 16 m
d) 15 m
e) 10 m

29. Os lados de um triângulo medem 10 cm, 12 cm e 18 cm. Determine as medidas dos lados de um triângulo semelhante ao anterior cujo perímetro é 60 cm. 15 cm, 18 cm e 27 cm

- Elabore uma atividade parecida com essa, alterando as medidas dos lados do triângulo e o perímetro do triângulo semelhante. Depois, troque com a atividade de um colega e resolvam.

30. (UFV-MG) Para determinar o comprimento de uma lagoa, utilizou-se o esquema indicado pela figura abaixo, onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. alternativa **c**



Sabendo-se que $AB = 36$ m, $BP = 5$ m e $DP = 40$ m, o comprimento CD da lagoa, em metros, é:

a) 248
b) 368
c) 288
d) 208
e) 188

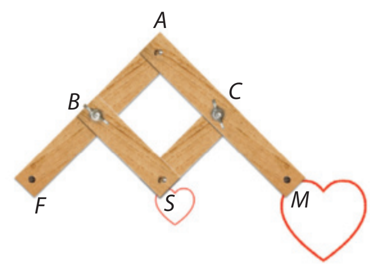
31. (Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metro de altura em relação ao solo.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa. 20,5 m

32. a) $B\hat{A}C$, $F\hat{B}S$, $S\hat{C}M$ e $B\hat{S}C$; $A\hat{B}S$ e $A\hat{C}S$; $B\hat{F}S$, $B\hat{S}F$, $C\hat{S}M$ e $C\hat{M}S$

32. O pantógrafo é um instrumento de desenho composto por longas hastes que, normalmente, são feitas de madeira. Com ele, é possível ampliar ou reduzir desenhos. As hastes estão interligadas por parafusos metálicos permitindo que o engenhoso aparelho se movimente conforme o desenho é feito. O ponto F é fixado à superfície onde se está desenhando (uma mesa, por exemplo), o ponto S é onde está a figura que será reproduzida e no ponto M fica posicionada a ponta de grafite. Ao movimentar o ponto S de modo que a figura a ser desenhada seja contornada, o grafite no ponto M é capaz de reproduzir uma figura semelhante, porém ampliada, como ilustrado a seguir:

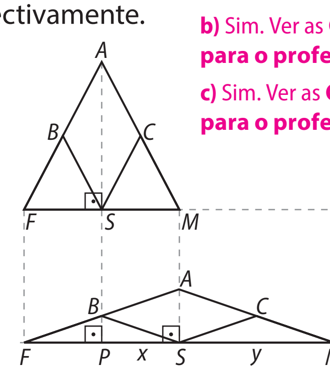


SELMA CAPARROZ

O esquema seguinte representa o esboço de um pantógrafo em que $AM \parallel BS$, assim como $AF \parallel CS$; B e C são pontos médios de AF e AM, respectivamente.

b) Sim. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Sim. Ver as **Orientações para o professor**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Agora, faça o que se pede em cada item.

a) Quais ângulos que aparecem na figura são congruentes entre si?

b) Os triângulos BFS, CSM e AFM são isósceles e semelhantes? Justifique.

c) Os triângulos BPS e ASM são retângulos e semelhantes? Justifique.

d) Determine o valor de $\frac{x}{y}$ sabendo que $med(\overline{AF}) = med(\overline{AM}) = 20$ cm. $\frac{1}{2}$

> CONEXÕES

Picos mais altos do Brasil

Você conhece os picos mais altos do Brasil? O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) fez a última atualização das altitudes dos picos em março de 2018. Leia o texto a seguir sobre esse assunto.

Geociências: IBGE revê as altitudes de sete pontos culminantes

[...]

A determinação da altitude em locais de difícil acesso sempre representou um grande desafio para o campo das geociências. No passado, a alternativa era o nivelamento barométrico, realizado com o barômetro, instrumento criado no século 17 e utilizado para medir a pressão atmosférica, altitude e mudanças no tempo. No entanto, os valores obtidos apresentavam imprecisões da ordem de metros. Com o advento das técnicas de posicionamento associadas aos Sistemas Globais de Navegação por Satélites (GNSS), em especial ao Sistema de Posicionamento Global (GPS), os levantamentos passaram a fornecer coordenadas (latitude, longitude e altitude) com alta precisão.

Utilizando a tecnologia GPS, em maio de 2004, o IBGE iniciou o projeto Pontos Culminantes, com o objetivo de determinar altitudes mais precisas para os picos mais elevados do Brasil, utilizando equipamentos de rastreamento GPS associados às modernas técnicas de posicionamento preciso por satélites. O projeto, executado em cooperação com o Instituto Militar de Engenharia (IME), foi concluído em 2005, com a medição do Monte Roraima (Serra de Pacaraíma, RR, divisa entre Brasil, Venezuela e Guiana) e outros seis pontos culminantes: Pico da Neblina (Serra do Imeri, AM), Pico 31 de Março (Serra do Imeri), Pico da Bandeira (Serra do Caparaó), Pico Pedra da Mina (Serra da Mantiqueira), Pico das Agulhas Negras (Serra da Mantiqueira) e Pico Cristal (Serra do Caparaó). [...]

GEOCIÊNCIAS: IBGE revê as altitudes de sete pontos culminantes. **Agência IBGE Notícias**, 29 fev. 2016. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/15275-geociencias-ibge-reve-as-altitudes-de-sete-pontos-culminantes. Acesso em: 16 jun. 2020.

Observe a altitude dos picos mais altos do Brasil.

> Altitude anterior e revista de sete pontos culminantes no Brasil.

Ponto culminante	Nova altitude (m)	Altitude anterior (m)
Pico da Neblina	2 995,30	2 993,78
Pico 31 de março	2 974,18	2 972,66
Pico da Bandeira	2 891,32	2 891,98
Pico Pedra da Mina	2 798,06	2 798,39
Pico das Agulhas Negras	2 790,94	2 791,55
Pico do Cristal	2 769,05	2 769,76
Monte Roraima	2 734,05	2 734,06

Fonte: GEOCIÊNCIAS: IBGE revê as altitudes de sete pontos culminantes. **Agência IBGE Notícias**, 29 fev. 2016. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/15275-geociencias-ibge-reve-as-altitudes-de-sete-pontos-culminantes. Acesso em: 16 jun. 2020.

■ Serra do Imeri, no Parque Nacional do Pico da Neblina, vista a partir das aldeias yanomamis de Maturacá e Ariabu, em Santa Isabel do Rio Negro (AM). Fotografia de 2017.

MARCOS AMEND/PULSAR IMAGENS

O Pico da Neblina está localizado na serra do Imeri no Amazonas, na fronteira com a Venezuela e a Colômbia, e dá nome ao Parque Nacional do Pico da Neblina que foi criado em 1979 com o objetivo de proteger a riqueza natural da região amazônica.

Você sabia que existem alguns métodos para calcular grandes comprimentos sem aparelhos sofisticados e, ainda assim, obter resultados confiáveis? Tal medição utiliza conceitos da semelhança de triângulos, que vimos neste Capítulo.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. De acordo com a tabela que acompanha o texto, percebe-se que houve uma diferença entre cada medida antiga e medida atual. Qual foi o motivo dessa diferença? Ver as **Orientações para o professor**.

2. Essa mesma tabela traz dados sobre sete picos. Reúna-se a mais um colega e pesquisem a localização de cada um deles. Depois, respondam:

a) Em quais estados do Brasil esses picos estão localizados?

b) Pesquise se há algum pico próximo da cidade em que vocês moram. Qual é a altura dele?
A resposta depende do local em que os estudantes residem.

3. Em determinada hora do dia, Cláudio estava passeando pelo Parque Nacional do Pico da Neblina e reparou que a sua sombra tinha um comprimento de 1,5 m. Nesse mesmo momento, qual seria o comprimento da sombra produzida pelo Pico da Neblina, considerando que a altura do pico é 2 995,3 m e que a altura de Cláudio é 1,8 m? O comprimento da sombra seria de, aproximadamente, 2 496,08 m.

4. Você conhece o método de medição de alturas utilizando um prato com água? Pesquise na internet como realizar esse procedimento e, com os colegas, escolha um edifício da sua cidade e calcule a altura dele usando esse método.

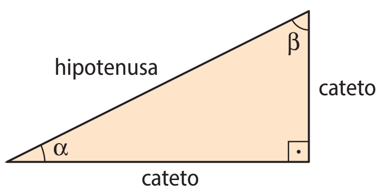
a) Qual foi o valor encontrado? A resposta depende do edifício escolhido.

b) Que conceito matemático foi utilizado nesse procedimento? semelhança de triângulos

2. a) Picos da Neblina e 31 de março – Amazonas; Pico da Bandeira – Espírito Santo/Minas Gerais; Pico Pedra da Mina – Minas Gerais/São Paulo; Pico das Agulhas Negras – Rio de Janeiro; Pico do Cristal – Minas Gerais; Monte Roraima – Roraima.

Relações métricas no triângulo retângulo

No Ensino Fundamental, você viu que na geometria euclidiana a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°. Assim, como um triângulo retângulo tem um ângulo interno medindo 90°, podemos concluir que a soma das medidas dos outros dois ângulos agudos também é 90°, ou seja, esses ângulos agudos do triângulo retângulo são complementares. Além disso, o lado oposto ao ângulo reto é o maior lado e é chamado de **hipotenusa**. Os outros dois lados, perpendiculares entre si, são chamados de **catetos**.

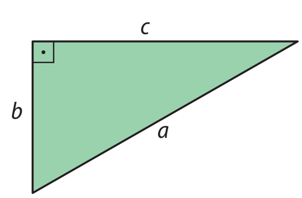


$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\beta = 90° - \alpha$$

Teorema de Pitágoras

Você, provavelmente, estudou no Ensino Fundamental o **teorema de Pitágoras**, uma conhecida relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Vamos relembrá-lo, apresentando seu enunciado a seguir.

> Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos: $a^2 = b^2 + c^2$



Em que:

- a é a medida da hipotenusa;
- b e c são as medidas dos catetos.

Veja a seguir, uma das muitas demonstrações desse teorema.

Demonstração

Considere o triângulo retângulo representado na figura **1**, em que a é a medida da hipotenusa e b e c são as medidas dos catetos. Queremos provar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Com quatro triângulos retângulos congruentes a esse, construímos um quadrado $MNPQ$ cujo lado mede $(b + c)$.

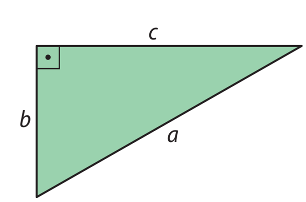


Figura **1**

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Na figura **2**, observe que, inscrito ao quadrado *MNPQ*, temos o quadrilátero *TRSV*. Vamos mostrar que o quadrilátero *TRSV* é um quadrado. Acompanhe:

- os quatro lados de *TRSV* são congruentes, pois são as hipotenusas dos triângulos retângulos.
- os ângulos internos de TRSV são retos, pois em cada um dos seus vértices, por exemplo em *R*, temos três ângulos adjacentes suplementares, sendo que dois deles são os dois ângulos agudos do triângulo retângulo e o outro é o ângulo interno de *TRSV* com vértice em *R*. Como os ângulos agudos do triângulo retângulo medem α e $90° - \alpha$, o ângulo interno $\hat{R}$ do quadrilátero *TRSV* mede 90°. De maneira análoga, podemos provar que os outros ângulos internos $- \hat{T}, \hat{S}$ e $\hat{V} -$ do quadrilátero *TRSV* são retos.

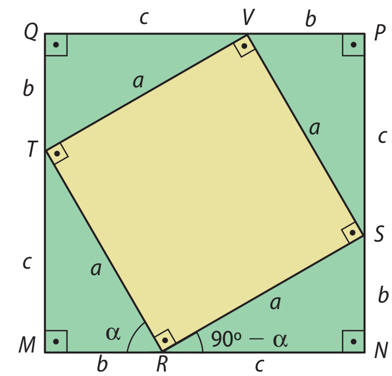


Figura **2**

Assim, fica demonstrado que o quadrilátero *TRSV* é um quadrado.

Agora, considere:

- A_{MNPQ} a área do quadrado *MNPQ*;
- A_{TRSV} a área do quadrado *TRSV*;
- $A_{\triangle}$ a área do triângulo retângulo dado.

Da figura **2**, obtemos:

$$A_{MNPQ} = A_{TRSV} + 4 \cdot A_{\triangle} \Rightarrow (b + c)^2 = a^2 + 4\left(\frac{b \cdot c}{2}\right)$$

Desenvolvendo essa expressão, temos: $b^2 + \cancel{2bc} + c^2 = a^2 + \cancel{2bc}$

Portanto: $a^2 = b^2 + c^2$

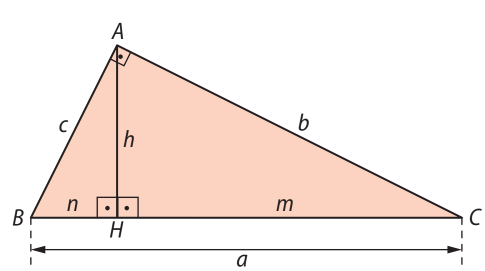
Outras relações métricas no triângulo retângulo

Além do teorema de Pitágoras, existem outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo. Inicialmente, vamos identificar esses elementos.

Consideremos o triângulo retângulo *ABC* a seguir, em que:

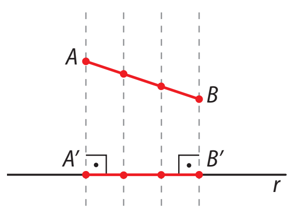
- $\overline{BC}$ é a hipotenusa de medida *a*.
- $\overline{AC}$ é o cateto de medida *b*.
- $\overline{AB}$ é o cateto de medida *c*.
- $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa de medida *h*.
- $\overline{BH}$ é a projeção ortogonal, de medida *n*, do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa.
- $\overline{HC}$ é a projeção ortogonal, de medida *m*, do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Os três triângulos *ABC*, *HBA* e *HAC* são semelhantes.



SAIBA QUE...

A projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre uma reta *r* é um segmento de reta obtido pela projeção ortogonal de todos os seus pontos sobre a reta *r*.



- $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre a reta *r*.

Podemos observar que $\overline{AH}$ dividiu o triângulo *ABC* em outros dois triângulos também retângulos: *HBA* e *HAC*.

Provemos que os três triângulos *ABC*, *HBA* e *HAC* são semelhantes.

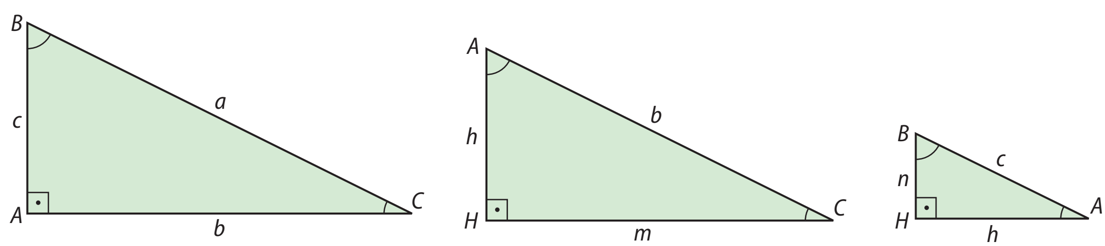
Os triângulos *ABC* e *HAC* são semelhantes (pelo caso AA, pois têm o ângulo $\hat{C}$ em comum e um ângulo reto), bem como os triângulos *ABC* e *HBA* (pelo caso AA, pois têm o ângulo $\hat{B}$ em comum e um ângulo reto).

Como os triângulos *ABC* e *HBA* são retângulos e os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, tem-se:

$\text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(B\hat{A}H)$, em que $\hat{C} \cong H\hat{A}B$ e, novamente, pelo caso de semelhança AA, os triângulos *HBA* e *HAC* são semelhantes.

Assim, concluímos que os três triângulos são semelhantes.

A partir da semelhança entre os triângulos formados, podemos estabelecer as relações apresentadas a seguir. Para auxiliar na visualização, as figuras seguintes mostram os triângulos *ABC*, *HAC* e *HBA* separadamente, com os ângulos correspondentes destacados.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da respectiva projeção do cateto sobre a hipotenusa:

- Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, temos: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{m} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot m}$

- Como $\triangle ABC \sim \triangle HBA$, temos: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{n} \Rightarrow \boxed{c^2 = a \cdot n}$

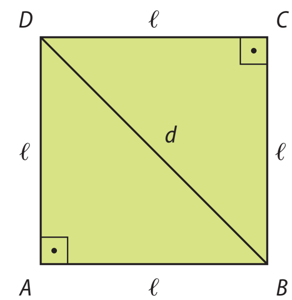
Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa:

- Como $\triangle HAC \sim \triangle HBA$, temos: $\dfrac{h}{m} = \dfrac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa:

- Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, temos: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \Rightarrow \boxed{a \cdot h = b \cdot c}$

> ATIVIDADES RESOLVIDAS



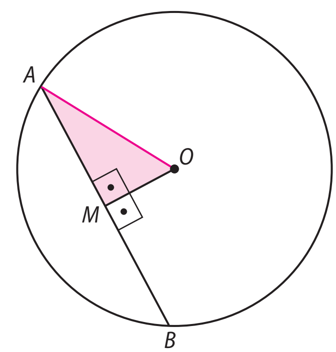
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

10. Considere o quadrado ao lado cujo lado mede ℓ e cuja diagonal mede d. Calcule o valor de d em função de ℓ.

Resolução

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *BCD*, temos:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \sqrt{2\ell^2} \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$



11. A circunferência ao lado tem raio desconhecido. Sobre a circunferência, marca-se uma corda $\overline{AB}$ de 8 cm de comprimento. Sendo *M* o pé da perpendicular baixada do centro sobre a corda $\overline{AB}$, verifica-se que o segmento de reta $\overline{OM}$ mede 2 cm. Com esses dados, determine a medida do raio da circunferência.

Resolução

Na figura dada, traçando um raio de *O* a *B*, forma-se o triângulo isósceles *AOB*, pois $OA = OB$ (raios) e, como $\overline{OM}$ é perpendicular à base $\overline{AB}$, temos $AM = MB$. Logo, *M* é ponto médio da corda $\overline{AB}$. Então:

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow AM = 4 \text{ cm}$$

Considerando o triângulo retângulo *OMA* e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

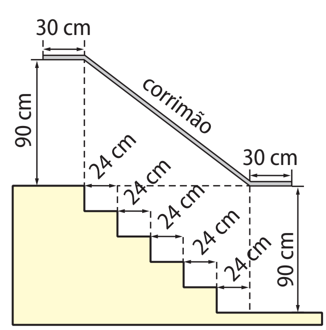
$(OA)^2 = (OM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow (OA)^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow OA^2 = 20 \Rightarrow OA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Então, o raio da circunferência mede $2\sqrt{5}$ cm.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

33. (Enem/MEC) Na figura apresentada abaixo, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus da mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a: alternativa **d**



a) 1,8 m

b) 1,9 m

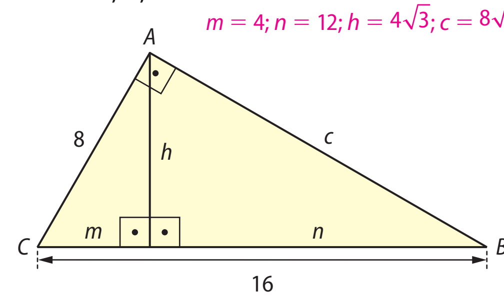
c) 2,0 m

d) 2,1 m

e) 2,2 m

34. No triângulo retângulo *ABC*, determine as medidas *m*, *n*, *h* e *c* indicadas.

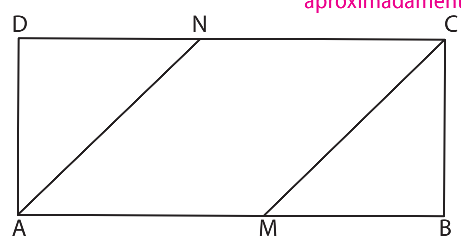
$m = 4$; $n = 12$; $h = 4\sqrt{3}$; $c = 8\sqrt{3}$



35. (UnB-DF) Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 16 metros. Determine, em metros, a medida da hipotenusa, sabendo que a medida desta excede a medida de outro cateto em oito metros. 20 m

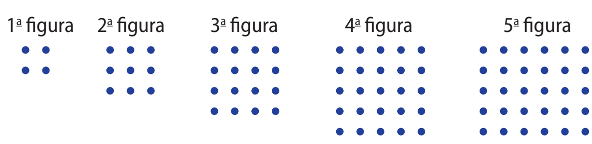
36. Um triângulo retângulo tem sua hipotenusa medindo 5 cm e a altura relativa à essa hipotenusa com medida de 2,4 cm. Com as informações fornecidas é possível determinar as medidas, em centímetros, dos catetos? Justifique. Se não for possível, explicite pelo menos uma informação que tornaria possível resolver o problema. Não, pois faltam dados. Ver as **Orientações para o professor**.

37. (FGV-SP) Na figura a seguir, ABCD é um retângulo e AMCN é um losango. aproximadamente 16 cm



Determine a medida do segmento $\overline{NB}$, sabendo que $AB = 2AD = 20$ cm.

38. (UERJ) Segundo historiadores da matemática, a análise de padrões como os ilustrados a seguir possibilitou a descoberta das triplas pitagóricas. alternativa **b**

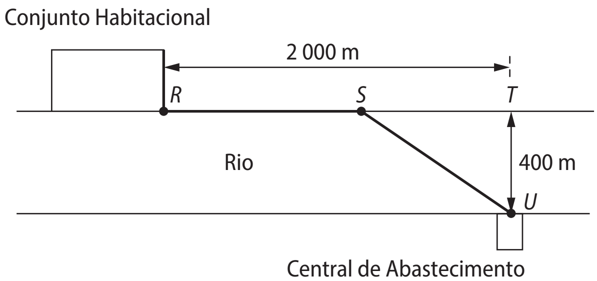


Observe que os números inteiros 3^2, 4^2 e 5^2, representados respectivamente pelas 2ª, 3ª e 4ª figuras, satisfazem ao Teorema de Pitágoras. Dessa forma (3, 4, 5) é uma tripla pitagórica. Os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e *n*ª figuras determinam outra tripla pitagórica, sendo o valor de *n* igual a:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16

39. (Unitau-SP) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento, situada à margem de um rio de 400 m de largura (considerada constante), a um conjunto habitacional, situado na outra margem, através dos pontos *USR*, como mostra a figura.

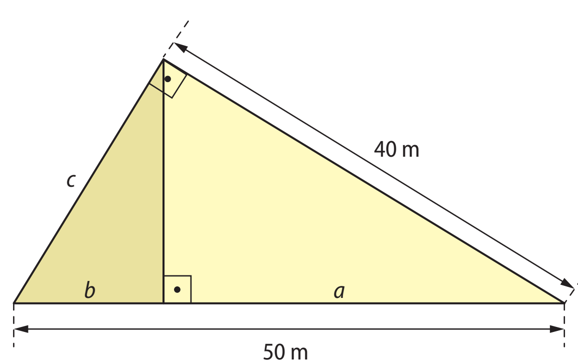
O custo da instalação da tubulação através do rio é de R$ 830,00 o metro, enquanto, em terra, custa R$ 400,00. alternativa **d**



Se a distância do conjunto habitacional até o ponto *S* for igual a 1 700 metros, pode-se afirmar, CORRETAMENTE, que o custo de instalação da rede de água potável será de:

a) R$ 1.611.000,00
b) R$ 1.012.000,00
c) R$ 1.132.000,00
d) R$ 1.095.000,00
e) R$ 1.321.000,00

40. Um fazendeiro possuía um lote de terra em formato de triângulo retângulo cujo maior lado media 40 m. Ele resolveu comprar o lote ao lado, que também apresentava o formato de triângulo retângulo conforme ilustra a figura. Após a compra, o novo terreno tinha o maior lado medindo 50 m.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

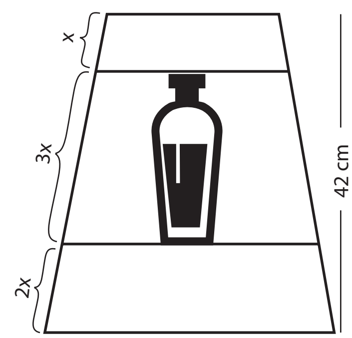
Com base nessas informações, determine:

a) a medida *a* do lado do primeiro terreno. $a = 32$ m
b) a medida do menor lado do terreno comprado. $b = 18$ m
c) a medida do menor lado do terreno maior. $c = 30$ m
d) Qual é a proporção, em porcentagem, da área do primeiro terreno em relação à área do terreno comprado? 56,25%

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (Unifor-CE)



SELMA CAPARROZ

A figura acima mostra um armário de banheiro que tem o formato de um trapézio. A altura total do armário é de 42 cm e ele está dividido em três compartimentos. As medidas de um dos lados de cada compartimento estão indicadas na figura.
Desprezando a espessura das divisórias, podemos afirmar que no compartimento do meio podemos colocar um produto com altura máxima de alternativa **d**

a) 10 cm.
b) 14 cm.
c) 18 cm.
d) 21 cm.
e) 25 cm.

2. (UEMT) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, a sombra da pessoa passará a medir: alternativa **b**

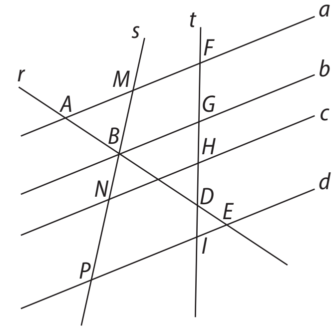
a) 30 cm
b) 45 cm
c) 48 cm
d) 36 cm
e) 25 cm

3. (IFSC) Para determinar a altura de um poste, Ana utilizou o seguinte artifício, com o auxílio de uma colega: mediu sua sombra e a do poste, obtendo 2,4 m e 3,7 m, respectivamente. Se Ana tem 1,5 m de altura, então é CORRETO afirmar que a altura do poste é de:

a) 1,0 m
b) 2,3 m
c) 5,9 m
d) 2,6 m
e) 2,0 m

alternativa **b**

4. (Epcar-MG) Observe a figura a seguir:



EDITORIA DE ARTE

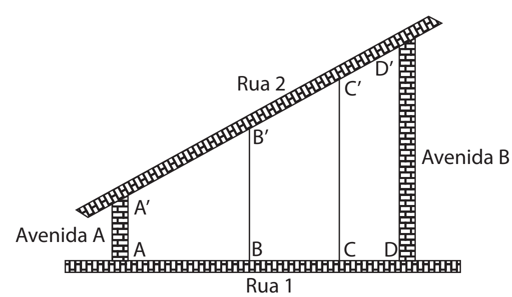
Nela, as retas *a*, *b*, *c* e *d* são paralelas e são interceptadas pelas retas transversais *r*, *s* e *t*.
Assim, as medidas dos segmentos, em cm, são:

$AB = y$	$BC = 9$	$CD = 10$
$DE = 4$	$FG = z$	$GH = m$
$HD = 5$	$DI = 2$	$MN = 16$
$BN = 6$	$BP = x$	

A soma $AB + FH$, em cm, é dada por um número divisível por: alternativa **a**

a) 3 **b)** 4 **c)** 7 **d)** 11

5. (UFU-MG) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas *A* e *B* tem a forma de um trapézio $ADD'A'$, com $AD = 90$ m e $A'D' = 135$ m, como mostra o esquema da figura abaixo.

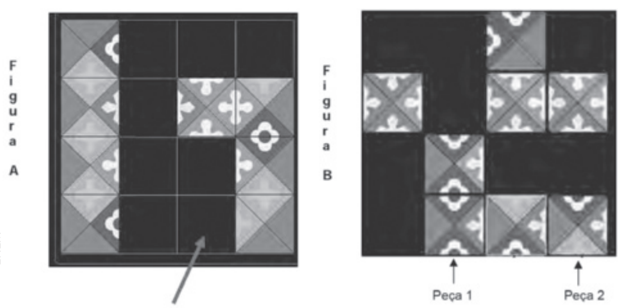


SELMA CAPARROZ

Tal área foi dividida em terrenos $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $CDD'C'$, todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que $AB = 40$ m, $BC = 30$ m e $CD = 20$ m.
De acordo com essas informações, a diferença, em metros, $A'B' - C'D'$ é igual a:

a) 20.
b) 30. alternativa **b**
c) 15.
d) 45.

6. (Enem/MEC) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos. alternativa **c**



ENEM

Disponível em: http://pt.eternityii.com. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça:

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário

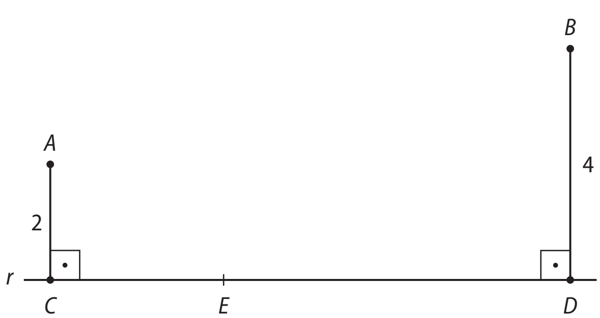
b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.

c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.

d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.

e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

7. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, as distâncias dos pontos *A* e *B* à reta *r* valem 2 e 4. As projeções ortogonais de *A* e *B* sobre essa reta são os pontos *C* e *D*. Se a medida de $\overline{CD}$ é 9, a que distância de *C* deverá estar o ponto *E*, do segmento $\overline{CD}$, para que $C\hat{E}A \cong D\hat{E}B$?



a) 3 alternativa **a**

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

8. (IFPE) Ramon, Alexandre e Milton são alunos do curso de Informática no *Campus* Afogados da Ingazeira e estão testando um robô para participar de olimpíadas de robótica. Um dos exercícios testes consistia em fazer o robô realizar os seguintes comandos:

I. andar 30 cm em linha reta;

II. realizar um giro de 90° à direita;

III. andar mais 40 cm em linha reta;

IV. retornar ao ponto inicial no menor percurso possível.

Sobre o trajeto percorrido pelo robô, neste teste, é CORRETO afirmar que: alternativa **a**

a) forma um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 50 cm.

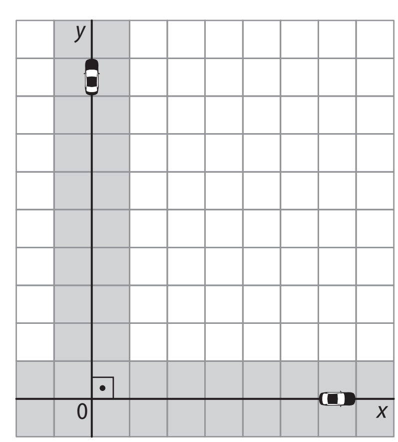
b) forma um triângulo retângulo cujo perímetro mede 100 cm.

c) forma um triângulo retângulo e isósceles.

d) forma um paralelogramo cujo perímetro mede 140 cm.

e) forma um paralelogramo cujas diagonais medem 50 cm.

9. (IFMT) Antônio e Marcos partem do ponto *O*, no mesmo instante, cada um em seu automóvel. Antônio segue pela estrada *x* à velocidade de 60 km/h, enquanto Marcos vai pela estrada *y* à velocidade de 80 km/h.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Depois de duas horas, a distância em linha reta percorrida entre eles é igual a: alternativa **d**

a) 1 000 km

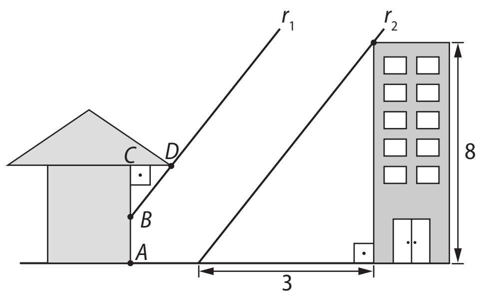
b) 800 km

c) 100 km

d) 200 km

e) 500 km

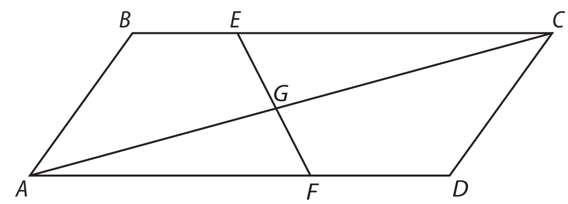
10. (Cefet-MG) Na figura a seguir, o segmento $\overline{AC}$ representa uma parede cuja altura é 2,9 m. A medida do segmento $\overline{AB}$ é 1,3 m, o segmento $\overline{CD}$ representa o beiral da casa. Os raios de sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente. alternativa **a**



Se r_1 é paralelo com r_2, então, o comprimento do beiral, em metros, é:

a) 0,60
b) 0,65
c) 0,70
d) 0,75

11. (FGV-SP) O paralelogramo *ABCD*, indicado na figura, é tal que $BE = \frac{BC}{4}$, $DF = \frac{AD}{3}$ e *G* é a intersecção de $\overline{EF}$ com $\overline{AC}$.



A área do triângulo *GCE* supera a do triângulo *GAF* em, aproximadamente: alternativa **a**

a) 27%
b) 25%
c) 21%
d) 11%
e) 6%

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, estudamos o conceito de proporcionalidade aplicado à geometria. Conhecemos o teorema de Tales, que tem como princípio a proporcionalidade entre medidas de segmentos de reta e pode ser aplicado a diversas situações de cálculo de distâncias, inclusive as inacessíveis ou de difícil medição.

Trabalhamos as noções de figuras congruentes e figuras semelhantes, em particular, os triângulos. Vimos também as transformações geométricas que preservam a congruência das figuras e as que geram figuras semelhantes por meio de ampliações e reduções. E, por fim, trabalhamos as relações métricas no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras.

Nas páginas de abertura, foi apresentada uma imagem com uma obra de Escher. Você conseguiu responder às perguntas e fazer as pesquisas propostas? E agora, depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você tem um olhar diferente sobre as obras desse artista?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **1**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia nas quais possa ser aplicado o teorema de Tales? Quais?
- Você entende a diferença entre congruência e semelhança? Explique.
- E qual a relação desses conceitos com as isometrias e as homotetias? Explique.
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia nas quais possa ser aplicado o teorema de Pitágoras? Quais?

CAPÍTULO

2

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 2, 3, 5, 7 e 9
- **Competência específica e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3: EM13MAT307 e EM13MAT308
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Trigonometria no triângulo

Desde a Antiguidade, o ser humano tem desenvolvido diversas ferramentas para obter medidas desconhecidas. O teodolito é uma delas; um aparelho óptico utilizado para medir ângulos horizontais e verticais que auxiliam no cálculo de distâncias e alturas, muitas vezes inacessíveis, por meio de relações trigonométricas que serão estudadas neste Capítulo.

Há registros de povos antigos que já conheciam aparatos com a mesma função do teodolito moderno. Atualmente, ele é utilizado em áreas como topografia, cartografia, engenharia e arquitetura de grandes construções. Para utilizá-lo, é preciso posicioná-lo no ponto mais alto (ou mais baixo) da inclinação e olhar um ponto mais baixo (ou mais alto) através do aparelho. Com isso, são exibidos os ângulos de observação vertical e horizontal. Conhecidos esses ângulos, o profissional consegue calcular a distância do aparelho até o ponto observado.

- Hoje em dia podemos encontrar teodolitos ópticos e digitais. Esse último tipo possui recursos mais avançados e fornece mais dados a respeito das medições feitas.

Ver as **Orientações para o professor**.

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Vocês já conheciam o teodolito? Já observaram algum profissional utilizando um aparelho como esse? Onde? Troquem informações a respeito desse instrumento e pesquisem a origem dele.

2. De acordo com o texto, quais são as informações necessárias para que o profissional determine distâncias desconhecidas com o uso de um teodolito?

3. Vocês sabem o que é Topografia? E Cartografia? Pesquisem o que essas ciências estudam.

4. Com suas palavras, descrevam o que é um ângulo de observação, deem um exemplo e, se possível, ilustrem-no.

PASSION ARTIST/SHUTTERSTOCK.COM

STUDIO MDF/SHUTTERSTOCK.COM

Introdução

O significado da palavra trigonometria, do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida", remete ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

A origem da Trigonometria é incerta. No entanto, é possível afirmar que alguns de seus recursos já eram aplicados por antigas civilizações do Mediterrâneo e pela civilização egípcia. Além disso, o desenvolvimento dessa área da Matemática teve grande progresso com as necessidades geradas pelas navegações, Astronomia e Agrimensura.

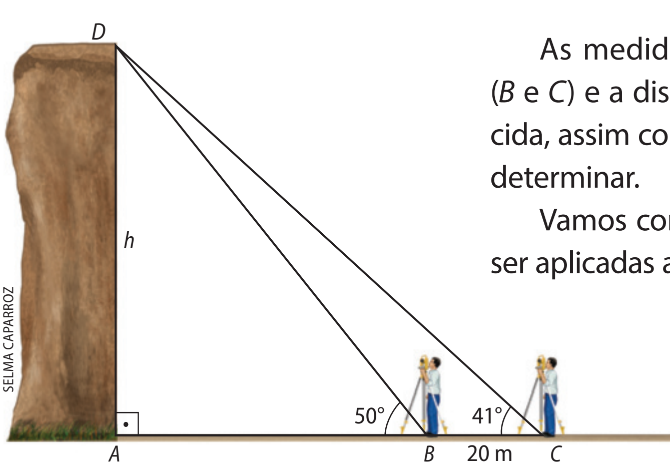

SEE CAPTION/ALAMY/FOTOARENA

■ Tábua Plimpton 322, uma das tábuas com escritas cuneiformes, oriunda da civilização babilônica e datada de cerca de 1700 a.C. Essa tábua contém uma tabela de ternas pitagóricas, ou seja, conjuntos de três números naturais que são medidas dos lados de um triângulo retângulo. A civilização babilônica adotava a base sexagesimal, utilizada até hoje na medida de ângulos, em graus, e na medida de tempo, em hora, minuto e segundo.

Ao longo dos séculos, diversos estudiosos, como Eratóstenes (276-195 a.C.), Hiparco de Niceia (190-120 a.C.) e Johann Müller, também conhecido como Regiomontanus, (1436-1476), dedicaram-se ao estudo da Trigonometria, dando importantes contribuições para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento desse ramo da Matemática.

Neste Capítulo, vamos estudar a Trigonometria aplicada aos triângulos, embasada na Geometria plana euclidiana. Assim, podemos resolver problemas geométricos que envolvem ângulos e distâncias, como o seguinte:

Usando um teodolito mecânico, um agrimensor mediu o ângulo de observação entre sua posição na linha da base e o topo de um barranco em um terreno acidentado, conforme o esquema.



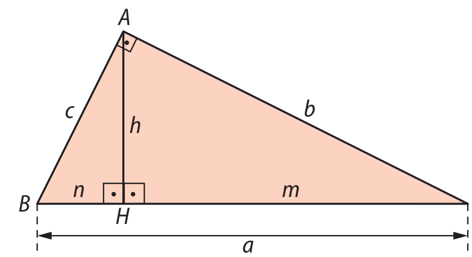
SELMA CAPARROZ

As medidas foram tomadas de dois locais diferentes (*B* e *C*) e a distância até a base do barranco era desconhecida, assim como a altura dele, que o agrimensor precisava determinar.

Vamos conhecer relações trigonométricas que podem ser aplicadas a situações como essa, de medição indireta.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

No Capítulo anterior, foram exploradas algumas relações métricas entre diferentes elementos de um triângulo retângulo. Vamos retomá-las.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A partir das medidas indicadas no triângulo retângulo da figura, podemos estabelecer as seguintes relações:

- o teorema de Pitágoras, que é a relação entre as medidas da hipotenusa e dos catetos: $a^2 = b^2 + c^2$;
- a relação entre a altura relativa à hipotenusa e as medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre ela: $h^2 = m \cdot n$;
- a relação entre as medidas de um cateto e da hipotenusa e a medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela: $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$.

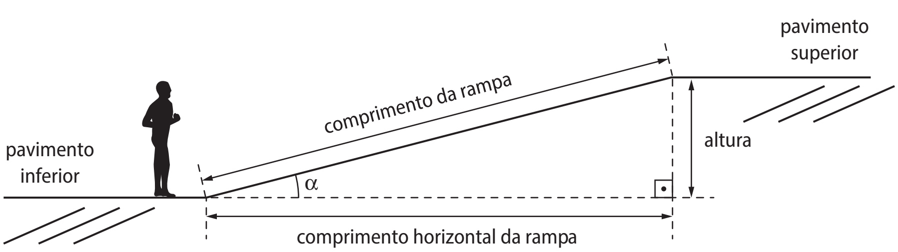
Agora, vamos estudar outras relações muito utilizadas, por exemplo, para determinar distâncias inacessíveis e que são chamadas de razões trigonométricas.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Na sua escola há rampas de acesso para pessoas com cadeira de rodas? Você já parou para pensar como essas rampas são construídas?

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), sancionado em 13 de julho de 1990, estabelece, entre outros itens, o direito à educação de todas as crianças e adolescentes, sem discriminação de qualquer natureza. Isso inclui as pessoas com deficiência, entre elas, aquelas que fazem uso de cadeira de rodas, chamadas de cadeirantes. Para que isso seja possível, é necessário que as escolas sejam acessíveis, por exemplo, com rampas e largura adequada de portas para a passagem das cadeiras de rodas.

Para a construção das rampas, existe uma norma, a NBR 9050, que a regulamenta. Por exemplo, na representação de uma rampa na figura a seguir, precisamos conhecer a altura do desnível entre os pavimentos, o comprimento da rampa, que é a distância, de fato, que será percorrida pelas pessoas, o comprimento horizontal da rampa e o ângulo que a rampa faz com o pavimento inferior.



PENSE E RESPONDA

- O que acontece se a medida do ângulo α for muito grande?
- Em sua opinião, por que é importante ter uma norma para a construção de rampas?

Ver as **Orientações para o professor**.

Todas essas medidas para a construção da rampa formam um triângulo retângulo e podem ser relacionadas por meio de razões. São elas:

- a razão entre a altura do desnível e o comprimento da rampa que indicaremos por k_1
- a razão entre o comprimento horizontal da rampa e o comprimento da rampa que indicaremos por k_2;
- a razão entre a altura do desnível e o comprimento horizontal da rampa que indicaremos por k_3.

Por exemplo, se a razão k_1 for igual a $\frac{1}{8}$, significa que, a cada 1 cm da altura do desnível, são necessários 8 cm de comprimento da rampa.

PENSE E RESPONDA

O que significa dizer que a razão k_3 vale $\frac{1}{10}$?

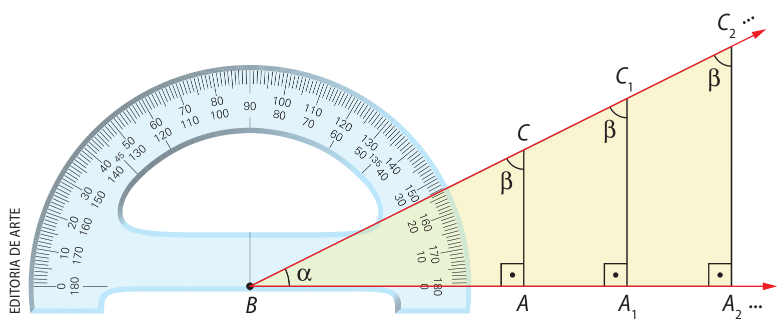
Significa que a cada 1 cm da altura do desnível são necessários 10 cm de comprimento horizontal da rampa.

Essas razões estão relacionadas com a inclinação da rampa, ou seja, quanto ela é íngreme, e dependem da medida do ângulo α.

A razão k_1 recebe o nome de seno de α, a razão k_2 é denominada cosseno de α e a razão k_3 é a tangente de α.

Vamos agora ver a definição matemática de cada uma dessas razões.

Observe a figura a seguir, na qual um transferidor mede um ângulo agudo α de vértice B.



Sobre uma das semirretas que determina um dos lados do ângulo, tomamos arbitrariamente os pontos A, A_1, A_2, ... e, por esses pontos, traçamos segmentos perpendiculares ao lado $\overrightarrow{BA}$, que intersectam o outro lado do ângulo nos pontos C, C_1, C_2, ..., respectivamente. Obtemos, assim, os triângulos retângulos ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, ..., que são semelhantes entre si pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Assim, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \ldots = k$$

A constante k não depende dos comprimentos dos segmentos envolvidos na relação anterior, mas apenas do ângulo α.

Considerando o ângulo α como referência, essa relação é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa, chamada de **seno de α** (**sen α**). Assim, escrevemos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \quad (0° < \alpha < 90°)$$

Considerando novamente a semelhança de triângulos, podemos escrever a relação entre os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{A_1B}$, $\overline{A_2B}$, ... e $\overline{BC}$, $\overline{BC_1}$, $\overline{BC_2}$, ..., respectivamente. Essa relação é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa, chamada de **cosseno de α** (**cos α**). Assim, escrevemos:

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} \; (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Ainda considerando a semelhança de triângulos, podemos escrever a relação entre os segmentos de reta $\overline{AC}$, $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, ... e $\overline{AB}$, $\overline{A_1B}$, $\overline{A_2B}$, ..., respectivamente. Essa relação é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida do cateto adjacente ao ângulo α, chamada de **tangente de α** (**tg α**). Assim, escrevemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{AC}{AB} \; (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

As razões $\text{sen}\,\alpha = \frac{AC}{BC}$, $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$ e $\text{tg}\,\alpha = \frac{AC}{AB}$ são chamadas de **razões trigonométricas** em relação ao ângulo α.

PENSE E RESPONDA

Quais são as expressões que indicam o seno, o cosseno e a tangente do ângulo β na figura da página anterior?

$\text{sen}\,\beta = \frac{AB}{BC}$, $\cos\beta = \frac{AC}{BC}$ e $\text{tg}\,\beta = \frac{AB}{AC}$

SAIBA QUE...

A tangente de um ângulo α também pode ser indicada por tan α. Essa notação aparece, por exemplo, na maioria das calculadoras científicas.

Relações entre razões trigonométricas

Vamos estudar algumas relações envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo α.

1ª relação

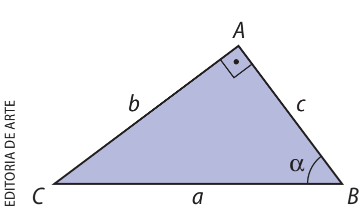
A soma do quadrado do seno de um ângulo agudo α com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo agudo α é igual a 1, ou seja:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Essa relação é chamada de **relação fundamental da Trigonometria**.

Demonstração

Considere o triângulo *ABC*, retângulo em *A*, conforme a figura a seguir.



Sendo $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{c}{a}$, temos:
$$\begin{cases} \text{sen}^2\,\alpha = \frac{b^2}{a^2} & \text{(I)} \\ \cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando (I) e (II), membro a membro, obtemos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2+c^2}{a^2} \quad \text{(III)}$$

Como o triângulo *ABC* é retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), temos: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
Assim, fica demonstrada a relação fundamental da Trigonometria.

2ª relação

O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento, ou seja:

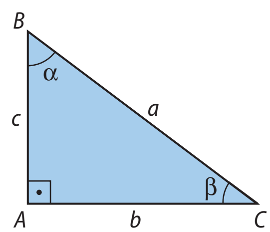
$$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$$

Demonstração

Considerando o triângulo *ABC*, retângulo em *A*, conforme figura a seguir, temos:

SAIBA QUE...
Ângulos complementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é igual a 90°.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a} = \cos\beta \\[2ex] \text{sen}\,\beta = \dfrac{c}{a} = \cos\alpha \end{cases}$$

Como $\alpha + \beta = 90°$, obtemos: $\beta = 90° - \alpha$ ou $\alpha = 90° - \beta$. Assim, temos: $\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$ ou $\text{sen}\,\beta = \cos\,(90° - \beta)$.

Desse modo, a 2ª relação está demonstrada.

3ª relação

A tangente de um ângulo agudo α é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo agudo α, ou seja:

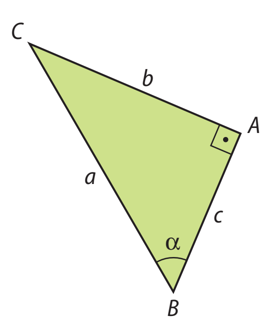
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

PENSE E RESPONDA
Retome a situação do agrimensor medindo a altura do barranco da página 54. Com os conhecimentos adquiridos até aqui e o auxílio de uma calculadora, tente resolver o problema e determinar a altura do barranco.

Ver as **Orientações para o professor**.

Demonstração

Considerando o triângulo *ABC* a seguir, temos:



$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$. Dividindo sen α por cos α, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\alpha$$

Assim, a 3ª relação está demonstrada.
Essas relações serão bastante utilizadas na resolução das atividades.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Observe a representação de duas rampas com ângulos de inclinação diferentes. Sem conhecê-los, podemos saber qual das duas é mais íngreme?

- Rampa **1**
- Rampa **2**

Resolução

Sim, podemos determinar qual das duas rampas é a mais íngreme calculando a razão entre a altura e o comprimento horizontal, que é equivalente à tangente do ângulo de inclinação.

Sendo α e β os ângulos de inclinação, respectivamente, da rampa **1** e da **2**, temos:

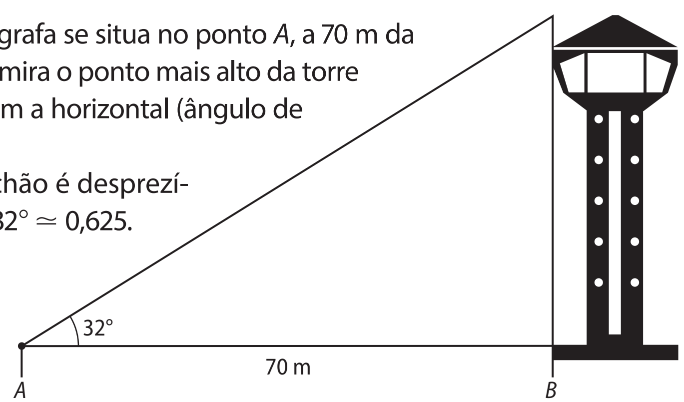
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Agora, comparamos as duas razões: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} < \frac{4}{12}$. Isso significa que, para um mesmo comprimento horizontal (12 m), a rampa **1** corresponde a uma altura de 3 m, enquanto a rampa **2** corresponde a uma altura de 4 m.

Então, podemos concluir que a rampa **2** é mais íngreme do que a **1**.

2. Para medir a altura de uma torre, uma topógrafa se situa no ponto *A*, a 70 m da base da torre. Em seguida, com o teodolito, mira o ponto mais alto da torre e verifica que o ângulo dessa linha visual com a horizontal (ângulo de observação) é de 32°, como indica a figura.

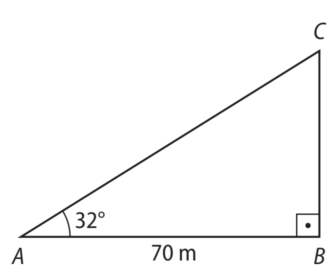
Sabendo que a distância do teodolito ao chão é desprezível, calcule a altura da torre. Considere $\text{tg}\ 32° \simeq 0{,}625$.



Resolução

Vamos representar a situação na figura a seguir, em que *AB* é a distância da topógrafa até a base da torre e *BC* é a altura da torre.

Para determinar a altura da torre, vamos usar o valor de tg 32°, dado no enunciado.



$$\text{tg}\ 32° = \frac{BC}{70} \Rightarrow 0{,}625 = \frac{BC}{70} \Rightarrow BC = 43{,}75$$

Portanto, a altura da torre é 43,75 m.

PARA ACESSAR

NAKAMURA, J. O que é teodolito e como ele é usado na topografia? **Buildin**: construção & informação, 15 jul. 2019. Disponível em: https://www.buildin.com.br/teodolito-topografia/. Acesso em: 22 maio 2020.

Artigo que traz informações detalhadas sobre o funcionamento do teodolito, suas limitações e o que são as estações totais. Há também um tutorial para fazer um levantamento topográfico.

3. Sabendo que α é um ângulo agudo de um triângulo retângulo *ABC* e que $\cos(90° - \alpha) = \frac{1}{3}$, calcule o valor da tg α.

Resolução

Como sen α = cos (90° − α), então: sen $\alpha = \frac{1}{3}$.

Pela relação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como o ângulo α é agudo, só o valor positivo nos interessa, pois definimos seno, cosseno e tangente como razões de medidas dos lados do triângulo. Usaremos esse fato ao longo de todo este Capítulo.

Então: $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Pela 3ª relação, obtemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. Use uma calculadora científica para efetuar o que é pedido nos itens.

a) Qual é o valor aproximado de sen 30°, de cos 30° e de tg 30°?

b) Determine o valor do ângulo α para o qual sen $\alpha \simeq 0{,}75$.

Resolução

a) Inicialmente, é preciso indicar a unidade de medida de ângulo que será usada, no caso, o grau. Para isso, na calculadora, escolha o modo D ou *Deg* – abreviaturas de *degree* em inglês, que significa "grau". Em seguida, pressione as teclas correspondentes para efetuar os cálculos.

- Para calcular o seno de 30°, devemos pressionar as teclas:

sin 3 0 = 0.5

- Para calcular o cosseno de 30°, devemos pressionar as teclas:

cos 3 0 = 0.8660254

- Para calcular a tangente de 30°, devemos pressionar as teclas:

tan 3 0 = 0.5773502

Portanto, sen 30° = 0,5, cos 30° $\simeq$ 0,866 e tg 30° $\simeq$ 0,577.

b) Para determinar o valor do ângulo α, vamos usar a função sin^{-1} (sin) da calculadora. Normalmente, ela fica na mesma tecla da função sin e é preciso usar a tecla SHIFT para acioná-la. Assim, para obter o ângulo desejado, devemos pressionar as teclas:

SHIFT sin^{-1} (sin) 0 . 7 5 = 48.59037789

Portanto, o ângulo cujo seno é 0,75 é aproximadamente 49°.

SAIBA QUE...

- Na maioria das calculadoras científicas, o seno de um ângulo é indicado por “sin”.
- A sequência de teclas pode variar dependendo do modelo da calculadora. Em alguns casos, digita-se primeiro o valor do ângulo e depois a razão desejada.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. a) Tangente. No triângulo retângulo formado, *h* é a medida do cateto oposto ao ângulo de inclinação e *c* é a medida do cateto adjacente.
b) Significa que a razão entre a altura do desnível e o comprimento horizontal da rampa é de $\frac{8}{100}$.

1. Retomando a situação da construção da rampa da página 55, a NBR 9050 estabelece que a inclinação deve ser calculada de acordo com a expressão $i = \frac{h \cdot 100}{c}$ em que:

- *i* é a inclinação, em %;
- *h* é a altura do desnível;
- *c* é o comprimento horizontal da rampa.

Além disso, para desníveis de até 0,80 m, a inclinação permitida deve estar entre 6,25% e 8,33%. A partir dessas informações, responda:

a) a expressão da inclinação pode ser relacionada com qual razão trigonométrica? Justifique.

b) O que significa uma inclinação de 8%?

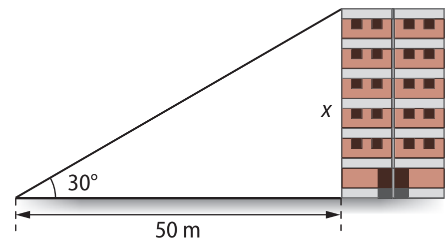
XARTPRODUCTION/SHUTTERSTOCK.COM

■ No Brasil, as regras para a construção de rampas de acessibilidade são regidas pela NBR 9050.

2. Considere duas pessoas a 4 km de distância uma da outra, localizadas em dois pontos *A* e *B* no solo. A pessoa no ponto *A*, olhando na direção de *B*, avistou, segundo um ângulo de 50° (com a horizontal), um helicóptero. No mesmo instante, a pessoa no ponto *B*, olhando na direção de *A*, avistou o mesmo helicóptero segundo um ângulo de 45° (com a horizontal). Aproximadamente, a que altura do solo o helicóptero estava naquele momento? Considere $\text{sen } 45° = \cos 45°$ e $\text{tg } 50° \simeq 1{,}19$.

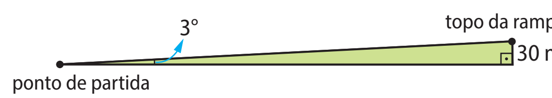
aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m

3. Quando os raios do Sol formam o ângulo de 30° com o plano do chão, obtém-se a medida de 50 m para a sombra de um prédio. Qual é a altura aproximada desse prédio? Dado: $\text{tg } 30° \simeq 0{,}58$. 29 m



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

4. (Vunesp-SP) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é de 30 m.



Use a aproximação $\text{sen } 3° \simeq 0{,}05$ e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é:

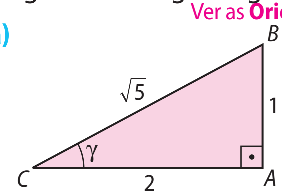
a) 2,5.
b) 7,5.
c) 10.
d) 15.
e) 30.

alternativa **a**

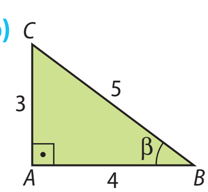
5. Em cada caso, calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo destacado.

Ver as **Orientações para o professor**.

a)



b)

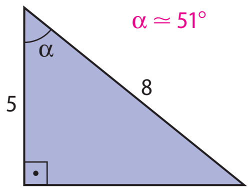


6. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 15 cm, e a hipotenusa, 17 cm. Calcule o seno, o cosseno e a tangente do maior ângulo agudo desse triângulo. $\text{sen } \alpha = \frac{15}{17}$; $\cos \alpha = \frac{8}{17}$; $\text{tg } \alpha = \frac{15}{8}$

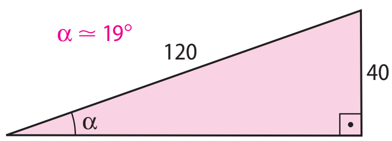
7. Determine a medida aproximada, em grau, do ângulo α de cada figura. Utilize uma calculadora científica.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

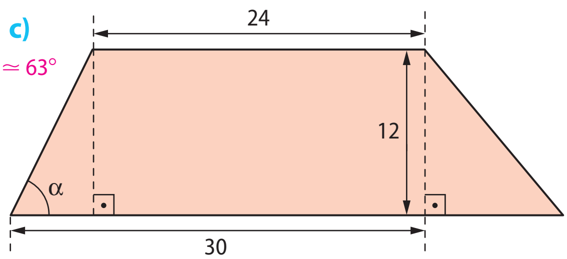
a) $\alpha \simeq 51°$



b) $\alpha \simeq 19°$



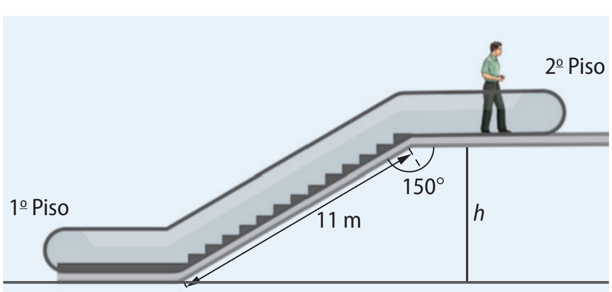
c) $\alpha \simeq 63°$



8. Considerando sen 10° $\simeq$ 0,17; sen 65° $\simeq$ 0,90 e cos 50° $\simeq$ 0,64, calcule:

a) cos 25° 0,90 **b)** cos 80° 0,17 **c)** sen 40° 0,64

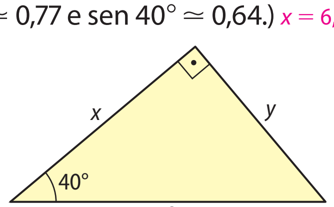
9. Numa estação rodoviária, um homem vai do primeiro piso para o segundo por meio de uma escada rolante, conforme mostra a figura a seguir:



SELMA CAPARROZ

Calcule a altura *h*, em metro, atingida pelo homem ao chegar ao segundo piso. Considere $\cos 60° = \frac{1}{2}$. 5,5 m

10. Calcule *x* e *y* no triângulo a seguir. (Dados: cos 40° $\simeq$ 0,77 e sen 40° $\simeq$ 0,64.) $x = 6{,}16$; $y = 5{,}12$



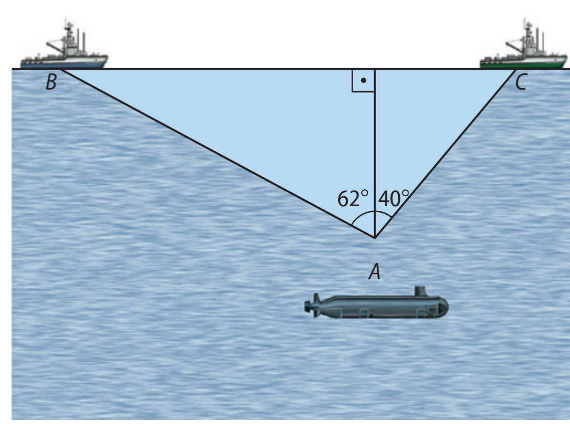
11. A soma dos comprimentos das bases de um trapézio retângulo vale 30 m. A base maior mede o dobro da menor. Calcule a altura do trapézio, sabendo que seu ângulo obtuso mede 150°. Considere sen 30° = 0,5. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m

12. Uma pessoa, ao observar um edifício sob um ângulo de 45°, conseguiu identificar o 20º andar do edifício. Sabendo que essa pessoa estava a 60 m do edifício e que todos os andares têm a mesma altura, calcule a altura de cada andar. Considere sen 45° = cos 45°. 3 m

13. Uma pessoa, distante 10 m de um prédio, observa seu topo sob um ângulo de 58°. Ao afastar-se desse prédio, ainda observa o topo, porém, agora, sob um ângulo de 22°. Calcule a altura do prédio e a distância de afastamento entre os pontos de observação. Dados: tg 22° $\simeq$ 0,4 e tg 58° $\simeq$ 1,6.

O prédio tem 16 metros de altura, e a pessoa se afastou 30 metros.

14. Um submarino *A*, que se encontra a uma profundidade de 400 m no mar, detecta dois barcos *B* e *C* na superfície da água sob ângulos de 62° e 40°, respectivamente, medidos entre a direção dos barcos e a direção perpendicular à superfície, como mostra a figura:



SELMA CAPARROZ

Qual é a distância aproximada entre os dois barcos? Considere tg 62° $\simeq$ 1,9 e tg 40° $\simeq$ 0,8.
1 080 m

15. Elabore um problema parecido com a atividade **14** e que envolva uma pessoa localizada no solo observando dois *drones* situados no ar, à mesma altura do solo e a distâncias diferentes da pessoa. Depois, resolva o problema e compartilhe com a turma. Produção do estudante.

> FÓRUM

Uso de *drones* e conservação ambiental

Você conhece os *drones*? Também chamados de Veículos Aéreos Não Tripulados (Vants), esses equipamentos têm sido utilizados em muitos setores, desde entregas de compras *on-line*, passando por inteligência policial, até manejo e fiscalização de áreas de conservação ambiental. Leia a reportagem a seguir, que trata sobre esse último uso.

Resex usará *drone* para identificar desmatamento

A Resex Ipaú-Anilzinho contará agora com *drone* para ajudar a preservar a Unidade de Conservação [UC]. O objetivo é melhorar a capacidade de monitoramento aéreo das alterações da cobertura vegetal da Resex. O trabalho é fruto da parceria entre o Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio) e o Instituto Federal do Pará (IFPA), do *Campus* Tucuruí.

[...]

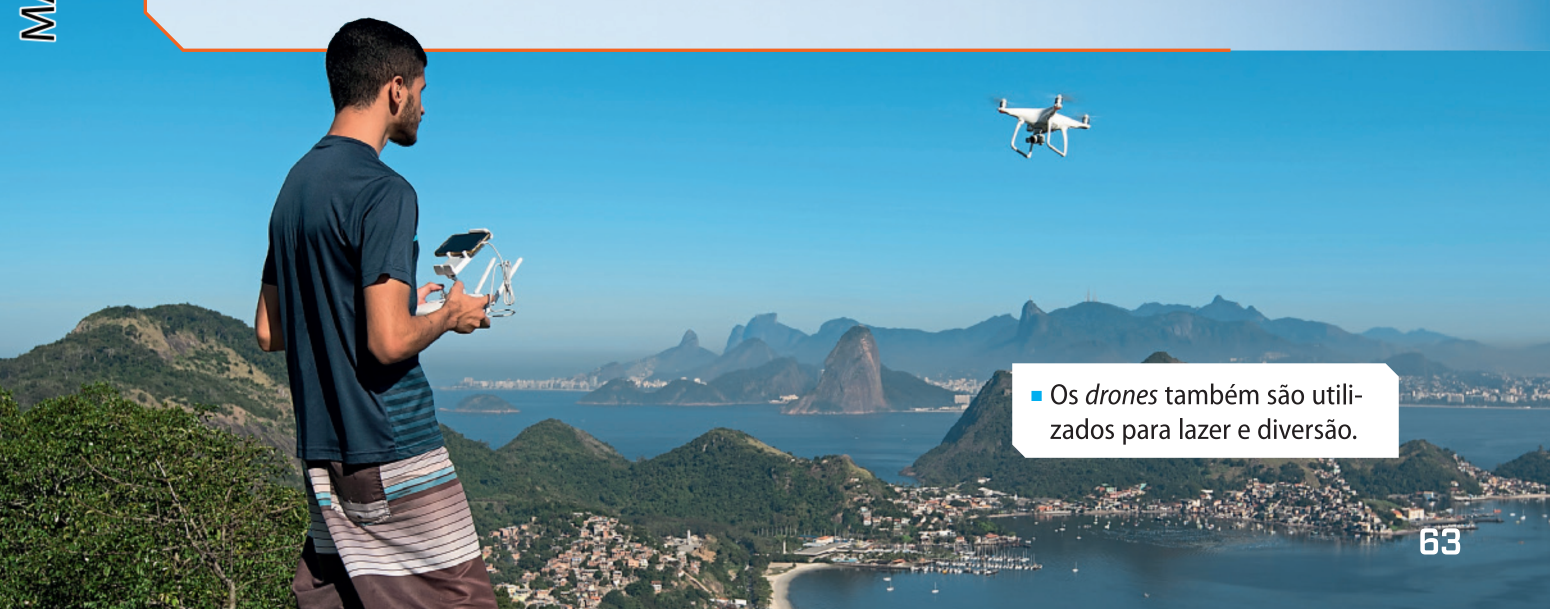
Um dos diferenciais desse tipo de equipamento é a capacidade de capturar imagens do alto e realizar a gravação de vídeos com estabilidade. Há também o Sistema de Detecção de Obstáculos para que o quadricóptero possa desviar de objetos e evitar acidentes e a função Smart Return Home para que, com ajuda do GPS, o equipamento volte automaticamente para o ponto inicial.

De acordo com o chefe da Resex, a implementação de tecnologias de aerolevantamento no combate ao desmatamento ilegal na região da UC garante maior celeridade de atuação da equipe de trabalho e, até mesmo, otimização de recursos. [...]

ICMBio. **Resex usará *drone* para identificar desmatamento**. Brasília, DF, 4 abr. 2019. Disponível em: https://www.icmbio.gov.br/portal/ultimas-noticias/20-geral/10262-resex-usara-drone-para-identificar-desmatamento. Acesso em: 24 ago. 2020.

Após ler o texto, faça o que se pede a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

- Em pequenos grupos, pesquisem sobre as UCs (Unidades de Conservação) no Brasil: o que são, quais seus objetivos e sua importância ecológica, além de como são classificadas. Listem exemplos dessas unidades localizadas em nosso país. Depois, promovam um fórum, em grupos maiores ou com toda a turma, para apresentar o resultado das pesquisas e debater a respeito da importância da preservação dos ecossistemas e da biodiversidade. Ver as **Orientações para o professor**.



DONATAS DABRAVOLSKAS/SHUTTERSTOCK.COM

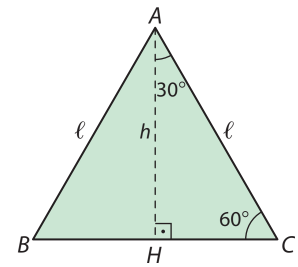
Os *drones* também são utilizados para lazer e diversão.

Ângulos de 30°, de 45° e de 60°

Os ângulos de 30°, 45° e 60° podem ser destacados especialmente, porque as razões trigonométricas relacionadas a eles podem ser obtidas por meio de cálculos usando as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo equilátero e de um triângulo retângulo isósceles, como mostrado a seguir.

Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°

Considere um triângulo equilátero *ABC*, no qual ℓ é a medida dos lados e h é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, conforme mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

No triângulo retângulo *AHC*, reto em *H*, aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular a altura h:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

E obtemos as seguintes razões:

- $\text{sen } 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{sen } 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell} = \sqrt{3}$

SAIBA QUE...

Em alguns textos, é possível que você encontre a expressão "ângulos notáveis" para se referir aos ângulos de 30°, de 45° e de 60°.

Seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°

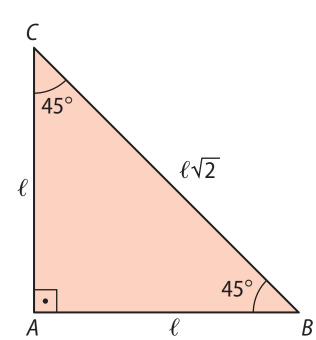
PENSE E RESPONDA

É possível obter os valores das razões trigonométricas do ângulo de 45° a partir de outra figura geométrica. Que figura é essa? Como obter esses valores?

Ver as **Orientações para o professor**.

Considere um triângulo retângulo e isósceles *ABC*, no qual ℓ é a medida dos catetos e $\ell\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa, conforme mostra a figura a seguir.

A partir desse triângulo *ABC*, obtemos as seguintes razões:



- $\text{sen } 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \dfrac{\ell}{\ell} = 1$

Podemos organizar as razões trigonométricas dos ângulos de 30°, de 45° e de 60° em um quadro, como o apresentado ao lado. Elas serão bastante utilizadas nas resoluções das atividades, evitando a necessidade de fazer cálculos com valores aproximados.

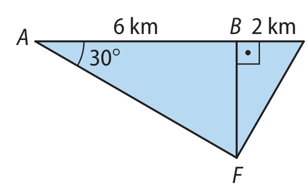
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. (UFV-MG) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol F e determina que o ângulo $F\hat{A}C$ mede 30°. Após navegar 6 km até o ponto B, ele verifica que o ângulo $F\hat{B}C$ mede 90°. Calcule a distância, em km, que separa o farol F do navio quando este se encontra no ponto C, situado a 2 km do ponto B.

Resolução

A figura representa a situação.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Do triângulo retângulo ABF, obtemos:

$$\text{tg } 30° = \frac{BF}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BF}{6} \Rightarrow BF = 2\sqrt{3}$$

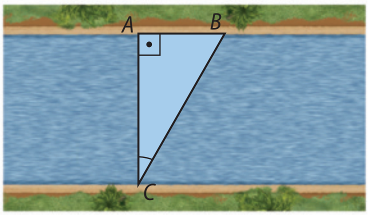
Logo, a distância BF é igual a $2\sqrt{3}$ km.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCF, temos:

$$(CF)^2 = (BF)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (CF)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 \Rightarrow CF = \sqrt{16} \Rightarrow CF = 4, \text{ pois CF} > 0.$$

Portanto, a distância entre o farol e o navio no ponto C é de 4 km.

6. Suponha que um rio apresente um trecho de margens retas e paralelas, conforme mostra a figura.

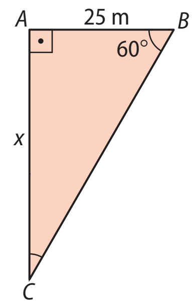


SELMA CAPARROZ

Os pontos A e B pertencem a uma das margens e C pertence à outra. Sabendo que med($A\hat{B}C$) = 60°, med($B\hat{A}C$) = 90° e AB = 25 m, calcule a largura AC do rio.

Resolução

Do enunciado, temos:



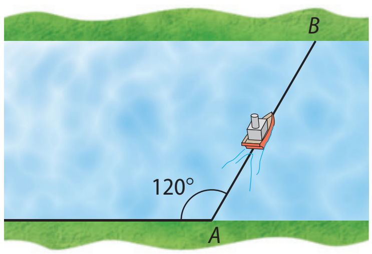
$$\text{tg } 60° = \frac{x}{25} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25\sqrt{3}$$

Portanto, a largura do rio é de $25\sqrt{3}$ m.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

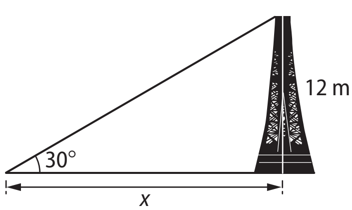
16. Um barco parte de A para atravessar um rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio, conforme a figura. Sendo a largura do rio 60 m, qual é a distância AB percorrida pelo barco? $40\sqrt{3}$ m



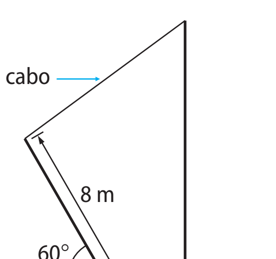
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

17. Uma escada, que mede 2,20 m de comprimento, acha-se apoiada em uma parede vertical e forma um ângulo de 60° com o plano horizontal. Se uma pessoa está no topo da escada, a que altura ela se encontra do chão? (Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.) 1,903 m

18. Uma torre vertical de 12 metros de altura é vista sob um ângulo de 30° por uma pessoa que se encontra a uma distância x do centro de sua base. O plano da base da torre está no nível dos olhos do observador. Determine a distância x. (Dado: tg 30° $\simeq$ 0,58.) $x \simeq 20{,}6$ m

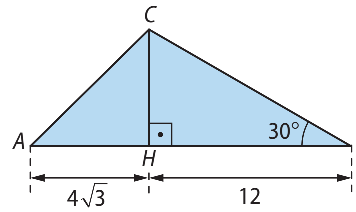


19. (UFG-GO) Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se um outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.



Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo. 12,93 m

20. No triângulo ABC a seguir, $\overline{CH}$ é uma das alturas.

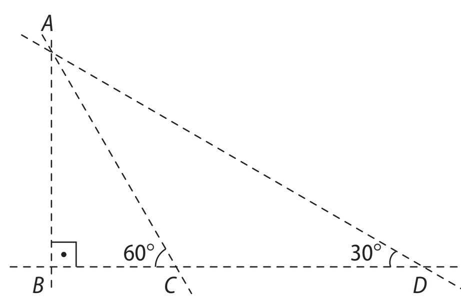


Determine:

a) a medida, em centímetro, de $\overline{CH}$. Use tg 30° $= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $4\sqrt{3}$ cm

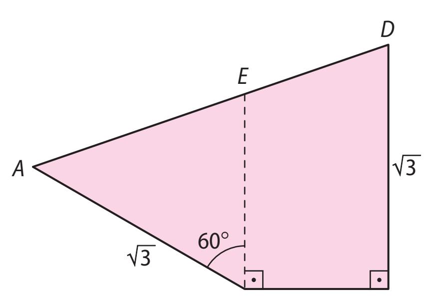
b) a medida, em grau, do ângulo $B\hat{A}C$. 45°

21. (IFSC) A ilustração a seguir representa a planta das ruas de uma cidade. A rua representada pelo segmento $\overline{BC}$ tem 50 m de comprimento. Um dos engenheiros do projeto de pavimentação dessas ruas esqueceu de indicar algumas distâncias. Considerando que um de seus técnicos efetuou os cálculos, é CORRETO afirmar que o total de metros da rua que vai do ponto A até o ponto D é de: alternativa **e**

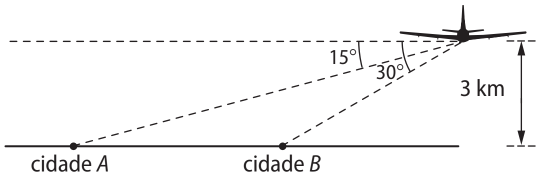


a) $50\sqrt{3}$ m.
b) $150\sqrt{3}$ m.
c) 50 m.
d) 100 m.
e) $100\sqrt{3}$ m.

22. (Fuvest-SP) No quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo, E é um ponto sobre o lado $\overline{AD}$ tal que o ângulo $A\hat{B}E$ mede 60° e os ângulos $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos. Sabe-se ainda que $AB = CD = \sqrt{3}$ e $BC = 1$. Determine a medida de $\overline{AD}$. $AD = \sqrt{7}$



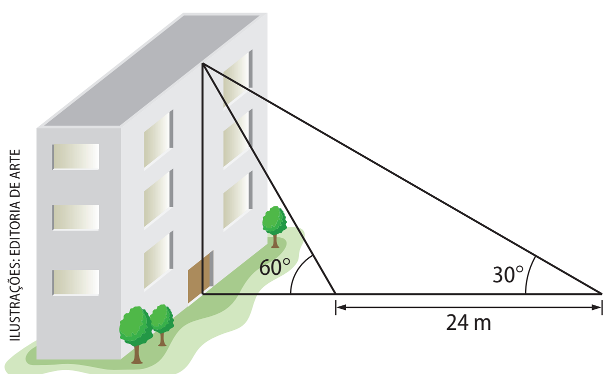
23. (UFV-MG) Um passageiro em um avião avista duas cidades, *A* e *B*, sob ângulos de 15° e 30°, respectivamente, conforme a figura a seguir:



Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre as cidades *A* e *B* é: alternativa **e**

a) 7 km.
b) 5,5 km.
c) 5 km.
d) 6,5 km.
e) 6 km.

24. A partir de um ponto, observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30°. Caminhando 24 m em direção ao prédio, atingimos outro ponto, de onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60°.

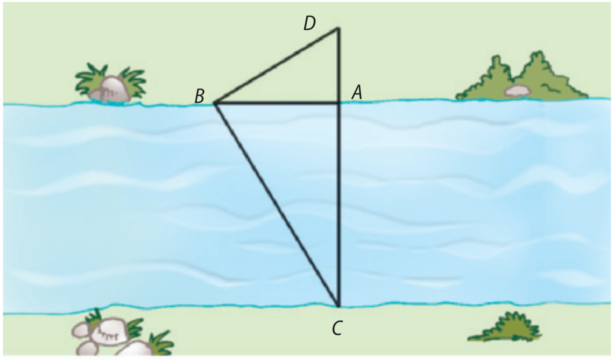


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Desprezando a altura do observador, calcule, em metro, a altura do prédio. $12\sqrt{3}$ m

25. (Unicamp-SP) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto *B* de onde podia ver na margem oposta o coqueiro *C*, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60°; determinou o ponto *D* no prolongamento de $\overline{CA}$, de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse 90°. Medindo $AD = 40$ metros, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio. $AC = 120$ m

Ver as **Orientações para o professor**.



ALBERTO DE STEFANO

26. Reúna-se a três colegas para fazer a **atividade de campo** indicada a seguir.

- Primeiramente, construam teodolitos caseiros seguindo a instrução disponível no vídeo <www.youtube.com/watch?v=jkv_9EoVKJU> (acesso em: 3 ago. 2020).
- Procurem na escola ou em seu entorno alturas ou distâncias de difícil medição direta.
- Utilizem os teodolitos conforme as instruções para obter as medidas necessárias.
- Façam os cálculos adequados para determinar as alturas escolhidas.

Produção dos estudantes.

PARA ACESSAR

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **Sala de atividades**: brincando com trigonometria. [2018?]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-brincando-com-trigonometria/. Acesso em: 27 abr. 2020.

Projeto que disponibiliza problemas de Matemática, jogos e atividades que utilizam geometria dinâmica, em ambientes interativos. No *link* fornecido são oferecidos conceitos, problemas, oficinas e texto de história da Trigonometria.

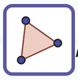
> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

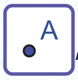
Razões trigonométricas usando o GeoGebra

Estudamos que as razões trigonométricas em um triângulo retângulo não dependem da medida dos lados, e sim do ângulo em questão. Nesta seção, com o auxílio do **GeoGebra**, vamos comprovar esse fato com a construção de dois triângulos retângulos semelhantes. Para isso, siga a sequência de passos a seguir.

I. Clique em qualquer ponto da **Janela de visualização** com o botão direito do *mouse* e clique em **Eixos**. Desse modo, os eixos ficam ocultos e aparecerá somente a malha.

II. No **Campo de entrada**, digite as coordenadas dos pontos A, B e C da seguinte forma: "$A=(0,0)$", "$B=(8,0)$" e "$C=(x(B),h)$". O programa exibirá uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o parâmetro h. Clique em **Criar controles deslizantes**. A indicação $x(B)$ significa que o ponto C tem a mesma abscissa de B. Desse modo, garantimos que o segmento $\overline{BC}$ sempre será perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, com comprimento igual ao valor do parâmetro h.

III. Utilizando a ferramenta **Polígono**, , clique sobre os pontos A, B, C e A novamente, nessa ordem.

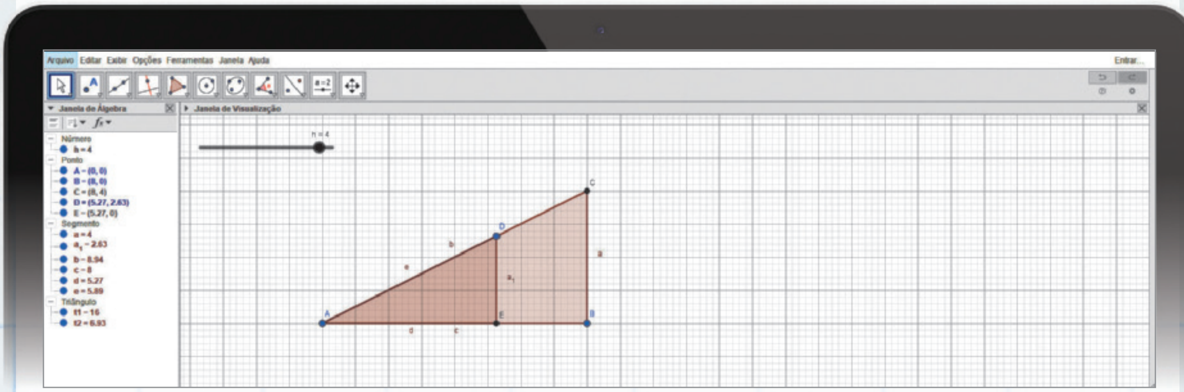
IV. Selecione a ferramenta **Ponto**, , e clique em qualquer lugar sobre o segmento $\overline{AC}$, criando o ponto D.

V. No **Campo de entrada**, digite "$E=(x(D),y(A))$" para criar o ponto E, que tem a mesma abscissa do ponto D e a mesma ordenada do ponto A. Desse modo, o segmento $\overline{DE}$ será sempre perpendicular ao lado $\overline{AB}$ e paralelo ao lado $\overline{BC}$. Além disso, o ponto E será sempre um ponto pertencente ao lado $\overline{AB}$.

IMAGENS: GEOGEBRA

KENISHIROTIE/SHUTTERSTOCK.COM

VI. Utilizando a ferramenta **Polígono** novamente, clique sobre os pontos *A*, *E*, *D* e *A*, nessa ordem. A tela do **GeoGebra** ficará semelhante à figura a seguir.



IMAGENS: GEOGEBRA

VII. No **Campo de entrada**, digite "*DE/AD*". Na **Janela de Álgebra**, aparecerá o número *f*, que representa a razão $f = \dfrac{DE}{AD}$. Em seguida, digite "*AE/AD*", que será representado pela letra *g*, e "*DE/AE*", que será representado pela letra *i*.

VIII. Repita o processo do passo anterior, digitando: "*BC/AC*", que será representado pela letra *j*, "*AB/AC*", que será representado pela letra *k*, e "*BC/AB*", que será representado pela letra *l*. Observe que alguns dos números *f*, *g*, *i*, *j*, *k* e *l* têm valores iguais.

IX. Altere a posição do controle deslizante *h* e verifique que os valores das razões se alteram, porém mantendo a igualdade observada anteriormente. Por outro lado, ao mudar a posição do ponto *D*, nenhum dos valores se altera, mesmo mudando as medidas dos lados $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{DE}$.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Os triângulos *ABC* e *AED* construídos são semelhantes. Indique o caso de semelhança e justifique.

2. Utilize a ferramenta **Ângulo**, , e indique qual é a classificação desses triângulos em relação a seus ângulos.

3. Ao observar a **Janela de Álgebra**, percebemos que *f* tem o mesmo valor de *j*, assim como os pares de números *g* e *k*, e *i* e *l*. O que essas razões representam? O que se pode concluir com essa informação?

4. Ao alterar o valor do controle deslizante *h*, todos os pares de números se alteram igualmente. Qual é o elemento da construção que se altera com a mudança do valor *h*? O que se pode concluir a partir disso?

5. Utilizando seus conhecimentos de Trigonometria e com base nas respostas das questões anteriores, identifique cada um dos números *f*, *g* e *i* como cada uma das razões trigonométricas.

Ver as **Orientações para o professor**.

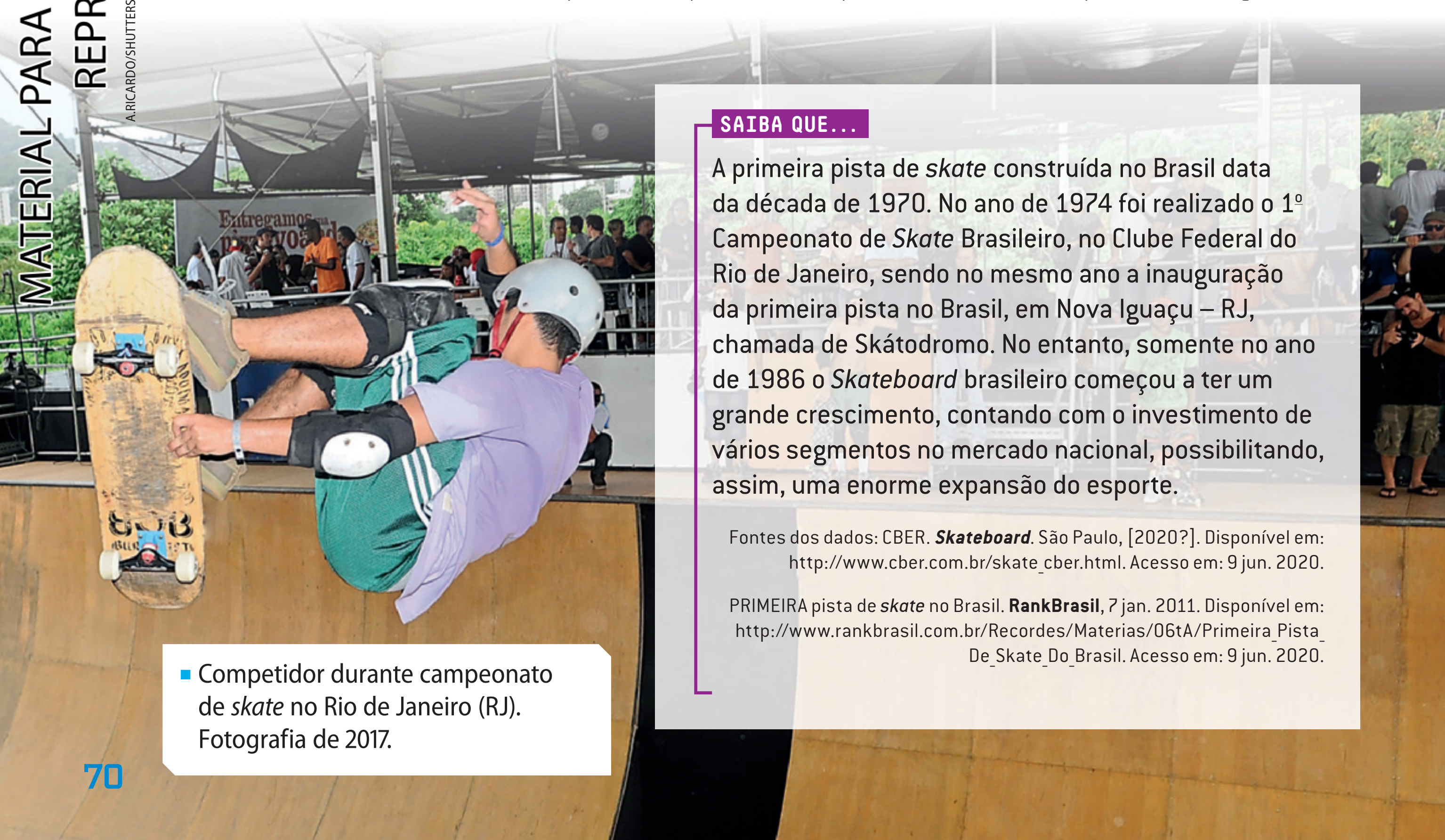
> CONEXÕES

A matemática do *skate*

O surgimento da prática do *skate* é incerto, não há registros precisos que possam comprovar sua criação a uma pessoa ou local. No Brasil, o esporte surgiu na década de 1960. Atualmente, é um dos esportes mais praticados no país, com aproximadamente 2,7 milhões de adeptos. Leia o texto a seguir sobre o assunto.

> [...]
>
> [...] Nos Estados Unidos da América, [...] o *skate* estaria associado às antigas caixas de laranjas fixadas a uma madeira com rodas, nas décadas de 1920 e 1940, servindo como meio de locomoção entre os jovens estadunidenses. A partir da década de 1950, houve uma aproximação da prática do *skate* com o surfe, sendo conhecido, nesta década, como "*sidewalk surfing*" (surfe de calçada). [...]
>
> O *skate* chegou ao Brasil na década de 1960, com as pessoas que começavam a surfar por aqui, influenciadas pelos anúncios nas revistas americanas *Surfer*. O *skate* apareceu como forma de vivência no lazer e ficou conhecido como "surfinho". [...] o grande marco na história do *skate* ocorreu em 1974, quando o engenheiro químico chamado Frank Nasworthy descobriu o uretano, material mais flexível, que oferecia mais aderência às rodas, o que possibilitou novas manobras e um maior número de pessoas inexperientes começarem a prática desta modalidade. O resultado foi a criação de campeonatos, marcas, fábricas e lojas especializadas.
>
> [...]

ARMBRUST, I.; LAURO, F. A. A. O *skate* e suas possibilidades educacionais. **Motriz**, Rio Claro, v. 16, n. 3, p. 802, jul./set. 2010. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/motriz/v16n3/a28v16n3.pdf. Acesso em: 3 ago. 2020.



A.RICARDO/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Competidor durante campeonato de *skate* no Rio de Janeiro (RJ). Fotografia de 2017.

SAIBA QUE...

A primeira pista de *skate* construída no Brasil data da década de 1970. No ano de 1974 foi realizado o 1º Campeonato de *Skate* Brasileiro, no Clube Federal do Rio de Janeiro, sendo no mesmo ano a inauguração da primeira pista no Brasil, em Nova Iguaçu – RJ, chamada de Skátodromo. No entanto, somente no ano de 1986 o *Skateboard* brasileiro começou a ter um grande crescimento, contando com o investimento de vários segmentos no mercado nacional, possibilitando, assim, uma enorme expansão do esporte.

Fontes dos dados: CBER. ***Skateboard***. São Paulo, [2020?]. Disponível em: http://www.cber.com.br/skate_cber.html. Acesso em: 9 jun. 2020.

PRIMEIRA pista de *skate* no Brasil. **RankBrasil**, 7 jan. 2011. Disponível em: http://www.rankbrasil.com.br/Recordes/Materias/06tA/Primeira_Pista_De_Skate_Do_Brasil. Acesso em: 9 jun. 2020.

Você já andou de *skate*? Tem vontade? Você sabia que para construir uma rampa de *skate* podemos utilizar alguns conceitos de Trigonometria vistos neste Capítulo? Observe a fotografia ao lado.

Note que a lateral da rampa forma um triângulo retângulo. Podemos usar os conceitos de seno, cosseno e tangente para determinar as medidas da rampa de *skate*. Acompanhe a situação a seguir.

Qual é a altura de uma rampa de *skate*, sabendo que sua inclinação é de 30° e a placa que servirá de pista a ser colocada na parte inclinada tem o formato de um quadrado com área de 4 m²? Observe a representação da lateral da rampa apresentada nesta situação.

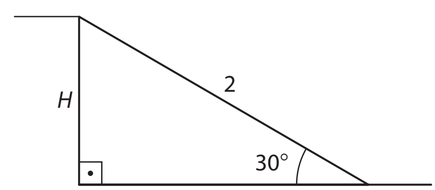
Observe que a medida H, que queremos determinar, é a do cateto oposto em relação ao ângulo de 30°, e a medida 2 m é da hipotenusa. Logo, utilizaremos o seno. Utilizando uma calculadora científica, obtemos sen 30° = 0,5. Então:

$$\text{sen } 30° = \frac{H}{2} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{H}{2} \Rightarrow H = 1 \text{ m}$$

Assim, essa rampa tem altura de 1 m.

BRUNO VARGAS/SHUTTERSTOCK.COM

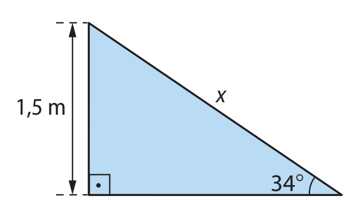
Existem vários tipos e tamanhos de rampas para a prática de skate.



Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. O *skate* se tornou esporte olímpico a partir dos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020. Você conhece alguém que pratica esse esporte? Na sua cidade há espaços para essa prática? Converse com os colegas e com o professor a respeito. Resposta pessoal.

2. No *skate*, há diversas modalidades e percursos. A minirrampa é utilizada por iniciantes, para aprenderem as manobras. Normalmente, sua altura varia entre 1 metro e 2 metros e 40 centímetros. Considere a minirrampa representada ao lado e calcule a distância que o *skatista* vai percorrer do topo da pista até a base. aproximadamente 2,68 m



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

3. Você já ouviu falar sobre *skate* de dedos? Dividam-se em grupos e pesquisem sobre essa modalidade. Depois, construam uma pista de *skate* de dedos utilizando material reciclável e as noções de Trigonometria e apresentem-na para os outros grupos. Ver as **Orientações para o professor**.

PARA ASSISTIR

- VIDA sobre rodas. Direção: Daniel Baccaro. São Paulo: Goma Filmes, 2010. Vídeo (101 min).
  Documentário que conta a trajetória do *skate* no Brasil nas décadas de 1980 e 1990.
- MINDING The Gap. Direção: Bing Liu. EUA: ITVS/Kartemquin Films, 2018. Vídeo (93 min).
  Documentário que narra as vidas e as amizades de três jovens de Rockford, Illinois, EUA, unidos pelo amor ao *skate*.

Seno e cosseno de ângulos suplementares

Já definimos as razões trigonométricas seno e cosseno de um ângulo agudo. Contudo, é possível ampliar os conceitos de seno e cosseno para ângulos de quaisquer medidas.

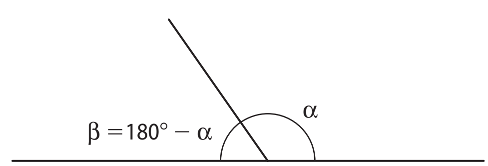
Para dar prosseguimento ao estudo dos conteúdos deste Capítulo, será necessário calcular o seno e o cosseno de alguns ângulos obtusos. Por isso, neste momento, vamos apresentar o seno e o cosseno do ângulo de 90°. A justificativa para esses valores será apresentada mais adiante, no Capítulo seguinte.

- O seno do ângulo de medida 90° é igual a 1, ou seja, $\text{sen } 90° = 1$.
- O cosseno do ângulo de medida 90° é igual a 0, ou seja, $\cos 90° = 0$.

Para calcular o seno e o cosseno de alguns ângulos obtusos, considere a figura a seguir, em que α é um ângulo obtuso.

SAIBA QUE...

Ângulos suplementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é igual a 180°.



EDITORIA DE ARTE

- O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno do suplemento desse ângulo, ou seja:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)$$

- O cosseno de um ângulo obtuso é oposto ao cosseno do suplemento desse ângulo, ou seja:

$$\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$$

Exemplos:

a) $\text{sen } 135° = \text{sen } (180° - 135°) = \text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 150° = -\cos (180° - 150°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

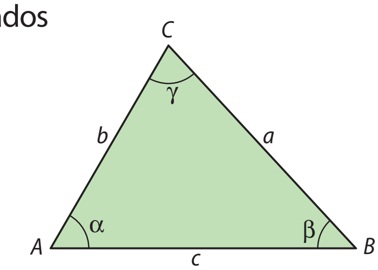
Lei dos cossenos

Em algumas situações, podemos modelar um problema por meio de um triângulo qualquer em que é necessário calcular uma ou mais medidas dos lados ou dos ângulos. Para realizar esses cálculos, utilizamos a **lei dos cossenos**, enunciada a seguir.

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Assim, dado um triângulo ABC qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos como indicado na figura ao lado, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

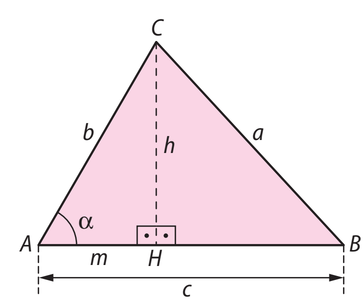


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Vamos demonstrar apenas a primeira sentença, para o ângulo α; as demais são análogas. Para isso, primeiro vamos demonstrar a validade da sentença para os casos em que α é um ângulo agudo ou obtuso e, em seguida, verificar a validade para o ângulo reto como consequência do teorema de Pitágoras. Acompanhe a seguir cada um desses casos.

1º caso: α é um ângulo agudo

Considere o triângulo acutângulo ABC, no qual $\overline{CH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, conforme mostra a figura.



No triângulo retângulo BCH, temos: $a^2 = h^2 + (c - m)^2$ (I)

No triângulo retângulo ACH, temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad \text{(III)}$$

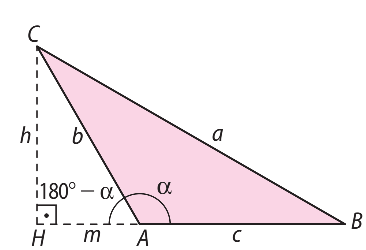
Ainda no triângulo retângulo ACH, temos: $\cos \alpha = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \alpha$ (IV)

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot (b \cdot \cos \alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

2º caso: α é um ângulo obtuso

Considere o triângulo obtusângulo ABC, no qual $\overline{CH}$ é a altura relativa ao lado AB e $\hat{A}$ é o ângulo interno obtuso, conforme mostra a figura.



No triângulo retângulo *BCH*, temos: $a^2 = h^2 + (c + m)^2$ (I)

No triângulo retângulo *ACH*, temos: $b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos: $a^2 = b^2 - m^2 + (c + m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m$ (III)

Ainda no triângulo retângulo *ACH*, temos: $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{m}{b}$

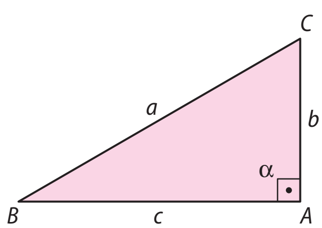
Como $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$, ou seja, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, vem:

$$-\cos\alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos\alpha \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (-b \cdot \cos\alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

3º caso: α é um ângulo reto



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considere um triângulo *ABC* retângulo em *A*, conforme mostra a figura.

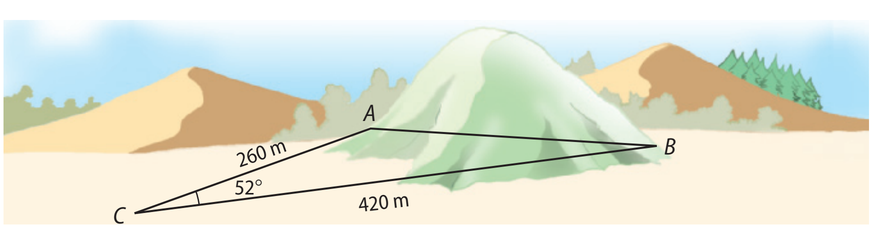
Como α é o ângulo reto e cos 90° = 0, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Note que, em relação ao ângulo reto, a lei dos cossenos fica reduzida ao teorema de Pitágoras.

> ATIVIDADE RESOLVIDA

7. Um engenheiro quer construir um túnel entre os pontos *A* e *B*, onde se localiza um morro, conforme o esquema a seguir. Do ponto *C* ele visualiza os pontos *A* e *B* e obtém os valores $AC = 260$ m, $BC = 420$ m e $A\hat{C}B = 52°$.

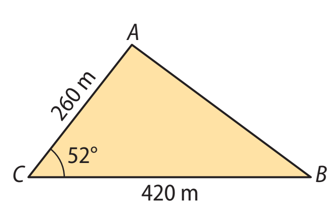


ALBERTO DE STEFANO

Qual será o comprimento desse túnel? (Use $\cos 52° \simeq 0{,}62$.)

Resolução

O triângulo ao lado representa a situação.



Aplicando a lei dos cossenos:

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (BC) \cdot \cos 52°$

$(AB)^2 = 260^2 + 420^2 - 2 \cdot 260 \cdot 420 \cdot 0{,}62$

$AB^2 = 67\,600 + 176\,400 - 135\,408$

$AB^2 = 108\,592 \Rightarrow AB \simeq 329{,}53$, pois $AB > 0$

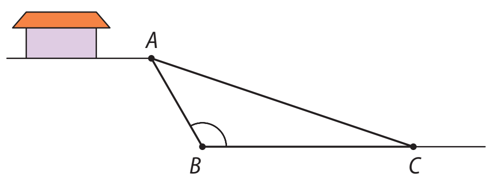
Portanto, o comprimento do túnel será de aproximadamente 329,53 m.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

27. Em um triângulo de vértices A, B e C, A e B são vistos de C sob um ângulo de 60°. Se $AC = 80$ m e $BC = 100$ m, qual é a medida de $\overline{AB}$?
$AB \simeq 91{,}65$ m

28. (UEPA) A figura a seguir mostra o corte lateral de um terreno onde será construída uma rampa reta $\overline{AC}$, que servirá para o acesso de veículos à casa, que se encontra na parte mais alta do terreno. A distância de A a B é de 6 m, de B a C é de 10 m e o menor ângulo formado entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é de 120°.



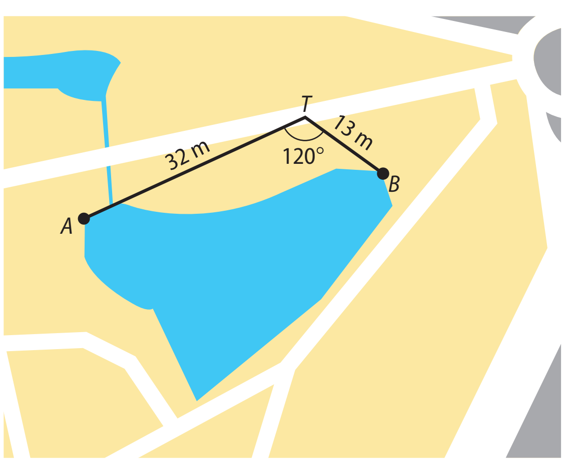
EDITORIA DE ARTE

Então, o valor do comprimento da rampa deve ser de: alternativa **e**

a) 12 m. **b)** 12,5 m. **c)** 13 m. **d)** 13,5 m. **e)** 14 m.

29. (UERJ) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32$ m; $BT = 13$ m e $A\hat{T}B = 120°$, representadas no esquema abaixo.

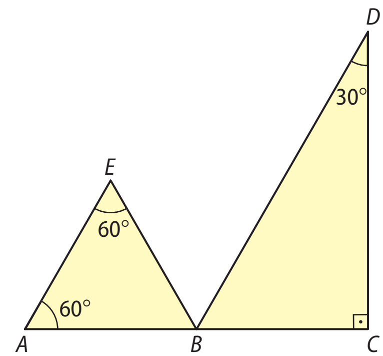
SELMA CAPARROZ



Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago. aproximadamente 40 m

30. Em um paralelogramo, o lado maior mede 7 cm e a diagonal menor mede $\sqrt{37}$ cm. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.
Irresolúvel, pois falta um dado.

31. (Fatec-SP) Na figura abaixo, além das medidas dos ângulos indicados, sabe-se que B é ponto médio de $\overline{AC}$ e $AC = 2$ cm.



EDITORIA DE ARTE

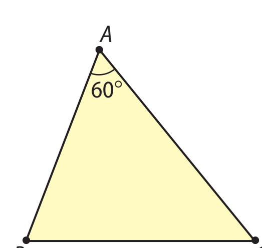
A medida de $\overline{DE}$, em centímetros, é igual a: alternativa **e**

a) $\frac{1}{2}$. **b)** 1. **c)** $\sqrt{2}$. **d)** 1,5. **e)** $\sqrt{3}$.

32. Observe o visor de um relógio de ponteiros que marca 2 horas. Sabendo que os ponteiros menor (das horas) e maior (dos minutos) medem, respectivamente, 50 cm e 80 cm, calcule a distância entre suas extremidades nesse horário. 70 cm

THAVORNC/SHUTTERSTOCK.COM

33. Joana é artesã e gostaria de fazer um ornamento com fios coloridos. Ela escolheu uma peça em formato de triângulo, como o mostrado a seguir, para compor o pingente de um colar. Ela precisa de quatro peças triangulares iguais para completar seu artesanato, como pode ser notado no modelo. Sabendo que a medida do lado $\overline{AB}$ é 5 cm e que a de $\overline{AC}$ é 6 cm, quantos centímetros de fio colorido ela utilizará para fazer o pingente, considerando apenas o comprimento de fio utilizado para fazer os triângulos? 66,28 cm

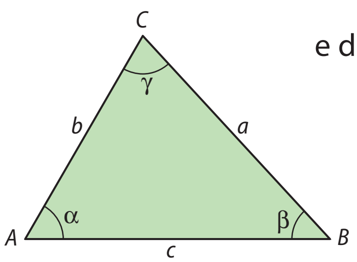


SELMA CAPARROZ

Lei dos senos

Outra maneira de calcular as medidas de lados e ângulos de um triângulo qualquer é por meio da **lei dos senos**, apresentada a seguir.

Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Assim, dado um triângulo *ABC* qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos como indicado na figura ao lado, valem as relações:

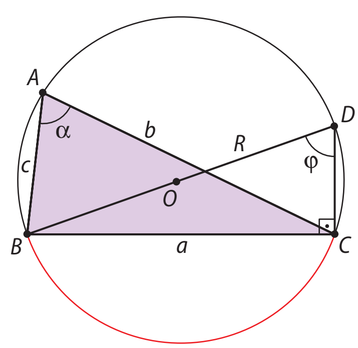
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

Acompanhe agora a demonstração da lei dos senos. Faremos essa demonstração para o ângulo agudo α.

Demonstração

O triângulo *ABC* representado a seguir está inscrito em uma circunferência de centro *O* e raio *R*.

Nesta figura, traçamos o diâmetro $\overline{BD}$.



Como $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são ângulos inscritos, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} \\[2ex] \varphi = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \alpha$$

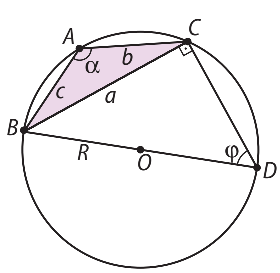
Observe que o triângulo *BCD* é retângulo em *C*, pois está inscrito em uma semicircunferência. Assim, temos: $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Analogamente, podemos provar que: $2R = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ e $2R = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$.

PENSE E RESPONDA

Se o ângulo α for obtuso, temos a seguinte figura:



Mostre que a lei dos senos continua válida.

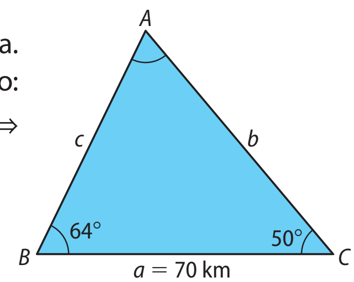
Ver as **Orientações para o professor**.

> ATIVIDADE RESOLVIDA

8. Um barco pesqueiro A emite um sinal de socorro que é recebido por outros dois barcos, B e C, distantes entre si 70 km. Sabendo que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ medem, respectivamente, 64° e 50°, responda: Qual dos barcos, B ou C, se encontra mais próximo do barco pesqueiro? A que distância ele está do barco A?

Resolução

Representando a situação em um triângulo ABC, temos a seguinte figura.



A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC é 180°. Logo:

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \Rightarrow \text{med}(\hat{A}) + 64° + 50° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(\hat{A}) = 66°$

Portanto, o ângulo $\hat{A}$ mede 66°.

Aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{70}{\text{sen } 66°} = \frac{b}{\text{sen } 64°} = \frac{c}{\text{sen } 50°}$$

Usando uma calculadora científica, obtemos as seguintes aproximações: $\text{sen } 50° \simeq 0{,}77$, $\text{sen } 64° \simeq 0{,}90$ e $\text{sen } 66° \simeq 0{,}91$.

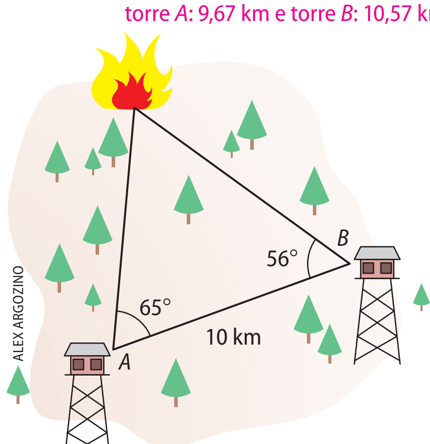
- Calculando a distância entre A e C, temos: $\dfrac{70}{0{,}91} = \dfrac{b}{0{,}90} \Rightarrow b = 69{,}2$
- Calculando a distância entre A e B, temos: $\dfrac{70}{0{,}91} = \dfrac{c}{0{,}77} \Rightarrow c = 59{,}2$

O barco mais próximo de A é o barco B, que está a 59,2 km de distância.

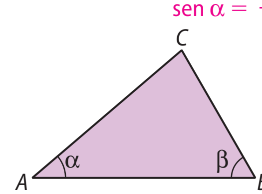
> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

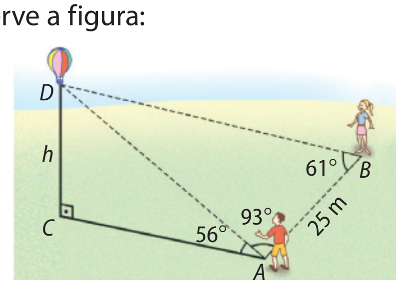
34. De duas torres de vigilância, A e B, distantes 10 km uma da outra, avista-se um foco de incêndio na floresta, conforme os ângulos assinalados na figura.
Qual é a distância aproximada de cada uma das torres até o foco do incêndio?
Utilize uma calculadora científica.
torre A: 9,67 km e torre B: 10,57 km



35. No triângulo seguinte, $AC = 4$ m, $BC = 3$ m e $\beta = 60°$. Calcule sen α.
$\text{sen } \alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$



36. Observe a figura:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

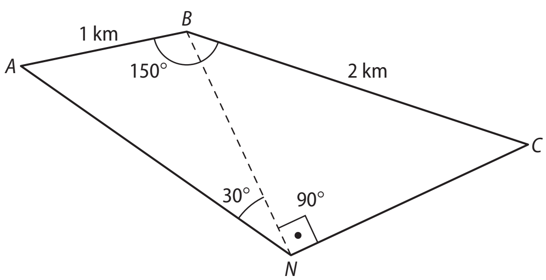
a) Qual é a distância do balão até o ponto A? aproximadamente 49,43 m

b) A quantos metros de altura o balão está do solo? aproximadamente 41 m

37. (ITA-SP) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol L e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30°$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto B? $2\sqrt{2}$ milhas

38. (Unicamp-SP) Sejam A, B, C e N quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura abaixo.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e N. 1 km

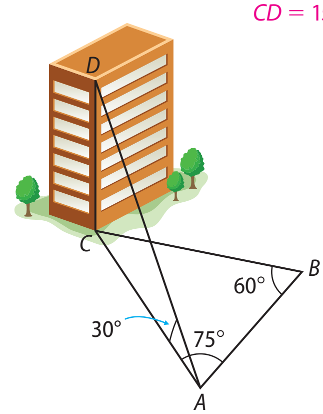
b) Calcule o comprimento do segmento $\overline{NB}$. $\sqrt{2}$ km

39. Um triângulo inscrito em uma circunferência de raio igual a 10 cm determina, nesta, três arcos cujos comprimentos são proporcionais aos números 3, 4 e 5. Determine a medida:

a) dos ângulos do triângulo; med $(B\hat{A}C) = 45°$; med $(C\hat{B}A) = 60°$; med $(B\hat{C}A) = 75°$

b) dos lados do triângulo. $AB = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm; $BC = 10\sqrt{2}$ cm; $AC = 10\sqrt{3}$ cm

40. (UnB-DF) Um observador, situado no ponto A, distante 30 m do ponto B, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$. $CD = 15\sqrt{2}$ m; 15 m



Área de um triângulo qualquer

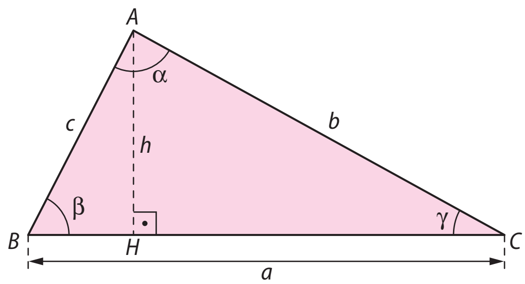
Você já estudou no Ensino Fundamental que a área de um triângulo é calculada pela metade do produto da medida de um lado pela altura relativa a esse lado. Mas, se não se conhece a altura e sim a medida de dois lados de um triângulo qualquer e o ângulo formado por esses lados, podemos calcular a área desse triângulo utilizando o conceito de seno de um ângulo. Assim, vamos enunciar o seguinte teorema:

> A área de um triângulo qualquer é igual ao semiproduto das medidas de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.

Vamos demonstrar esse teorema para o ângulo γ, no caso em que γ é agudo e no caso em que é obtuso.

Demonstração

Considere o **triângulo acutângulo** ABC, no qual $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e γ é um ângulo agudo, conforme mostra a figura a seguir.



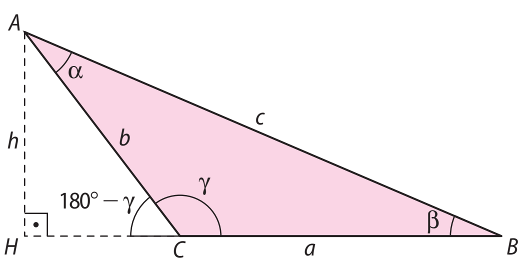
A área S do triângulo é: $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$ (I)

Do triângulo retângulo AHC, temos:

$\text{sen}\,\gamma = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\gamma$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos: $S = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}$

Agora considere o **triângulo obtusângulo** ABC, no qual $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e γ é um ângulo obtuso, conforme mostra a figura a seguir.



Sabemos que a área S é dada por: $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$ (I)

Do triângulo retângulo AHC, temos:

$\text{sen}\,(180° - \gamma) = \text{sen}\,\gamma = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\gamma$ (II)

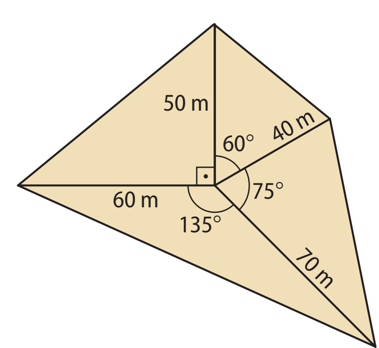
Substituindo (II) em (I), temos: $S = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}$

Analogamente, podemos mostrar que:

$S = \dfrac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta}{2}$ e $S = \dfrac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$

> ATIVIDADE RESOLVIDA

9. Para obter a área de um terreno irregular, um engenheiro dividiu esse terreno em quatro regiões triangulares, formadas a partir de um mesmo vértice, como mostra a figura.
Qual é a área aproximada desse terreno? (Use as aproximações até centésimos.)

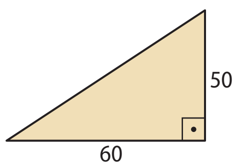


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

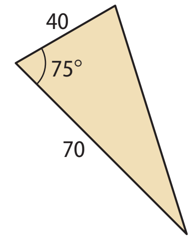
Resolução

Em cada um dos triângulos obtidos, temos as medidas de dois lados e do ângulo compreendido entre eles, conforme mostram os esquemas a seguir.

Vamos calcular a área de cada um utilizando uma calculadora científica para determinarmos o valor aproximado do seno de 75°. Para os outros ângulos podemos utilizar os valores já apresentados anteriormente.



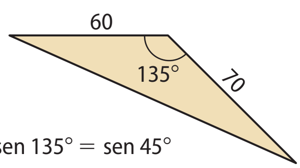
$$A_1 = \frac{50 \cdot 60}{2} = 1500 \text{ m}^2$$



$$A_2 = \frac{40 \cdot 70 \cdot \text{sen } 75°}{2} \simeq$$

$$\simeq 1400 \cdot 0{,}96$$

$$A_2 \simeq 1344 \text{ m}^2$$



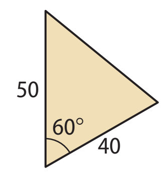
sen 135° = sen 45°

$$A_3 = \frac{60 \cdot 70 \cdot \text{sen } 135°}{2} =$$

$$= \frac{4\,200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} =$$

$$= 1050 \cdot \sqrt{2} \simeq 1050 \cdot 1{,}41$$

$$A_3 \simeq 1480{,}50 \text{ m}^2$$



$$A_4 = \frac{50 \cdot 40 \cdot \text{sen } 60°}{2} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 500 \cdot 1{,}73$$

$$A_4 = 865 \text{ m}^2$$

Então, a área total (A_t) do terreno é: $A_t = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

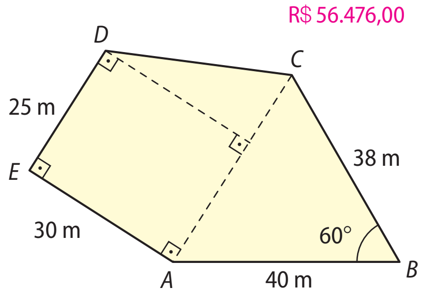
$A_t = 1500 \text{ m}^2 + 1344 \text{ m}^2 + 1480{,}50 \text{ m}^2 + 865 \text{ m}^2 = 5189{,}50 \text{ m}^2$

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

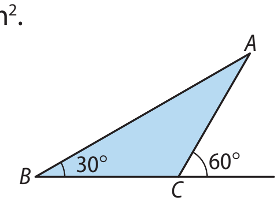
41. Qual é a área de um triângulo isósceles no qual cada lado congruente mede 10 cm e o ângulo adjacente à base mede 75°? 25 cm²

42. O terreno *ABCDE* representado pela figura a seguir foi vendido a R$ 35,00 o metro quadrado. Qual é o seu valor? (Use sen 60° ≃ 0,86.) R$ 56.476,00



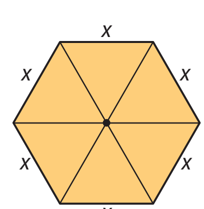
43. Qual é a área de um paralelogramo no qual dois lados consecutivos medem 7 cm e 5 cm, sabendo que eles formam um ângulo de 120°? $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ cm²

44. A área do triângulo *ABC* representado a seguir é $25\sqrt{3}$ cm².



Admitindo que $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, calcule o perímetro do triângulo *ABC*. 37 cm

45. O hexágono regular de lado cuja medida é *x* cm² é formado por seis triângulos equiláteros.



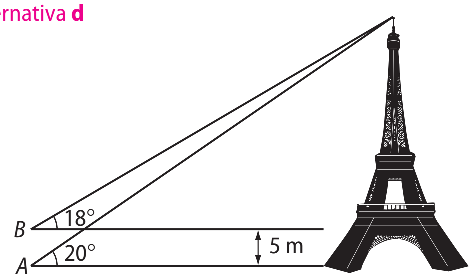
Calcule a área desse hexágono. $\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$ cm²

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

NÃO ESCREVA NO LIVRO

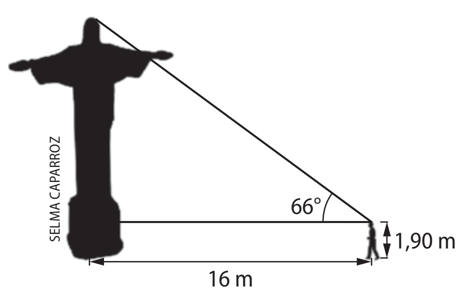
1. (UFAL) De um ponto *A*, situado no mesmo nível da base de uma torre, o ângulo de elevação do topo da torre é de 20°. De um ponto *B*, situado na mesma vertical de *A* e 5 m acima, o ângulo de elevação do topo da torre é de 18°. Qual a altura da torre? Dados: use as aproximações tg 20° $\simeq$ 0,36 e tg 18° $\simeq$ 0,32.

alternativa **d**



a) 42 m
b) 43 m
c) 44 m
d) 45 m
e) 46 m

2. (UFPel-RS) João viajou para o Rio de Janeiro e, como ele queria muito conhecer o Cristo Redentor, ficou horas admirando e tentando advinhar a altura da bela estátua. alternativa **e**

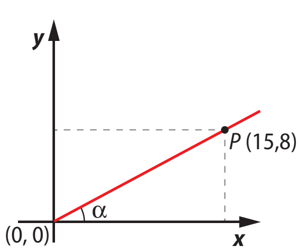


SELMA CAPARROZ

Considerando a figura e que tg 66° $\simeq$ 2,246, a altura aproximada do Cristo Redentor é de

a) 22 metros.
b) 48 metros.
c) 112 metros.
d) 55 metros.
e) 38 metros.
f) I.R.

3. (Unicamp Indígena-SP) Na figura abaixo, o valor de sen α é: alternativa **c**

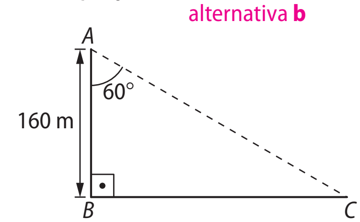


a) $\frac{15}{8}$
b) $\frac{30}{8}$
c) $\frac{8}{17}$
d) $\frac{15}{17}$

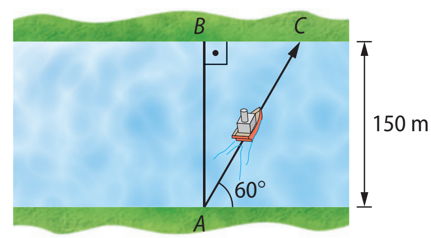
4. (PUC-GO) Um cidadão está próximo de encontrar água. Supondo que ele esteja na posição *A*, conforme ilustra a figura abaixo, e o poço de água encontra-se no ponto *C*, a distância que separa o cidadão do poço é de:

alternativa **b**

a) 420 m.
b) 320 m.
c) 160 m.
d) 600 m.



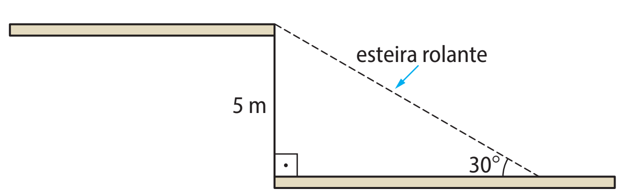
5. (UFMG) A figura abaixo representa a travessia de um barco num rio de margens paralelas, cuja largura é de 150 m. O barco, saindo de *A* em direção ao ponto *B*, foi arrastado pela correnteza, indo em direção ao ponto *C*, segundo um ângulo de 60° com a margem.



A distância, em metros, percorrida por esse barco foi de: alternativa **d**

a) 75.
b) $100\sqrt{2}$.
c) $96\sqrt{3}$.
d) $100\sqrt{3}$.

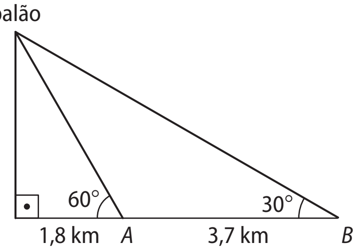
6. (IFSP) É comum encontrar em grandes supermercados esteiras rolantes para facilitar o deslocamento das pessoas. A figura a seguir mostra a esteira rolante de supermercado. Considerando os dados apresentados, o comprimento da parte da esteira rolante que liga um andar ao outro é: alternativa **b**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 5 m.
b) 10 m.
c) 15 m.
d) 20 m.
e) 25 m.

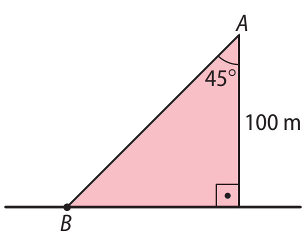
7. (Enem/MEC) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.
Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. (Acesso em: 2 maio 2010.)



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

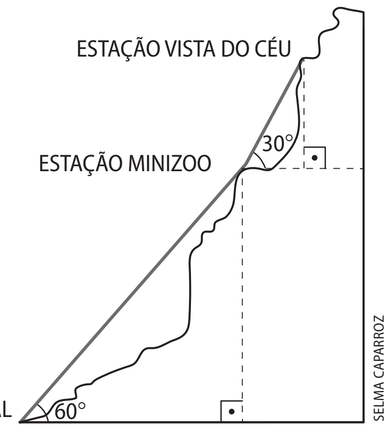
a) 1,8 km **c)** 3,1 km **e)** 5,5 km
b) 1,9 km **d)** 3,7 km alternativa **c**

8. (IFRS) Um *drone* se encontra a 100 m de altura no ponto *A* da figura abaixo, filmando um objeto que se encontra no ponto *B*. O ângulo de rotação de sua câmera com o objeto é de 45°. A distância do *drone* até o objeto que está sendo filmado, em m, é: alternativa **b**



a) $\frac{200\sqrt{3}}{3}$. **c)** 145. **e)** 200.
b) $100\sqrt{2}$. **d)** $100\sqrt{3}$.

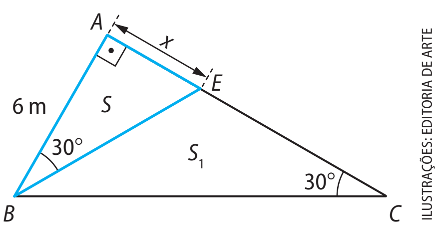
9. (UFV-MG) Um grupo de amigos resolveu fazer uma viagem para um parque ecológico. Eles chegam à Estação Central e partem em um teleférico que faz a primeira parada na Estação Minizoo, a segunda parada na Estação Vista do Céu.



Suponha que o comprimento total do cabo utilizado nesse teleférico seja de 480 metros, que esse cabo permaneça sempre totalmente esticado e que o comprimento dele da Estação Central à Estação Minizoo seja o triplo do comprimento do cabo da Estação Minizoo à Estação Vista do Céu.
É CORRETO afirmar que a altura da Estação Vista do Céu em relação à Estação Central é: (Adote $\sqrt{3} = 1{,}7$) alternativa **c**

a) 364 metros. **c)** 366 metros.
b) 365 metros. **d)** 367 metros.

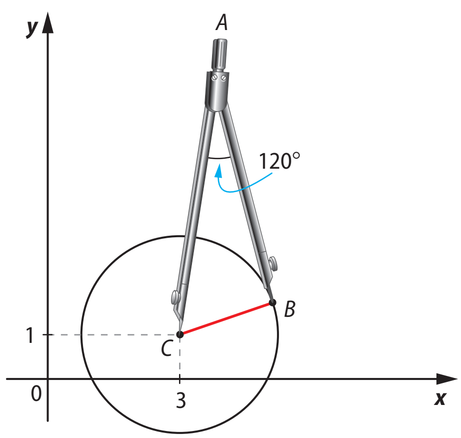
10. (UEA-AM) Um jardim, representado na figura pelo triângulo retângulo *ABC*, foi dividido em dois canteiros, *S* e S_1, por uma grade, indicada pelo segmento $\overline{BE}$.



Sabendo que $AB = 6$ m, o perímetro do triângulo *ABE* é igual a: alternativa **c**

a) $4 + 10\sqrt{3}$ m. **d)** $14\sqrt{3}$ m.
b) $12\sqrt{3}$ m. **e)** $6 + 10\sqrt{3}$ m.
c) $6 + 6\sqrt{3}$ m.

11. (Enem/MEC) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta-seca está representada pelo ponto *C*, a ponta do grafite está representada pelo ponto *B* e a cabeça do compasso está representada pelo ponto *A* conforme a figura.



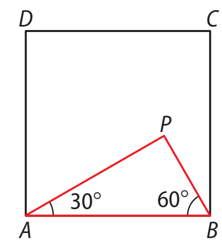
Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leqslant 5$
II	$5 < R \leqslant 10$
III	$10 < R \leqslant 15$
IV	$15 < R \leqslant 21$
V	$21 < R \leqslant 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.
O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será: alternativa **d**

a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

12. (USCS-SP) Em um cartão quadrado *ABCD*, de área igual a 256 cm^2, destaca-se uma região triangular *ABP*, conforme mostra a figura.

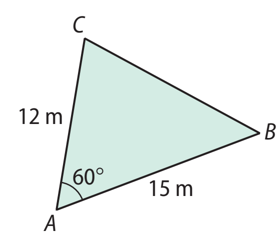


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O perímetro da região delimitada pelo triângulo *ABP* é igual a: alternativa **d**

a) $8(2 + \sqrt{2})$ cm.
b) $6(3 + \sqrt{3})$ cm.
c) $24\sqrt{3}$ cm.
d) $8(3 + \sqrt{3})$ cm.
e) $32\sqrt{3}$ cm.

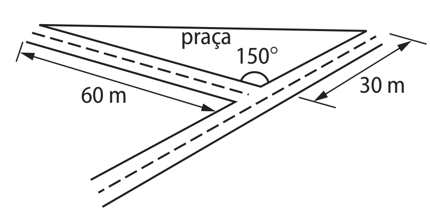
13. (UECE) Um garoto situado no ponto *A* está empinando duas pipas *B* e *C*, no ar, conforme figura. A pipa *B* já levou 15 metros de linha e a pipa *C*, 12 metros. O ângulo formado entre as duas linhas é de 60°.



Nessas condições, a distância, em metros, entre as pipas *B* e *C* é um número compreendido entre: alternativa **c**

a) 11 e 12. **b)** 12 e 13. **c)** 13 e 14. **d)** 14 e 15. **e)** 15 e 16.

14. (IFMA) Preocupado com a falta de área verde em sua cidade, um governante resolveu aproveitar certo terreno triangular, localizado no cruzamento de duas ruas, para construir uma praça arborizada, conforme a figura abaixo:



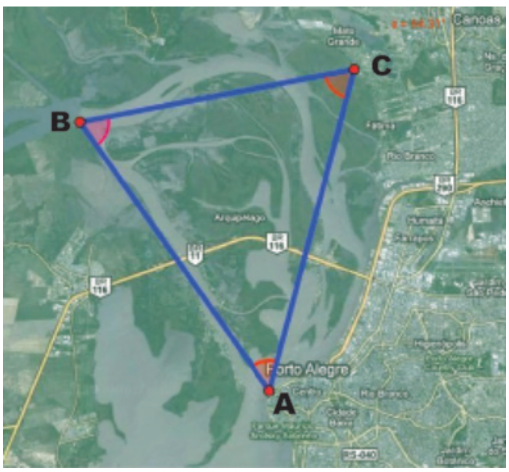
SELMA CAPARROZ

A área da praça a ser construída, em m^2, é:

a) $250\sqrt{3}$. **b)** $450\sqrt{2}$. **c)** $300\sqrt{3}$. **d)** 250. **e)** 450.

alternativa **e**

15. (UFSM-RS) A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



UFSM

http://maps.google.com.br

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\hat{A}$ mede 45° e o ângulo $\hat{C}$ mede 75°. Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é: alternativa **b**

a) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

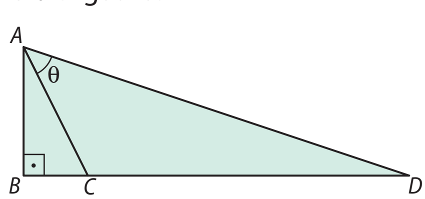
b) $4\sqrt{6}$.

c) $8\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

d) $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

16. (Unicamp-SP) Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura abaixo, em que $AB = 2$ cm, $BC = 1$ cm e $CD = 5$ cm. Então, o ângulo θ é igual a: alternativa **c**



a) 15°

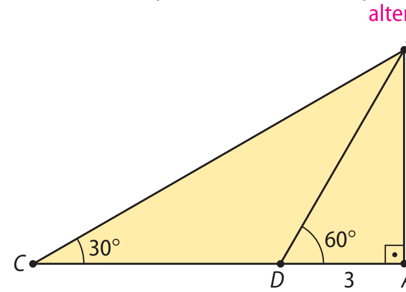
b) 30°

c) 45°

d) 60°

17. (IFRR) A figura abaixo mostra um triângulo ABC, reto em A, com D pertencente ao lado AC e $AD = 3$. Além disso, as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ formam com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ ângulos agudos de medidas iguais a 60° e 30°, respectivamente. Se p e q são as áreas dos triângulos BCD e ABD, respectivamente, então, pode-se afirmar que:

alternativa **b**



a) $p = 2{,}5q$

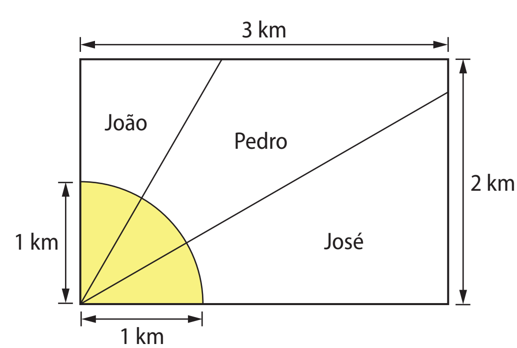
b) $p = 2q$

c) $p = \sqrt{2}\,q$

d) $p = \sqrt{2q}$

e) $p = \sqrt{9q}$

18. (Enem/MEC) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km × 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a: alternativa **e**

a) 50%

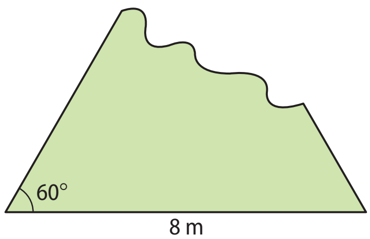
b) 43%

c) 37%

d) 33%

e) 19%

19. (UEM-PR) Um engenheiro precisa conhecer a medida de cada lado de um terreno triangular cujo perímetro é 20 m, porém a planta do terreno foi rasgada e o que restou foi um pedaço, como na figura a seguir.



Os lados do triângulo que não aparecem totalmente na planta do terreno medem: alternativa **b**

a) $3\sqrt{3}$ m e $\left(12-3\sqrt{3}\right)$ m.

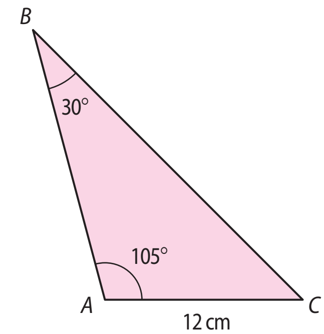
b) 5 m e 7 m.

c) 4,5 m e 7,5 m.

d) 8 m e 4 m.

e) 3 m e 9 m.

20. (Mack-SP) Três ilhas *A*, *B* e *C* aparecem num mapa em escala 1:10 000, como na figura.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Das alternativas, a que melhor se aproxima da distância entre as ilhas *A* e *B* é: alternativa **e**

a) 2,3 km.

b) 2,1 km.

c) 1,9 km.

d) 1,4 km.

e) 1,7 km.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, iniciamos o estudo da Trigonometria no triângulo. Utilizando o modelo matemático de uma rampa, analisamos a sua inclinação e as relações entre as suas medidas para conhecer as ideias de seno, cosseno e tangente, que, em seguida, foram definidas matematicamente. Exploramos os triângulos retângulos para determinar as relações entre as razões trigonométricas. Em seguida, para determinar a medida dos lados e dos ângulos de um triângulo qualquer, aplicamos a lei dos cossenos e a lei dos senos. E, por fim, pudemos determinar a área de um triângulo qualquer.

Nas páginas de abertura, conhecemos um pouco mais sobre o teodolito, um instrumento para medir distâncias e ângulos. Na **Introdução**, vimos um problema de determinação da altura usando um teodolito mecânico. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue compreender o princípio da medição com esse instrumento e os cálculos trigonométricos envolvidos?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **2**:

- Você já conhecia algum conceito de Trigonometria? Se sim, qual?
- Você consegue descrever as razões trigonométricas em um triângulo retângulo?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia em que seja necessário determinar comprimentos (distâncias ou alturas) inacessíveis ou de difícil medição? Dê exemplos.
- O trabalho feito com o **GeoGebra** contribuiu para o seu entendimento das razões trigonométricas? Respostas pessoais.

CAPÍTULO

3

Razões trigonométricas na circunferência

> **A BNCC NESTE CAPÍTULO:**

- **Competências gerais da BNCC:** 1, 4 e 7
- **Competência específica e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3: EM13MAT306
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 2

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Você já parou para pensar como as pessoas faziam para se localizar em alto-mar no período das Grandes Navegações, ocorrido entre os séculos XV e XVI?

Os viajantes se guiavam pela posição dos astros (Sol, Lua e estrelas) no céu e, para isso, desenvolveram instrumentos de medição de distâncias inacessíveis, como o astrolábio e o sextante.

Não se sabe, com exatidão, quando o astrolábio foi inventado, mas acredita-se que civilizações antigas como a dos gregos já utilizavam instrumentos similares para medir distâncias de astros. O astrolábio foi muito usado na navegação marítima e, com o passar do tempo, foi simplificado e substituído pelo sextante, instrumento que determinava a latitude.

O astrolábio pode ter a forma de um disco ou de uma esfera e apresenta uma haste ou régua. Para ser usado, necessitava do auxílio de duas pessoas: uma suspendia o instrumento na altura dos olhos e alinhava a haste com o astro, enquanto a outra observava a posição da haste no círculo e anotava a inclinação em grau. Com essa informação, realizavam-se cálculos para determinar a distância aproximada do astro observado e, com isso, localizar-se no mapa.

ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK.COM; VASYL90/SHUTTERSTOCK.COM; VITALY KOROVIN/SHUTTERSTOCK.COM

TRIFF/SHUTTERSTOCK.COM

Representação artística das Grandes Navegações. No detalhe, instrumentos utilizados antigamente para navegação.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item.

1. Vocês já conheciam o astrolábio? Pesquisem sobre seu funcionamento e como esse instrumento era essencial para os navegadores se localizarem.

2. Com base nos seus conhecimentos, como vocês acham que os navegadores calculavam as distâncias apenas conhecendo o ângulo de inclinação entre a linha dos olhos do observador e a linha da distância até o astro?

BIBLIOTECA DO CONGRESSO, WASHINGTON DC, EUA.

Introdução

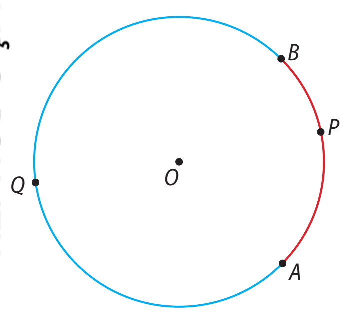
No Capítulo anterior deste Volume, vimos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para o triângulo retângulo. No entanto, ao estudar os fenômenos periódicos, precisamos ampliar esse conceito para outros ângulos fora do intervalo entre 0° e 90° para, então, realizar a modelagem por meio das funções trigonométricas, assunto do Capítulo 4 deste Volume.

Sendo assim, serão apresentados alguns conceitos novos, como as razões trigonométricas na circunferência, que permitem o cálculo para qualquer ângulo, inclusive para os ângulos maiores do que 90°.

Agora, vamos retomar alguns conceitos da Geometria que serão aplicados neste estudo.

Arcos de circunferência

Ao marcarmos dois pontos *A* e *B* sobre uma circunferência de centro *O*, ela fica dividida em duas partes denominadas **arcos de circunferência** ou, simplesmente, **arcos**. Os pontos *A* e *B* são as extremidades dos arcos e, portanto, pertencem a ambos.

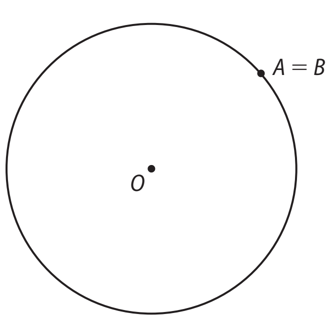


Arcos $\overset{\frown}{AB}$.

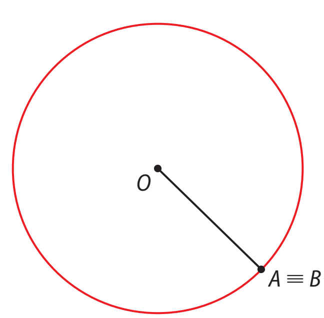
Os pontos *A* e *B* determinam dois arcos de circunferência que podem ser indicados por $\overset{\frown}{AB}$. Quando não ficar evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos inserir um ponto entre as extremidades *A* e *B* e utilizar a notação $\overset{\frown}{APB}$ ou $\overset{\frown}{AQB}$ para identificar cada arco.

Se as extremidades *A* e *B* coincidem, um dos arcos fica reduzido a um ponto e o outro é a própria circunferência. Eles são chamados, respectivamente, de **arco nulo** e de **arco de uma volta**.

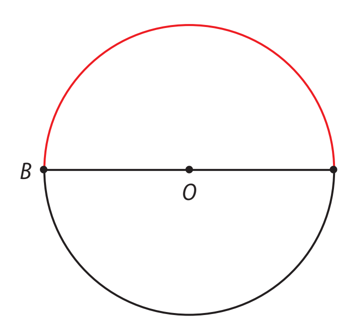
Quando as extremidades correspondem às extremidades de um diâmetro, teremos duas **semicircunferências** ou **arcos de meia-volta**.



Arco nulo.



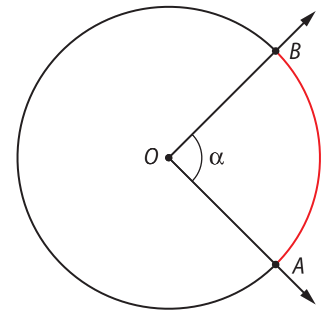
Arco de uma volta.



Arcos de meia-volta ou semicircunferências.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Ângulo central

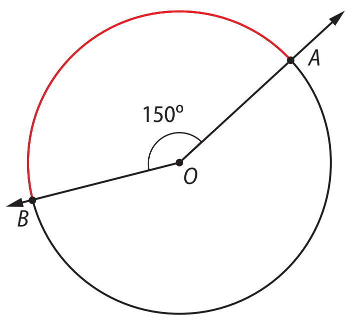


Todo ângulo que tem vértice no centro da circunferência é chamado de **ângulo central**. Assim, todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende.

Na figura ao lado, $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$. Além disso, $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = \alpha$.

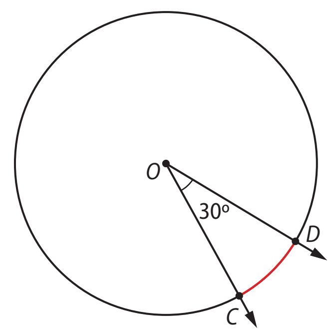
Veja alguns exemplos a seguir.

a) O ângulo central $A\hat{O}B$ indicado mede 150°.



- $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 150°$

b) O ângulo central $C\hat{O}D$ indicado mede 30°.



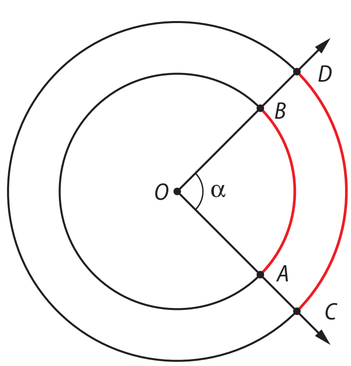
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $\text{med}\left(C\hat{O}D\right) = 30°$

Medida e comprimento de arcos de circunferência

A medida angular de um arco é a medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura seguinte, a medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual a α. Também podemos representá-la por $\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right)$. Observe que a medida angular do arco $\overset{\frown}{CD}$ também é α.



A medida linear de um arco é o comprimento ao longo do arco, ou seja, a medida de uma extremidade à outra.

SAIBA QUE...

Quando dizemos apenas medida de um arco, geralmente nos referimos à medida angular do arco.

PENSE E RESPONDA

O comprimento de um arco depende do raio da circunferência em que ele está? E a medida angular de um arco? Justifique.

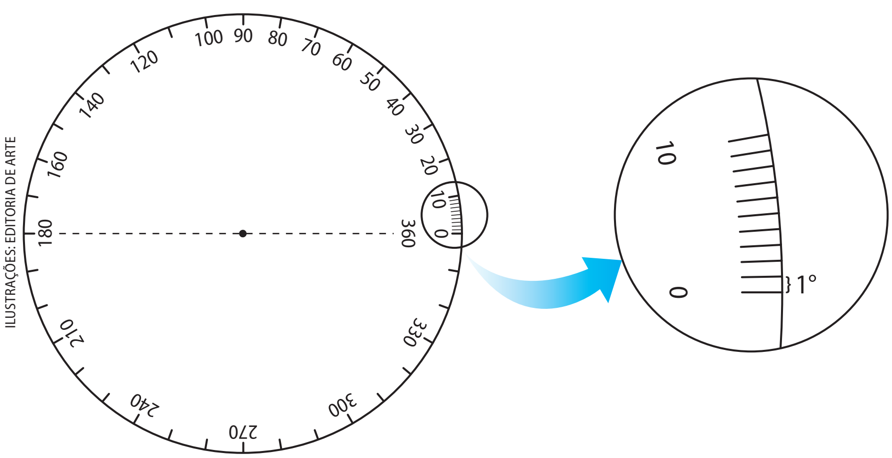
Sim. Não. Ver as **Orientações para o professor**.

Unidades de medida de arcos de circunferência

A medida de um arco de circunferência pode ser expressa em grau ou em radiano. Provavelmente, você já conheceu o grau no Ensino Fundamental. Vamos retomar algumas ideias relacionadas a ele e, em seguida, apresentar o radiano.

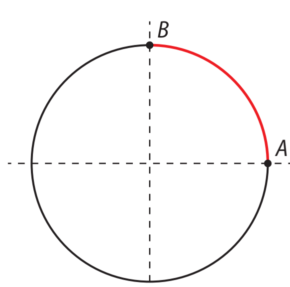
Grau

Ao dividir uma circunferência em 360 partes iguais, cada parte obtida é um arco que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência e tem medida angular 1 **grau**, indicado por 1°. Assim, uma circunferência tem 360°.

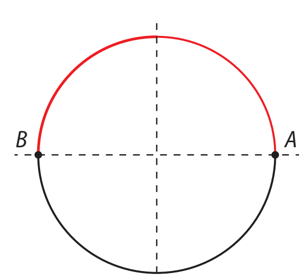


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

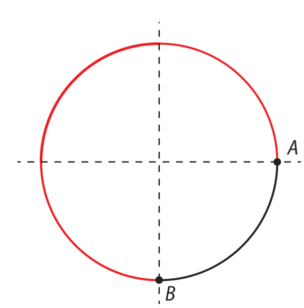
Os arcos de 90°, 180° e 270°, marcados em sentido anti-horário nas figuras a seguir, representam um quarto, metade e três quartos da circunferência, respectivamente, pois $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$, $\frac{180°}{360°} = \frac{1}{2}$ e $\frac{270°}{360°} = \frac{3}{4}$.



Arco de 90°.



Arco de 180°.



Arco de 270°.

PENSE E RESPONDA

- Um grau corresponde a quantos minutos? 60 minutos
- Um minuto corresponde a quantos segundos? 60 segundos
- Um grau corresponde a quantos segundos? 3 600 segundos

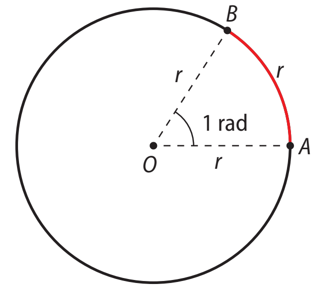
Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**, sendo que:

- um minuto (1') é igual a $\frac{1}{60}$ do grau;
- um segundo (1") é igual a $\frac{1}{60}$ do minuto.

Radiano

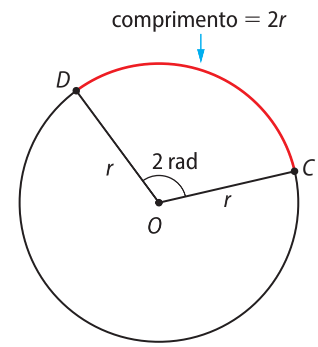
Agora, vamos conhecer outra unidade de medida angular: o radiano. Essa unidade será bastante utilizada ao longo do estudo de Trigonometria e também está presente no dia a dia de diversos profissionais, como engenheiros, físicos e arquitetos.

Quando o comprimento de um arco (a medida linear) é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém, dizemos que a medida angular desse arco é 1 **radiano** (1 rad).



- Comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ = comprimento do raio $\overline{OA} = r$.
- $\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 1$ rad.

Observe o arco $\overset{\frown}{CD}$ ao lado. O comprimento do arco mede o dobro da medida do raio, então a medida angular do arco é 2 rad.



PENSE E RESPONDA

- Qual é a medida de um arco cujo comprimento é o triplo da medida do raio da circunferência correspondente? 3 rad
- Qual é o comprimento de um arco contido em uma circunferência de raio r e cujo ângulo central correspondente mede 5 radianos? $5r$
- Qual é o comprimento de um arco contido em uma circunferência de raio r e cujo ângulo central correspondente mede x radianos? $x \cdot r$
- Um radiano equivale a aproximadamente quantos graus? Utilizando um transferidor, meça o ângulo central $A\hat{O}B$ e verifique. aproximadamente 57°

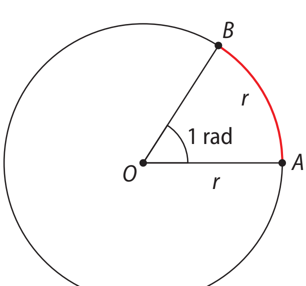
SAIBA QUE...

- Assim como a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$, o ângulo central $A\hat{O}B$ também mede 1 rad.
- Do mesmo modo, o ângulo central $C\hat{O}D$, assim como o arco $\overset{\frown}{CD}$, também mede 2 rad.

Relação entre grau e radiano

Como fazer para converter um ângulo medido em grau para a sua equivalência em radiano? No Ensino Fundamental, você viu que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$. Agora, vamos usar essa informação para estabelecer a relação entre grau e radiano e fazer conversões entre as unidades de medida angular.

Dada uma circunferência de raio r, o seu comprimento C é $C = 2\pi r$. Podemos interpretar essa expressão como o raio r que "cabe" 2π vezes nesse comprimento, ou seja, aproximadamente 6,28 vezes.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como cada arco de comprimento igual a r corresponde a um ângulo central de medida 1 rad, então o arco de comprimento $2\pi r$ (a circunferência toda) corresponde a um ângulo central de medida 2π rad. Sabemos que a circunferência tem 360°, então concluímos que:

$$\boxed{2\pi \text{ rad} = 360°}$$

Professor, comentar com os estudantes que a medida em radiano de um ângulo é expressa por um número real.

PENSE E RESPONDA

Que cálculos podemos fazer mentalmente para obter as relações ao lado a partir da relação 2π rad $= 360°$?

Ver as **Orientações para o professor**.

A partir dessa relação, podemos escrever outras, por exemplo:

- π rad $= 180°$
- $\dfrac{\pi}{2}$ rad $= 90°$
- $\dfrac{\pi}{4}$ rad $= 45°$

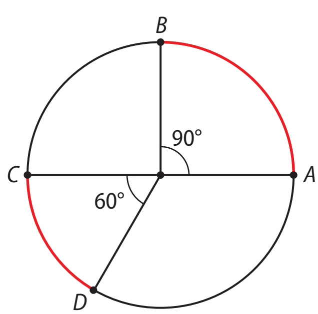
Utilizando uma regra de três e a relação π rad $= 180°$, podemos converter em radiano qualquer medida angular expressa em grau e vice-versa. Por exemplo, para escrever 270° em radiano, fazemos:

$$\begin{array}{ccc} \pi \text{ rad} & \text{———} & 180° \\ x & \text{———} & 270° \end{array}$$

Então: $x = \dfrac{\pi \text{ rad} \cdot 270°}{180°} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

Logo, 270° equivalem a $\dfrac{3\pi}{2}$ radianos.

Acompanhe, agora, alguns exemplos para determinarmos o comprimento e a medida angular de alguns arcos.



Na circunferência de raio r ao lado, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ medem, respectivamente, 90° e 60°. Vamos expressar essas medidas em radiano e também determinar o comprimento dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$.

Como a circunferência tem 360°, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é a quarta parte do comprimento da circunferência, e o comprimento do arco $\overset{\frown}{CD}$ é a sexta parte do comprimento da circunferência. Assim, para determinar o comprimento do arco, dividimos $2\pi r$ (comprimento da circunferência) por quatro e por seis, respectivamente, como indicado a seguir.

	Ângulo (em grau)	Ângulo (em radiano)	Comprimento do arco
Circunferência completa	360°	2π	$2\pi r$
Arco $\overset{\frown}{AB}$	90°	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{1}{4} \cdot 2\pi r = \dfrac{\pi r}{2}$
Arco $\overset{\frown}{CD}$	60°	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{6} \cdot 2\pi r = \dfrac{\pi r}{3}$

PENSE E RESPONDA

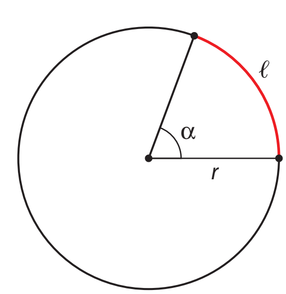
Utilizando uma calculadora e a relação π rad $= 180°$, determine, aproximadamente, em grau, o valor de 1 rad.

aproximadamente 57, 29°

De modo geral, para calcular o comprimento ℓ de um arco de medida α em uma circunferência de raio r, usamos a regra de três e estabelecemos as seguintes relações:

- para α em grau

$$\begin{array}{ccc} \text{ângulo} & & \text{comprimento} \\ 360° & \text{———} & 2\pi r \\ \alpha & \text{———} & \ell \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \ell = \dfrac{\alpha}{180°} \cdot \pi r$$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- para α em radiano

$$\begin{array}{ccc} \text{ângulo} & & \text{comprimento} \\ 1 \text{ rad} & \text{———} & r \\ \alpha & \text{———} & \ell \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \ell = \alpha r$$

SAIBA QUE...

Quando a unidade de medida angular não estiver explicitada, consideraremos que está em radiano.

Por exemplo, $\dfrac{3\pi}{4}$ corresponde a $\dfrac{3\pi}{4}$ rad.

TWSTOCK/SHUTTERSTOCK.COM

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Expresse 22°30' em radiano.

Resolução

Primeiro, vamos transformar 22°30' em minuto: 22°30' = 22 · 60' + 30' = 1320' + 30' = 1350'
Agora, vamos transformar 180° em minuto: 180° = 180 · 60' = 10 800'
Assim, podemos fazer a seguinte regra de três:

$$\left.\begin{array}{l} 10\,800' \text{ ——— } \pi \text{ rad} \\ 1350' \text{ ——— } x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10\,800}{1350} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow \frac{8}{1} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 8x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$

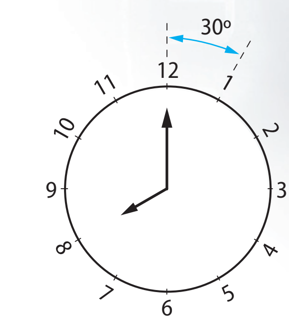
Podemos resolver de outro modo. Acompanhe:
Seja x a medida, em radiano, do arco correspondente a 22°30'. Como 30 minutos equivalem a meio grau, temos 22°30' = 22,5°. Assim: $x = 22{,}5° \Rightarrow 2x = 45° \Rightarrow 4x = 90° \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2}$ rad $\Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$ rad

Logo, 22°30' $= \frac{\pi}{8}$ rad.

2. Determine, em grau, a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 8h20.

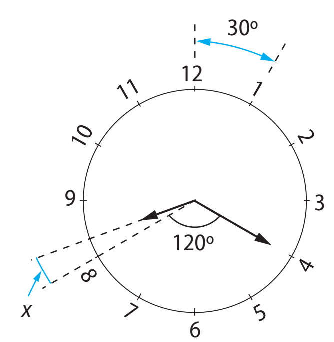
Resolução

Seja α a medida do ângulo pedido e x a medida do ângulo descrito pelo ponteiro das horas em 20 min a partir das 8 h. O mostrador do relógio é dividido em 12 arcos iguais. Por isso, o arco compreendido entre dois números consecutivos do relógio mede $\frac{360°}{12}$, ou seja, 30°. Assim, $\alpha = x + 120°$, já que 120° é o ângulo formado pelo arco com extremidade nos números 4 e 8 do relógio.
A cada 60 minutos o ponteiro das horas percorre 30°. Então, podemos fazer a seguinte relação:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\left.\begin{array}{ll} \text{tempo (min)} & \text{ângulo (grau)} \\ 60 \text{ ——— } & 30 \\ 20 \text{ ——— } & x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{60}{20} = \frac{30}{x} \Rightarrow 3 = \frac{30}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 10 \text{ (medida em grau)}$$



$\alpha = x + 120° \Rightarrow \alpha = 10° + 120° \Rightarrow \alpha = 130°$
Portanto, o ângulo solicitado mede 130°.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Expresse:

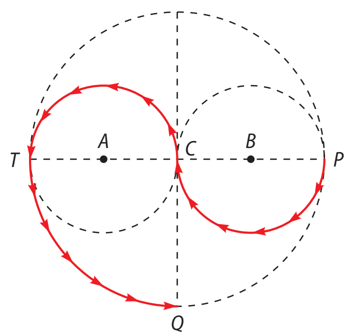
a) 60° em radiano; $\frac{\pi}{3}$ rad
b) 210° em radiano; $\frac{7\pi}{6}$ rad
c) $\frac{10\pi}{9}$ rad em grau; 200°
d) $\frac{\pi}{20}$ rad em grau. 9°

2. Qual é, em radiano, a medida do arco descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio em um período de 25 minutos? $\frac{5\pi}{6}$ rad

- Reúna-se a um colega e cada um deve explicar ao outro qual foi o raciocínio utilizado para resolver a atividade. Vocês resolveram da mesma maneira? Respostas pessoais.

3. Em uma circunferência de 32 cm de diâmetro, marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 8 cm de comprimento. Qual é a medida desse arco em radiano? 0,5 rad

4. Na figura, têm-se três circunferências, de centros A, B e C, tangentes duas a duas. As retas $\overleftrightarrow{QC}$ e $\overleftrightarrow{PT}$ são perpendiculares. Sendo 4 m o raio da circunferência maior, quantos metros devemos percorrer para ir de P a Q, seguindo as flechas? 6π metros

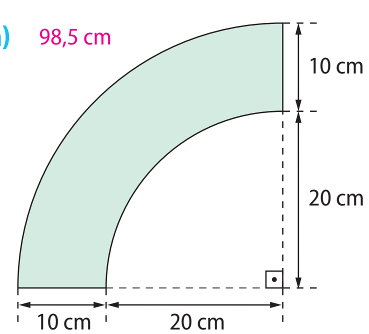


5. Luana é artesã e faz bordados em bastidor. Para estimar a quantidade de linha que usará na próxima encomenda, ela precisa saber algumas medidas do desenho bordado. Ajude Luana e determine o comprimento do contorno de cada detalhe indicado em azul nas imagens a seguir. Use $\pi \simeq 3{,}14$.

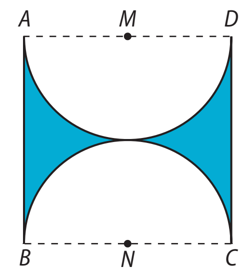
IRINA SOKOLOVSKAYA/SHUTTERSTOCK.COM

- O bastidor é essa peça que prende o tecido a ser bordado. Pode ser de madeira ou de outros materiais.

a) 98,5 cm

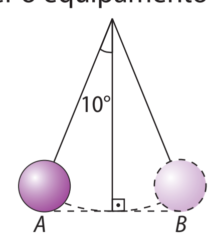


b) Para fazer esse detalhe, Luana desenhou um quadrado $ABCD$ de lado 10 cm. Em seguida, traçou as linhas curvas, que são semicircunferências com centros nos pontos médios, M e N, dos lados do quadrado. 51,4 cm



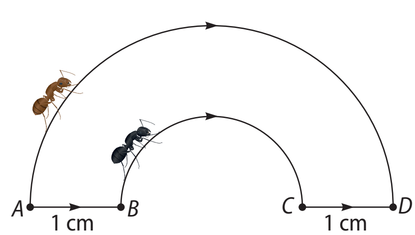
6. Você conhece o relógio de pêndulo? Ele foi criado pelo físico holandês Christian Huygens em 1656 a partir do princípio de funcionamento desenvolvido por Galileu Galilei. Uma das peças principais desse tipo de relógio é o pêndulo, responsável por manter o equipamento funcionando.

Suponha que o pêndulo de um relógio tenha comprimento 0,5 m e execute o movimento, de A para B, indicado na figura.



Determine o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ que a extremidade do pêndulo descreve. $\frac{\pi}{18}$ m

7. (OBMEP) Duas formigas partem do ponto A e vão até o ponto D, andando no sentido indicado pelas flechas. A primeira percorre o semicírculo maior; a segunda, o segmento $\overline{AB}$, o semicírculo menor e o segmento $\overline{CD}$. Os pontos A, B, C e D estão alinhados e os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem 1 cm cada um. Quantos centímetros a segunda formiga andou menos que a primeira? alternativa **d**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) 2
b) π
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\pi - 2$
e) 2π

FÓRUM

Envelhecimento da população

O crescimento da população idosa é uma realidade no Brasil e no mundo. O aumento da expectativa de vida e a diminuição da taxa de fecundidade são alguns fatores que contribuem para essa situação. Por isso, é preciso pensar em possibilidades que permitam a idosos terem uma vida saudável e ativa. O artesanato é uma das atividades que podem ser desenvolvidas, entre tantas outras, como dança, música, arte e atividades físicas.

PHOTOGRAPHEE.EU/SHUTTERSTOCK.COM

A atividade física contribui para uma boa qualidade de vida.

Reúna-se a um colega, pesquisem e debatam a respeito das questões a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

- Vocês acham importante que os idosos se mantenham ocupados e ativos? Quais são os benefícios dessas atitudes? Que atividades podem ser desenvolvidas por eles? Ver as **Orientações para o professor**.
- Em seu município, existe algum espaço de convivência dedicado à população idosa? Procurem saber quais são as atividades oferecidas e quais são os requisitos para participação. A resposta depende de onde os estudantes moram.
- Reúnam-se com o restante da turma e com o professor e, a partir das pesquisas feitas, debatam a respeito das políticas públicas voltadas ao acolhimento e desenvolvimento da população idosa. Debate dos estudantes.

Circunferência orientada

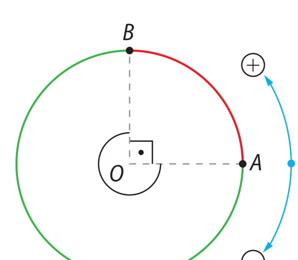
A figura a seguir mostra que, sobre a circunferência, o percurso de *A* para *B* pode ser feito no sentido anti-horário, seguindo o arco vermelho $\overset{\frown}{AB}$, ou no sentido horário, seguindo o arco verde $\overset{\frown}{AB}$.

Ao estabelecer o sentido anti-horário do percurso como positivo e o sentido horário como negativo, dizemos que temos uma **circunferência orientada**.

Assim, podemos ter as seguintes medidas angulares para o percurso de *A* para *B* da figura:

arco vermelho: $\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ rad ou $\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 90°$

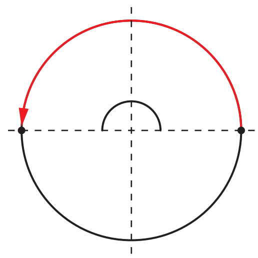
arco verde: $\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = -\dfrac{3\pi}{2}$ rad ou $\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = -270°$



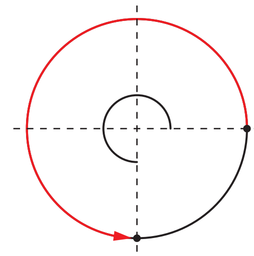
EDITORIA DE ARTE

Veja outros exemplos de arcos medidos na circunferência orientada:

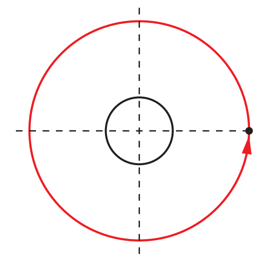
- no sentido anti-horário



■ Arco de π rad ou 180°.

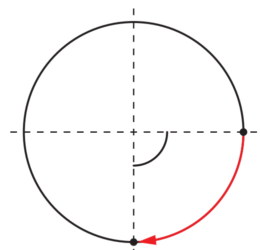


■ Arco de $\frac{3\pi}{2}$ rad ou 270°.

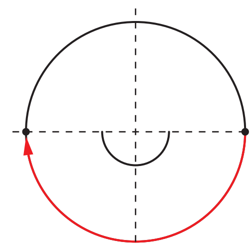


■ Arco de 2π rad ou 360°.

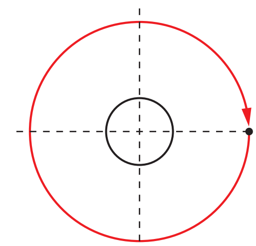
- no sentido horário



■ Arco de $-\frac{\pi}{2}$ rad ou $-90°$.



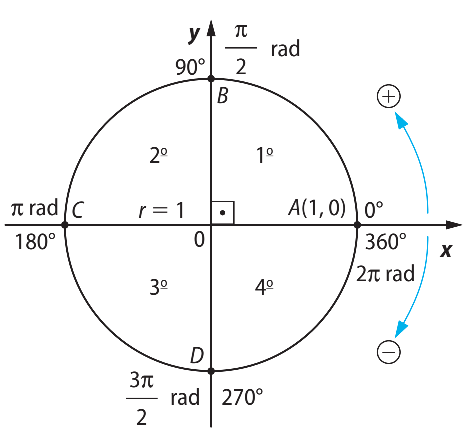
■ Arco de $-\pi$ rad ou $-180°$.



■ Arco de -2π rad ou $-360°$.

Circunferência trigonométrica

Vamos, agora, fixar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais *xOy* no plano.



A circunferência orientada de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas de raio unitário ($r = 1$) é denominada **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**. Os arcos da circunferência trigonométrica terão origem no ponto $A(1, 0)$, denominado **origem dos arcos**.

Os eixos *x* e *y* do sistema de coordenadas cartesianas determinam, no plano, quatro partes, denominadas quadrantes, numeradas no sentido anti-horário a partir do ponto *A*, como mostra a figura ao lado. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* estão nos eixos e não pertencem a quadrante algum.

PENSE E RESPONDA

Quais são as coordenadas dos pontos *B*, *C* e *D*?

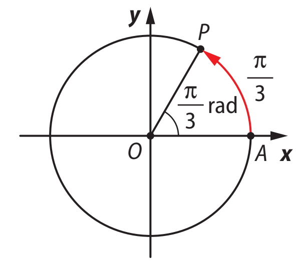
$B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ e $D(0, -1)$

SAIBA QUE...

Observe que, para todo ponto (x, y) pertencente à circunferência trigonométrica, temos: $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Arcos côngruos

No início do Capítulo, comentamos que vamos estudar as razões trigonométricas para qualquer ângulo. Para isso, precisamos compreender como localizá-los na circunferência trigonométrica. Por exemplo, como representar um arco de 450° na circunferência trigonométrica? É o que veremos a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica. Podemos verificar que há uma infinidade de arcos com origem em A e extremidade em P. Para isso, basta, a partir de P, dar voltas completas, ou seja, dar voltas em arcos cujas medidas sejam múltiplas de 2π, em qualquer sentido.

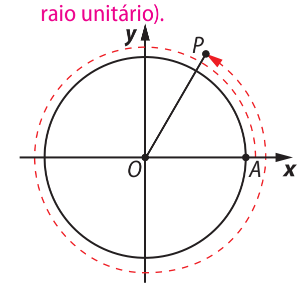
Ainda considerando o exemplo do arco $\overset{\frown}{AP}$, o primeiro arco que nos lembramos é o de medida $\frac{\pi}{3}$, mostrado na figura. No entanto, o ponto P é a extremidade de outros arcos, que podem ser obtidos ao adicionar (ou subtrair) múltiplos inteiros de 2π a $\frac{\pi}{3}$. Veja:

PENSE E RESPONDA

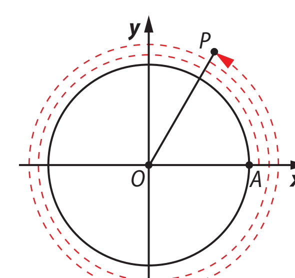
Por que os arcos múltiplos de 2π têm a mesma extremidade?

Porque 2π é o comprimento da circunferência trigonométrica (que tem raio unitário).

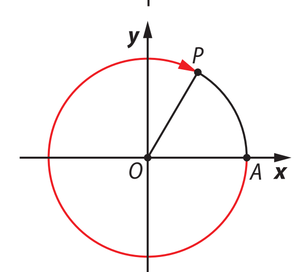
- No sentido anti-horário, ao dar uma volta completa mais $\frac{\pi}{3}$, obtemos o arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida $\frac{7\pi}{3}$, pois $\frac{7\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi\right)$.



- No sentido anti-horário, ao dar duas voltas completas mais $\frac{\pi}{3}$, obtemos o arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida $\frac{13\pi}{3}$, pois $\frac{13\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi\right)$.



- No sentido horário, ao dar uma volta completa menos $\frac{\pi}{3}$, obtemos o arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida $-\frac{5\pi}{3}$, pois $-\frac{5\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{3} - 1 \cdot 2\pi\right)$.



Os arcos que têm a mesma extremidade P são chamados de **arcos côngruos** ou **congruentes**.

PENSE E RESPONDA

- Qual é o arco obtido ao fazer $k = 0$ na expressão dos arcos côngruos?
- O que acontece quando k é um valor negativo?
- Qual é o arco côngruo a $\frac{\pi}{3}$ na segunda volta negativa? Como você pensou para chegar à resposta?

O próprio α, que é a 1ª determinação positiva dos arcos côngruos a ele.

Deve-se percorrer a circunferência no sentido horário para obter a extremidade do arco.

$-\frac{11\pi}{3}$. Resposta pessoal. Ver as **Orientações para o professor**.

De modo geral, um arco $\overset{\frown}{AP}$ que mede α radianos tem como expressão geral para os arcos côngruos a ele:

$$\alpha + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \alpha + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Caso a medida α do arco seja dada em grau, e como a circunferência tem 360°, teremos:

$$\alpha + k \cdot 360°, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

O arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $0° < \alpha < 360°$, é chamado de **1ª determinação positiva** dos arcos côngruos a ele, pois é o único representante desses arcos côngruos que está na primeira volta positiva.

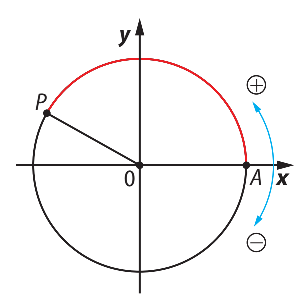
Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

Vimos que, além da origem A, cada arco da circunferência trigonométrica tem, como outra extremidade, um único ponto na circunferência. Assim, é possível indicar um arco apenas por esse ponto.

Vamos, agora, associar cada número real x a um único ponto P na circunferência trigonométrica, sendo que:

- se $x > 0$, percorremos, a partir de A e em sentido anti-horário, um arco de comprimento x com extremidades em A e P;
- se $x < 0$, percorremos, a partir de A e em sentido horário, um arco de comprimento $|x|$ com extremidades em A e P;
- se $x = 0$, o ponto P coincide com o ponto A.

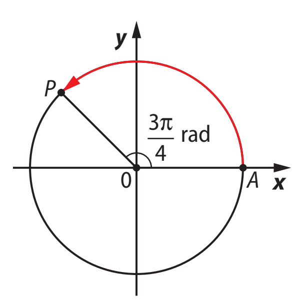
É como se "enrolássemos" a reta real na circunferência trigonométrica, com os pontos associados aos números positivos no sentido anti-horário e com os pontos associados aos números negativos no sentido horário. A origem da reta real coincide com o ponto A.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

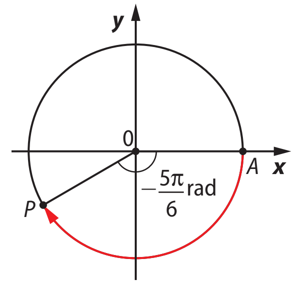
Acompanhe dois exemplos:

a) Para localizar o ponto associado ao número $\frac{3\pi}{4}$, partimos de A e percorremos um arco de comprimento $\frac{3\pi}{4}$ na circunferência no sentido anti-horário.



- $x = \frac{3\pi}{4}$
- $\text{med}\left(\overset{\frown}{AP}\right) = \frac{3\pi}{4}$

b) Para localizar o ponto associado ao número $-\dfrac{5\pi}{6}$, que é negativo, percorremos um arco de comprimento $\left|-\dfrac{5\pi}{6}\right| = \dfrac{5\pi}{6}$ no sentido horário na circunferência a partir de A.



- $x = -\dfrac{5\pi}{6}$
- $\text{med}\left(\overset{\frown}{AP}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$

SAIBA QUE...

Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, cada arco $\overset{\frown}{AP}$ associado a um número real x tem comprimento $|x|$ e medida angular x rad.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Escreva a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos a seguir.

a) $\dfrac{\pi}{4}$ **b)** 175°

Resolução

a) A expressão geral para arcos em radiano é $\alpha + 2k\pi$. Substituindo α por $\dfrac{\pi}{4}$, temos: $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) A expressão geral para arcos em grau é $\alpha + k \cdot 360°$. Substituindo α por 175°, temos: $175° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

4. Um móvel percorreu um arco de 1690° na circunferência trigonométrica, partindo do ponto A, origem dos arcos. Quantas voltas completas na circunferência esse móvel deu? Em qual quadrante parou?

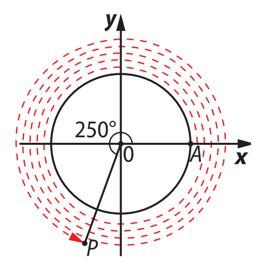
Resolução

Para determinar o número de voltas completas, vamos dividir a medida do arco, em grau, por 360°, que é a medida de uma volta na circunferência. Assim:

$$\begin{array}{r|l} 1690 & 360 \\ \hline 250 & 4 \end{array}$$

Com isso, podemos escrever a seguinte expressão:

$$1\,690° = \underbrace{250°}_{\text{O arco de 1690° tem a mesma extremidade que o arco de 250°.}} + \underbrace{4}_{\text{número de voltas completas}} \cdot 360°$$



Portanto, o móvel deu quatro voltas completas no sentido anti-horário e, como $180° < 250° < 270°$, parou no terceiro quadrante.

5. Calcule a 1ª determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos côngruos ao arco de 1940°.

Resolução

Assim como na atividade anterior, vamos dividir 1940° por 360° para determinar quantas voltas completas o arco dará na circunferência trigonométrica.

$$\begin{array}{r|l} 1940 & 360 \\ \hline 140 & 5 \end{array}$$

Então, temos cinco voltas completas e o resto da divisão indica quanto devemos andar na sexta volta. Assim, podemos escrever a seguinte expressão:

$$1940° = \underbrace{140°}_{\text{1ª determinação positiva}} + \underbrace{5}_{\text{número de voltas completas}} \cdot 360°$$

Portanto, a 1ª determinação positiva do arco de 1940° é 140° e a expressão geral dos arcos côngruos é $140° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

13. d) Duas voltas; não está em quadrante algum, está sobre o eixo x, no ponto $(-1, 0)$.
13. f) Duas voltas; não está em quadrante algum, está sobre o eixo y, no ponto $(0, 1)$.

Ver as **Orientações para o professor**.

8. Represente na circunferência trigonométrica os pontos associados aos números a seguir.

a) $\dfrac{\pi}{5}$

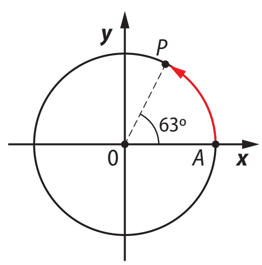
b) $\dfrac{3\pi}{4}$

c) $-\dfrac{5\pi}{9}$

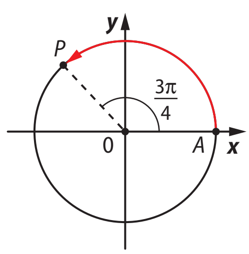
d) -5π

9. Determine a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos destacados nas circunferências trigonométricas a seguir.

a) $63° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$



b) $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$



10. Verifique se são côngruos os seguintes pares de arcos:

a) $1490°$ e $-1030°$; São côngruos.

b) $\dfrac{14\pi}{3}$ rad e $\dfrac{19\pi}{3}$ rad. Não são côngruos.

11. Verifique se os números $-\dfrac{5\pi}{6}$ e $\dfrac{7\pi}{6}$ estão associados a pontos coincidentes na circunferência trigonométrica. sim

- Reúna-se a um colega e explique a ele como você fez para chegar a essa conclusão. Vocês pensaram da mesma maneira? Respostas pessoais.

12. Determine o quadrante em que estão localizados os pontos correspondentes aos seguintes arcos:

a) $-1640°$; segundo quadrante

b) $\dfrac{2\,487\pi}{4}$ rad. quarto quadrante

13. Determine quantas voltas completas um móvel dá e em que quadrante ele para se, partindo da origem dos arcos, percorre, na circunferência trigonométrica, um arco de:

a) $1810°$; cinco voltas; primeiro quadrante

b) $\dfrac{25\pi}{4}$ rad; três voltas; primeiro quadrante

c) $-1200°$; três voltas; terceiro quadrante

d) $900°$;

e) $\dfrac{31\pi}{6}$ rad; duas voltas; terceiro quadrante

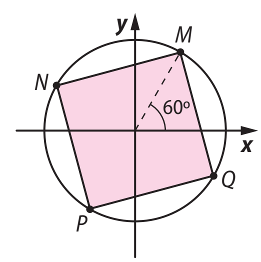
f) $\dfrac{9\pi}{2}$ rad.

14. Quantos centímetros percorre um corpo que descreve um arco de $600°$ em uma circunferência de raio 10 cm? Use $\pi \simeq 3{,}14$. aproximadamente 104,67 cm

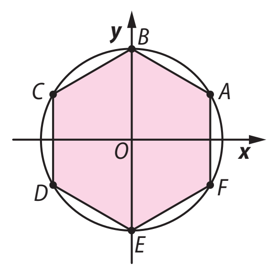
15. Os polígonos regulares das figuras a seguir estão inscritos em circunferências trigonométricas. Determine, em grau e em radiano, as 1ªs determinações positivas dos arcos cujas extremidades são os vértices de cada polígono.

Ver as **Orientações para o professor**.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

16. Se um arco $\overset{\frown}{AM}$ tem medida equivalente a 13 voltas inteiras, no sentido horário, mais $\dfrac{1}{8}$ de volta, qual é a expressão geral de todos os arcos AM? $\dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

17. Represente, na circunferência trigonométrica, as extremidades dos arcos cujas medidas são dadas pelas expressões a seguir.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) $\alpha = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha = 90° + k \cdot 90°, k \in \mathbb{Z}$

Seno e cosseno de um arco

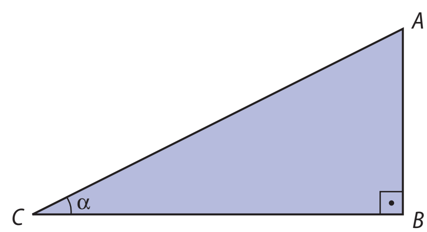
Você já estudou as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Vamos retomar essas ideias.

Seja o triângulo retângulo *ABC* da figura a seguir. Definimos seno, cosseno e tangente do ângulo agudo α como razões entre as medidas dos lados do triângulo, como indicado a seguir.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AB}{BC}$$



PENSE E RESPONDA

Neste triângulo retângulo, sendo $\text{med}\left(B\hat{A}C\right) = \beta$, quais são as expressões de sen β, de cos β e de tg β?

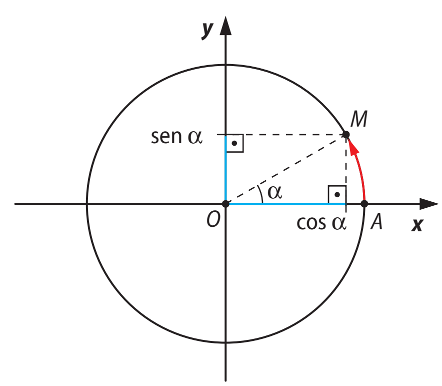
$\text{sen}\,\beta = \frac{BC}{AC}$, $\cos\beta = \frac{AB}{AC}$ e $\text{tg}\,\beta = \frac{BC}{AB}$

Agora, vamos ver esses conceitos na circunferência trigonométrica, estendendo-os para ângulos quaisquer.

Seja *M* um ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α. Vimos que *M* é a extremidade final do arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α em radiano. Define-se:

O **seno** de α é a ordenada do ponto *M*.

O **cosseno** de α é a abscissa do ponto *M*.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O eixo vertical é chamado de **eixo dos senos** e o eixo horizontal é chamado de **eixo dos cossenos**.

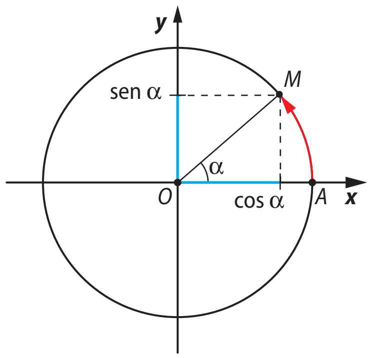
Com isso, cada número real α corresponde a um ponto da circunferência trigonométrica de coordenadas (cos α, sen α).

Essas definições de seno e de cosseno são válidas para o ponto *M* em qualquer quadrante da circunferência trigonométrica e também para quando *M* está sobre os eixos, sendo que os sinais do seno e do cosseno variam conforme mostrado a seguir.

PENSE E RESPONDA

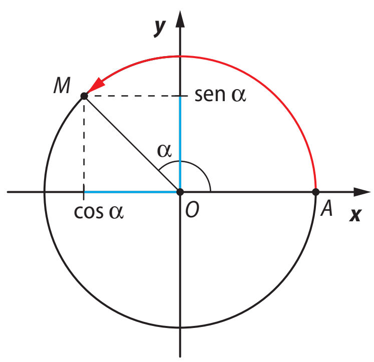
Relacione a definição de seno e de cosseno no triângulo retângulo com a definição de seno e de cosseno para ângulos na circunferência trigonométrica. Justifique por que elas coincidem para $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ver as **Orientações para o professor**.

- No primeiro quadrante, o seno é positivo e o cosseno é positivo.



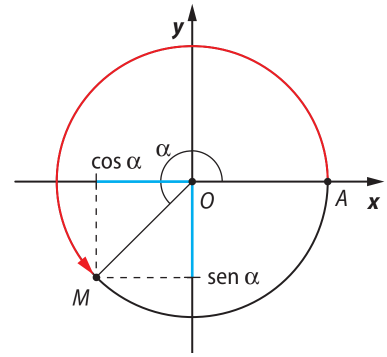
- ordenada de $M > 0 \Rightarrow \text{sen } \alpha > 0$
- abscissa de $M > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$

- No segundo quadrante, o seno é positivo e o cosseno é negativo.



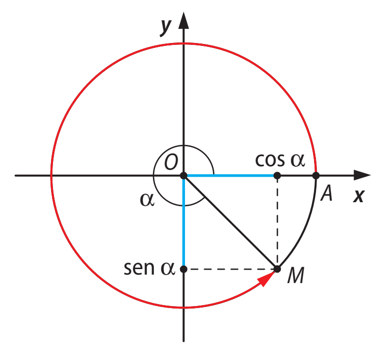
- ordenada de $M > 0 \Rightarrow \text{sen } \alpha > 0$
- abscissa de $M < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$

- No terceiro quadrante, o seno é negativo e o cosseno é negativo.



- ordenada de $M < 0 \Rightarrow \text{sen } \alpha < 0$
- abscissa de $M < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$

- No quarto quadrante, o seno é negativo e o cosseno é positivo.



- ordenada de $M < 0 \Rightarrow \text{sen } \alpha < 0$
- abscissa de $M > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

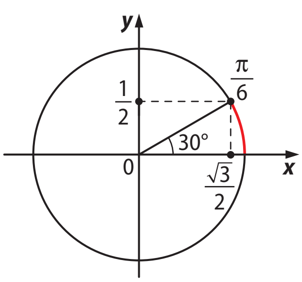
- Lembrando que a circunferência trigonométrica tem raio unitário, responda:
  a) Qual é o valor máximo que o seno de um ângulo pode assumir? E o valor mínimo? 1. −1
  b) Qual é o valor máximo que o cosseno de um ângulo pode assumir? E o valor mínimo? 1. −1
- O que acontece com os sinais do seno e do cosseno quando o ponto *M* está sobre o eixo *x* e sobre o eixo *y*? Ver as **Orientações para o professor**.

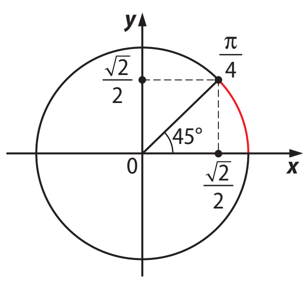
Alguns valores do seno e do cosseno

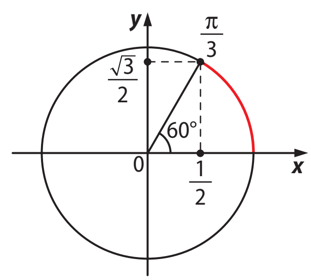
Agora que já definimos o seno e o cosseno de qualquer ângulo, podemos obter esses valores com o uso de algum *software* de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**, ou utilizando uma calculadora científica. Atualmente, a maioria das calculadoras disponíveis nos sistemas operacionais dos celulares possui essa opção. No entanto, assim como foi visto para as razões trigonométricas no triângulo retângulo, alguns ângulos são utilizados com bastante frequência e em situações em que não é possível recorrer a uma calculadora; portanto, saber os valores do seno e do cosseno deles ajuda na execução dos cálculos.

Apresentaremos, a seguir, os valores do seno e do cosseno desses arcos que vão ser bastante utilizados. Mas não se preocupe! Com o tempo e a prática de atividades, você memoriza esses valores sem perceber.

Medida do arco	0° (0)	30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	180° (π)	270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	360° (2π)
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1







ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

SAIBA QUE...

Como comentamos anteriormente, quando a medida angular do arco não estiver indicada, consideramos que está em radiano.

SAIBA QUE...

Em alguns textos, é possível que você encontre a expressão "valores notáveis" para se referir ao seno e ao cosseno desses ângulos.

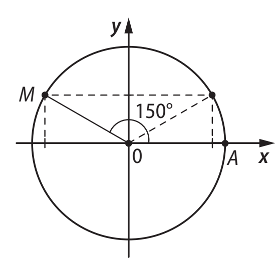
Redução ao primeiro quadrante

A partir dos valores de seno e de cosseno para o primeiro quadrante, e usando simetrias na circunferência trigonométrica, podemos estabelecer os valores de seno e cosseno para arcos nos demais quadrantes.

Assim, é possível determinar o seno e o cosseno dos arcos nos demais quadrantes a partir dos valores do seno e do cosseno dos arcos no primeiro quadrante.

PENSE E RESPONDA

Reúna-se a um colega e discutam como vocês fariam, apenas com a tabela anterior e seus conhecimentos matemáticos, para determinar o seno e o cosseno do arco de 150°. Resposta pessoal.

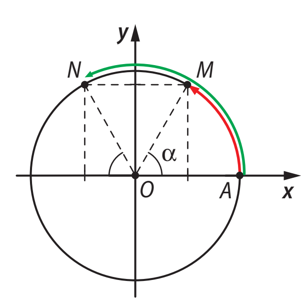


Quando relacionamos o seno e o cosseno de um arco de qualquer quadrante com os valores do seno e do cosseno de um arco do primeiro quadrante, dizemos que estamos fazendo uma **redução ao primeiro quadrante**.

Acompanhe, a seguir, como fazer essa redução ao primeiro quadrante a partir de cada um dos demais quadrantes.

- **Redução do segundo quadrante para o primeiro quadrante**

Seja M o ponto da circunferência trigonométrica correspondente ao arco de medida α. O ponto N, indicado na figura ao lado, é simétrico ao ponto M em relação ao eixo dos senos.



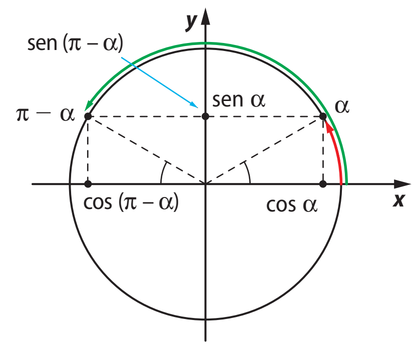
SAIBA QUE...

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a 180° (π rad).

Note que N é o ponto correspondente ao arco de medida $\pi - \alpha$ e os arcos de medidas α e $(\pi - \alpha)$ são arcos suplementares. O seno de $\pi - \alpha$ é igual ao seno de α, e o cosseno de $\pi - \alpha$ é igual ao oposto do cosseno de α, ou seja, dois arcos suplementares têm senos iguais e cossenos opostos.

Assim, podemos escrever:

$$\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\,\alpha$$



PENSE E RESPONDA

Ver as **Orientações para o professor**.

- Por que podemos afirmar que $\cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\,\alpha$?
  Dica: olhe para os triângulos formados na imagem acima.
- Retome a questão do **Pense e responda** da página 103: Qual é o valor do seno e do cosseno de 150°? Depois de ver o conteúdo, você pensou de maneira diferente?

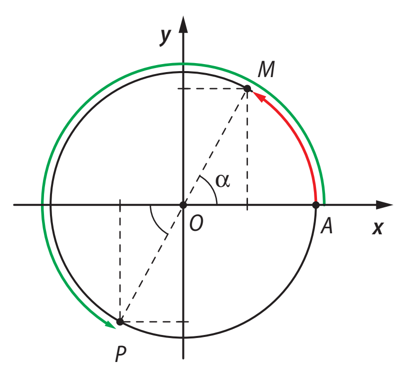
$\text{sen}\,(150°) = \text{sen}\,(30°) = \frac{1}{2}$

$\cos\,(150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta pessoal.

- **Redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante**

Seja M o ponto da circunferência trigonométrica correspondente ao arco de medida α. O ponto P, indicado na figura ao lado, é simétrico ao ponto M em relação ao ponto O, origem do sistema de eixos.

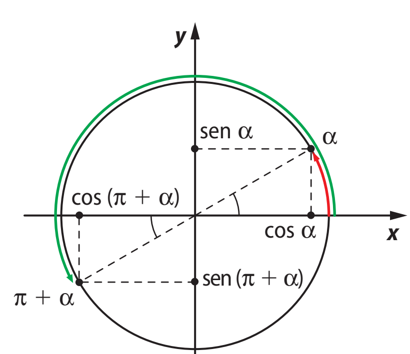


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Note que P é o ponto correspondente ao arco de medida $\pi + \alpha$. O seno de $\pi + \alpha$ é igual ao oposto do seno de α, e o cosseno de $\pi + \alpha$ é igual ao oposto do cosseno de α.

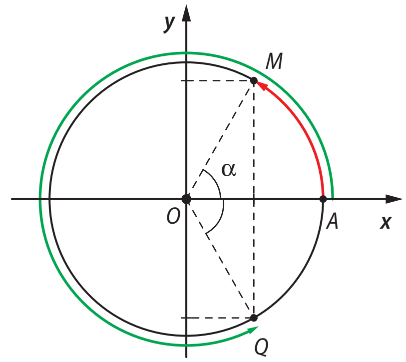
Assim, podemos escrever:

$$\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(\pi + \alpha) = -\cos\,\alpha$$



- **Redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante**

Seja M o ponto da circunferência trigonométrica correspondente ao arco de medida α. O ponto Q, indicado na figura ao lado, é simétrico ao ponto M em relação ao eixo dos cossenos.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

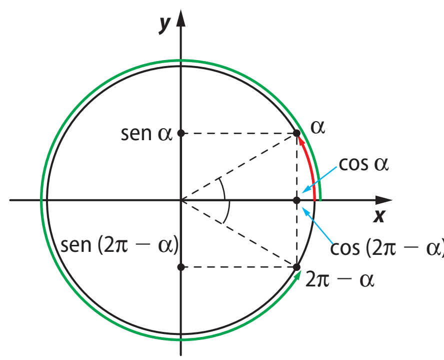
Note que Q é o ponto correspondente ao arco de medida $2\pi - \alpha$, e os arcos de medidas α e $(2\pi - \alpha)$ são arcos replementares. O seno de $2\pi - \alpha$ é igual ao oposto do seno de α, e o cosseno de $2\pi - \alpha$ é igual ao cosseno de α, ou seja, dois arcos replementares têm senos opostos e cossenos iguais.

SAIBA QUE...

Arcos ou ângulos replementares são aqueles cuja soma é 360° (2π rad).

Assim, podemos escrever:

$$\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\,\alpha$$

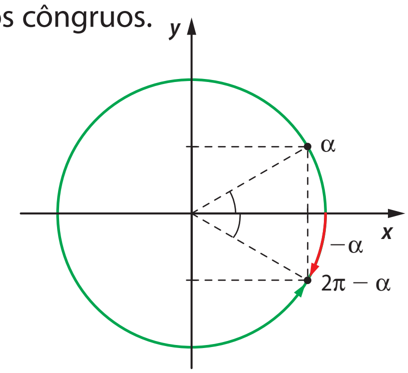


A partir das relações de redução do quarto quadrante, podemos fazer mais algumas outras, agora com os arcos negativos, ou seja, com aqueles indicados no sentido horário.

- $(360° - \alpha)$ e $-\alpha$ são medidas de arcos côngruos.
- $\text{sen}\,(360° - \alpha) = \text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
- $\cos\,(360° - \alpha) = \cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha$

Ou, em radiano, temos:

- $(2\pi - \alpha)$ e $-\alpha$ são arcos côngruos.
- $\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = \text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
- $\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha$



PENSE E RESPONDA

Descreva como determinar o seno e o cosseno de arcos que estão fora da primeira volta da circunferência trigonométrica, como $\frac{11\pi}{4}$.

Ver as **Orientações para o professor**.

PARA ACESSAR

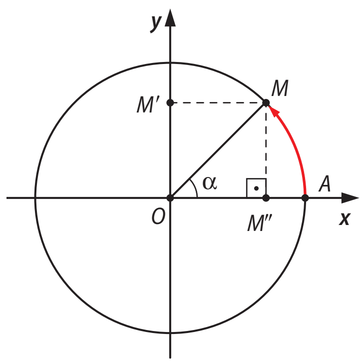
FERREIRA, F. M. Pontos simétricos na circunferência trigonométrica. **GeoGebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/GXuzvmpM. Acesso em: 22 jul. 2020.

Esse *site* apresenta um *applet* do *software* **GeoGebra** em que é possível visualizar as simetrias na circunferência trigonométrica, variando a posição do ponto que representa um arco da circunferência.

Relações entre seno e cosseno

No estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, você viu algumas expressões que relacionam o seno e o cosseno. Agora, vamos verificar que essas relações também são válidas para qualquer arco na circunferência trigonométrica.

Considere, na circunferência trigonométrica, o arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, como mostra a figura ao lado.



Os pontos M' e M'' são as projeções ortogonais do ponto M sobre os eixos y e x, respectivamente. No triângulo retângulo $OM''M$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(MM'')^2 + (OM'')^2 = (OM)^2$$

Para M no primeiro quadrante, os valores do seno e do cosseno de α são positivos. Então, podemos escrever $OM'' = \cos\alpha$ e $OM' = MM'' =$ $= \operatorname{sen}\alpha$. Além disso, $OM = 1$. Assim, voltando à igualdade obtida pelo teorema de Pitágoras:

$$(MM'')^2 + (OM'')^2 = (OM)^2 \Rightarrow (\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1^2$$

Ou, ainda:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

PENSE E RESPONDA

- Por que podemos afirmar que $OM = 1$?
- Onde estão localizados os pontos dos arcos de medida $\alpha = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$? E os de medida $\alpha = \frac{\pi}{2} +$ $+ k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$? Por que, nesses" pontos, o triângulo $OM''M$ não existe?

Ver as **Orientações para o professor**.

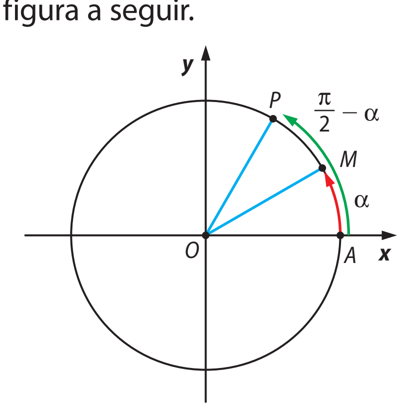
Essa relação, denominada **relação trigonométrica fundamental**, é válida para todos os valores de α, inclusive para aqueles em que o ponto M pertence a um dos eixos. Esses são os casos quando o triângulo $OM''M$ não existe, ou seja, quando $\alpha = k\pi$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Agora, vamos ver como podemos relacionar as razões seno e cosseno de ângulos complementares na circunferência trigonométrica.

Para isso, considere, na circunferência trigonométrica, os arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AP}$ cujas medidas são α e $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, respectivamente, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, conforme mostra a figura a seguir.

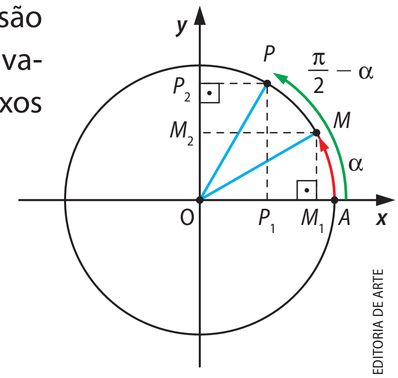
SAIBA QUE...

Arcos ou ângulos complementares são aqueles cuja soma é $90°\left(\frac{\pi}{2}\ \text{rad}\right)$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Ao traçar os triângulos retângulos OM_1M e OP_1P, em que M_1 e M_2 são as projeções ortogonais do ponto M sobre os eixos x e y, respectivamente, e P_1 e P_2 são as projeções ortogonais do ponto P sobre os eixos x e y, respectivamente, verificamos que:



- esses arcos são complementares, pois $\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$;
- $\cos \alpha = OM_1$, $\text{sen}\ \alpha = OM_2$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OP_1$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = OP_2$.

Considerando os triângulos OM_1M e OP_2P, temos:

$$\left.\begin{array}{l} OM = OP = 1 \Rightarrow \overline{OM} \cong \overline{OP} \\ \text{med}\left(M_1\hat{O}M\right) = \text{med}\left(P_2\hat{O}P\right) = \alpha \Rightarrow M_1\hat{O}M \cong P_2\hat{O}P \\ \text{med}\left(O\widehat{M_1}M\right) = \text{med}\left(O\widehat{P_2}P\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow O\widehat{M_1}M \cong O\widehat{P_2}P \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Pelo caso LAA_O de congruência, $\triangle OM_1M \cong \triangle OP_2P$.

Pela congruência de triângulos, temos:

- $\overline{OP_2} \cong \overline{OM_1}$
- $\overline{PP_2} \cong \overline{MM_1}$. Como $\overline{PP_2} \cong \overline{OP_1}$ e $\overline{MM_1} \cong \overline{OM_2}$, então $\overline{OP_1} \cong \overline{OM_2}$.

Com isso, concluímos que:

O seno do complementar de um arco é igual ao cosseno desse arco.

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

O cosseno do complementar de um arco é igual ao seno desse arco.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\ \alpha$$

Essas relações também são válidas para arcos situados em outros quadrantes que são complementares. Por exemplo, $-\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$ são medidas de arcos complementares, pois:

$$-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Então, temos:

- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

  $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

  $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

PENSE E RESPONDA

No exemplo ao lado, fizemos $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ para obter as relações entre o seno e o cosseno dos arcos $-\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$. Use $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ e refaça os cálculos. Você chegou às mesmas expressões?

Ver as **Orientações para o professor**.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. Calcule o valor de $\cos 13\pi$.

Resolução

Como o arco de medida 13π não está na primeira volta, devemos estabelecer a 1ª determinação positiva dele. Então:

$13\pi = \pi + 12\pi = \pi + 6 \cdot 2\pi$

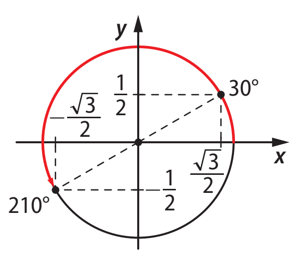
Então, 13π é côngruo a π e, portanto, $\cos 13\pi = \cos \pi$.

Como $\cos \pi = -1$, então $\cos 13\pi = -1$.

7. Calcule os valores de sen 210° e cos 210°.

Resolução

O arco de 210° está no terceiro quadrante. Além disso, observamos que $210° = 180° + 30°$. Então, podemos fazer a redução ao primeiro quadrante. Assim, temos:



Então, podemos concluir que:

$$\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8. Calcule o valor da expressão

$$E = \frac{\text{sen } 1\,830° + \cos 14\pi}{\text{sen } \frac{16\pi}{3}}.$$

Resolução

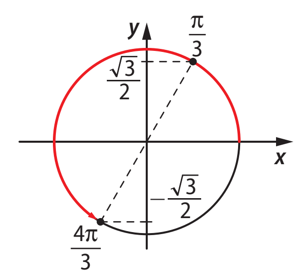
Para calcular o valor de E, precisamos determinar cada uma das razões trigonométricas da expressão. Como todos os arcos são maiores do que uma volta da circunferência trigonométrica, vamos calcular a 1ª determinação positiva de cada um deles:

- $1830° = 30° + 5 \cdot 360°$
- $14\pi = 7 \cdot 2\pi = 0 + 7 \cdot 2\pi$
- $\frac{16\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$

Então, 1830° é côngruo a 30°, 14π é côngruo a 0 e $\frac{16\pi}{3}$ é côngruo a $\frac{4\pi}{3}$. A partir dessas informações, vamos calcular as razões trigonométricas da expressão.

- $\text{sen } 1830° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 14\pi = \cos 0 = 1$
- $\text{sen } \frac{16\pi}{3} = \text{sen } \frac{4\pi}{3}$

O arco $\frac{4\pi}{3}$ está no terceiro quadrante e $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$. Então, vamos fazer a redução do terceiro para o primeiro quadrante:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Então: $\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Agora que temos os valores de todas as razões trigonométricas, substituímos na expressão para determinar o valor de E.

$$E = \frac{\frac{1}{2}+1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Portanto, $E = -\sqrt{3}$.

PENSE E RESPONDA

- Explique, com suas palavras, como chegar à conclusão de que $1\,830° = 30° + 5 \cdot 360°$.
  Resposta pessoal.
- Utilizando o resultado da atividade resolvida **6**, como poderíamos determinar o arco côngruo a 14π?
  Ver as **Orientações para o professor**.

9. Simplifique a expressão:

$A = \text{sen}\,(900° - \alpha) + \cos\,(1980° + \alpha) +$
$+ \text{sen}\,(1440° - \alpha)$

Resolução

Primeiro, vamos analisar a questão antes de começar a fazer os cálculos. Essa é uma etapa importante da resolução de problemas e deve ser feita sempre.

Percebemos que há um arco de medida α na expressão, mas o valor de α não é fornecido. Isso nos indica que a resposta será uma expressão simplificada, mas ainda em função de α.

Note que os valores dos arcos dados são todos maiores do que uma volta da circunferência trigonométrica. Parece razoável, então calcularmos a 1ª determinação positiva de cada um deles.

Assim:

$900° = 180° + 2 \cdot 360°$

$1980° = 180° + 5 \cdot 360°$

$1440° = 0° + 4 \cdot 360°$

Com essas informações, podemos substituir os ângulos dados pelos seus respectivos côngruos na primeira volta, pois os valores do seno e do cosseno são os mesmos para arcos côngruos. Logo:

$\text{sen}\,(900° - \alpha) = \text{sen}\,(180° - \alpha)$

$\cos\,(1980° + \alpha) = \cos\,(180° + \alpha)$

$\text{sen}\,(1440° - \alpha) = \text{sen}\,(-\alpha)$

Agora, vamos utilizar as expressões relacionadas às simetrias que vimos nas reduções ao primeiro quadrante. Assim:

$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

Por fim, substituímos as expressões obtidas na expressão A:

$A = \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha$
$A = -\cos\alpha$

Portanto, a expressão simplificada é
$A = -\cos\alpha$.

10. Dado $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{4}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\alpha$.

Resolução

Observando o enunciado, é dado o valor do seno de um ângulo no primeiro quadrante e é pedido o cosseno desse ângulo. A relação fundamental da Trigonometria relaciona o seno e o cosseno de um ângulo, então vamos aplicá-la.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{9}{16} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{7}{16}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Agora, precisamos determinar se o cosseno é positivo ou negativo. Do enunciado, sabemos que o ângulo α pertence ao primeiro quadrante. Vimos que o cosseno nesse quadrante é positivo. Então:

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

PENSE E RESPONDA

- Ao manipular, algebricamente, a relação fundamental da Trigonometria para os valores dados, obtivemos dois valores possíveis para o cosseno. Usando a circunferência trigonométrica, explique por que isso ocorreu.
- Qual informação dada no enunciado possibilitou determinar qual dos dois valores obtidos era o correto para a situação apresentada?

Ver as **Orientações para o professor**.

11. Para quais valores de m temos, simultaneamente, $\text{sen}\,\alpha = m + 1$ e $\cos\alpha = m$?

Resolução

Vamos usar a relação fundamental para substituir os valores de seno e de cosseno e determinar os possíveis valores de α.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (m + 1)^2 + m^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 + m^2 - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2m^2 + 2m = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m(2m + 2) = 0 \Rightarrow m = 0$ ou
$2m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1$

Portanto, os possíveis valores são $m = 0$ ou $m = -1$.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

18. Calcule os valores indicados a seguir.

a) sen 150° $\frac{1}{2}$

b) cos 150° $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) sen 240° $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) cos 240° $-\frac{1}{2}$

e) sen 315° + cos 315° zero

19. Calcule os valores do seno e do cosseno dos seguintes arcos: Ver as **Orientações para o professor**.

a) 135°

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{19\pi}{4}$

d) −240°

20. Usando $\pi \simeq 3{,}14$, verifique se:

a) sen 8 > 0; verdadeiro

b) cos 10 < 0; verdadeiro

c) sen 5 > 0. falso

- Reúna-se a um colega e explique a ele como você pensou para realizar a atividade. Vocês pensaram da mesma maneira? Resposta pessoal.

21. Encontre o número real expresso por:

a) sen 360° + sen 540° − 4 sen 1710° 4

b) cos 810° + 4 cos 3780° − $\frac{1}{2}$ cos 1350° −4

22. Simplifique as expressões a seguir.

a) sen $(9\pi - \alpha)$ + sen $(5\pi - \alpha)$ 2sen α

b) sen $(\alpha - 900°)$ + cos $(\alpha - 540°)$ −sen α − cos α

c) sen $(4\pi - \alpha)$ + cos $(8\pi - \alpha)$ − sen $(720° - \alpha)$ cos α

23. Determine o quadrante em que está o arco α sabendo que:

a) cos $\alpha > 0$ e sen $\alpha > 0$ primeiro quadrante

b) sen $\alpha > 0$ e cos $\alpha < 0$ segundo quadrante

24. Represente, na circunferência trigonométrica, um ângulo α tal que: Ver as **Orientações para o professor**.

a) sen $\alpha = -\frac{3}{4}$

b) sen $\alpha = \frac{7}{10}$

c) sen $\alpha = \frac{1}{5}$ com $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

25. Calcule o valor da expressão

sen 8π + sen $\frac{11\pi}{2}$ − sen $\frac{13\pi}{6}$. $-\frac{3}{2}$

26. Sabendo que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, calcule:

$A = \text{sen}\,\frac{\alpha}{2} - 3\,\text{sen}\,2\alpha + \frac{\text{sen}\,3\alpha}{4}$ $A = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$

27. Calcule o valor da expressão zero

$2\text{sen}\,\pi \cdot \text{sen}\,(\pi - \alpha) \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ para $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

28. Relacione os senos e cossenos da coluna da esquerda com os seus respectivos valores na coluna da direita. a-I; b-II; c-IV; d-III; e-IV; f-II; g-I; h-III
Atenção! Alguns valores serão relacionados com mais de uma razão trigonométrica.

a) sen 120°

b) sen 150°

c) cos 120°

d) cos 150°

e) sen $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

f) sen $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

g) cos $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

h) cos $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

I) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\frac{1}{2}$

III) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

IV) $-\frac{1}{2}$

29. Sendo sen $\alpha = \sqrt{a-2}$ e cos $\alpha = a - 1$, determine a. $a = 2$

30. (PUC-SP) Sendo cos $x = \frac{1}{m}$ e sen $x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$, determine m. 2 ou −1

31. (Fuvest-SP) Qual dos números é maior? Justifique.

a) sen 830° ou sen 1195° sen 830°

b) cos (−535°) ou cos 190° cos 190°

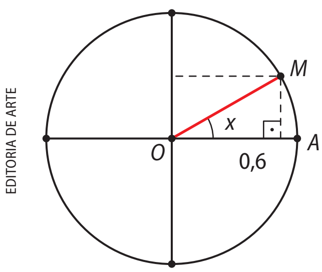
32. (FEI-SP) Calcular sen $\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ · cos (31π). 1

33. Se $k \in \mathbb{N}$ e $k < 4$, quanto vale a soma dos números da forma $\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$? zero

34. (UMC-SP) Baseando-se no círculo trigonométrico apresentado na figura a seguir, pode-se afirmar que o valor da expressão

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\text{sen}\, x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \text{ é:}$$

EDITORIA DE ARTE



a) 1

b) 2 alternativa **b**

c) sen x

d) cos x

e) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

35. Sendo $\cos \frac{\pi}{12} = p$, calcule $\text{sen}\, \frac{5\pi}{12}$. p

36. (UFMS) Calcule todos os valores reais de α, para os quais valem, simultaneamente, as igualdades $\text{sen}\, x = a + \frac{1}{2}$ e $\cos x = a - \frac{1}{2}$, sendo x um número real. $a = \pm\frac{1}{2}$

37. Se sen 25° ≃ 0,42 e cos 25° ≃ 0,91, calcule:

a) sen 205° e cos 205° −0,42; −0,91

b) sen (−25°) e cos (−25°) −0,42; 0,91

c) sen 115° e cos 115° 0,91; −0,42

d) sen 65° e cos 65° 0,91; 0,42

e) sen 335° e cos 335° −0,42; 0,91

38. Sabendo que cos 15° ≃ 0,97, determine o valor de:

a) sen 75° 0,97

b) sen 15° ≃0,24

c) cos 75° ≃0,24

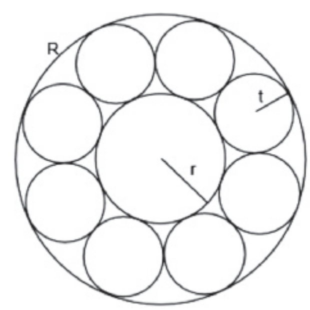
39. Você já ouviu falar no *Sangaku*?

Sangaku são gravuras em madeira escritas em uma língua antiga do Japão, durante o período Edo (1603-1867), que continham teoremas geométricos e normalmente eram entregues como oferendas em templos xintoístas em agradecimento por bons desempenhos escolares.

KAISORN/SHUTTERSTOCK.COM

- Acompanhe um exemplo de problema encontrado em um *Sangaku* datado de 1879.

[...] um anel de oito pequenos círculos de raio t, cujos centros se encontram nos vértices de um octógono regular, é circunscrito por um círculo de raio R e circunscreve um círculo de raio r. Encontre R e r em termos de t.



REPRODUÇÃO/SACRED MATHEMATICS: JAPANESE TEMPLE

SANTOS, T. K. O. **Sangaku**: a matemática sagrada. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2018. p. 46. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/167284/mod_resource/content/0/Thaynara%20Keiko%20Oda%20Santos.pdf. Acesso em: 24 jul. 2020.

Agora, reúna-se a um colega e façam o que se pede em cada item a seguir.

a) Vocês já tinham ouvido falar a respeito do *Sangaku*? Pesquisem sobre ele, suas origens, problemas escritos nele e informações que tenham curiosidade em saber. pesquisa dos estudantes

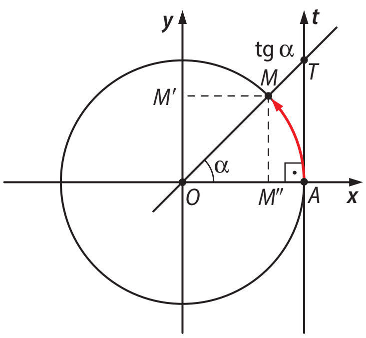
b) Resolvam o problema do *Sangaku* apresentado. Dado: sen 22,5° ≃ 0,38. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Agora é a vez de vocês! Criem um painel inspirado no *Sangaku*: pensem em um problema geométrico que envolva os conteúdos vistos até agora e o representem em uma folha de papel. Depois, troquem o *Sangaku* criado com outra dupla e uma deve resolver o problema elaborado pela outra. elaboração dos estudantes

Tangente de um arco

Já vimos como as razões seno e cosseno se comportam na circunferência trigonométrica. Agora, vamos ver o que acontece com a tangente.

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica associado ao número real α. Vimos que M é a extremidade final do arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α radianos.



EDITORIA DE ARTE

Tomemos o eixo t, paralelo ao eixo dos senos, orientado no mesmo sentido e tangente à circunferência no ponto A. O eixo t é chamado de **eixo das tangentes** e o ponto A é a origem do eixo das tangentes.

Seja T o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo t das tangentes. Define-se:

> A **tangente** de α é a ordenada do ponto T.

SAIBA QUE...

A tangente de um ângulo também pode ser indicada como tan. Escrever tg α é o mesmo que escrever tan α. Essa notação pode ser encontrada, por exemplo, em algumas calculadoras científicas e programas de computador.

Verificamos que:

- essa definição preserva a relação entre tangente, seno e cosseno para qualquer ângulo α, em que $\cos\alpha \neq 0$. Por exemplo, no primeiro quadrante, nos triângulos $OM''M$ e OAT da figura anterior, temos:

$$\triangle OM''M \sim \triangle OAT \Rightarrow \frac{OM''}{OA} = \frac{M''M}{AT} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha = 1 \cdot \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\text{, com } \cos\alpha \neq 0$$

- quando a reta $\overleftrightarrow{OT}$ coincide com o eixo dos cossenos, temos tg $\alpha = 0$. Por exemplo:

  tg $0° = 0$ e tg $\pi = 0$, pois sen $0° = 0$ e sen $\pi = 0$.

- quando a reta $\overleftrightarrow{OT}$ coincide com o eixo dos senos, não existe tg α.

Por exemplo:

tg $\frac{\pi}{2}$ e tg $270°$ não estão definidas, pois $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\cos 270° = 0$.

Com essa definição, a tangente só não está definida para $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

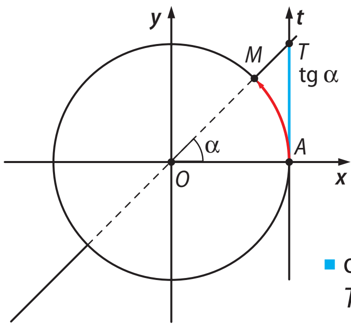
PENSE E RESPONDA

- Relacione a definição da tangente no triângulo retângulo com a definição da tangente para ângulos na circunferência trigonométrica. Justifique por que elas coincidem para $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- Por que podemos afirmar que $\triangle OM''M \sim \triangle OAT$?

Ver as **Orientações para o professor**.

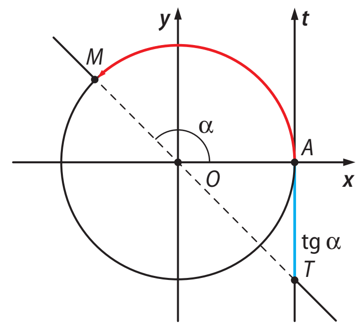
Como o eixo das tangentes é orientado para cima, a tangente é positiva quando α é do primeiro ou do terceiro quadrantes; e negativa quando α é do segundo ou do quarto quadrantes, como indicado nas imagens a seguir.

- No primeiro quadrante, a tangente é positiva.



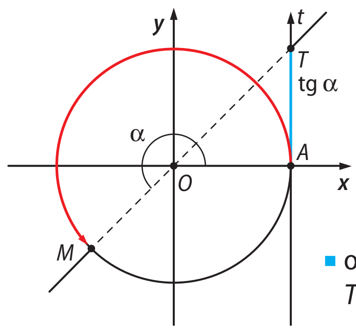
■ ordenada de $T > 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha > 0$

- No segundo quadrante, a tangente é negativa.



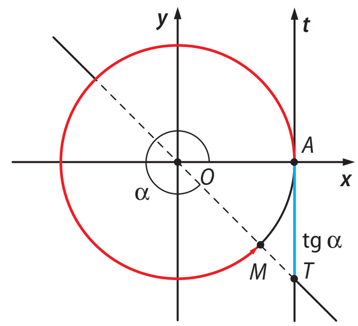
■ ordenada de $T < 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha < 0$

- No terceiro quadrante, a tangente é positiva.



■ ordenada de $T > 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha > 0$

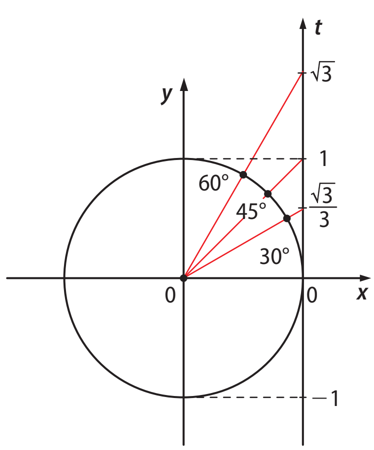
- No quarto quadrante, a tangente é negativa.



■ ordenada de $T < 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha < 0$

Alguns valores da tangente

Assim como fizemos com o seno e o cosseno, vamos ver o valor da tangente para alguns arcos mais comuns na circunferência trigonométrica. Para isso, vamos usar a relação entre as razões $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ e os valores de seno e cosseno desses ângulos vistos anteriormente. Assim:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $\text{tg}\,30° = \dfrac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg}\,45° = \dfrac{\text{sen}\,45°}{\cos 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$
- $\text{tg}\,60° = \dfrac{\text{sen}\,60°}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Então, podemos escrever:

Medida do arco	0° (0)	30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	180° (π)	270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	360° (2π)
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	não está definida	0	não está definida	0

PENSE E RESPONDA Não. Ver as **Orientações para o professor**.

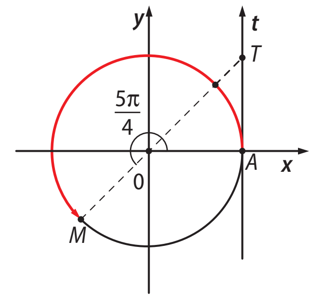
- Há um valor máximo que a tangente pode assumir? E um valor mínimo? Se sim, que valores são esses?
- O que acontece com os valores da tangente quando o ponto *M* está sobre o eixo *x*? E sobre o eixo *y*?

Ver as **Orientações para o professor**.

Redução ao primeiro quadrante

PENSE E RESPONDA

Reúna-se a um colega e discutam como vocês fariam, apenas com a tabela da página anterior e seus conhecimentos matemáticos, para determinar a tangente do arco de $\frac{5\pi}{4}$. Resposta pessoal.

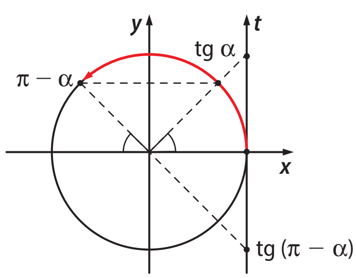


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Assim como fizemos com o seno e com o cosseno, podemos usar as simetrias na circunferência trigonométrica e os valores da tangente no primeiro quadrante para determinar a tangente de arcos nos demais quadrantes. Nesse caso, também estamos fazendo uma **redução ao primeiro quadrante**.

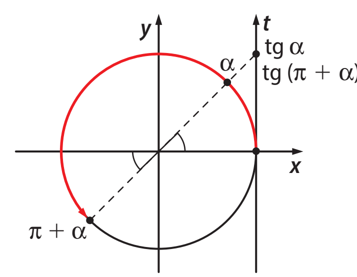
Acompanhe, a seguir, como fazer essa redução ao primeiro quadrante a partir de cada um dos demais quadrantes para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

- **Redução do segundo quadrante para o primeiro quadrante**



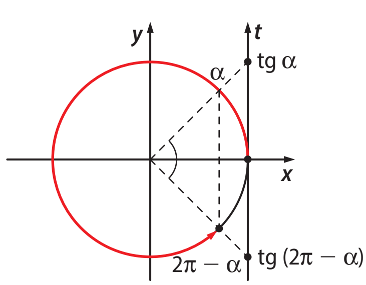
$$\text{tg}\,(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

- **Redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante**



$$\text{tg}\,(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

- **Redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante**



$$\text{tg}\,(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$

PENSE E RESPONDA

- Como podemos relacionar a tangente de arcos no quarto quadrante com arcos de medida negativa, medidos no sentido horário?
  $\text{tg}\,(2\pi - \alpha) = \text{tg}\,(-\alpha) = -\,\text{tg}\alpha$

ATIVIDADES RESOLVIDAS

12. Determine o valor de tg 1845°.

Resolução

O arco de 1845° é maior do que uma volta. Então, vamos calcular a 1ª determinação positiva dele:

$1845° = 45° + 5 \cdot 360°$

Então, 1845° é côngruo a 45°. Assim:

$\text{tg } 1845° = \text{tg } 45° = 1$

Portanto, tg 1845° = 1.

13. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $\text{sen } \alpha > 0$, calcule $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Resolução

Usando a relação entre tangente, seno e cosseno, temos:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}$$

Usando a relação trigonométrica fundamental para determinar o valor de sen α:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm\frac{12}{13}$$

Do enunciado, $\text{sen } \alpha > 0$. Então, $\text{sen}\alpha = \frac{12}{13}$.

Substituindo os valores na expressão da tangente, temos:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{5}{12}$$

Portanto, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{5}{12}$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

40. Calcule o valor de:

a) tg 150° $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) tg (−945°) −1

c) $\text{tg } \frac{5\pi}{3}$ $-\sqrt{3}$

d) tg 7π zero

41. Simplifique as expressões a seguir.

a) $\text{tg }(3\pi - \alpha) + \text{tg }(-5\pi - \alpha)$ $-2\text{tg }\alpha$

b) $\text{tg }(\alpha + 540°) - \text{tg }(7\pi + \alpha)$ zero

42. Calcule $A = \text{sen } 3\alpha + \cos 4\alpha - \text{tg } 2\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$. zero

43. Calcule o valor de $\cos 510° + \text{tg } \frac{3\pi}{4}$. $\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$

44. Que número é maior: tg 1 ou tg 7? tg 1

- Explique ao seu colega como você pensou para resolver a atividade. Vocês pensaram da mesma maneira? Resposta pessoal.

45. Calcule o valor de:

a) $\text{tg } \alpha + \text{tg } 3\alpha + \text{tg } 5\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 1

b) $\text{tg } \alpha + \text{tg } 2\alpha + \text{tg } 4\alpha$ para $\alpha = -60°$ $-\sqrt{3}$

46. Determine *m* para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação $\text{tg}^2 \alpha - m \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 0$. $m = 15$

47. Sendo $\text{sen } \alpha = -\frac{3}{5}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcule:

a) cos α $-\frac{4}{5}$

b) tg α $\frac{3}{4}$

48. Dado $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule os valores de sen α e tg α. $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{tg } \alpha = -\sqrt{15}$

49. Simplifique a expressão $\frac{2 - \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \text{tg}^2 \alpha$. 2

50. (Fuvest-SP) Se $\text{tg } x = \frac{3}{4}$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de $y = \cos x - \text{sen } x$. $-\frac{1}{5}$

51. Qual é o sinal do produto $\text{tg } 28° \cdot \text{tg } 230° \cdot \text{tg } 307°$? negativo

52. Verifique se $\text{tg } \frac{5\pi}{12} > \text{sen } \frac{5\pi}{12}$. verdadeiro

53. (ITA-SP) Sabendo que $\cos \theta = -\frac{3}{7}$ e $\text{tg } \theta < 0$, calcule o valor da expressão:

$$x = \frac{2 \cdot \text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta}$$ $\frac{12\sqrt{10}}{31}$

Conhecendo a planilha eletrônica

A planilha eletrônica é uma ferramenta muito útil em diversas situações do dia a dia e para resolução de problemas matemáticos. Com ela, cálculos recorrentes, por exemplo, podem ser feitos rapidamente com a criação de uma fórmula adequada ou utilizando uma fórmula disponível no banco de dados do *software*.

Existem planilhas eletrônicas de diversos fabricantes, mas todas elas funcionam de maneira muito semelhante. Aqui, vamos utilizar a planilha eletrônica do **Libre Office** que pode ser baixada gratuitamente no *site* oficial <https://pt-br.libreoffice.org/> (acesso em: 23 jul. 2020).

Construção de uma calculadora trigonométrica

Estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica e vimos alguns valores notáveis para essas razões. Também estudamos como determinar essas razões de arcos do segundo, terceiro e quarto quadrantes da circunferência trigonométrica fazendo a redução ao primeiro quadrante. No entanto, podemos ter situações do cotidiano em que seja necessário calcular as razões trigonométricas para outros arcos ou ângulos, inclusive para valores não inteiros, como 122,3°. Como fazer nesse caso? Podemos utilizar diversos recursos, entre eles, uma calculadora científica, um *software* de geometria dinâmica ou uma planilha eletrônica, a qual escolhemos para usar neste momento.

Vamos utilizar uma planilha eletrônica para criar nossa própria calculadora trigonométrica, ou seja, uma planilha que calcula automaticamente os valores das razões trigonométricas para qualquer medida de ângulo.

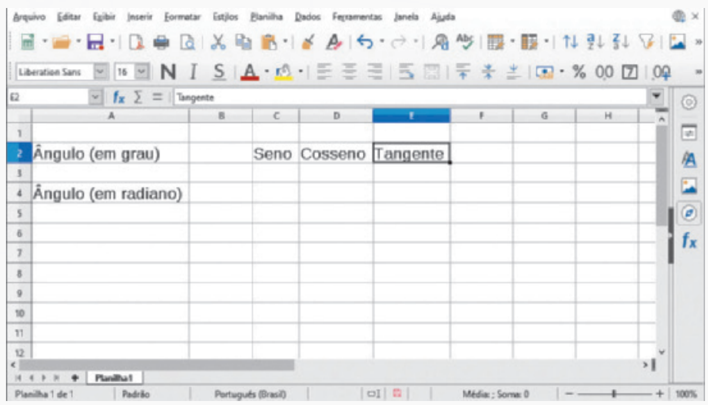
Para isso, acompanhe a sequência de passos a seguir.

I. Abra uma planilha no **Libre Office** e salve-a como "CALCTRIGONOMETRICA".

II. Na planilha, para identificar cada uma das razões trigonométricas, digite cada palavra em uma célula, conforme indicado:

- na célula **A2**: "Ângulo (em grau)";
- na célula **A4**: "Ângulo (em radiano)";
- na célula **C2**: "Seno";
- na célula **D2**: "Cosseno";
- na célula **E2**: "Tangente".

Ao final, sua planilha estará semelhante à imagem a seguir.



LIBREOFFICE

A célula **A3** será reservada para a digitação do valor do ângulo a ser calculado; a célula **A5** fornecerá, em radiano, o ângulo digitado; e as células **C3**, **D3** e **E3** serão reservadas para apresentar os resultados do seno, cosseno e tangente, respectivamente.

Em uma planilha eletrônica, o cálculo das razões trigonométricas é feito com ângulos na unidade radiano. Porém, para facilitar nosso trabalho, vamos digitar o ângulo em grau e utilizaremos uma função para que o programa realize a transformação de unidades.

III. A função que vai realizar esse trabalho é "Radianos()" e, como digitaremos o valor do ângulo na célula **A3**, devemos informar ao programa que é dessa célula que ele precisa pegar o valor para fazer a conversão de unidades.

Assim, na célula **A5**, digite "=Radianos(A3)" e o programa nos fornecerá, em radiano, o valor do ângulo digitado na célula **A3**.

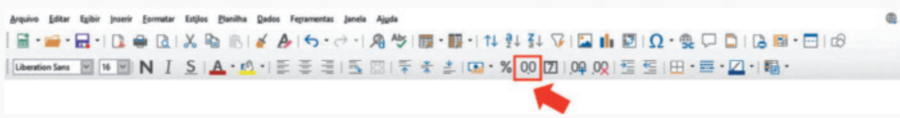
IV. A planilha eletrônica já tem, em seu banco de dados, fórmulas para o cálculo das razões trigonométricas. Elas funcionam de maneira semelhante ao botão da calculadora científica. Para os cálculos que queremos, as funções são "Sen()", "Cos()" e "Tan()" e dentro dos parênteses devemos indicar o valor do ângulo, em radiano. No nosso caso, esse valor está na célula **A5**.

Agora, vamos digitar as fórmulas que vão nos fornecer os valores das razões trigonométricas nas respectivas células. Para isso, digite cada função nas células indicadas a seguir:

- na célula **C3**: "=Sen(A5)";
- na célula **D3**: "=Cos(A5)";
- na célula **E3**: "=Tan(A5)".

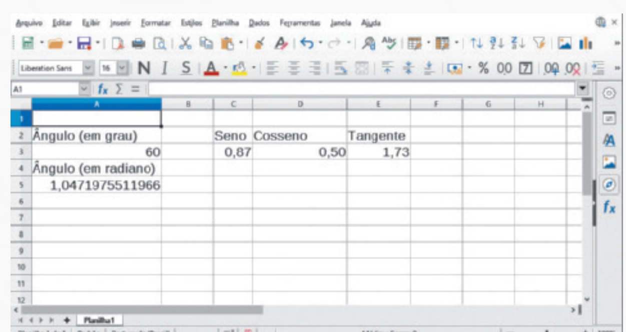
V. Podemos escolher quantas casas decimais queremos que a planilha nos mostre. Dependendo da necessidade, podemos precisar de mais ou menos casas decimais. Para alterar a quantidade de casas decimais, vamos formatar as células **C3**, **D3** e **E3** com o recurso **Formatar como número**.

- Com a célula desejada selecionada, clique no botão destacado na imagem seguinte. Também é possível ativar o recurso utilizando o atalho de teclado **Ctrl** + ***Shift*** + **1**. Repita o procedimento para as demais células.



LIBREOFFICE

VI. Agora, basta inserir o valor do ângulo desejado na célula **A3** para obter os valores das razões trigonométricas. A imagem ao lado mostra o exemplo para o ângulo de 60°. Teste sua calculadora trigonométrica!



LIBREOFFICE

LUCADP/SHUTTERSTOCK.COM

1. É preciso aninhar as duas funções. As expressões ficam: "sen(radianos(A3))", "cos(radianos(A3))" e "tan(radianos(A3))".

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. No roteiro apresentado, optamos por primeiro fazer a conversão da unidade do ângulo, de grau para radiano, para, em seguida, calcular as razões trigonométricas. No entanto, é possível realizar os dois passos de uma vez só. Como podemos fazer? Como fica a expressão das funções trigonométricas?

2. Se, em vez de inserir o ângulo em grau, quiséssemos inserir o valor em radiano, como poderíamos fazer para indicar o valor de π? Por exemplo, como poderíamos digitar o ângulo de medida $\frac{\pi}{4}$ para obter as razões trigonométricas?
Respostas possíveis: Utilizar um valor aproximado ou utilizar a função pi().

3. Altere a cor da fonte das células **A3** e **A5** para branca. Reúna-se a um colega e um de vocês deve digitar um ângulo sem que o outro veja. O colega terá de adivinhar o quadrante a que pertence o ângulo digitado observando os sinais das razões trigonométricas obtidas.
A resposta depende do ângulo escolhido pelos estudantes.

PENSE E RESPONDA

Reúna-se a um colega, pesquisem e ampliem a calculadora trigonométrica de vocês para que ela calcule as razões trigonométricas cotangente, secante e cossecante. Façam alguns testes. Vocês notaram alguma relação entre as seis razões trigonométricas que existem?
Ver as **Orientações para o professor**.

Razões trigonométricas

Estudamos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica. Agora, vamos ler um texto que conta um pouco como as razões trigonométricas surgiram, há muito tempo, no antigo Egito.

[...] As raízes da Trigonometria

Os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes**, conhecido como Papiro **Rhind** [...], que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo.

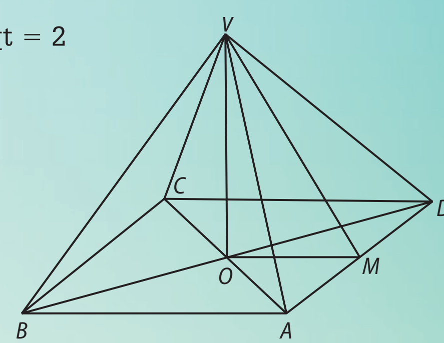
Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV**.

Exemplo:

Seja OV $= 40$ e OM $= 80$, então o seqt $= \frac{80}{40}$, isto é: seqt $= 2$

Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de **seqt**, que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical.

Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). [...]



EDITORIA DE ARTE

Figura 1 - O Seqt Egípcio.

No mundo Ocidental, o saber dos egípcios foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. Na Grécia a Matemática teve um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

COSTA, N. M. L. da. A **História da Trigonometria**. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acesso em: 23 jul. 2020.

SAIBA QUE...

A cotangente de um arco é a razão trigonométrica inversa da tangente.

$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$, com $\text{tg}\,\alpha \neq 0$

PARA OUVIR

UNICAMP. Matemática Multimídia. **Senos**. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1284. Acesso em: 23 jul. 2020.

Esse *site* apresenta dois áudios que contam a história do surgimento das razões trigonométricas e da Trigonometria.

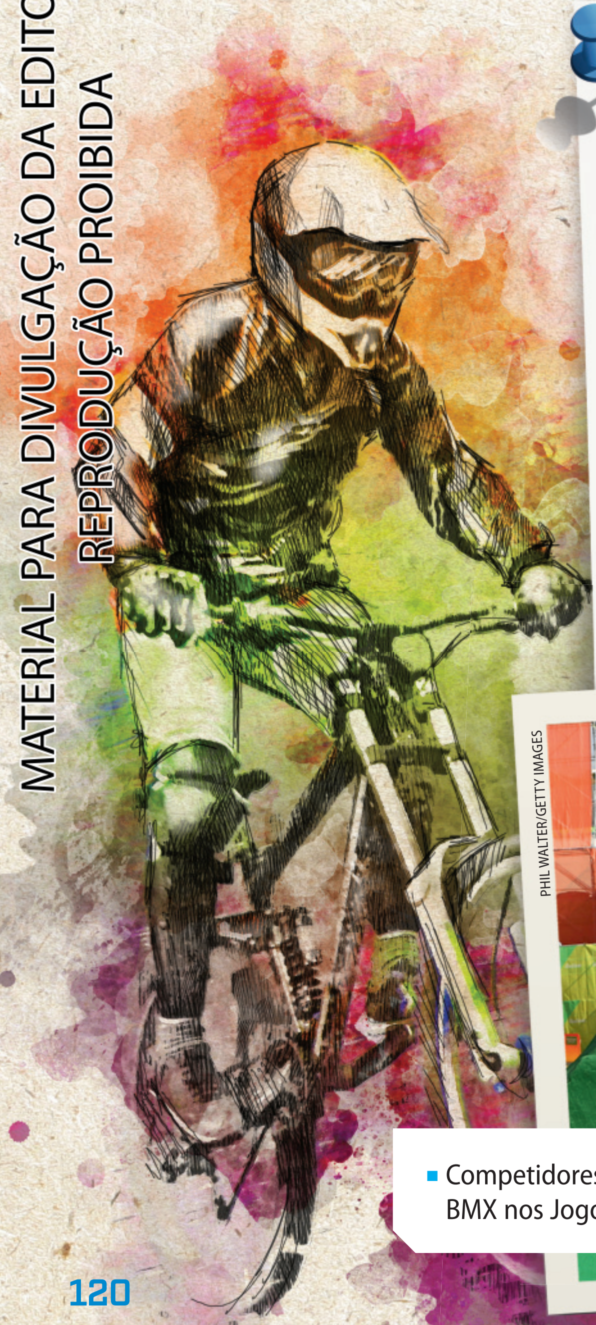
VECTORPOUCH/SHUTTERSTOCK.COM

> CONEXÕES

Ciclismo

Você já andou de bicicleta? Se sim, gosta de praticar essa atividade? A bicicleta pode servir de instrumento de lazer para muitas pessoas. Para outras, é um meio de transporte. E ainda, para outras, é trabalho.

Os atletas profissionais são uma das categorias que utilizam a bicicleta como ferramenta de trabalho e, nesse caso, dependendo da modalidade praticada, as bicicletas possuem características específicas. Nos Jogos Olímpicos Rio 2016, quatro modalidades de ciclismo participaram do programa: ciclismo BMX, ciclismo de pista, *mountain bike* e ciclismo de estrada. Vamos conhecer um pouco de cada uma delas.



O BMX

[...]

O ciclismo BMX é a disciplina mais nova em disputa nos Jogos, com estreia em Pequim 2008. O único evento do BMX é o *Supercross*, no qual os participantes largam de uma rampa de oito metros ganhando velocidade para percorrer a pista com extensão entre 300 e 400 metros, repleta de obstáculos. Os ciclistas disputam diversas baterias com oito corredores cada e os quatro melhores avançam até a fase final. As bicicletas possuem apenas uma marcha e um freio, rodas aro 20 e são pequenas e bastante resistentes para aguentar os saltos, subidas e descidas. Os atletas competem equipados de capacete com protetor de boca, luvas e traje acolchoado.

ARAÚJO, C. O ciclismo nos Jogos Olímpicos e Paralímpicos. **MultiRio**, 23 maio 2016. Disponível em: http://www.multirio.rj.gov.br/index.php/leia/reportagens-artigos/reportagens/9598-o-ciclismo-nos-jogos-ol. Acesso em: 23 jul. 2020.

PHIL WALTER/GETTY IMAGES

Competidores durante prova de BMX nos Jogos Olímpicos Rio 2016.

Pista

[...]

O programa olímpico conta com dez eventos, sendo cinco para homens e cinco para mulheres, nos quais a velocidade é o principal fator. São eles: velocidade, velocidade por equipes, perseguição por equipes, keirin e omnium. Na prova de keirin, uma bicicleta elétrica dita o ritmo à frente do pelotão, não podendo ser ultrapassada. Nos 700 metros finais, o veículo sai da pista e os atletas pedalam rumo à linha de chegada. Já a omnium, que estreou em Londres (2012), é composta por seis provas que exigem potência e resistência dos atletas; ao final, o ciclista que acumular a maior pontuação é o vencedor.

Na prova de pista, as bicicletas são leves e resistentes, projetadas para alcançar o máximo de velocidade e não possuem marchas nem freios. Os ciclistas competem com trajes de elastano e capacete aerodinâmico que diminuem a resistência do ar.

ARAÚJO, C. O ciclismo nos Jogos Olímpicos e Paralímpicos. **MultiRio**, 23 maio 2016. Disponível em: http://www.multirio.rj.gov.br/index.php/leia/reportagens-artigos/reportagens/9598-o-ciclismo-nos-jogos-ol. Acesso em: 23 jul. 2020.

SHAHJEHAN/SHUTTERSTOCK.COM

■ Equipe da Alemanha durante sessão de treinamento para as provas de pista nos Jogos Olímpicos Rio 2016.

HILCH/SHUTTERSTOCK.COM; PALADIN12/SHUTTERSTOCK.COM; PARAMEPRIZMA/SHUTTERSTOCK.COM; VECTOR FX/SHUTTERSTOCK.COM

Mountain Bike

[...]

A prova dura, em média, de 90 min a 2 horas. Nela, os participantes precisam completar um número preestabelecido de voltas no circuito com cinco quilômetros de extensão e o primeiro a terminar fica com a medalha de ouro. No *mountain bike*, as "magrelas" possuem pneus mais largos e são equipadas com amortecedores traseiros e dianteiros, para melhor absorção do impacto nos circuitos acidentados. O material é muito mais resistente, porém, sem comprometer o peso, que se mantém em torno de oito a nove quilogramas.

ARAÚJO, C. O ciclismo nos Jogos Olímpicos e Paralímpicos. **MultiRio**, 23 maio 2016. Disponível em: http://www.multirio.rj.gov.br/index.php/leia/reportagens-artigos/reportagens/9598-o-ciclismo-nos-jogos-ol. Acesso em: 23 jul. 2020.

PETR TOMAN/SHUTTERSTOCK.COM

- Competidores durante prova de *mountain bike* nos Jogos Olímpicos Rio 2016.

HILCH/SHUTTERSTOCK.COM; PALADIN12/SHUTTERSTOCK.COM; PARAMEPRIZMA/SHUTTERSTOCK.COM; VECTOR FX/SHUTTERSTOCK.COM

Estrada

[...] todos os competidores largam juntos e, após um percurso de 241,5 km para homens e 141 km para mulheres, quem cruzar a linha de chegada primeiro é o vencedor. [...]

Nessas provas, são usadas bicicletas com quadros de carbono e outros materiais leves para evitar que o peso chegue a 7 kg. Além disso, o guidão é baixo, dando ao ciclista uma aerodinâmica mais favorável. Os equipamentos atuais contam com até 20 marchas, utilizados em todos os tipos de trechos, como subidas, descidas e terrenos planos.

ARAÚJO, C. O ciclismo nos Jogos Olímpicos e Paralímpicos. **MultiRio**, 23 maio 2016. Disponível em: http://www.multirio.rj.gov.br/index.php/leia/reportagens-artigos/reportagens/9598-o-ciclismo-nos-jogos-ol. Acesso em: 23 jul. 2020.

ATSUSHI TOMURA/GETTY IMAGES

- Competidores durante prova de estrada para deficientes visuais nos Jogos Paralímpicos Rio 2016.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Você já conhecia essas modalidades de ciclismo? Qual delas mais despertou seu interesse? Em sua cidade, há espaços para prática de alguma dessas modalidades? Reúna-se a um colega e pesquisem a respeito. Respostas pessoais.

2. No texto, você leu que as características das bicicletas diferem de acordo com as necessidades de cada modalidade. Por exemplo, o pneu de uma bicicleta de *mountain bike* tem ranhuras e é mais largo do que o pneu de uma bicicleta de pista. Veja as imagens.


MAXPRO/SHUTTERSTOCK.COM

Detalhe do pneu da bicicleta de *mountain bike*.


OLEKSBOIKO/SHUTTERSTOCK.COM

Detalhe do pneu da bicicleta de pista.

Pesquise como essas diferenças no pneu influenciam na velocidade e na aderência da bicicleta com o solo. Que outros elementos da bicicleta influenciam no seu desempenho? pesquisa do estudante

3. Vocês sabem como medir o aro da bicicleta? Reúna-se a um colega, pesquisem como fazer essa medição e elaborem um texto explicando o que significa dizer que uma bicicleta tem aro 26. Qual é a medida do perímetro externo, em centímetro, do pneu de uma bicicleta com esse aro?
Pesquisa do estudante. O perímetro é aproximadamente 207,4 cm.

PENSE E RESPONDA

Que conceitos matemáticos você utilizou para realizar as atividades dessa seção?
Resposta esperada: Comprimento da circunferência.

PARA ACESSAR

COMO medir uma roda de bicicleta. **WikiHow**, 2020. Disponível em: https://pt.wikihow.com/Medir-uma-Roda-de-Bicicleta. Acesso em: 24 jul. 2020.

Acesse esse *site* para obter instruções de como medir a roda de uma bicicleta.

GROLL, M. V. História do ciclismo no Brasil. **Casal Travinha Esportes**, 11 fev. 2010. Disponível em: http://travinha.com.br/2010/02/11/ciclismo-no-brasil/. Acesso em: 24 jul. 2020.

Nesse *site*, é possível conhecer um pouco da história do ciclismo no Brasil.

PARA ASSISTIR

MATEMÁTICA da Bike aro 26 e 29 polegadas. 2018. Vídeo (6min29s). Publicado pelo canal Informática e Matemática com Prof. Gustavo Vanin. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=VSceNJAG-CY. Acesso em: 24 jul. 2020.

Nesse vídeo, você vai conhecer algumas relações entre bicicleta e Matemática.

DICAS para escolher a bicicleta ideal. 2019. Vídeo (4min11s). Publicado pelo canal Sesc Santa Catarina. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-yQeJfxQP10. Acesso em: 24 jul. 2020.

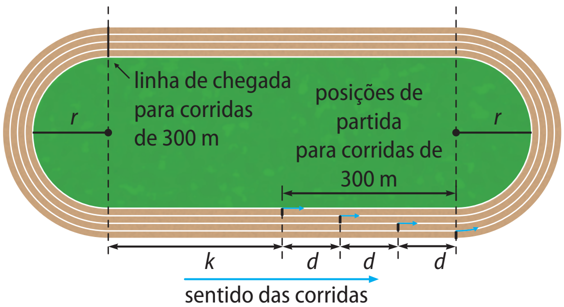
Nesse vídeo, você vai obter algumas recomendações sobre o tipo de bicicleta ideal para você e para o tipo de uso que você fará dela.

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (Mack-SP) A figura representa uma pista não oficial de atletismo, com 4 raias para corridas, cujas curvas são determinadas por semicircunferências. Cada raia tem largura igual a 2 m e os atletas devem percorrer 300 m sobre as linhas, conforme as setas indicam na figura.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

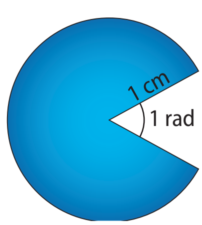


Sendo $r = 10$ m e adotando $\pi = 3$, o valor de $k + d$ é alternativa **e**

a) 248 m
b) 247 m
c) 245 m
d) 244 m
e) 240 m

2. (Vunesp-SP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é: alternativa **e**

a) $\pi - 1$
b) $\pi + 1$
c) $2\pi - 1$
d) 2π
e) $2\pi + 1$



3. (Enem/MEC) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente alternativa **c**

a) 16 horas.
b) 20 horas.
c) 25 horas.
d) 32 horas.
e) 36 horas.

4. (UFRRJ) Os valores que m pode assumir, para que exista o arco x satisfazendo a igualdade $\operatorname{sen} x = m - 4$, são: alternativa **b**

a) $m = 2$
b) $3 \leqslant m \leqslant 5$
c) $1 \leqslant m \leqslant 3$
d) $0 \leqslant m \leqslant 2$
e) $m = 3$

5. (UFVJM-MG) Dada a expressão $\cos\theta = \dfrac{2p - 1}{5}$, assinale a alternativa que contém o conjunto de valores que p pode assumir. alternativa **c**

a) $-1 \leqslant p \leqslant 1$
b) $-1 \leqslant p \leqslant 2$
c) $-2 \leqslant p \leqslant 3$
d) $-2 \leqslant p \leqslant 4$

6. (EsPCEx-SP) Na figura, está representado um círculo trigonométrico em que os pontos P_1 a P_5 indicam extremidades de arcos. Esses pontos, unidos, correspondem aos vértices de um pentágono regular inscrito no círculo. Se o ponto P_1 corresponde a um arco de $\dfrac{\pi}{6}$ radianos, então o ponto P_4 corresponderá à extremidade de um arco cuja medida, em radianos, é igual a alternativa **d**

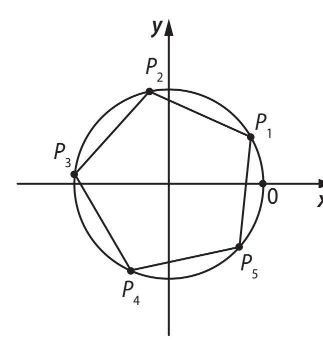
a) $\dfrac{13\pi}{30}$

b) $\dfrac{17\pi}{30}$

c) $\dfrac{29\pi}{30}$

d) $\dfrac{41\pi}{30}$

e) $\dfrac{53\pi}{30}$



7. (Cefet-MG) Os valores de x de modo que a expressão $\cos\alpha = \dfrac{2x^2 - 3}{5}$ exista, são: alternativa **b**

a) $-1 \leqslant x \leqslant 1$
b) $-2 \leqslant x \leqslant 2$
c) $-1 \leqslant x \leqslant 2$
d) $1 \leqslant x \leqslant 2$
e) $-2 \leqslant x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant x \leqslant 2$

8. (Uneb-BA) Considerando-se sen α + cos α = $= \sqrt{m}$, $m > 0$ e sen $\alpha \cdot$ cos $\alpha = \frac{n}{4}$, pode-se afirmar que o valor de $2m - n$ é igual a:

a) 2
b) 1
c) 0
d) −2
e) −3

alternativa **a**

9. (IFRS) Considere as afirmações a seguir:

I. $\text{sen}^2\,144° + \cos^2 144° = 1$.

II. Para todo x, $\tan^2 x > \text{sen}^2\, x$.

III. Para todo x, $\cos x = \text{sen}\,(x + 90°)$.

Qual(quais) está(estão) correta(s)?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e III.
e) I, II e III. alternativa **d**

10. (Unip-SP) Seja sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e α um arco do segundo quadrante. Então tg α vale: alternativa **c**

a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $-\frac{3}{4}$
d) −1
e) $-\frac{4}{3}$

11. (UFRR) Indique qual das afirmações abaixo é verdadeira: alternativa **b**

a) cos 200° < tg 200° < sen 200°
b) cos 200° < sen 200° < tg 200°
c) sen 200° < tg 200° < cos 200°
d) sen 200° < cos 200° < tg 200°
e) tg 200° < sen 200° < cos 200°

12. (Unicentro-PR) Sendo $270° < x < y < 360°$, assinale a alternativa correta. alternativa **d**

a) sen $x >$ sen y
b) cos $x >$ cos y
c) tg $x >$ tg y
d) cos y − sen $x > 0$
e) sen $x \cdot$ cos $y > 0$

PARA REFLETIR

Neste Capítulo, vimos que, ao longo dos estudos da Trigonometria, foi necessário ampliar a validade das razões trigonométricas para além do triângulo retângulo.

Para isso, estudamos os conceitos de arco de circunferência, ângulo central e como medir arcos e ângulos. Também vimos as unidades de medida usadas para fazer essas medições. Conhecemos a circunferência trigonométrica e vimos como associar os números reais a pontos dessa circunferência.

Estudamos também as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente para qualquer arco da circunferência trigonométrica e vimos as relações entre essas razões.

Nas páginas de Abertura, foi apresentado o astrolábio, instrumento utilizado pelos navegadores do século XV para medir a distância até os astros. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue compreender o funcionamento do astrolábio?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **3**: NÃO ESCREVA NO LIVRO

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Você consegue identificar a diferença entre o grau e o radiano para realizar medidas de arcos e ângulos?
- Você consegue descrever a circunferência trigonométrica e como podemos associar os números reais a pontos dessa circunferência?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhecia sobre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente? Respostas pessoais.

CAPÍTULO

4

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 1, 2 e 5
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1: EM13MAT101
  - Competência específica 3: EM13MAT306
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 2

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Funções trigonométricas

Desde a Antiguidade, o ser humano tem fascínio pela Lua. Ao longo da História, muitas pessoas fizeram observações e estudos para entender o comportamento dela.

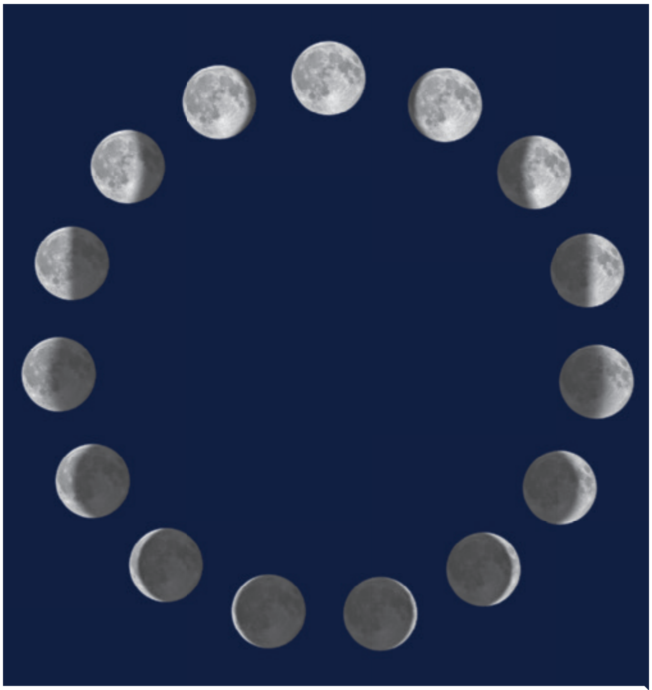
O movimento da Lua influencia muitos fenômenos naturais e até mesmo as culturas de certos povos. Algumas tribos indígenas, por exemplo, se baseiam nas fases da Lua para compor seu calendário. Os indígenas observaram que as fases são periódicas, se repetem a cada 30 dias, aproximadamente, de tal maneira que, entre uma aparição e outra da mesma fase da Lua, para eles, se configura um mês. Normalmente, o mês indígena começa após a lua nova.

Eles perceberam, também, que a Lua influencia a caça e a pesca. Por exemplo, quando a Lua está cheia, devido ao excesso de luz, os animais ficam agitados e esse é o período certo para a caça.

Veja, então, que há diversas observações, científicas e empíricas, que relacionam as fases da Lua e sua influência na Terra. Além disso, existem também diversas superstições sobre como as fases da Lua influenciam nossas vidas.

No entanto, independentemente da cultura e da crença, uma coisa é certa: o movimento da Lua em torno da Terra é periódico e a observação das fases da Lua mostra isso. Dessa maneira, sabemos que, em estudos científicos, o movimento da Lua visto da Terra e os fenômenos ligados a ele podem ser representados por funções periódicas, como as trigonométricas, que são o assunto deste Capítulo.

KPP/SHUTTERSTOCK.COM



ALLEXXANDAR/SHUTTERSTOCK.COM

- Esquema ilustrativo com as fases da Lua. O ciclo completo leva aproximadamente 28 dias para ocorrer. (Imagem sem escala; cores-fantasia).

Agora, reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. O estudo da Lua e das suas características é feito pela Astronomia. Vocês sabem o que é Astronomia? Quais são seus objetos de estudo?

2. Foi dito que o movimento da Lua em torno da Terra é um fenômeno periódico. O que vocês entendem por isso? Se necessário, pesquisem os significados da palavra **período**.

3. As fases da Lua influenciam desde fenômenos naturais até os hábitos de alguns povos. Pesquisem a respeito da influência da Lua em diversas culturas e discutam com seus colegas: existem relações entre as crenças populares e o conhecimento científico?

Ver as **Orientações para o professor**.

DANA NEIBERT/THE IMAGE BANK/GETTY IMAGES

- Os telescópios são instrumentos utilizados para ver os corpos celestes. Eles podem ser desde objetos caseiros bem simples, e com alcance reduzido, até grandes e potentes aparelhos utilizados por cientistas e estudiosos de diversas áreas.

Funções periódicas

SOLID PHOTOS/SHUTTERSTOCK.COM

O pêndulo do relógio realiza um movimento periódico.

Um pêndulo, como o do relógio da figura, realiza um movimento de vai e vem, sempre em uma mesma direção, alternando os sentidos regularmente. Esse movimento é denominado **movimento oscilatório**.

Assim como no caso do pêndulo, existem diversos outros fenômenos com a mesma característica: a de se repetirem sempre em um mesmo intervalo (chamado **período**). Por conta disso, eles são chamados de **fenômenos periódicos** e podem ser modelados por **funções periódicas**.

Matematicamente, dizemos que uma função real de variável real é periódica se existe um número real positivo p, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo x do domínio de f. Ou seja, a função se repete a cada intervalo de números reais de comprimento p. Quando o valor de p é o menor valor positivo possível, chamamos de período da função. Estudaremos o período mais adiante neste Capítulo.

Um dos principais tipos de funções periódicas são as **funções trigonométricas**, que estudaremos neste Capítulo.

Função seno

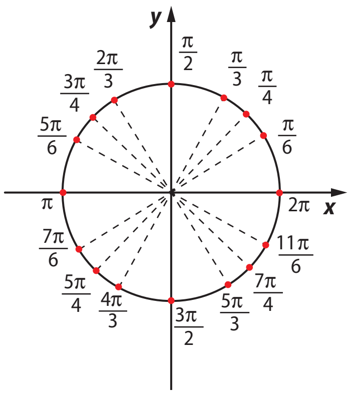
A primeira função trigonométrica que estudaremos é a **função seno**. Ela é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real sen x, ou seja, $y = \text{sen } x$ ou $f(x) = \text{sen } x$.

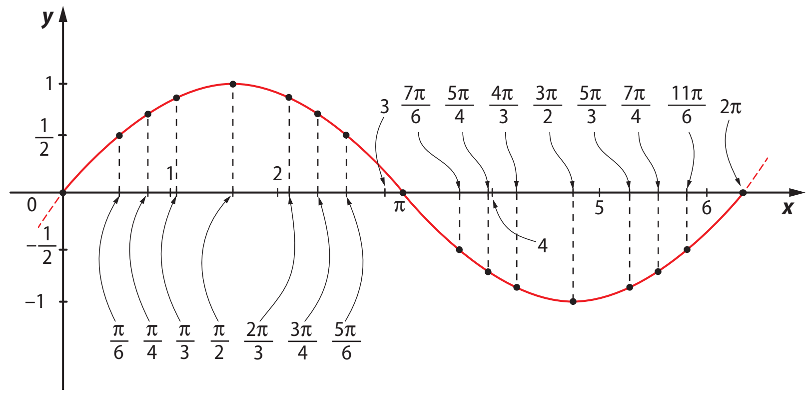
O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico da função seno

Para estudar a função seno, vamos tomar alguns valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ e obter alguns pontos (x, y) no plano para construir seu gráfico.

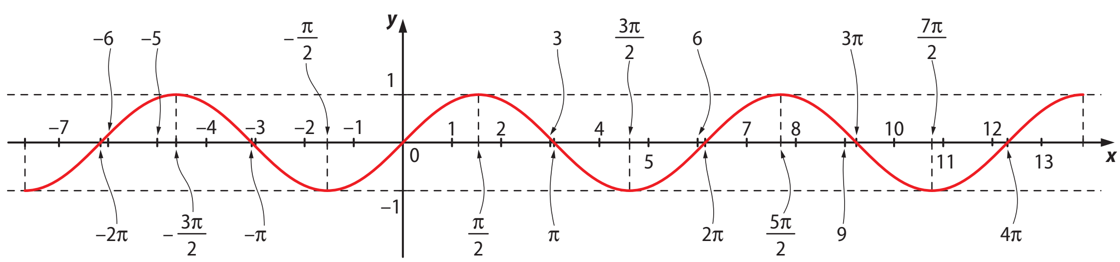
No Capítulo anterior, estudamos os valores de sen x para qualquer valor real de x na circunferência trigonométrica. Assim, para obter alguns pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função dada por $f(x) = \text{sen } x$, vamos utilizar esses valores já calculados na circunferência trigonométrica para $x \in [0, 2\pi]$.





ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como o domínio da função seno é o conjunto dos números reais, a curva pode ser estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, obtemos a curva a seguir, que é o gráfico de $y = \text{sen}\ x$.



Chamamos de **senoide** a curva descrita pela função seno.

Observe o que ocorre com a função $y = \text{sen}\ x$ no intervalo $[0, 2\pi]$:

- de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, a função cresce, variando de 0 a 1;
- de $\dfrac{\pi}{2}$ a π, decresce de 1 a 0;
- de π a $\dfrac{3\pi}{2}$, decresce de 0 a -1;
- de $\dfrac{3\pi}{2}$ a 2π, cresce de -1 a 0.

O conjunto imagem da função $y = \text{sen}\ x$ é o intervalo $[-1, 1]$, isto é: $-1 \leqslant \text{sen}\ x \leqslant 1$.

Ao observar o gráfico da função seno, percebemos que ela se repete periodicamente, como é característico das funções periódicas. Nesse caso, a função se repete a cada intervalo de 2π, ou seja, nos intervalos $[-4\pi, -2\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$ e assim sucessivamente. Além disso, observamos que:

$$... = \text{sen}\ (x - 4\pi) = \text{sen}\ (x - 2\pi) = \text{sen}\ x = \text{sen}\ (x + 2\pi) = \text{sen}\ (x + 4\pi) = ..., \text{ ou seja,}$$
$$\text{sen}\ (x + 2k\pi) = \text{sen}\ x,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Considere uma função real de variável real para a qual exista um número real p tal que, $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in D(f)$. O menor número p para o qual isso ocorre é denominado **período** da função f. Para a função $f(x) = \text{sen}\ x$, o período é $p = 2\pi$.

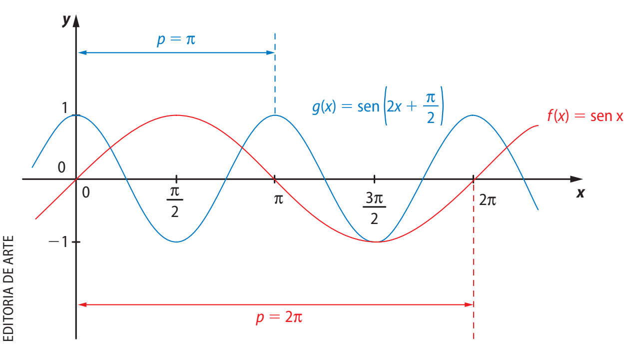
Agora, vamos determinar o período da função $g(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. O período dessa função é o tamanho do intervalo ao qual pertence x quando $\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ assume valores em um intervalo de tamanho 2π, pois o período da função $f(x) = \text{sen}\, x$ é 2π. Assim, vamos determinar x_1 e x_2 tais que: $\left(2x_1 + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\left(2x_2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$.

De $2x_1 + \frac{\pi}{2} = 0$, obtemos $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, e de $2x_2 + \frac{\pi}{2} = 2\pi$, obtemos $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. Assim, temos:

$$p = |x_2 - x_1| = \left|\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{4\pi}{4}\right| = \pi$$

Portanto, o período da função $g(x) = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ é $p = \pi$.

De fato, ao compararmos os gráficos de f e g, identificamos os respectivos períodos. Veja:



EDITORIA DE ARTE

De modo geral, o período p de uma função dada por $y = \text{sen}\,(cx + d)$, com c e d reais e $c \neq 0$ é $p = \frac{2\pi}{|c|}$. Seguindo o raciocínio análogo ao do exemplo, precisamos determinar x_1 e x_2 tais que $(cx_1 + d) = 0$ e $(cx_2 + d) = 2\pi$. Assim, temos:

$$cx_1 + d = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{d}{c}$$

$$cx_2 + d = 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi - d}{c}$$

$$p = |x_2 - x_1| = \left|\frac{2\pi - d}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right)\right| = \left|\frac{2\pi}{c}\right| \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|c|}$$

O sistema massa-mola: velocidade

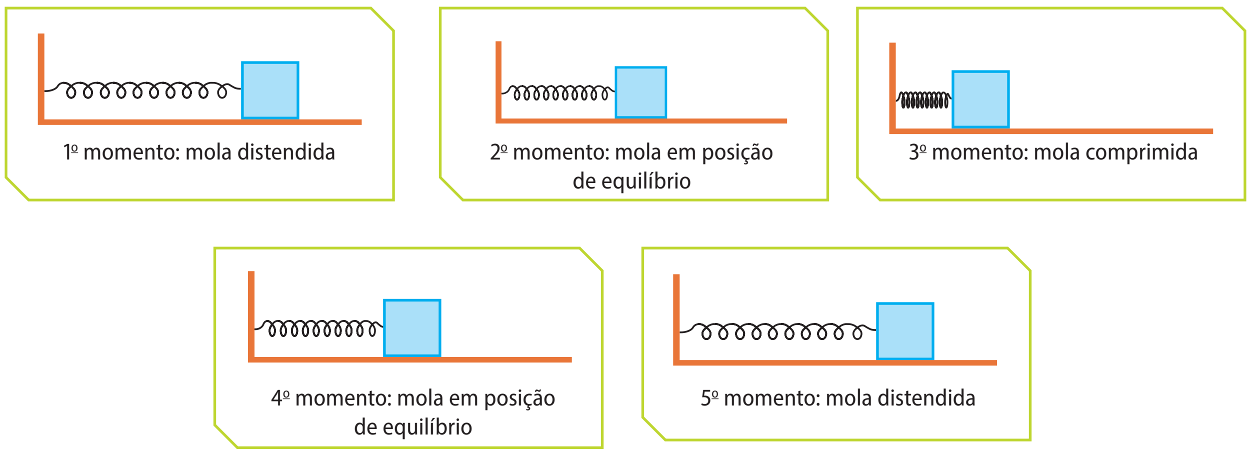
Acompanhe agora um exemplo de uma situação bastante comum na Física e que pode ser modelada utilizando a função seno.

Imagine a seguinte situação: uma mola presa a uma parede e um objeto de massa m preso à extremidade livre dessa mola, e todo esse sistema em repouso sobre uma mesa plana e paralela ao solo.

Para todo o nosso próximo estudo, considere que não há perdas de energia no sistema físico apresentado anteriormente.

Imagine que uma pessoa puxe esse objeto, horizontalmente, em um único sentido, distendendo a mola, e depois o solte. Observe, a seguir, como será o comportamento desse sistema.

Veja que, como não há perda de energia, o sistema ficará em um movimento oscilatório (de vai e vem). Vamos analisar a velocidade nesse sistema.



1º momento: mola distendida

2º momento: mola em posição de equilíbrio

3º momento: mola comprimida

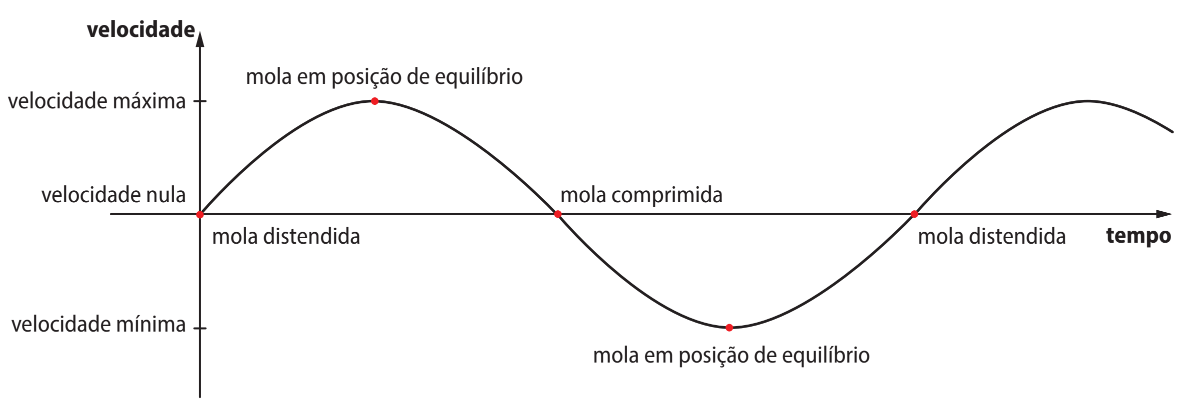
4º momento: mola em posição de equilíbrio

5º momento: mola distendida

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- Quando a mola está distendida (ou comprimida), o objeto está parado e pronto para mudar o sentido do seu movimento, logo a velocidade do objeto é nula.
- Quando o objeto está indo em direção à posição de equilíbrio da mola (quando a mola não está nem distendida, nem comprimida), o objeto está acelerando.
- Quando o objeto está na posição de equilíbrio da mola, sua velocidade é máxima.
- Quando o objeto está se distanciando da posição de equilíbrio da mola, sua velocidade vai reduzindo, pois a mola começará a desacelerar o objeto.

Observe o gráfico da velocidade em função do tempo desse objeto.



Pode-se notar que a velocidade do objeto oscila ao longo do tempo e que a mesma velocidade se repete após um período (observando o gráfico vemos um comportamento parecido com o da função seno).

A velocidade desse objeto em função do tempo pode ser modelada matematicamente pela função dada por $v(t) = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0)$.

Note que, na função apresentada, o seno desempenha o papel de dar a característica oscilatória e periódica da função. Essa é uma aplicação muito comum da função seno: auxiliar na modelagem matemática de fenômenos físicos periódicos.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Construa os gráficos das funções dadas por $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$, comparando-os com o gráfico da função dada por $h(x) = \text{sen } x$.

Resolução

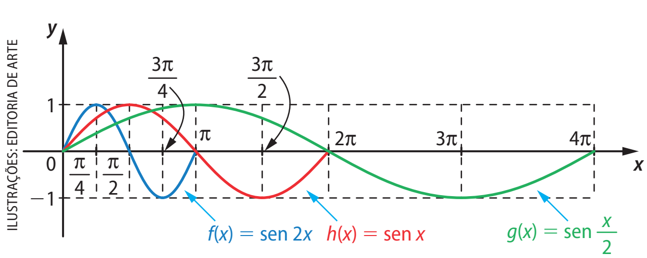
Como conhecemos o gráfico de $y = \text{sen } x$, podemos construir as tabelas e esboçar os três gráficos em um só sistema de eixos coordenados para compará-los.

$y = \text{sen } 2x$		
$2x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	−1
2π	π	0

$y = \text{sen } x$	
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1
2π	0

$y = \text{sen } \frac{x}{2}$		
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	0
$\frac{3\pi}{2}$	3π	−1
2π	4π	0

Para facilitar a comparação, os gráficos foram construídos com apenas um período completo de cada uma das funções.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

SAIBA QUE...

Lembre-se: apesar de esse gráfico mostrar apenas um período, ele se estende para mais valores (inclusive negativos), uma vez que o domínio dessas funções é $\mathbb{R}$.

Observando os gráficos, verificamos que as funções $f(x) = \text{sen } 2x$ e $g(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$ têm o mesmo conjunto imagem, $[-1, 1]$, e que o período de f é π, e o de g é 4π.

2. Determine k para que exista x tal que $\text{sen } x = 2k - 5$.

Resolução

Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Substituindo $\text{sen } x$ por $2k - 5$, temos:

$$\overbrace{-1 \leqslant 2k - 5}^{\text{II}} \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \underbrace{2k - 5 \leqslant 1}_{\text{I}}$$

I $2k - 5 \leqslant 1$

$2k \leqslant 6$

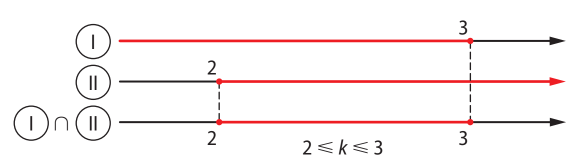
$k \leqslant 3$

II $2k - 5 \geqslant -1$

$2k \geqslant 4$

$k \geqslant 2$

Fazendo I $\cap$ II:



Logo, $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant k \leqslant 3\}$.

3. Quais são os valores máximo e mínimo que a função $y = 3 + \text{sen } 5x$ pode assumir?

Resolução

A função seno tem valor máximo 1 e valor mínimo −1, e o fator 5 não influencia nesses valores. Então, os valores máximo e mínimo da função $y = 3 + \text{sen } 5x$ são:

- valor máximo: $y = 3 + 1 = 4$;
- valor mínimo: $y = 3 - 1 = 2$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Esboce o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período das seguintes funções:

a) $y = 3 \text{ sen } x$

b) $y = 2 - \text{sen } x$

c) $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $y = 2 \text{ sen } \dfrac{x}{4}$

2. Determine o período das funções:

a) $y = \text{sen } 8x$ $p = \dfrac{\pi}{4}$

b) $y = 5 \cdot \text{sen } 10x$ $p = \dfrac{\pi}{5}$

3. Qual é o conjunto imagem da função dada por $f(x) = 7 \cdot \text{sen }(3x)$? $\text{Im} = [-7, 7]$

4. Determine o período das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = -4\text{sen}\left(6x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ $p = \dfrac{\pi}{3}$

b) $f(x) = 1 + \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$ $p = 8$

5. Escreva os valores máximo e mínimo que cada uma das expressões a seguir pode assumir.

a) $4 \cdot \text{sen } \alpha$ Valor máximo: 4; valor mínimo: -4

b) $5 - 2 \cdot \text{sen } x$ Valor máximo: 7; valor mínimo: 3

c) $\dfrac{1}{3 + \text{sen } y}$ Valor máximo: $\dfrac{1}{2}$; valor mínimo: $\dfrac{1}{4}$

6. Calcule os valores reais de m, de modo que $\text{sen } x = 2m - 1$. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$

7. (Cefet-PR) Sejam as funções $f(x) = 2 \cdot \text{sen }(x)$ e $g(x) = \text{sen }(2x)$. A respeito delas, pode-se afirmar que:

a) O período de $f(x)$ é o dobro do período de $g(x)$.

b) As funções $f(x)$ e $g(x)$ possuem os mesmos zeros.

c) O máximo de $f(x)$ é igual ao máximo de $g(x)$.

d) O máximo de $g(x)$ é o dobro do máximo de $f(x)$.

e) O período de $g(x)$ é o dobro do período de $f(x)$. alternativa **a**

8. (UFPR) O período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ é: alternativa **b**

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) π c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) 2π e) $\dfrac{\pi}{8}$

9. Determine o valor de k para que existam valores que satisfaçam à igualdade $\text{sen } x = \dfrac{5k - 2}{k - 3}$.

$S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{5}{6}\right\}$

10. (UFV-MG) Para a existência da expressão $\text{sen } \theta = \dfrac{2x - 1}{3}$, os valores de x estão compreendidos no intervalo: alternativa **d**

a) $-1 \leqslant x < 1$

b) $-1 < x \leqslant 0$

c) $-1 \leqslant x < \dfrac{1}{3}$

d) $-1 \leqslant x \leqslant 2$

11. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800 \cdot \text{sen}\left(\dfrac{x \cdot \pi}{12}\right)$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro, tal que $0 \leqslant x \leqslant 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a: alternativa **e**

a) 600

b) 800

c) 900

d) 1500

e) 1600

12. (UFES) Considere que $V(t)$, volume de ar nos pulmões de um ser humano adulto, em litro, varia de no mínimo 2 litros a no máximo 4 litros, sendo t a variável tempo, em segundo. Dentre as funções abaixo, a que melhor descreve $V(t)$ é: alternativa **e**

a) $2 + 2\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

b) $4 + 2\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

c) $5 + 3\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

d) $1 + 3\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

e) $3 + \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)$

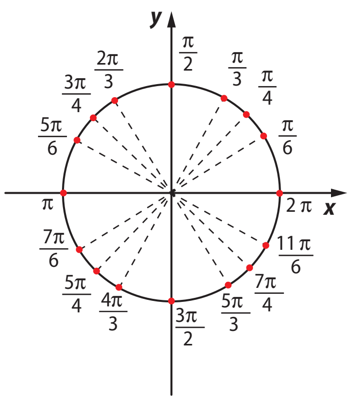
Função cosseno

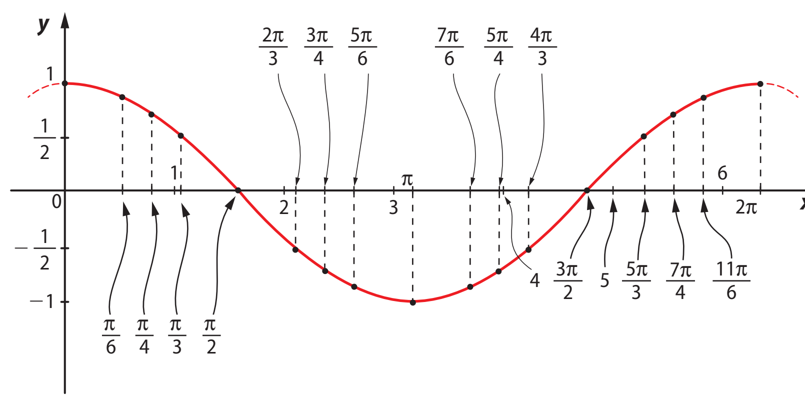
Denomina-se **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $\cos x$, ou seja, $y = \cos x$ ou $f(x) = \cos x$.

O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico da função cosseno

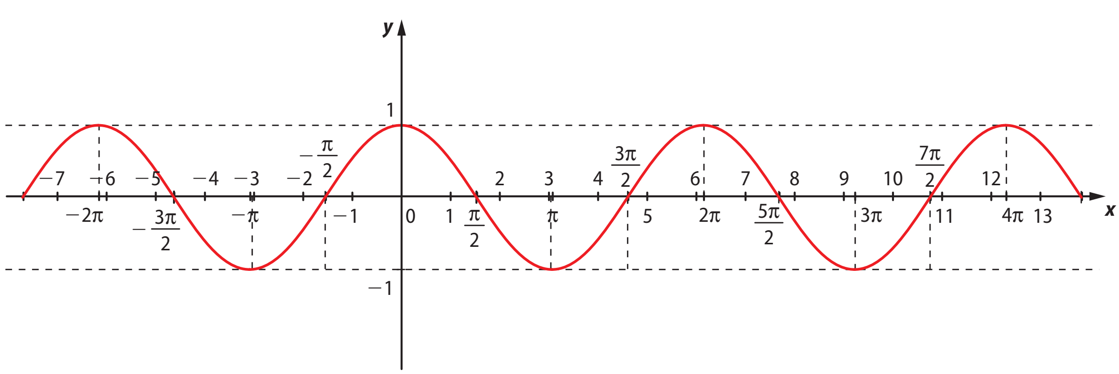
Assim como fizemos para traçar o gráfico da função seno, vamos utilizar os valores de $\cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$, já conhecidos da circunferência trigonométrica, para obter alguns pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função dada por $f(x) = \cos x$. Assim:





ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, a curva pode ser estendida para valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, obtemos a curva a seguir, que é o gráfico de $y = \cos x$.



Observe o que ocorre com a função $y = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$:

- de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a função decresce, variando de 1 a 0;
- de $\frac{\pi}{2}$ a π, decresce de 0 a -1;
- de π a $\frac{3\pi}{2}$, cresce de -1 a 0;
- de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, cresce de 0 a 1.

O conjunto imagem da função $y = \cos x$ é o intervalo $[-1, 1]$, isto é: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Assim como no caso da função seno, a função cosseno também é periódica e se repete a cada intervalo de 2π, como nos intervalos $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$ e $[2\pi, 4\pi]$. Além disso, observando o gráfico, percebemos que:

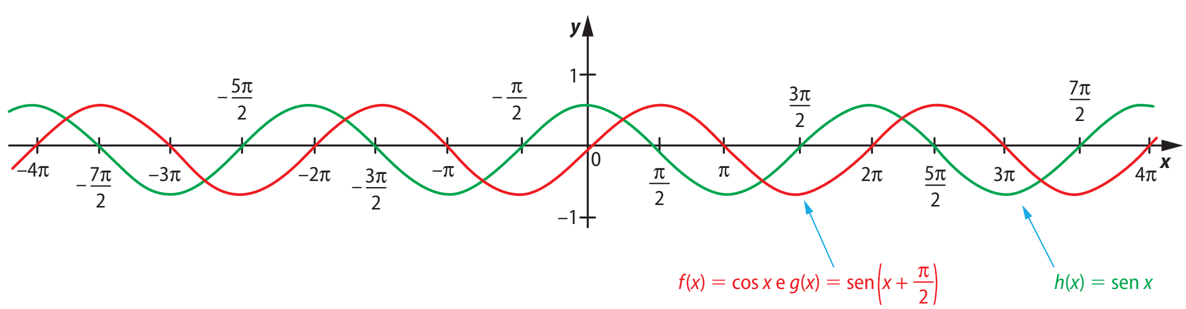
$$... = \cos(x - 4\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = ..., \text{ ou seja,}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, utilizando raciocínio análogo ao usado para determinar o período da função seno, podemos concluir que o período p de uma função dada por $y = \cos(cx + d)$, com c e d reais e $c \neq 0$, é $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

Por exemplo, para a função $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right)$, o período é $p = \dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{4}\right|} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$.

No Capítulo anterior, vimos que o seno do complementar de um arco é igual ao cosseno desse arco, ou seja: $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. Essa relação continua válida para as funções trigonométricas. Isso significa que os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ são coincidentes, ou seja, o gráfico de f é congruente ao gráfico de $h(x) = \text{sen}\ x$, apenas transladado horizontalmente $\dfrac{\pi}{2}$ unidades, como mostra a imagem a seguir.



EDITORIA DE ARTE

PARA OUVIR

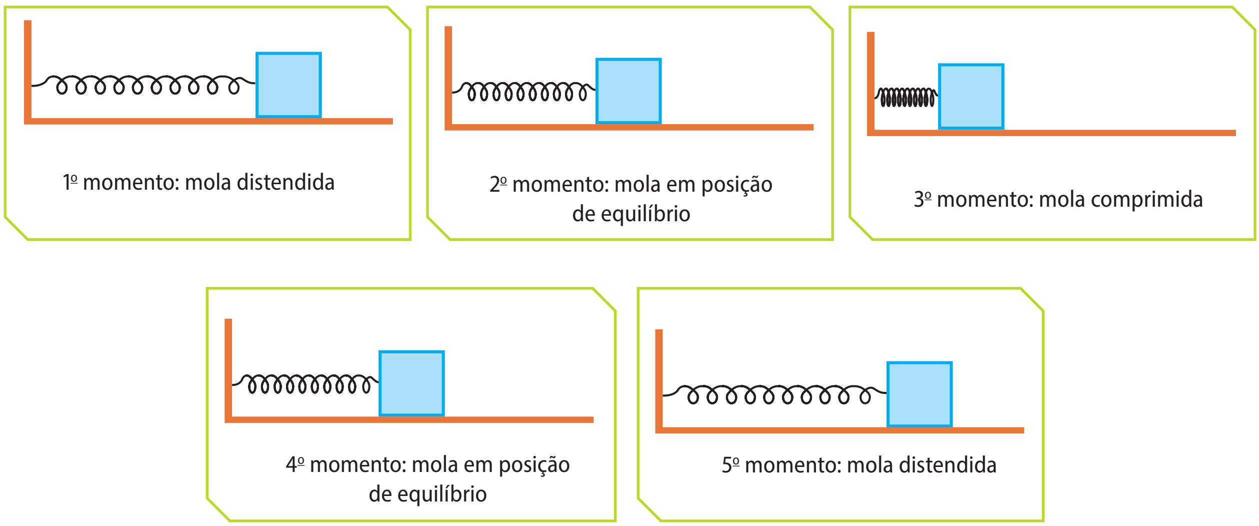
MATEMÁTICA Multimídia: tempestades solares. Campinas: Unicamp, [2020]. *Podcast*. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353. Acesso em: 2 set. 2020.

Esse *site* apresenta dois áudios que relacionam as tempestades solares com as funções periódicas.

OLHEN DESIGN/SHUTTERSTOCK.COM

O sistema massa-mola: posição

Vamos retomar o estudo do sistema massa-mola visto anteriormente, mas, desta vez, sob a ótica da posição do objeto ao longo do tempo. Vamos rever o sistema:



1º momento: mola distendida

2º momento: mola em posição de equilíbrio

3º momento: mola comprimida

4º momento: mola em posição de equilíbrio

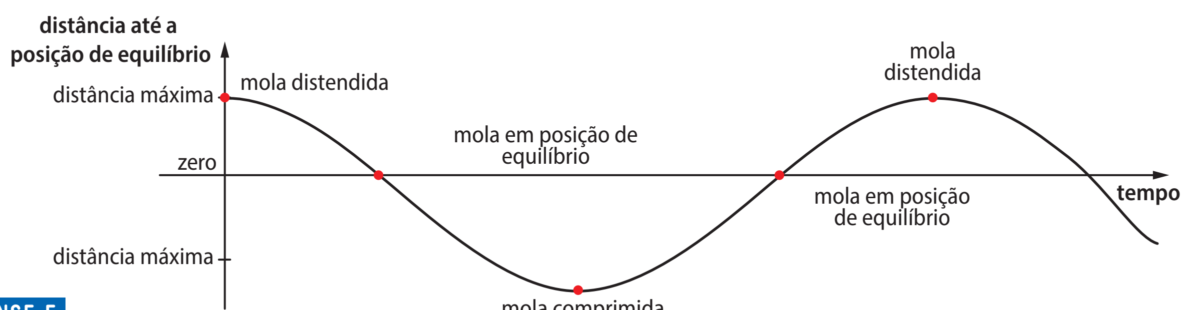
5º momento: mola distendida

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Considerando a posição de equilíbrio como a posição inicial, temos:

- Quando a mola está distendida (ou comprimida), o objeto está o mais distante possível da posição inicial.
- Quando a mola está em sua posição de equilíbrio, a distância do objeto até a posição inicial é igual a zero.

Vamos analisar graficamente essa situação.



PENSE E RESPONDA

Observando o gráfico da velocidade do objeto em função do tempo no sistema massa-mola e comparando-o com o gráfico da posição em função do tempo, o que é possível notar?

Ver as **Orientações para o professor**.

Pode-se notar que a distância do objeto em relação à posição inicial oscila ao longo do tempo e que a mesma posição se repete após um período (observando o gráfico, vemos um comportamento parecido com o da função cosseno).

A posição desse objeto em função do tempo pode ser modelada matematicamente pela função dada por $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$.

Note que, desta vez, na função apresentada, é o cosseno que desempenha o papel de dar a característica oscilatória e periódica da função.

Assim, a função cosseno também auxilia na modelagem matemática de fenômenos físicos periódicos.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

4. Em certas espécies em perfeito equilíbrio ecológico, a variação no tamanho de sua população é periódica. Esse período depende de condições ambientais, como a quantidade de predadores e a quantidade de alimento disponível, entre outros fatores. Em uma ilha, a população P de certa espécie animal é dada pela função: $P(t) = 500 + 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, em que t corresponde aos meses do ano ($t = 1$ correspondendo a janeiro).

a) Esboce o gráfico da função $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, determinando o período dessa função.

b) Esboce o gráfico de P em função de t que representa a população dessa espécie animal e determine o intervalo de variação dessa população no ano.

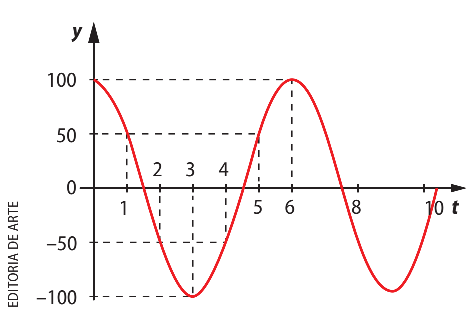
Resolução

a) Construindo uma tabela para alguns valores de t na função $y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, temos:

t	$\frac{\pi t}{3}$	$\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$y = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$
0	0	1	100
1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	50
2	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-50
3	π	-1	-100
4	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-50
5	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	50
6	2π	1	100

Paramos em $t = 6$, pois a partir desse número os valores de y vão se repetir, por causa da periodicidade da função.

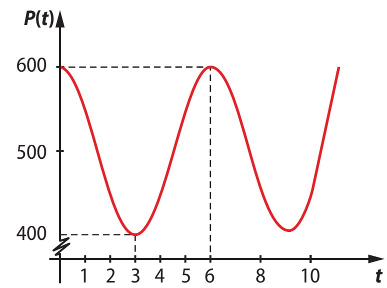
Esboçando o gráfico:



$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$$

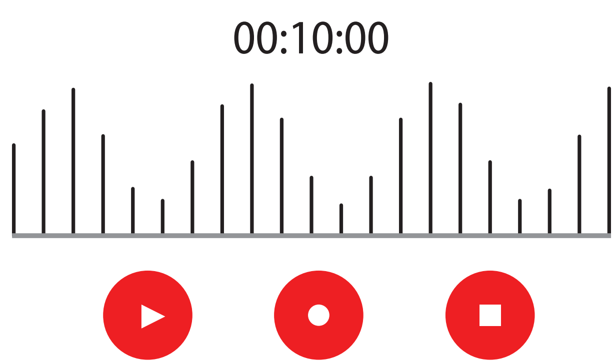
O período dessa função é $p = 6$.

b) A função $P(t) = 500 + 100 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$ tem o mesmo formato do gráfico de $y = 100 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$, mas transladando cada ponto 500 unidades para cima na vertical.



Para $t = 3$, temos: $y = -100$, assim, $P(3) = 400$
Para $t = 6$, temos: $y = 100$ e $P(6) = 600$
A variação da população corresponde ao conjunto imagem da função P, ou seja:
$\text{Im} = [400, 600]$
A população dessa espécie varia entre 400 e 600 animais.

5. Um músico está aprendendo a tocar uma canção e decidiu gravá-la em seu celular, de 10 em 10 segundos, para saber em qual tempo deverá tocar as notas mais altas. A gravação registrou as ondas sonoras nos intervalos de tempo. A figura seguinte mostra o registro das ondas nos primeiros 10 segundos da canção:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Com auxílio de um aplicativo de geometria dinâmica, o músico encontrou uma função que melhor expressa as ondas registradas como $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \text{sen}(2x)$. Descubra em qual fração de segundo ele deve tocar a primeira nota mais alta. Considere $\pi \simeq 3{,}14$.

Resolução

Pelo registro do gravador, as ondas sonoras são periódicas, logo as notas mais altas ocorrem em intervalos de tempo iguais. O comprimento das ondas é indicado por $f(x)$, sendo x o tempo medido em segundos. Além disso, a nota mais alta também corresponde ao máximo da função f. Sabendo que $-1 \leqslant \text{sen}(2x) \leqslant 1$, para qualquer x, então, o máximo da função ocorre quando $\text{sen}(2x) = 1$, assim:

$$\text{sen}(2x) = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \simeq \frac{3{,}14}{4} = 0{,}785$$

Portanto, o músico deve tocar a primeira nota mais alta em 0,785 segundo.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

13. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $y = -\cos x$

b) $y = 3\cos\dfrac{x}{2}$

c) $y = 5 + \cos x$

d) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

Ver as **Orientações para o professor**.

14. Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + |\cos x|$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

15. Determine o período das funções a seguir:

a) $y = \cos 8x$ $p = \dfrac{\pi}{4}$

b) $y = 5\cos 10x$ $p = \dfrac{\pi}{5}$

c) $y = \cos\dfrac{4x}{7}$ $p = \dfrac{7\pi}{2}$

d) $y = 6\cos\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $p = 8\pi$

16. Calcule o valor de m para que o período da função $f(x) = 1 + \cos(4mx)$ seja igual a $\dfrac{\pi}{8}$.
$m = 4$

17. Qual é o maior valor que a expressão $\dfrac{10}{3 + \cos x}$ pode assumir? 5

18. Determine os valores do parâmetro real m, de modo que a igualdade a seguir seja possível:
$S = \{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant m \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant m \leqslant \sqrt{2}\}$
$\cos x = m^2 - 1$ e x no intervalo $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

19. Calcule os possíveis valores de m, de modo que $\cos x = m^2 + 2m + 1$.
$S = \{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant m \leqslant 0\}$

20. Determine o período das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x}{5} + \dfrac{\pi}{5}\right)$ $p = 5\pi$

b) $f(x) = -1 + 6\cos\left(-2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ $p = \pi$

21. Considere a função $f(x) = A \cdot \cos(Bx)$, em que A e B são constantes, $0 < B < \dfrac{\pi}{2}$ e $A \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(0) = 20$ e $f(1) = 10$, calcule o valor de $f(3)$. $f(3) = -20$

22. Sejam as funções f e g dadas por $f(x) = 2^{\cos x}$ e $g(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$.

a) Calcule $f(\pi) \cdot g(\pi)$. $\dfrac{1}{2}$

b) Compare os valores $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ e $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) > g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

23. Um oceanógrafo registrou a altura das marés de uma praia, dia após dia, nos mesmos horários, e percebeu que há um padrão em que a maré alta atinge, no máximo, 3 m e a maré baixa sempre atinge 1 m em relação ao nível da superfície. A seguir estão as alturas e os horários marcados no primeiro dia de observação.

Horário	Altura da maré (m)
4:00	3
5:34	2
7:08	1
10:17	3
11:51	2
13:25	1
16:34	3

Com base nas informações fornecidas, faça o que se pede.

a) Sabendo que a função que se ajusta ao comportamento da maré é dada por $A(t) = \cos(t - a) + b$, em que $A(t)$ é a altura da maré no tempo t, determine a e b, com a e $b \in \mathbb{Z}$, de modo que, às 4:00, o valor da função se ajuste exatamente ao valor registrado pelo oceanógrafo. $a = 4$; $b = 2$

b) Preocupado com a segurança dos banhistas, o oceanógrafo fixou avisos nos quiosques da praia alertando sobre os horários das marés altas (quando estas atingem de 2 m a 3 m). Utilizando esse contexto e as informações anteriores, elabore uma atividade com dois itens e troque-a com um colega, para que ele a resolva. Em seguida, faça a correção da atividade elaborada por você. Elaboração dos estudantes.

Equações trigonométricas

É denominada equação trigonométrica toda equação em que a incógnita ou as expressões contendo a incógnita aparecem como se fossem variáveis de funções trigonométricas. Por exemplo:

a) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\cos^2 x + \cos x = 0$

Os valores da incógnita que satisfazem à equação dada, caso existam, constituem as soluções da equação trigonométrica.

Veja, a seguir, um exemplo:

Uma função que define o trajeto percorrido pela Lua em determinada localidade a partir do dia em que a lua nova é avistada é dada por $L(x) = \text{sen } (0{,}1x)$, em que x representa o dia da observação, sendo $1 \leqslant x \leqslant 31$. Sabendo que a lua cheia ocorre quando $\text{sen } (0{,}1x) = 1$ e que foi possível observar no dia 23 de julho a lua nova, em qual dia será vista a próxima lua cheia?

Para resolver a equação $\text{sen } (0{,}1x) = 1$, como $1 \leqslant x \leqslant 31$, então $0{,}1 \leqslant 0{,}1x \leqslant 3{,}1$ e $3{,}1 \leqslant \pi$. Logo, o valor do seno é sempre positivo e temos:

$$\text{sen}\left(0{,}1x\right) = 1 \Rightarrow 0{,}1x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 5\pi \Rightarrow x \simeq 15{,}7 \simeq 16$$

Logo, se a lua nova foi avistada no dia 23 de julho, a lua cheia será vista 16 dias depois, no dia 8 de agosto.

Inequações trigonométricas

Toda inequação envolvendo uma função trigonométrica com arco desconhecido denomina-se **inequação trigonométrica**. Assim, são inequações trigonométricas, por exemplo:

a) $\text{sen } x > \frac{1}{2}$

b) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x \geqslant 0$

Os valores de x que satisfazem à inequação formam seu conjunto solução.

> FÓRUM

Modelos matemáticos


PHOTOSKY/SHUTTERSTOCK.COM

■ Os pesquisadores científicos são profissionais que dedicam suas vidas à pesquisa. Essa profissão pode ser exercida em empresas ou universidades.

Ao longo de sua vida estudantil, você explorou figuras geométricas, expressões matemáticas, gráficos e vários outros conhecimentos matemáticos construídos e desenvolvidos pelo ser humano ao longo da história. Todos esses conhecimentos nos servem (direta ou indiretamente) para compreendermos o ser humano, a natureza e a sociedade.

Quando utilizamos esses conhecimentos para representar uma situação real, dizemos que estamos trabalhando com **modelos matemáticos**. Essas situações podem ser tanto do nosso cotidiano como também objetos de estudo de pesquisadores de diversas áreas, como as Ciências da Natureza e as Ciências Humanas e Sociais.

Agora, faça o que se pede a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

- Promova com seus colegas um fórum para debater a importância de compreender o mundo onde vivemos, as pesquisas acadêmicas e como utilizamos os modelos matemáticos em nosso cotidiano.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

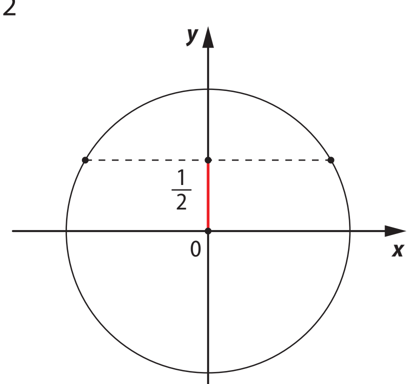
6. Resolva a equação sen $x = \frac{1}{2}$ em cada caso.

a) No intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

b) No conjunto dos números reais.

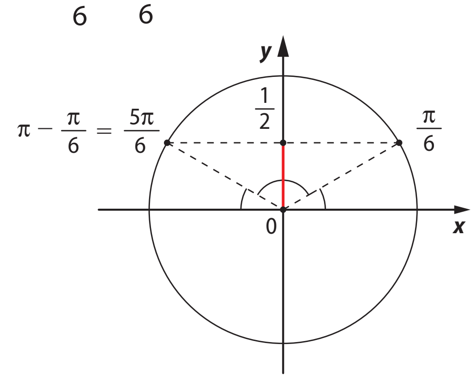
Resolução

a) Na circunferência trigonométrica, marcamos no eixo dos senos (eixo vertical) o valor $\frac{1}{2}$. Em seguida, traçamos pelo ponto $\frac{1}{2}$ uma reta paralela ao eixo horizontal.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Os valores de x, soluções da equação, são as medidas dos arcos cujas extremidades são os pontos de intersecção da reta paralela ao eixo horizontal com a circunferência trigonométrica. No 1º quadrante, o arco cujo seno é $\frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{6}$. No 2º quadrante, é $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.



Logo, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da equação sen $x = \frac{1}{2}$ é $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

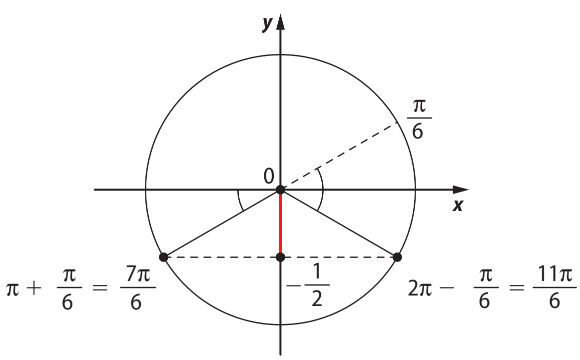
b) Observe que o seno do arco $\frac{5\pi}{6}$, no segundo quadrante, também vale $\frac{1}{2}$. Como a função seno é periódica de período 2π, a solução no conjunto $\mathbb{R}$ é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

7. Resolva a equação $\text{sen}\,(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

Resolução

Na circunferência trigonométrica, marcamos $-\frac{1}{2}$ no eixo dos senos e traçamos um segmento paralelo ao eixo horizontal.



$$\text{sen}\,(3x - \pi) = \text{sen}\,\frac{7\pi}{6}$$

$$3x - \pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

ou

$$\text{sen}\,(3x - \pi) = \text{sen}\,\frac{11\pi}{6}$$

$$3x - \pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{17\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

8. Determine o conjunto solução da inequação $2\,\text{sen}^2\,x + \text{sen}\,x - 1 > 0$. Suponha $x \in [0, 2\pi[$.

Resolução

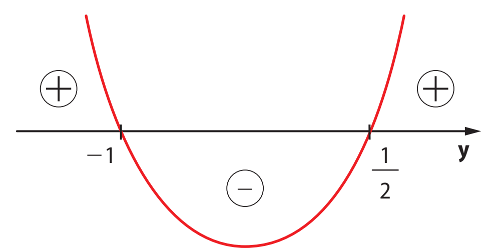
Fazendo $y = \text{sen}\,x$, temos:

$$2\,\text{sen}^2\,x + \text{sen}\,x - 1 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y^2 + y - 1 > 0$$

Calculando as raízes, temos:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

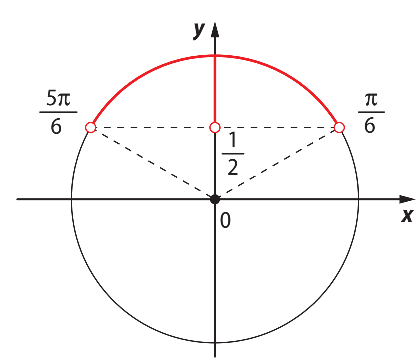
Então, $y' = \frac{1}{2}$ ou $y'' = -1$.



Logo: $y < -1$ ou $y > \frac{1}{2}$.

Voltando à substituição, obtemos:

$\text{sen}\,x < -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$\text{sen}\,x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$$

25.a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

25.b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

30. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

24. Resolva as seguintes equações, sendo $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c) $\text{sen } x = -1$ $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

d) $\cos x = -1$ $S = \{\pi\}$

25. Determine o conjunto solução das seguintes equações:

26. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

a) $2 \text{ sen } x + 1 = 0$

b) $2 \text{ sen } 2x = 1$

26. Determine o conjunto solução da seguinte equação: $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

27. Um gerador de corrente elétrica produz uma corrente dada pela equação $I(t) = 40\text{sen}\,(120\pi t)$, em que t é o tempo em segundo, e I é a corrente em ampere. Determine o mínimo valor positivo de t para que $I = 20$ amperes. Dê a resposta com quatro casas decimais. $\simeq 0{,}0014$ s

28. Determine o conjunto solução das equações:

a) $2 \text{ sen}^2 x - 6 \text{ sen } x - 8 = 0$

b) $\cos^2 x + \cos x = 0$

29. Calcule o conjunto solução da equação $2 \text{ sen}^4 x - 3 \text{ sen}^2 x + 1 = 0$.

30. Resolva a equação $4^{-\text{sen } x} = \frac{1}{2}$.

31. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

31. Determine o conjunto solução da equação $|\cos(\pi - x)| = \frac{1}{2}$.

33. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

32. Sabendo que $x \in [0, 2\pi[$, resolva a equação $\cos 3x = \text{sen } x$. Use $\text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

33. Resolva a inequação $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 > 0$, sendo $x \in [0, 2\pi[$.

34. Resolva as seguintes inequações trigonométricas, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) $2 \text{ sen } x \geqslant -1$

b) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$

c) $|\text{sen } x| < \frac{1}{2}$

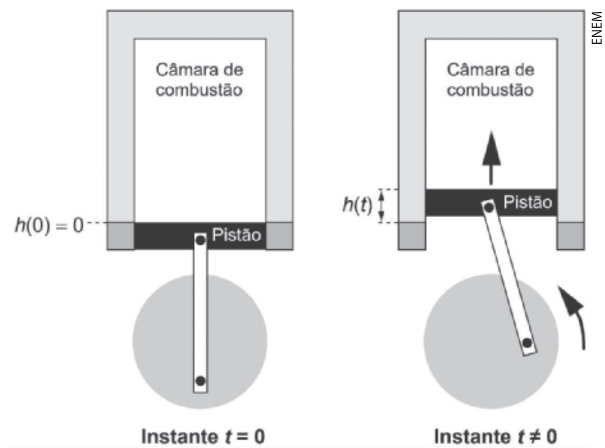
d) $|\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

36. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

35. Determine o conjunto solução da inequação $\frac{2\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1}{\text{sen } x - 1} > 0$, para $x \in [0, 2\pi]$. Ver as **Orientações para o professor**.

36. Sendo $x \in [0, 2\pi[$, determine o conjunto solução da inequação, $2\text{sen } x \cos x < \cos x$.

37. (Enem/MEC) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4 \text{ sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geqslant 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é alternativa **d**

a) 1.

b) 2.

c) 4.

d) 5.

e) 8.

28. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

28. b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

29. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Movimento das marés

O movimento dos mares e sua relação com os ciclos lunares sempre despertou a curiosidade das pessoas. O movimento cíclico das marés se relaciona ao comportamento de funções trigonométricas. Leia o texto a seguir sobre esse assunto.

Marés

Há milhares de anos os homens sabem que a Lua tem alguma relação com as marés. Antes do ano 100 a.C., o naturalista romano Plínio escreveu sobre a influência da Lua nas marés. Mas as leis físicas desse fenômeno não foram estudadas até que o cientista inglês Isaac Newton descobriu a lei da gravitação no século XVII.

As marés são movimentos de fluxo e refluxo das águas dos mares provocados pela atração que a Lua e, secundariamente, o Sol exercem sobre os oceanos. Qualquer massa de água, grande ou pequena, está sujeita às forças causadoras de maré provindas do Sol e da Lua. Porém é somente no ponto em que se encontram os oceanos e os continentes que as marés têm grandeza suficiente para serem percebidas. As águas dos rios e lagos apresentam subida e descida tão insignificante que a diferença é inteiramente disfarçada por mudanças de nível devidas ao vento e ao estado do tempo.

As marés também ocorrem em terra e na atmosfera, mas são muito mais difíceis de observar que as marés oceânicas. As marés terrestres e atmosféricas podem ser detectadas unicamente por instrumentos científicos altamente sensíveis.

Uma maré é bem semelhante à outra. Do seu nível mais baixo, a água sobe gradualmente por cerca de 6 horas até atingir a maré alta ou preamar. Daí então principia a baixar, continuando por cerca de 6 horas até alcançar a maré baixa ou baixa-mar. O ciclo então começa novamente. A diferença entre a maré alta e a baixa é chamada amplitude da maré. Enquanto a água sobe e desce, move-se em direção da costa e se afasta dela, alternadamente. Esse movimento da água é chamado fluxo da maré. Quando a água se move em direção à costa, é o fluxo enchente. Quando se desloca para alto-mar, é o fluxo vazante.

A amplitude da maré difere dia após dia conforme a posição do Sol e da Lua.

WWW.MICHAELMARTEN.COM

Quando ambos se colocam numa mesma linha em relação à Terra, como acontece na Lua Cheia e Nova, a maré fica mais alta do que o normal e é chamada de maré de Sizígia, ou maré de águas-vivas. Quando o Sol e a Lua formam com a Terra um ângulo reto, como quando a Lua está em quarto-crescente ou quarto-minguante, a maré é mais baixa que o normal, sendo chamada maré de Quadratura, ou maré de Águas-Mortas.

A própria formação da costa marítima produz também uma grande diferença na amplitude da maré. Nos estuários e baías com o formato de funil, a amplitude pode ser muito alta. A forma, tamanho e profundidade dos mares e oceanos provocam diferenças no modo de agir da maré.

DANDOLINI, M. Marés. **Planetário da UFSC**, maio 2000. Disponível em: http://planetario.ufsc.br/mares/. Acesso em: 22 maio 2020.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Os movimentos das marés possuem relação com quais astros celestes?

2. Nos portos, há um serviço de auxílio aos capitães de embarcações, realizado pelo prático. Esse profissional possui habilidades de condução marítima e conhecimento profundo das condições marítimas da região. Pesquise e explique como o conhecimento do movimento das marés auxilia esse profissional a atracar navios no cais do porto.

3. Os ciclos de maré, conforme descrito no texto, poderiam ser representados por quais funções trigonométricas?

4. Suponha que em certa região a maré baixa corresponda a apenas 1 m e a maré alta chegue a 3 m. Para efeito de comparação, considere π radianos como sendo o período de 12 horas, em que o valor 0 do domínio corresponde às 6 h da manhã, sendo esse um momento de maré alta. Represente graficamente o comportamento da maré, segundo os dados informados, e escreva a expressão matemática representada por esse gráfico.

- Fotografias da maré baixa e da maré alta em Worm's Head, na Península Gower, localizada no vilarejo de Rhossili, no País de Gales. Fotografias de 2005.

WWW.MICHAELMARTEN.COM

Análise dos gráficos das funções seno e cosseno

Estudamos neste Capítulo que o gráfico das funções trigonométricas tem o domínio, a imagem e o período muito bem definidos, porém esses intervalos podem ser alterados, modificando os valores de seus parâmetros.

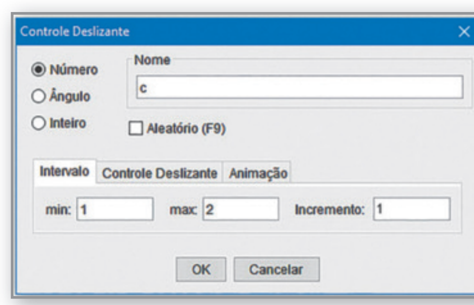
Assim, a fim de tornar esse estudo mais dinâmico, vamos utilizar o **GeoGebra** para analisar os gráficos dessas funções, variando seus parâmetros.

Como são duas funções distintas, vamos utilizar um novo recurso, um chaveamento, para poder analisar cada função em um único arquivo.

Para isso, acompanhe os passos a seguir.

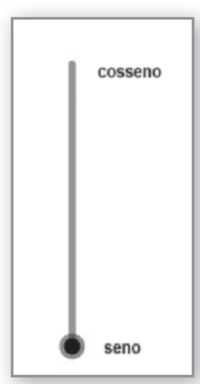
I. Utilizando a função **Controle deslizante**, crie 2 controles: *a* e *b*.

II. Utilizando a mesma função, crie outro controle, *c*, com algumas configurações diferentes: o intervalo deve ser de 1 a 2 com incremento 1 e, clicando na aba **Controle deslizante**, na mesma tela, desmarque a caixa **Fixo** e selecione a posição **Vertical**. Clicando com o botão direito do *mouse* no controle criado, é possível acessar as configurações dele, onde é possível, por exemplo, modificar sua largura.



IMAGENS: GEOGEBRA

III. Clique com o botão direito do *mouse* sobre o controle *c* e desmarque a opção **Exibir rótulo**. Em seguida, digite no **Campo de entrada** os seguintes textos: “seno” e “cosseno” (incluindo as aspas). Na **Janela de visualização** aparecerão dois textos: **seno** e **cosseno** e, com o *mouse*, posicione-os ao lado do controle *c*, conforme a imagem ao lado.



IV. Ainda no **Campo de entrada**, para criar as funções trigonométricas, digite $f(x) = a + b * \text{sen}\ (x)$ e $g(x) = a + b * \cos\ (x)$. Na **Janela de visualização**, aparecerão os gráficos das duas funções: *f* e *g*.

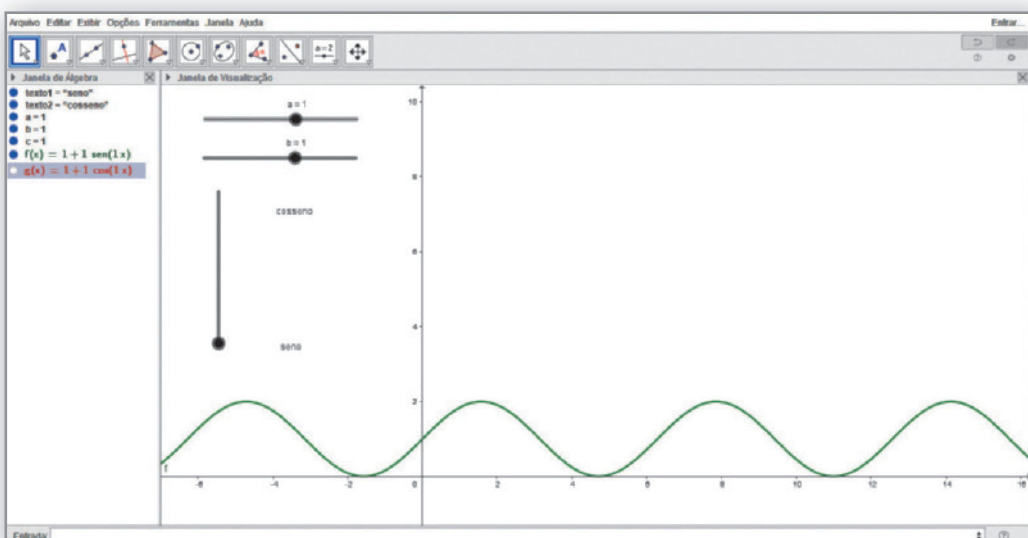
STYLE_TTT/SHUTTERSTOCK.COM

V. Agora vamos configurar nossa chave (controle *c*) para que apareça apenas uma função por vez. Clicando com o botão direito do *mouse* sobre a função *f*(*x*) que está na **Janela de Álgebra**, aparecerá um menu, e você deve escolher a opção **Propriedades**.

VI. Na caixa de diálogo aberta, escolha a aba **Avançado**. Em **Condição para exibir objeto(s)**, digite "$c = 1$" e, em seguida, pressione **Enter**. Isso significa que a função *f*(*x*) aparecerá quando $c = 1$, ou seja, se $c = 2$, ela ficará oculta.

VII. Repita o passo anterior para a função *g* e escreva a condição como $c = 2$. Assim, quando *c* assumir o valor 2, a função *g* aparecerá, mas a outra, não.

Ao final, a tela ficará parecida com esta:



GEOGEBRA

Repare que apenas uma função será apresentada por vez na **Janela de visualização**, e a função que aparecerá vai depender da posição do controle *c*. Entretanto, os controles *a* e *b* criados servirão para todas as funções.

Mova o seletor *c* e veja o que acontece.

Agora, utilize os controles *a* e *b* para alterar os gráficos das funções e faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Descreva o que você observa na função seno dada por $f(x) = a + \text{sen}\,(x)$, ou seja, para $b = 1$, quando o controle *a* desliza de seu valor mínimo até o máximo.

2. Descreva o que você observa na função cosseno dada por $g(x) = b \cdot \cos\,(x)$, ou seja, para $a = 0$, quando o controle *b* desliza de seu valor mínimo até o máximo. O que acontece se $b = 0$? Explique.

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (Uneb-BA) Admitindo-se que o peso de determinada pessoa, ao longo de um ano, possa ser modelado pela função

$P(t) = 65 - 5\cos\left(\left(\frac{t+3}{6}\right)\pi\right)$, em que $t = 1, ..., 12$

corresponde aos meses de janeiro a dezembro e considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$, pode-se estimar que, de maio até agosto, o peso dessa pessoa

01) diminuiu 4,50 kg.

02) aumentou 4,50 kg.

03) diminuiu 6,75 kg. alternativa **03**

04) aumentou 6,75 kg.

05) diminuiu 7,56 kg.

2. (UEPA) A altura das ondas em determinado trecho de um oceano varia de acordo com a expressão $H(t) = 5 + 3 \cdot \text{sen}\ (2t)$, onde t (em segundo) é o tempo e H (em metro), a altura dessas ondas. A altura máxima (crista da onda) atingida por essas ondas é de: alternativa **e**

a) 9 m
b) 3 m
c) 5 m
d) 6 m
e) 8 m

3. (UEG-GO) Seja $f(x)$ uma função definida para todos os números reais. Dada a expressão

$f(x)\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \pi\text{sen}(x)\right)$,

o valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é alternativa **e**

a) $\pi^2 - 1$

b) 0

c) $\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sqrt{2}\pi + 3$

e) $\frac{3\sqrt{2}(\pi + 2)}{2}$

4. Considere a função f dada por $y = 5 + 2\ \text{sen}(\pi t)$, para $0 < t < 2$. É correto afirmar que o conjunto imagem f de é: alternativa **d**

a) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 5\}$

b) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant y \leqslant 5\}$

c) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

d) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant y \leqslant 7\}$

e) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant y \leqslant 7, t \neq 5\}$

5. (UEG-GO) Duas ondas sonoras são descritas pelas funções $y = 1 + \text{sen}\ x$ e $y = 1 - \cos\ x$. Considerando $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, os gráficos dessas funções se interceptam em: alternativa **e**

a) $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$

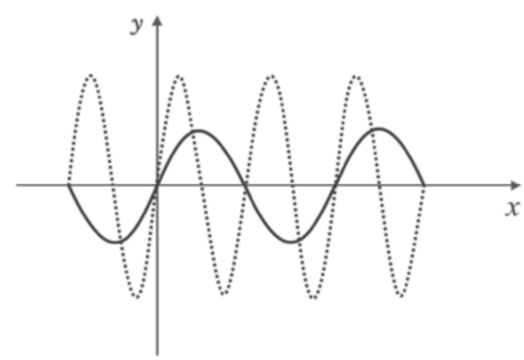
b) $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

c) $x = \frac{5\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$

d) $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$

e) $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$

6. (Fuvest-SP)



FUVEST.

Admitindo que a linha pontilhada represente o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ e que a linha continua represente o gráfico da função $g(x) = \alpha\ \text{sen}\ (\beta x)$, segue que: alternativa **a**

a) $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.

b) $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$.

c) $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

d) $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$.

e) $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$.

7. (UFRGS-RS) Um ponto A, que se movimenta sobre uma circunferência, tem sua posição $p(t)$, considerada na vertical, no instante t, descrita pela relação $p(t) = 100 - 20\text{sen}(t)$, para $t \geqslant 0$. Nesse caso, a medida do diâmetro dessa circunferência é: alternativa **b**

a) 30
b) 40
c) 50
d) 80
e) 120

8. (UFRGS-RS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5\text{sen}(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente, alternativa **b**

a) $-2, 8, \pi$
b) $8, -2, \pi$
c) $\pi, -2, 8$
d) $\pi, 8, -2$
e) $8, \pi, -2$

9. (Enem/MEC) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

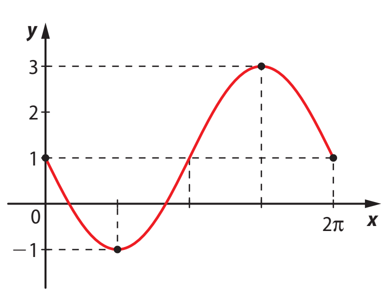
Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi: alternativa **a**

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

10. (UFRGS-RS) Se $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\, x$ tem como gráfico alternativa **d**

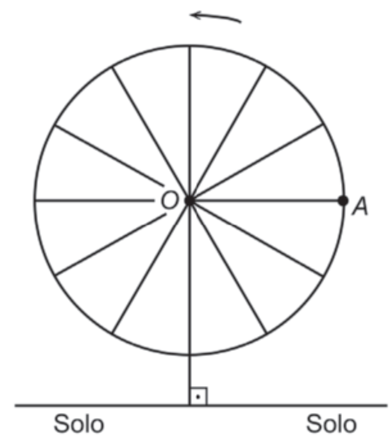


EDITORIA DE ARTE

Então:

a) $a = -2$ e $b = 1$
b) $a = -1$ e $b = 2$
c) $a = 1$ e $b = -1$
d) $a = 1$ e $b = -2$

11. (Enem/MEC) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

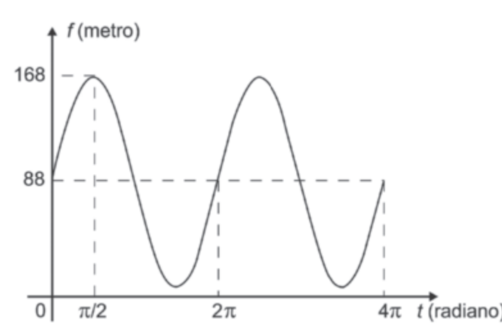


ENEM.

Disponível em: http://en.wikipedia.org.
Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado)

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



ENEM.

A expressão da função altura é dada por:

a) $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$ alternativa **a**
b) $f(t) = 80\cos(t) + 88$
c) $f(t) = 88\cos(t) + 168$
d) $f(t) = 168\text{sen}(t) + 88\cos(t)$
e) $f(t) = 88\text{sen}(t) + 168\cos(t)$

12. (Enem/MEC) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\dfrac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é alternativa **d**

a) janeiro.
b) abril.
c) junho.
d) julho.
e) outubro.

13. (UECE) O valor da soma $\text{sen}(x) + \text{sen}(x + \pi) + \text{sen}(x + 2\pi) + \text{sen}(x + 3\pi) + ... + \text{sen}(x + n\pi)$, onde n é um número natural par e menor do que 100 é: alternativa **a**

a) $\text{sen}(x)$
b) $\cos(x)$
c) 0
d) 1

14. (PUC-SP) A imagem da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - 3\cos x$ é o intervalo: alternativa **e**

a) $[-1; 2]$
b) $[-1; 0]$
c) $[3; 5]$
d) $[2; 3]$
e) $[-1; 5]$

15. (UFES) O período e a imagem da função $f(x) = 5 - 3\cos\left(\dfrac{x - 2}{\pi}\right)$ são, respectivamente: alternativa **c**

a) 2π e $[-1, 1]$
b) 2π e $[2, 8]$
c) $2\pi^2$ e $[2, 8]$
d) 2π e $[-3, 3]$
e) $2\pi^2$ e $[-3, 3]$

16. (UFPE) Admita que a pressão arterial $P(t)$ de uma pessoa no instante t, medido em segundo, seja dada por: $P(t) = 96 + 18\cos(2\pi t)$, $t \geqslant 0$. Considerando esses dados, analise a veracidade das seguintes afirmações: I: V; II: V; III: V; IV: F; V: F

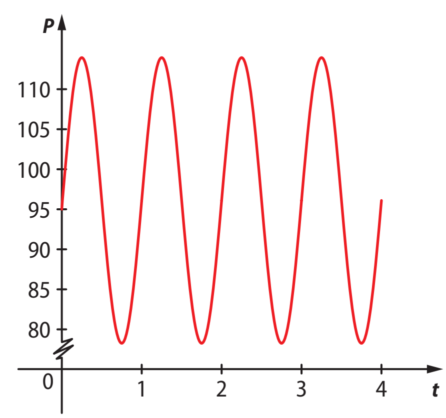
I. O valor máximo da pressão arterial da pessoa é 114.

II. O valor mínimo da pressão arterial da pessoa é 78.

III. A pressão arterial da pessoa se repete a cada segundo, ou seja, $P(t + 1) = P(t)$, para todo $t \geqslant 0$.

IV. Quando $t = \dfrac{1}{3}$ de segundo, temos $P\left(\dfrac{1}{3}\right) = 105$.

V. O gráfico de $P(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 4$ é:



EDITORIA DE ARTE

17. (IFPR) Em uma determinada região litorânea, a maré oscila segundo a função $h(t) = 3 - 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$, sendo h a altura em metros, que a maré atinge no tempo t em horas, medido a partir de 6 h da manhã. Uma embarcação, que se encontra encalhada às 11 h da manhã, precisa de uma profundidade mínima de 2 metros para navegar. Assinale a alternativa que apresenta quantas horas os tripulantes dessa embarcação ainda terão que esperar para prosseguirem viagem. alternativa **b**

a) 4 h.
b) 5 h.
c) 6 h.
d) 7 h.

18. Dada a inequação trigonométrica $2 \operatorname{sen} x \leqslant -1$, indique seu conjunto solução no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. alternativa **a**

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

19. Dada a inequação trigonométrica $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$, indique seu conjunto solução no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. alternativa **c**

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{\pi}{3}\right\}$

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Nas páginas de abertura, foram apresentadas algumas informações sobre a Lua e como o seu ciclo é um exemplo de fenômeno periódico. Ao longo do Capítulo, vimos que fenômenos como esse podem ser modelados por funções periódicas, como a função seno e a função cosseno. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual a importância dela? Se não, retome o texto de abertura do Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros, revistas, jornais e *sites* sobre a modelagem de fenômenos periódicos.

Vimos, também, o que são funções periódicas (mais especificamente as funções trigonométricas seno e cosseno), estudamos seus gráficos e suas aplicações na modelagem de fenômenos oscilatórios.

Além disso, estudamos equações e inequações trigonométricas.

Vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **4**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual? Resposta pessoal.
- Quais exemplos de situações ou fenômenos podem ser modelados utilizando a função seno e a função cosseno? Algumas respostas possíveis: O movimento pendular, o movimento lunar e outros fenômenos oscilatórios.
- Qual é o valor máximo e o mínimo da função $f(x) = \operatorname{sen} x$? E da função $g(x) = \cos x$? 1 e -1, tanto para $f(x)$ quanto para $g(x)$.
- Explique o que significa dizer que uma função é periódica. Resposta esperada: É uma função cujo valor se repete após determinado intervalo.

UNIQDES/SHUTTERSTOCK.COM

Capítulo 1 • Proporcionalidade e semelhança

Atividades

1. $\frac{3}{4}$
2. **a)** Sim.
   b) $x = 4{,}5$; $y = 6{,}75$
3. $BC = 128$ m; $AM = 37{,}5$ m
4. $AB = 20$ cm; $CD = 15$ cm
5. **a)** Não.
   b) Resposta possível: É preciso saber a medida de um dos segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{DF}$.
6. 15
7. **a)** Sim. **b)** Sim. **c)** Sim.
8. aproximadamente 38,28 °C
9. 5 cm
10. Translações, rotações e reflexões.
12. LAL
13. $q = 6$
14. Demonstração.
15. 7 km
16. Produção dos estudantes.
18. Os paralelogramos são semelhantes.
19. Produção dos estudantes.
20. 10
21. **a)** Resposta pessoal.
    b) $k = 50$ ou $k = \frac{1}{50}$
    c) 5,6 cm
22. 4,32 cm
23. 18 m
24. Produção dos estudantes.
25. Produção dos estudantes.
26. A figura obtida é o Tapete de Sierpinski.
27. Produção do estudante.
28. alternativa **a**
29. 15 cm, 18 cm e 27 cm
30. alternativa **c**
31. **b)** 20,5 m
32. **a)** $B\hat{A}C$, $F\hat{B}S$, $S\hat{C}M$ e $B\hat{S}C$; $A\hat{B}S$ e $A\hat{C}S$; $B\hat{F}S$, $B\hat{S}F$, $C\hat{S}M$ e $C\hat{M}S$
    b) Sim.
    c) Sim.
    d) $\frac{1}{2}$
33. alternativa **d**
34. $m = 4$, $n = 12$, $h = 4\sqrt{3}$ e $c = 8\sqrt{3}$
35. 20 m
36. Não, pois faltam dados.
37. aproximadamente 16 cm
38. alternativa **b**
39. alternativa **d**
40. **a)** $a = 32$ m **c)** $c = 30$ m
    b) $b = 18$ m **d)** 56,25%

Atividades complementares

1. alternativa **d**
2. alternativa **b**
3. alternativa **b**
4. alternativa **a**
5. alternativa **b**
6. alternativa **c**
7. alternativa **a**
8. alternativa **a**
9. alternativa **d**
10. alternativa **a**
11. alternativa **a**

Capítulo 2 • Trigonometria no triângulo

Atividades

1. **a)** Tangente.
   b) Significa que a razão entre a altura do desnível e o comprimento horizontal da rampa é de $\frac{8}{100}$.
2. aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m
3. 29 m
4. alternativa **a**
5. **a)** $\text{sen}\,\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{tg}\,\gamma = \frac{1}{2}$
   b) $\text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{4}{5}$; $\text{tg}\,\beta = \frac{3}{4}$
6. $\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$; $\cos\alpha = \frac{8}{17}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{15}{8}$
7. **a)** $\alpha \simeq 51°$ **b)** $\alpha \simeq 19°$ **c)** $\alpha \simeq 63°$
8. **a)** 0,90 **b)** 0,17 **c)** 0,64
9. 5,5 m
10. $x = 6{,}16$; $y = 5{,}12$
11. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m
12. 3 m
13. O prédio tem 16 metros de altura, e a pessoa se afastou 30 metros.
14. 1 080 m
15. Produção do estudante.
16. $40\sqrt{3}$ m
17. 1,903 m
18. $x \simeq 20{,}6$ m
19. $6 + 4\sqrt{3}$ m

20. **a)** $4\sqrt{3}$ cm
b) 45°
21. alternativa **e**
22. $AD = \sqrt{7}$
23. alternativa **e**
24. $12\sqrt{3}$ m
25. $AC = 120$ m
26. Produção dos estudantes.
27. $AB \simeq 91{,}65$ m
28. alternativa **e**
29. aproximadamente 40 m
30. Irresolúvel, pois falta um dado.
31. alternativa **e**
32. 70 cm
33. 66,28 cm
34. torre *A*: 9,67 km e torre *B*: 10,57 km
35. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$
36. **a)** aproximadamente 49,43 m
b) aproximadamente 41 m
37. $2\sqrt{2}$ milhas
38. **a)** 1 km
b) $\sqrt{2}$ km
39. **a)** $\text{med}(B\hat{A}C) = 45°$; $\text{med}(C\hat{B}A) = 60°$; $\text{med}(B\hat{C}A) = 75°$
b) $AB = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm; $BC = 10\sqrt{2}$ cm; $AC = 10\sqrt{3}$ cm
40. $CD = 15\sqrt{2}$ m; 15 m
41. 25 cm²
42. R$ 56.476,00
43. $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}$ cm²
44. 37 cm
45. $\dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2}$

Atividades complementares

1. alternativa **d**
2. alternativa **e**
3. alternativa **c**
4. alternativa **b**
5. alternativa **d**
6. alternativa **b**
7. alternativa **c**
8. alternativa **b**
9. alternativa **c**
10. alternativa **c**
11. alternativa **d**
12. alternativa **d**
13. alternativa **c**
14. alternativa **e**
15. alternativa **b**
16. alternativa **c**
17. alternativa **b**
18. alternativa **e**
19. alternativa **b**
20. alternativa **e**

Capítulo 3 • Razões trigonométricas na circunferência

Atividades

1. **a)** $\dfrac{\pi}{3}$ rad
b) $\dfrac{7\pi}{6}$ rad
c) 200°
d) 9°
2. $\dfrac{5\pi}{6}$ rad
- Respostas pessoais.

3. 0,5 rad
4. 6π metros
5. **a)** 98,5 cm **b)** 51,4 cm
6. $\dfrac{\pi}{18}$ m
7. alternativa **d**
9. **a)** $63° + k \cdot 360$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
10. **a)** São côngruos.
b) Não são côngruos.
11. sim
- Respostas pessoais.

12. **a)** segundo quadrante
b) quarto quadrante
13. **a)** cinco voltas; primeiro quadrante
b) três voltas; primeiro quadrante
c) três voltas; terceiro quadrante
d) duas voltas; não está em quadrante algum, está sobre o eixo *x*, no ponto $(-1, 0)$
e) duas voltas; terceiro quadrante
f) duas voltas; não está em quadrante algum, está sobre o eixo *y*, no ponto (0, 1)
14. aproximadamente 104,67 cm
15. **a)** $M = 60°$ ou $M = \dfrac{\pi}{3}$
$N = 150°$ ou $N = \dfrac{5\pi}{6}$
$P = 240°$ ou $P = \dfrac{4\pi}{3}$
$Q = 330°$ ou $Q = \dfrac{11\pi}{6}$
b) $A = 30°$ ou $A = \dfrac{\pi}{6}$
$B = 90°$ ou $B = \dfrac{\pi}{2}$

$C = 150°$ ou $C = \frac{5\pi}{6}$

$D = 210°$ ou $D = \frac{7\pi}{6}$

$E = 270°$ ou $E = \frac{3\pi}{2}$

$F = 330°$ ou $F = \frac{11\pi}{6}$

16. $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

18. **a)** $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) zero

19. **a)** sen $135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sen $\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; cos $\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) sen $\frac{19\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $\frac{19\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) sen $-240° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos $-240° = -\frac{1}{2}$

20. **a)** verdadeiro

b) verdadeiro

c) falso

- Resposta pessoal.

21. **a)** 4

b) -4

22. **a)** 2sen α

b) $-$sen α $-$ cos α

c) cos α

23. **a)** primeiro quadrante

b) segundo quadrante

25. $-\frac{3}{2}$

26. $A = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$

27. zero

28. a-I; b-II; c-IV; d-III; e-IV; f-II; g-I; h-III

29. $a = 2$

30. 2 ou -1

31. **a)** sen 830°

b) cos 190°

32. 1

33. zero

34. alternativa **b**

35. p

36. $a = \pm\frac{1}{2}$

37. **a)** $-0,42$; $-0,91$

b) $-0,42$; 0,91

c) 0,91; $-0,42$

d) 0,91; 0,42

e) $-0,42$; 0,91

38. **a)** 0,97

b) $\simeq 0,24$

c) $\simeq 0,24$

39. **a)** pesquisa dos estudantes

b) $R = 3,63t$; $r = 1,63t$

c) elaboração dos estudantes

40. **a)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) -1

c) $-\sqrt{3}$

d) zero

41. **a)** -2tg α

b) zero

42. zero

43. $\frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$

44. tg 1

- Resposta pessoal.

45. **a)** 1

b) $-\sqrt{3}$

46. $m = 15$

47. **a)** $-\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{4}$

48. sen $\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e tg $\alpha = -\sqrt{15}$

49. 2

50. $-\frac{1}{5}$

51. negativo

52. verdadeiro

53. $\frac{12\sqrt{10}}{31}$

Atividades complementares

1. alternativa **e**
2. alternativa **e**
3. alternativa **c**
4. alternativa **b**
5. alternativa **c**
6. alternativa **d**
7. alternativa **b**
8. alternativa **a**
9. alternativa **d**
10. alternativa **c**
11. alternativa **b**
12. alternativa **d**

Capítulo 4 • Funções trigonométricas

Atividades

1. **a)** D = $\mathbb{R}$; Im = $[-3, 3]$; $p = 2\pi$
b) D = $\mathbb{R}$; Im = $[1, 3]$; $p = 2\pi$
c) D = $\mathbb{R}$; Im = $[-1, 1]$; $p = 2\pi$
d) D = $\mathbb{R}$; Im = $[-2, 2]$; $p = 8\pi$

2. **a)** $p = \frac{\pi}{4}$
b) $p = \frac{\pi}{5}$

3. Im = $[-7, 7]$

4. **a)** $p = \frac{\pi}{3}$
b) $p = 8$

5. **a)** Valor máximo: 4; valor mínimo: -4
b) Valor máximo: 7; valor mínimo: 3
c) Valor máximo: $\frac{1}{2}$; valor mínimo: $\frac{1}{4}$

6. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq m \leq 1\}$

7. alternativa **a**

8. alternativa **b**

9. $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{6}\right\}$

10. alternativa **d**

11. alternativa **e**

12. alternativa **e**

15. **a)** $p = \frac{\pi}{4}$
b) $p = \frac{\pi}{5}$
c) $p = \frac{7\pi}{2}$
d) $p = 8\pi$

16. $m = 4$

17. 5

18. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq m \leq -1 \text{ ou } 1 \leq m \leq \sqrt{2}\}$

19. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leq m \leq 0\}$

20. **a)** $p = 5\pi$
b) $p = \pi$

21. $f(3) = -20$

22. **a)** $\frac{1}{2}$
b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

23. **a)** $a = 4$; $b = 2$
b) Elaboração dos estudantes.

24. **a)** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
b) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$
c) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$
d) $S = \{\pi\}$

25. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

26. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

27. $\simeq$ 0,0014 s

28. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

29. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

30. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

31. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

32. $S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

33. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

34. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leq x < 2\pi\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

35. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2} \right.$ ou $\left. \frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2k\pi < k \in \mathbb{Z} \right\}$

36. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \right.$ $\left. \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \right\}$

37. alternativa **d**

Atividades complementares

1. alternativa **03**
2. alternativa **e**
3. alternativa **e**
4. alternativa **d**
5. alternativa **e**
6. alternativa **a**
7. alternativa **b**
8. alternativa **b**
9. alternativa **a**
10. alternativa **d**
11. alternativa **a**
12. alternativa **d**
13. alternativa **a**
14. alternativa **e**
15. alternativa **c**
16. I: V; II: V; III: V; IV: F; V: F
17. alternativa **b**
18. alternativa **a**
19. alternativa **c**

> BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências são identificadas por números (de 1 a 10) e as habilidades, por códigos alfanuméricos, por exemplo, EM13MAT103, cuja composição é explicada da seguinte maneira:

- as duas primeiras letras indicam a etapa da Educação Básica, no caso, Ensino Médio (EM);
- o primeiro par de números indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio (13);
- a segunda sequência de letras indica a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras): MAT = Matemática e suas Tecnologias; LGG = Linguagens e suas Tecnologias; LP = Língua Portuguesa; CNT = Ciências da Natureza e suas Tecnologias; CHS = Ciências Humanas e Sociais Aplicadas;
- os três números finais indicam a competência específica (1º número) e a habilidade específica (dois últimos números).

A seguir, os textos na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades mencionadas nesta obra.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Competência específica 1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Competência específica 3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Competência específica 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas

Competência específica 1 – Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

Competência específica 2 – Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Competência específica 3 – Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

ALMEIDA, L. W. de.; SILVA K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

- Essa obra proporciona oportunidades de integração envolvendo atividades normalmente desenvolvidas nas aulas de Matemática e em situações do dia a dia, no que tange a aspectos econômicos, sociais e ambientais.

BONOMI, M. C.; LAURO, M. M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1 ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.

- Esse material aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução de Helena de Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

- O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática, destacando a fascinante relação da humanidade com números, formas e padrões ao longo do tempo.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília, DF: Presidência da República, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1 000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conhecido como o Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes públicas e privadas de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, habilidades e aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 14 ago. 2020.

- As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da saúde. **Guia Alimentar para a População Brasileira**. 2ª ed. Brasília, DF, 2014. Disponível em: http://189.28.128.100/dab/docs/portaldab/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento explicativo sobre os temas transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, J.; CARRANO, P.; MAIA, C. L. **Juventude e Ensino Médio**: diálogo, sujeitos e currículo. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARVALHO, J. P. de. Um problema de Fibonacci. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 17. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta uma explicação sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. Campos dos Goytacazes: UENF-RJ, 2016.

- O material explora a utilização do *software* GeoGebra e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. reformulada. São Paulo: Atual, 2003.

- Essa obra apresenta conceitos matemáticos como conjuntos, funções, entre outros, destacando demonstrações e a importância de uma linguagem formal na escrita matemática.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2007.

- O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática organizados de forma cronológica.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

- Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um saber mais integrado e livre, destacando a reunião de diferentes áreas de conhecimento permeando o processo de ensino e aprendizagem.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Papirus Educação).

- Essa obra busca refletir sobre as relações entre educação e tecnologias, evitando jargões, teorias e abordagens específicas desses campos de conhecimento, de modo que as discussões propostas sejam mais acessíveis a todos.

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. São Paulo: SBM, 2006. 3. v. (Coleção do professor de Matemática).

- Livro que aborda conceitos matemáticos desenvolvidos no Ensino Médio, destacando demonstrações e atividades de aprofundamento.

LOPES, C. A. E.; NACARATO, A. M. (org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

- Livro que traz um compilado de artigos discutindo perspectivas consideradas fundamentais no ensino de Matemática, que deve focalizar os saberes do estudante, incentivando a criação dos próprios procedimentos e o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, priorizando a aquisição e a comunicação em linguagem matemática.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

- Essa obra apresenta reflexões que buscam articular questões epistemológicas e ações docentes, bem como analisar formas usuais do trabalho escolar propondo alternativas didáticas.

MELO, M. C. P.; JUSTULIN, A. M. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XV, 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: SBEM-PR, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresentação teórica e prática da metodologia de resolução de problemas.

MONTEIRO, M. S.; CERRI, C. **História dos números complexos**. São Paulo: CAEM – IME-USP, 2011. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

PATERLINI, R. R. Técnicas de máximos e mínimos. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 35. SBM. Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Artigo no qual são investigadas situações-problema por meio de diferentes técnicas para encontrar os valores de máximo ou de mínimo da função.

POMMER, W. M. **O número de Euler**: possíveis abordagens no ensino básico. São Paulo: FEUSP, 2010. Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Esse material apresenta aspectos históricos sobre o número de Euler que contribuem para ampliar o estudo sobre o tema.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

- Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

PORTAL DA OBMEP. Rio de Janeiro. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Portal que disponibiliza materiais teóricos, videoaulas e atividades interativas sobre Matemática na Educação Básica.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

- Esse é o primeiro livro de história da Matemática publicado no Brasil, escrito por uma autora que apresenta um olhar crítico de como a história da matemática tem sido contada ao longo do tempo.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Tradução de Abgail Lins e Jussara de Loiola Araújo. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

- Neste livro, as discussões destacam a importância da perspectiva democrática na educação matemática e o seu caráter emancipatório, enfatizando o papel da modelagem na educação matemática.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

- Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

UNESCO. **Declaração mundial sobre educação para todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1998. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas? **RPM**, Rio de Janeiro, n. 33. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

ZABALA, A.; ARNAU, L. **Como aprender e ensinar competências**. Tradução de Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010.

- Uma obra que apresenta um novo enfoque no ensino e na aprendizagem de competências, priorizando as capacidades cognitivas, em relação à aquisição de conhecimento.

Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Cefet-PR: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FEI-SP: Faculdade de Engenharia Industrial
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (SP)
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
IFMA: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
IFMT: Instituto Federal do Mato Grosso
IFPE: Instituto Federal de Pernambuco
IFPR: Instituto Federal do Paraná
IFRR: Instituto Federal de Roraima
IFRS: Instituto Federal do Rio Grande do Sul
IFSC: Instituto Federal de Santa Catarina
IFSP: Instituto Federal de São Paulo
ITA-SP: Instituto Tecnológico da Aeronáutica
Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBMEP: Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PUC-GO: Pontifícia Universidade Católica de Goiás
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas
UECE: Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá
UEMA: Universidade Estadual do Maranhão
UEMT: Universidade Estadual do Mato Grosso
UEPA: Universidade do Estado do Pará
UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFAL: Universidade Federal de Alagoas
UFES: Universidade Federal do Espírito Santo
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
UFPE: Universidade Federal de Pernambuco
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRR: Universidade Federal de Roraima
UFRRJ: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria
UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia
UFVJM-MG: Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa
UMC-SP: Universidade de Mogi das Cruzes
UnB-DF: Universidade de Brasília
Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas
Unicentro-PR: Universidade Estadual do Centro-Oeste
Unifor-CE: Universidade de Fortaleza
Unip-SP: Universidade Paulista
Unitau-SP: Universidade de Taubaté
USCS-SP: Universidade Municipal de São Caetano do Sul
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

Orientações para o professor

Apresentação

Caro professor,

Atualmente, o ensino de Matemática, assim como o de outras áreas do conhecimento, está pautado pelas indicações presentes nos documentos oficiais, principalmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As perspectivas desse trabalho estão voltadas para atender os estudantes do século XXI, reconhecendo que "as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação" (BNCC, 2018, p. 462).

Diante desse cenário, ensinar Matemática hoje significa desenvolver nos estudantes competências e habilidades apoiadas em noções, conceitos e métodos matemáticos que possibilitem a eles empregar estratégias próprias e criar soluções por meio da observação, da análise, do estabelecimento de conexões, do levantamento de conjecturas, percebendo e expressando regularidades.

Promover tais ações nos estudantes requer que você, professor, tenha domínio dos conteúdos da área, identifique as dificuldades de aprendizagem deles e, com o apoio de estudos da Educação Matemática, ajude-os a superá-las, favorecendo a autonomia e a cooperação em sala de aula.

Cientes disso, e com a intenção de poder contribuir para o trabalho docente, elaboramos estas **Orientações para o professor**, nas quais, além das discussões sobre os conteúdos e métodos de ensino, procuramos fornecer subsídios para o seu trabalho como professor, por meio de comentários sobre as seções e os conteúdos abordados, além de sugerir leituras complementares a fim de colaborar com a sua formação.

Na parte específica de cada Volume, fazemos observações e sugestões que visam enriquecer, tanto no aspecto teórico como no metodológico, os temas abordados nos Capítulos, e apresentamos as respostas e resoluções das atividades.

Para finalizar, desejamos a você muito sucesso em seu trabalho e esperamos que estas orientações possam ajudar a aprimorar sua prática pedagógica.

Os autores

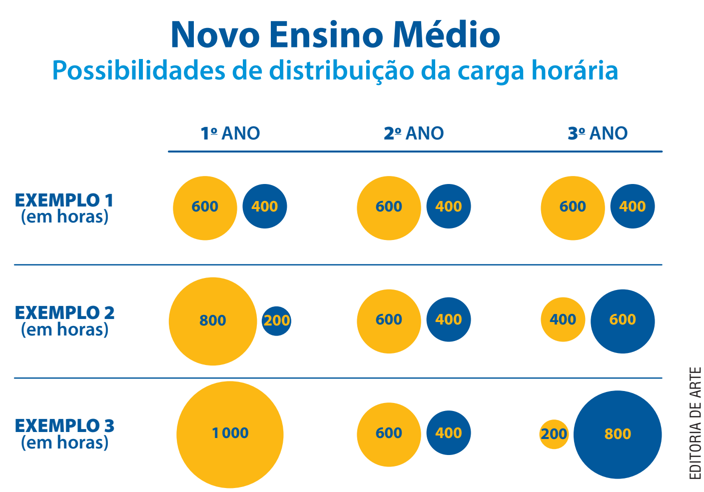
Sumário

O NOVO ENSINO MÉDIO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/lei nº 9.394/1996) já trazia em suas indicações para o Ensino Médio a necessidade de, nessa etapa da Educação Básica, haver para os estudantes o aprofundamento de conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental para o prosseguimento dos estudos; uma preparação básica para o trabalho e para a cidadania; seu aprimoramento ético; o desenvolvimento de autonomia intelectual e do pensamento crítico, além da compreensão dos processos produtivos vinculados a processos científicos e tecnológicos[1].

A lei da reforma do Ensino Médio, de 2017, conhecida como a que instaurou o Novo Ensino Médio, buscou tornar mais exequíveis e efetivas as ações para a consolidação do que foi previsto na LDB, determinando às escolas 3 000 horas de aulas para os três anos de curso, sendo um total máximo de 1 800 horas de formação geral básica, para atendimento da BNCC, e o mínimo de 1 200 horas para o cumprimento de itinerários formativos.

A distribuição dessa carga horária pode ser flexibilizada de acordo com as escolhas e necessidades de cada região, sendo possível fazer uma distribuição de horas para cada uma das séries do Ensino Médio. Os exemplos apresentados a seguir são algumas das possibilidades (em amarelo, estão destacadas as horas referentes à formação geral básica e, em azul, as referentes aos itinerários formativos).



[1] Artigo 35 da LDB. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 5 set. 2020.

Outro aspecto a ser considerado é que, para as 1 800 horas de formação geral básica, também existe a flexibilização de distribuição da carga horária dos diferentes componentes de cada uma das áreas: Linguagens e suas Tecnologias (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa); Matemática e suas Tecnologias (Matemática), Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Biologia, Física e Química) e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia e Filosofia). Destaca-se o fato de que os componentes Língua Portuguesa e Matemática devem ser oferecidos nas três séries.

Uma sugestão de distribuição da carga horária é destinar 600 horas para a área de Linguagens e suas Tecnologias (sendo 400 horas voltadas para Língua Portuguesa e 200 horas para as Linguagens: Arte, Educação Física e Língua Inglesa) e 400 horas para cada uma das outras áreas.

Áreas do conhecimento	Carga horária
Linguagens e suas Tecnologias	200 h
Língua Portuguesa	400 h
Matemática e suas Tecnologias	400 h
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	400 h
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	400 h
Total	1 800 h

A estruturação por áreas de conhecimento se dá na perspectiva de fortalecimento das relações entre os componentes curriculares que delas fazem parte, tendo em vista a resolução de problemas contextualizados e voltados para a intervenção na realidade. Apoiada nesses pressupostos, a BNCC destaca a necessidade de escolas e professores proporcionarem aos estudantes

> experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas (BNCC, 2018, p. 463).

Tais aprendizagens possibilitam aos estudantes atingirem o que o Novo Ensino Médio propõe, que é a ampliação das condições de inclusão social por meio do acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho, como apresentado no Parecer CNE/CEB nº 5/2011.

Por outro lado, esse mesmo parecer destaca que o rápido desenvolvimento tecnológico e a ampliação de seu acesso pelas pessoas em geral vêm provocando mudanças profundas nas dinâmicas sociais, no reconhecimento e valorização de diferentes culturas, nas relações com o mundo do trabalho e suas incertezas futuras. Essas mudanças afetam mais diretamente os jovens que, portanto, demandam uma formação mais adequada a esses novos tempos.

Pensar nessa formação exige a tomada de consciência de que na etapa do Ensino Médio, como apontado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCN, 2013), temos um contingente de pessoas que precisam ser consideradas em sua multiplicidade e reconhecidas como participantes ativas nos diversos meios nos quais estão inseridas e que, por isso, carregam consigo várias culturas juvenis ou muitas juventudes.

Compreender as modificações da sociedade e, por conseguinte, as mudanças nos perfis dos sujeitos escolares é também um caminho que precisa ser percorrido. São várias as formas de sociabilidade existentes na vida cotidiana dos jovens e incorporar as manifestações juvenis ao processo educativo exige do professor a sensibilidade de estar aberto ao diálogo e atento aos desafios que a contemporaneidade lança para a escola. Não é possível deixar de considerar que a escola é um espaço de encontro de inúmeras manifestações diferentes entre si, um local que se constitui de culturas diversas, de valores diversos e de diferentes perspectivas de olhar para o mundo e planejar o futuro.

O Novo Ensino Médio aponta que um modo de trabalhar com essa diversidade é por meio do estímulo à participação ativa, que pode propiciar aos jovens vivenciar valores como os da solidariedade e da democracia e permitir o aprendizado da alteridade. Isso significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças, além do desenvolvimento de habilidades discursivas e argumentativas. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens.

Esses fatores implicam numa organização escolar que promova e garanta aos estudantes serem protagonistas e interlocutores em seu percurso escolar possibilitando

> [...] uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu **projeto de vida**, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos (BNCC, 2018, p. 463).

Essas considerações sobre o perfil do público-alvo da etapa do Ensino Médio e a busca por atender às suas necessidades e expectativas de vida reforçam a decisão de se ter uma composição curricular estruturada por áreas de conhecimento. Desse modo, será possível cada rede de ensino ou unidade escolar montar seu cronograma de trabalho, tendo em vista as necessidades específicas dos espaços em que estão inseridas. Assim, a distribuição das cargas horárias relativas a cada área e, consequentemente, a cada um dos componentes curriculares que as compõem pode ser feita por bimestre, trimestre ou semestre.

> A BNCC

Os desafios impostos à educação escolar de um público múltiplo e dinâmico inserido em uma efervescência de desenvolvimento em todas as áreas, provocado principalmente pelo avanço tecnológico, exigem um novo olhar e um posicionamento sobre a abordagem a ser dada ao conhecimento a ser construído e à constituição de um sujeito consciente de toda a contribuição que ele pode dar ao mundo de modo geral.

Para que essa **formação integral** seja possível, estudos em Educação têm indicado e construções curriculares de diferentes países têm assumido que o ensino precisa estar orientado ao desenvolvimento de competências e habilidades.

A BNCC também apresenta tal posicionamento, e diante do fato de que ao termo **competência** têm se dado diferentes significados, ela apresenta a definição a ser considerada:

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BNCC, 2018, p. 8).

No que tange ao termo **habilidade**, o documento também especifica:

> As **habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares (BNCC, 2018, p. 29).

Em outro trecho, esse documento destaca que o desenvolvimento de competências exige que

> [...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) [...] (BNCC, 2018, p. 13).

Dessa forma, a BNCC delega à escola uma função social urgente, tendo em vista o mundo globalizado e a consequente necessidade de pessoas que saibam fazer e que tenham a capacidade de planejar e resolver problemas, que saibam ler o mundo através de palavras, imagens, fatos, números, códigos e outras linguagens, usando esses recursos para saber agir e saber conviver.

As competências gerais apresentadas pela BNCC têm o propósito do desenvolvimento integral do estudante:

1 Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5 Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

EDITORIA DE ARTE

(BNCC, 2018, p. 9 e 10)

Tendo em vista que o desenvolvimento de competências é a proposta de ensino, deve-se repensar o estudo de conteúdos, o que significa não menosprezá-los, mas sim mudar o foco do trabalho com eles. A memorização de fatos e/ou procedimentos referentes aos conteúdos abordados nos diferentes componentes curriculares não precisa ser totalmente abandonada, porém deve fazer sentido para os estudantes. Na medida do possível, as situações propostas devem buscar estabelecer integração entre as diferentes áreas, possibilitando o emprego de noções e conhecimentos matemáticos, geográficos, biológicos etc., além de um domínio da língua.

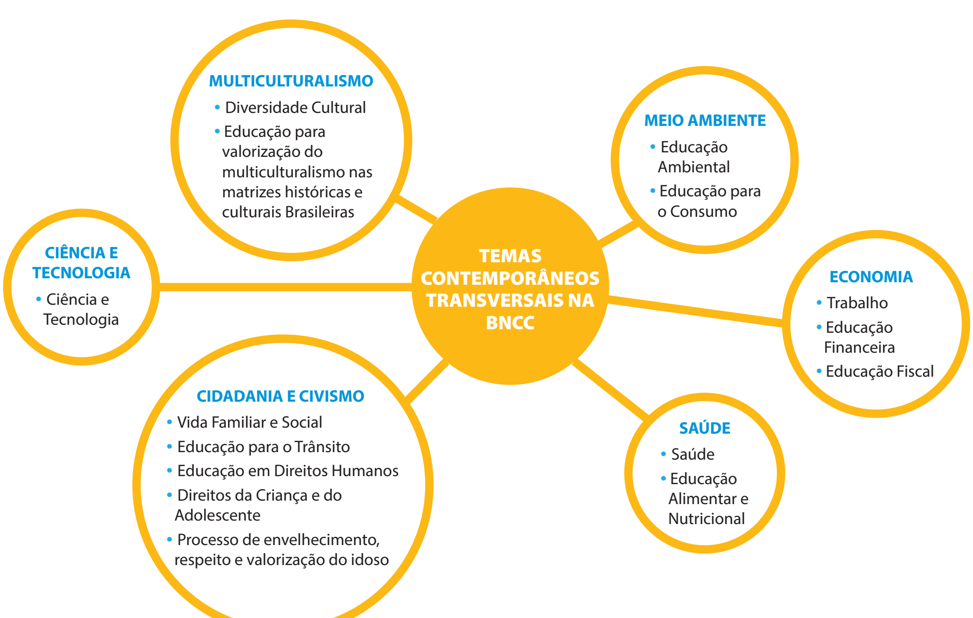
Esses elementos apontam que o ensino por competências exige o repensar da prática docente. O professor precisa reconhecer que os objetos de conhecimento devem ser apresentados, sempre que possível, por meio de situações e problemas contextualizados que provoquem conflitos e exijam que os estudantes mobilizem seus processos cognitivos de observação, visualização, compreensão, organização, análise e síntese como suporte para a elaboração de argumentação consistente. É necessário lembrar que muitas situações matemáticas podem ser contextualizadas por meio de questões internas à própria Matemática e por meio da análise de seus procedimentos. Tais ações se concretizam com propostas a serem desenvolvidas em grupo, pois o trabalho colaborativo direciona para discussões, considerações e reconsiderações das estratégias e dos erros. Ao propor a resolução das atividades presentes no livro, é importante formar duplas ou quartetos colaborativos.

Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)

Trazer para a sala de aula problematizações sobre temas vividos pelas pessoas em seu dia a dia e que influenciam suas vidas é uma forma de tratar dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), que são referidos na BNCC. Esses temas não se vinculam a uma determinada área ou disciplina escolar, pelo contrário, devem ser abordados por todas elas. Eles devem ser considerados como um conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos têm direito.

A importância desse trabalho é a possibilidade de transformar a escola em um espaço voltado para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades de todos em relação à sua vida pessoal, coletiva e ambiental. Esses temas são indicados por serem "aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional"[2].

Veja a seguir os temas propostos.



EDITORIA DE ARTE

(BRASIL, 2019, p. 13)

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 25 jul. 2020.

É preciso considerar as possibilidades de integração dos assuntos específicos de cada área com esses temas, pois eles têm um caráter social e político e são um caminho promissor para os estudantes reconhecerem suas reais possibilidades de ação sobre a realidade em que vivem. Ao mesmo tempo, essa integração pode contribuir muito para a valorização dos conhecimentos escolares. Além disso, essa abordagem é profundamente significativa para a construção da cidadania e para a participação ativa do estudante na vida em sociedade. Além da possibilidade do desenvolvimento das habilidades específicas da área, há um grande potencial para que atitudes e valores sejam colocados em discussão dentro da sala de aula.

Competências socioemocionais

A incorporação de atitudes e valores pelos estudantes está intimamente ligada ao desenvolvimento de competências socioemocionais. Tais competências são consideradas cruciais para a construção de um percurso escolar que promova a educação integral do estudante, preparando-o para sua vida futura.

Tais competências dizem respeito ao se relacionar com os outros e consigo mesmo, a compreender e gerir emoções, a estabelecer e atingir objetivos, a tomar decisões autônomas e responsáveis e a enfrentar situações adversas de maneira criativa e construtiva.

Estudos e discussões sobre quais estudantes se saem melhor em atividades escolares indicam aqueles que apresentam características como organização, persistência, resiliência, enfrentamento e resolução de conflitos com controle da frustração e da ansiedade, além de autoestima, confiança e criatividade. A partir dessas conclusões, torna-se, então, evidente que o desenvolvimento cognitivo do jovem não se dá de modo isolado do seu desenvolvimento socioemocional. Desse modo, as propostas do Novo Ensino Médio, com indicação de novos enfoques para o ensino, com sugestão de abordagens em que a aprendizagem colaborativa e a autonomia estejam presentes, estão apontando para um caminho promissor que conduz a uma educação mais abrangente.

De forma coerente com as políticas integradoras, essas transformações devem se manifestar em diferentes oportunidades de aprendizagem, tendo o professor um papel fundamental, tanto na criação de novas atividades quanto no planejamento e na condução das rotinas e ações que já têm lugar na escola. O professor, como mediador, pode integrar a esses momentos propostas em que os estudantes, distribuídos em duplas, trios ou quartetos, possam discutir e colaborar entre si na resolução de problemas.

Em trabalhos colaborativos, o objetivo não é a homogeneização do pensamento e do conhecimento dos sujeitos participantes. Deve-se rejeitar o autoritarismo e a condução pedagógica com motivação hierárquica. Ao contrário, a colaboração entre os pares tem como objetivo a reconstrução do conhecimento dos participantes. Para isso, é importante respeitar a individualidade de cada sujeito, seus recursos e seu ritmo pessoal. Esse tipo de trabalho permite que as pessoas nele envolvidas passem a reconhecer o que sabem, o que os outros sabem e o que todos não sabem, resultando na busca de superação dos limites de cada um e do grupo como um todo.

Para que esse tipo de interação ocorra nos grupos colaborativos é essencial que o professor determine quais serão os participantes não pela amizade ou proximidade de localização na sala, mas sim por características que possibilitem que todos tenham voz no grupo e sejam considerados como participantes necessários. Essa ação favorece o desenvolvimento da autoestima, confiança e criatividade, o que promoverá o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de fornecer as bases para a aceitação social.

A mediação do professor é o ponto-chave de todo esse processo por meio de suas intervenções, com a acolhida de diferentes pontos de vista e de discussões realizadas principalmente com perguntas que instiguem os estudantes a justificarem seu posicionamento e conclusões. As questões podem ser do tipo: *"Todos chegaram a essa conclusão ou alguém teve alguma consideração um pouco diferente dessa?"*; *"E se fosse de tal forma? Vocês pensaram nessa outra possibilidade?"*; *"Vocês levaram em consideração outros pontos de vista?"*; *"Apoiaram-se no que já estudamos antes a respeito desse assunto?"*; *"Que tal olharem também em outros livros e* sites *para dar maior respaldo ao que estão afirmando?"* etc.

> O ENSINO DA MATEMÁTICA

Pensar o ensino de Matemática exige pensar o que significa aprender Matemática. As perspectivas atuais de educadores matemáticos consagram que para **aprender** Matemática é preciso **fazer** Matemática.

Esse **fazer** significa se engajar em uma atividade que promova a observação e análise de dados e informações, o estabelecimento de conexões e relações, a criação de conjecturas, a identificação e expressão de regularidades, a busca de explicações, a criação de soluções, a invenção de estratégias próprias que envolvam noções, conceitos e procedimentos matemáticos, a validação de suas produções e a sua comunicação com seus pares.

Assim, **ensinar** Matemática é, para um professor, criar as condições que possibilitarão que os estudantes **façam** Matemática. Embora possa parecer que essa seja uma missão impossível, na verdade, trata-se de promover em sala de aula uma atitude investigativa por parte dos estudantes, possibilitando a eles mobilizarem sua intuição e conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem contribuir para aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes.

Chamar o estudante a agir como um matemático não implica obrigatoriamente em trabalhar com problemas muito difíceis. Ponte, Brocado e Oliveira (2003) destacam que, pelo contrário, investigar **significa trabalhar com questões que nos interpelam** e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes do que a própria solução.

A BNCC e o ensino de Matemática

No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com a BNCC, tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. O conceito de letramento matemático considerado pelo documento apoia-se naquele utilizado pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (Pisa). Assim, é

> [...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas [...] (BNCC, 2018, p. 266).

Nessa etapa da Educação Básica, há que se considerar que o desenvolvimento intelectual dos jovens permite maior capacidade de abstração e potencializa o pensar de modo rigoroso e criativo na resolução de problemas. Desse modo, para além da simples ampliação de conteúdo, é importante destacar a perspectiva integradora da Matemática, como uma organização que se estabelece em torno de temas, questões e problemas cuja finalidade de aprendizagem não é apenas saber os conteúdos matemáticos, mas saber usá-los como suporte para a realização de uma reflexão crítica. Pretende-se que, ao final do Ensino Médio, os estudantes tenham se apropriado de seu papel como cidadãos em um contexto social, político, cultural e econômico.

Tal posicionamento exige que a postura no trato com as propostas matemáticas escolares considere a busca de problemas fora da Matemática, de modo a proporcionar aos estudantes a consciência de que essa área do conhecimento se abre para muitas outras nas quais ela pode ser utilizada como uma ferramenta de compreensão e análise. Porém, é preciso destacar que a presença da Matemática nas diversas áreas do conhecimento não ocorre somente por meio dos registros fornecidos pelos fatos e fenômenos estudados, mas também pelo seu amplo conjunto de procedimentos para cálculo, análise, medição e estimativa dos fenômenos da realidade e de suas relações. Esse fato é o que traz a necessidade de também se trabalhar de modo cuidadoso a linguagem, definições e procedimentos matemáticos que darão suporte às resoluções dos problemas.

As competências específicas e as habilidades vinculadas à área de Matemática, apresentadas na BNCC, expressam esses aspectos conferindo a professores e estudantes maiores oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e também em outras áreas do conhecimento. A Matemática pode ser identificada na base de uma série de processos que organizam a vida contemporânea, ao mesmo tempo em que aponta os conhecimentos específicos a serem construídos, como pode ser visto no quadro a seguir.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT102)** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
Competência específica 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Competências específicas	Habilidades
	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
Competência específica 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. **(EM13MAT407)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. **(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Nesta Coleção, as oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento se dão em vários momentos como na **Abertura** de cada Capítulo, nas seções **Atividades resolvidas** e **Atividades**, bem como na seção **Conexões**, entre outras. Esses são os elementos que dão suporte ao professor para propor aos estudantes os trabalhos em grupos colaborativos em diferentes situações de investigação.

Metodologias ativas

Todos temos consciência de que a educação formal não acontece apenas no espaço físico da sala de aula e, atualmente, considerando as possibilidades de uso das tecnologias que promovem uma integração de diferentes espaços e tempos, esse fato se tornou mais evidente. Dessa forma, é necessário fornecer aos estudantes possibilidades de aprendizagem que rompam com sua atitude passiva e ultrapassem o espaço físico da sala de aula.

Se queremos que os estudantes sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (MORÁN, 2015).

Segundo Morán (2015), os estudantes devem ser mobilizados por meio de desafios e atividades bem planejadas e avaliadas por meio de acompanhamento do professor. Tais desafios contribuem para mobilizar competências intelectuais, emocionais, pessoais e de comunicação.

Ainda segundo o mesmo autor, as metodologias ativas são o ponto de partida para processos de reflexão, de integração cognitiva e de generalização. Desafios e atividades propostos devem ser do tipo investigativo que exigem aprender pela descoberta por meio de pesquisas, análise de situações, identificação de diferentes aspectos envolvidos, reconhecendo regularidades, fazendo escolhas e validando suas conclusões. As metodologias ativas mais aplicadas são a aprendizagem por projetos, por resolução de problemas, sala de aula invertida e rotação por estações.

Na **metodologia por projetos,** os estudantes são motivados a trabalhar de forma colaborativa em propostas interdisciplinares nas quais se abordam conceitos-chave dos objetos de conhecimento envolvidos. As aprendizagens são vinculadas a experiências e interesses deles, o que implica em um questionamento constante e na reconstrução de certezas. Os conteúdos surgem de acordo com o desenvolvimento da pesquisa e são explorados de modo mais profundo do que se tivessem sido determinados anteriormente. O ponto de partida deve ser a definição de uma questão central, que irá determinar o que investigar. A seguir, um conjunto de certezas provisórias e dúvidas temporárias estarão presentes ao longo da pesquisa, podendo também o professor prever a amplitude do projeto a partir dos conhecimentos prévios que os estudantes apresentam. A busca de informação na internet, em livros, revistas, entrevistas vai requerer a elaboração de registros importantes para o processo em desenvolvimento e para a socialização de ideias.

A **metodologia de resolução de problemas** propõe uma abordagem em que a construção do conhecimento se faz a partir de problemas geradores, propostos como ponto de partida para o ensino de conceitos e conteúdos matemáticos. O problema matemático é apresentado antes de se iniciar o conteúdo, e o estudante, ao resolvê-lo, construirá um conceito que ainda não conhece. Segundo Huanca e Onuchic (2011), pesquisadores citados por Melo e Justulin (2019), nessa metodologia "os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos". Eles indicam que as atividades podem ser organizadas em dez etapas:

(1) proposição do problema,
(2) leitura individual,
(3) leitura em conjunto,
(4) resolução do problema,
(5) observar e incentivar,
(6) registro das soluções na lousa,
(7) plenária,
(8) busca do consenso,
(9) formalização do conteúdo, e
(10) proposição e resolução de novos problemas.

Se surgirem dúvidas, o professor poderá auxiliar, porém as ações são exclusivamente dos estudantes; ele age como observador e incentivador, estimulando o trabalho em grupo, incentivando a reflexão e a troca de ideias entre eles. Depois de os grupos concluírem suas resoluções, um representante é convidado a registrar na lousa a sua resolução, esteja certa ou errada. Diante das respostas, os estudantes são convidados a refletir e discutir os diferentes métodos utilizados na solução. Depois desse momento, o professor busca, com toda a turma, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. Ao final das discussões, o professor formaliza o conteúdo matemático do qual emergiu o problema gerador, institucionaliza os conceitos, destaca diferentes formas operatórias e/ou demonstra propriedades específicas sobre o assunto. É importante que sejam propostos novos problemas relacionados ao conteúdo que foi formalizado, para a familiarização com o novo conhecimento e reconhecimento de sua aplicação a diferentes contextos.

A **sala de aula invertida** se caracteriza por inverter o ciclo típico das aulas, no qual o professor apresenta o conteúdo e este é aplicado. Nessa metodologia, os estudantes devem ter contato antecipado com o conhecimento necessário antes da aula, para que, no ambiente da sala de aula possam interagir de forma ativa para esclarecer, trabalhar e aplicar o conhecimento com o qual tiveram contato. Embora muitas pesquisas apontem resultados positivos sobre o emprego dessa metodologia, há também pesquisadores que apresentam críticas sobre ela. Segundo Valente (2014), citado por Honório (2016), alguns críticos destacam a dependência que esse modelo tem da tecnologia, o que pode criar um ambiente de aprendizagem desigual, tanto em termos do acesso à tecnologia quanto à motivação para os estudos independentes. Outra crítica é a de o estudante vir para a sala de aula sem se preparar e, com isso, não ter condições de acompanhar as discussões ou prejudicar as interações possíveis. No entanto, essas críticas são rebatidas, apoiadas justamente nessas interações entre os participantes do processo colaborativo, que tem como paradigma o predomínio da comunicação, da coordenação e da cooperação e, por isso, as aprendizagens podem ocorrer. Nesse modelo, o professor disponibiliza materiais, normalmente em ambiente virtual (videoaula, tutorial, textos e questões) de acordo com seu planejamento de trabalho e, na sala de aula, dará o *feedback* de modo a esclarecer dúvidas e corrigir erros, pois agora seu papel é amparar e não mais transmitir informações.

Na **metodologia de rotação por estações de aprendizagem**, os estudantes são divididos em pequenos grupos, que participarão de algumas estações de trabalho, sendo recomendado que, em pelo menos uma delas, a proposta envolva o uso de ambiente virtual. Essas estações podem estar alocadas em diferentes ambientes da escola. Os grupos executam um rodízio por essas estações, cada uma com uma atividade que se comunica com o objetivo central da aula. As estações precisam ser planejadas de forma que sejam independentes, sem exigência de algum pré-requisito ou exercício prévio, levando em consideração que cada grupo iniciará as atividades em uma estação diferente. Desse modo, o professor necessita ocupar-se de diferentes ações que cercam o planejamento das estações: definir quantas, quais serão e qual deve ser a quantidade de estudantes em cada estação; organizar o(s) espaço(s); delimitar o tempo necessário para cada estação e qual será o tempo limite para a mudança de estação de trabalho; pensar nos recursos didáticos necessários para cada estação. As propostas em cada estação podem variar abrangendo tarefas de leitura, escrita, produção, discussão, exercícios, atividades em plataformas virtuais, atividades envolvendo aplicativos e recursos tecnológicos, podendo, por exemplo, haver uma estação com o professor, uma na qual se realizem atividades individualizadas e uma com computadores para o desenvolvimento da atividade *on-line*.

A escolha de qual metodologia utilizar e para qual ou quais assuntos elas poderão ser aplicadas cabe ao professor. O livro didático não determina o emprego de uma ou outra metodologia, ele apenas oferece suporte para a estruturação e desenvolvimento dos objetos de conhecimento matemático a serem explorados e sistematizados pelos estudantes do Ensino Médio.

Atividades investigativas precisam estar presentes em qualquer das metodologias ativas que se queira aplicar em sala de aula, sejam elas de resolução de problemas, baseadas em projetos, sala de aula invertida, rodízio por estações etc.

Para exemplificar como utilizar os recursos fornecidos pelo livro didático para a elaboração e o desenvolvimento de propostas de atividades investigativas, vamos considerar o trecho da introdução de um capítulo desta Coleção que propõe o estudo de função quadrática:

> Situações envolvendo trajetórias parabólicas, como lançamentos de projéteis, podem ser modeladas por meio de funções quadráticas, assim como certos tipos de movimentos estudados pela Física. Além disso, alguns objetos, como antenas parabólicas e faróis de veículos, são construídos utilizando propriedades da parábola, a curva que representa o gráfico de funções quadráticas.

Nesse parágrafo, podemos destacar os seguintes temas que podem gerar investigações a serem realizadas:

- lançamento de projéteis;
- movimentos em Física;
- construção de antenas parabólicas e faróis.

Considerando que, no Ensino Fundamental, os estudantes já podem ter tido contato com as funções quadráticas, como expresso pelas habilidades:

> (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
>
> [...]
>
> (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
>
> (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau (BNCC, 2018, p. 313-317).

Uma proposta investigativa envolvendo esse tema – funções quadráticas – é essencial para a consolidação da aprendizagem construída, ampliação dos conhecimentos e identificação das possibilidades de sua aplicação em diferentes contextos, como propõe a BNCC.

Partindo, então, desses pressupostos é possível elaborar um planejamento para a efetivação de uma atividade investigativa. As competências e habilidades, cujo desenvolvimento será promovido, estão listadas no início do Capítulo e são elas que balizarão a sua mediação, dando suporte às suas intervenções no desenrolar do trabalho realizado pelos estudantes. Porém, em atividades investigativas, os estudantes percorrem diferentes caminhos e, levando em consideração que farão explorações sobre a função quadrática, certamente outras habilidades poderão ser mobilizadas, consolidadas ou desenvolvidas, como as que são referentes a números e grandezas e medidas. Analise quais foram os caminhos percorridos pelos estudantes para destacar também as habilidades desses objetos de conhecimento.

O ponto de partida consiste em mobilizar a turma para a realização da atividade investigativa, nesse caso específico, a partir da proposta da leitura do texto inicial do Capítulo 3 deste Volume e sua introdução, e do seguinte questionamento:

- Vocês conseguem imaginar como e por que situações como o lançamento de projéteis, movimentos estudados pela Física, e a construção de antenas parabólicas e faróis estão ligados às funções quadráticas?

As respostas dos estudantes já fornecem dados para o levantamento inicial do conhecimento prévio que eles têm sobre o assunto. Outras questões podem ser propostas:

- Será que essas são as únicas situações em que essas funções se aplicam?

Essas são as questões que vamos tentar responder, mas vamos nos dividir em grupos de modo que cada um vá em busca de algumas respostas, para, ao final, juntarmos as partes para uma conclusão geral da classe.

A formação dos grupos para atividades investigativas, como já destacado anteriormente, é determinada pelo professor, levando em conta as possibilidades de participação e contribuição de cada um no grupo. Deve-se procurar evitar formações nas quais alguns estudantes fazem e outros esperam as respostas, além de buscar a constituição de grupos colaborativos de até quatro integrantes. Essa montagem pode ser feita quando da apresentação da proposta à classe.

Feita a organização dos grupos, apresentar a todos as partes das questões iniciais a serem respondidas, para que cada grupo decida sobre qual questão trabalhará, porém verificar que todas sejam respondidas pela turma.

- Por que o lançamento de projéteis está ligado às funções quadráticas e como elas se aplicam?
- Quais dos movimentos estudados pela Física são modelados pela função quadrática? Como usá-la para resolver problemas de Física?
- O que a construção de antenas parabólicas e faróis tem a ver com as funções quadráticas? Como empregá-las nessas construções?
- Há outras aplicações da função quadrática nas diversas áreas de conhecimento? Quais são e como são aplicadas?

Como fonte de consulta, os estudantes poderão utilizar os próprios livros didáticos de todas as áreas, outros livros da biblioteca da escola e a internet. No caso do livro de Matemática, eles poderão apoiar-se nas atividades resolvidas e apresentar exemplos de aplicação retirados das demais atividades. Durante todo o processo, eles devem documentar suas descobertas, tanto por meio de relatórios, como por fotos e/ou vídeos de modo que, quando encerrarem as investigações, possam compilar essa documentação para a apresentação à classe. Se achar interessante, pode também sugerir que façam registros em seu portfólio.

O acompanhamento dos trabalhos dos estudantes e a intervenção do professor em cada grupo é essencial para conhecer as dificuldades presentes com objetivo de atuar sobre elas. É, também, por esse acompanhamento que será possível perceber se há alguma dificuldade comum a todos na sala, o que pode requerer uma abertura da discussão com todos os grupos.

Atividades desse tipo demandam mais do que uma aula para serem realizadas, sendo o professor, pelo seu acompanhamento das discussões e preparação dos estudantes para a apresentação de suas descobertas à classe, quem determinará o momento em que as equipes devem encerrar esta etapa de trabalho.

Em seguida, cada grupo deve apresentar à sala suas descobertas, validando-as com argumentações consistentes. Pesquisas indicam que ao ser solicitado a explicar, elaborar ou defender seu posicionamento perante outros, o indivíduo constrói para si uma maior estrutura de compreensão sobre o que está abordando. Dessa forma, cabe ao professor incentivar essa prática ao comentar e explicitar os raciocínios desenvolvidos usando, essencialmente, três fases dos processos argumentativos: a **formulação de ideias**, a **explicação e justificação dos procedimentos** e os **algoritmos utilizados**. Para orientar o suporte que deve ser dado aos estudantes para a constituição de seus processos argumentativos e para a observação pelo professor do desenvolvimento desse processo, foi criado, por pesquisadores[3], o quadro a seguir.

> **Quadro 1:** Avaliação da Argumentação Científica dentro da Sala de Aula (AACS)

Aspectos conceituais e cognitivos	Aspectos epistêmicos	Aspectos sociais
1. A conversa centrou-se na geração ou validação de alegações ou explicações.	**8.** Os participantes invocaram as "ferramentas da retórica" para apoiar ou contestar ideias.	**15.** Os participantes foram reflexivos sobre *o que* e *como* conhecem.
2. Os participantes procuram e discutem conclusões e explicações alternativas.	**9.** Os participantes usaram evidências para apoiar e desafiar as ideias ou dar sentido ao fenômeno sob investigação.	**16.** Os participantes respeitam o que o outro tem a dizer.
3. Os participantes modificaram sua conclusão ou explicação quando notaram uma inconsistência ou descobriram informações anômalas.	**10.** Os participantes examinaram a relevância, a coerência e a suficiência das provas.	**17.** Os participantes discutiram uma ideia quando ela foi introduzida na conversa.
4. Os participantes estavam céticos sobre ideias e informações.	**11.** Os participantes avaliaram a forma como os dados disponíveis foram interpretados ou o método usado para coletar os dados.	**18.** Os participantes encorajaram ou convidam outros para compartilhar ou criticar ideias.
5. Os participantes forneceram razões enquanto apoiavam ou contestavam uma ideia.	**12.** Os participantes usaram as teorias científicas, leis ou modelos para apoiar e desafiar ideias ou para ajudar a atribuir sentido ao fenômeno sob investigação.	**19.** Os participantes reafirmam ou sumarizam comentários e perguntavam uns aos outros para esclarecer ou detalhar seus comentários.
6. Os participantes basearam as suas decisões ou ideias sobre estratégias de raciocínio inadequadas.	**13.** Os participantes fizeram distinções e conexões entre inferências e observações explícitas por outros.	
7. Os participantes tentaram avaliar os méritos de cada explicação ou alegação alternativa de forma sistemática.	**14.** Os participantes usam a linguagem científica para comunicar ideias.	

3 Ferramenta denominada Assessment of Scientific Argumentation in the Classroom (ASAC) criada por SAMPSON, V. *et al.*, 2012, *apud* CARMO, A. B. **Argumentação matemática em aulas investigativas de física**. USP, 2015. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-12052015-135710/publico/ALEX_BELLUCCO_DO_CARMO.pdf. Acesso em: 1º jul. 2020.

Após cada apresentação, o professor faz sua validação e complementa, se necessário, a justificativa final. Terminada a apresentação de todos os grupos, as perguntas iniciais devem ser retomadas e a classe deve ser questionada no sentido de avaliar se o conjunto das apresentações foi suficiente para respondê-las, solicitando, então, a todos a elaboração de uma síntese do que foi exposto, que pode ser tomado como mais um instrumento de avaliação.

A partir daí, todos poderão passar à resolução das atividades propostas no livro e indicadas pelo professor, para que ocorra a familiarização do conhecimento construído durante a vivência da atividade investigativa. Para resolver essas atividades, podem ser formados outros grupos, porém sempre grupos colaborativos, e os problemas propostos devem abordar diferentes contextos e diferentes aplicações, tanto externas à Matemática como internas a ela.

O exemplo de atividade investigativa sobre funções quadráticas, descrito anteriormente, pode ser adaptado para os diferentes conteúdos de cada um dos Volumes. Em todos os Capítulos, existe a possibilidade de criar esse tipo de atividade a partir da abertura, da introdução, ou de outras seções que sempre propõem elementos interessantes, tendo como suporte o próprio livro didático.

O papel do professor

Aulas de investigação podem representar um desafio à prática do professor, pois elas demandam um equilíbrio entre garantir que o trabalho dos estudantes ocorra e seja significativo do ponto de vista do conhecimento matemático e conceder a eles a autonomia necessária para possibilitar a autoria da investigação.

Considerando esse equilíbrio, o professor precisa interagir com os estudantes para estar ciente de suas necessidades e características particulares, sem perder de vista os aspectos gerais da gestão da situação didática. Desse modo, o professor é levado a desempenhar diversos papéis no decorrer de uma atividade de investigação.

Criar o cenário e desafiar os estudantes: O sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula, de modo que o estudante se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para pensar, colocar questões, explorar suas ideias e exprimi-las. Dependendo da situação proposta, é preciso disponibilizar aos estudantes materiais diversos para manipulação ou consulta, sendo o livro didático o ponto de partida essencial para as suas buscas e pesquisas.

Ao propor uma atividade, é fundamental garantir que todos os estudantes entendam o sentido da tarefa proposta, aquilo que se espera deles no decurso da aula, levando-os a compreenderem o que significa investigar e aprender a fazê-lo. A proposta inicial da tarefa não pode ser demasiadamente pormenorizada sobre o que é para ser feito, uma vez que a interpretação pelo estudante sobre o que se propõe é um dos objetivos dessas aulas, esperando-se que ele evolua para realizá-la autonomamente.

O professor precisa dar uma atenção especial à própria tarefa docente, escolhendo questões ou situações iniciais e no decorrer da atividade que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos estudantes.

Acompanhar o progresso dos estudantes: Uma vez que os estudantes já estejam em processo de investigação, cabe ao professor manter uma posição de retaguarda, procurando compreender como eles estão pensando, fazendo algumas questões ou solicitando explicações.

É um desafio para o professor perceber aonde os estudantes querem chegar, uma vez que ele pode não ter acompanhado todo o processo de discussão dentro do grupo. Aqui o professor deve considerar que os estudantes podem ainda não ter os registros organizados e sua comunicação matemática oral é limitada e contém erros, precisando, assim, se esforçar para compreendê-los e evitando corrigir cada afirmação ou conceito matemático apresentado de forma imprecisa.

Acompanhar o progresso dos estudantes possibilita ao professor sinalizar que eles podem continuar por estarem indo na direção correta ou intervir, de acordo com a necessidade do grupo, ou ainda fornecendo apoio mais direto para influenciar positivamente o trabalho deles.

A avaliação do desenvolvimento dos estudantes durante a atividade pode também levar o professor a decidir por conceder mais tempo para a investigação, ou a fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma, ou passar à discussão final.

Apoiar o trabalho dos estudantes: Na condução da aula, o apoio a ser dado precisa estar pautado na manutenção dos aspectos característicos do processo investigativo. Assim, a intervenção do professor pode assumir várias formas como colocar questões, fornecer ou recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão por parte dos estudantes.

A postura interrogativa é a que o professor deve privilegiar e suas questões podem ter diferentes intenções, como a de esclarecer ideias, suas e dos jovens, refazer uma questão proposta por um estudante para que ele pense melhor sobre a sua dúvida, ou a de transformar uma questão em uma sugestão orientadora para a atividade.

Essa postura tem, também, a função de ajudar os estudantes a compreender que o papel principal do professor é apoiá-los em seu trabalho e não simplesmente dizer se estão certos ou não, o que, aliás, deve ocorrer cada vez menos nessas aulas.

Em alguns momentos, a atividade investigativa pode sofrer bloqueio porque os estudantes não compreendem certos conceitos ou representações importantes para a sua continuidade. A intervenção do professor nesses momentos precisa ser a de fornecer ou recordar conceitos anteriormente estudados para que os estudantes possam dar continuidade a sua tarefa.

Outra prática importante por parte do professor é a de promover a reflexão dos estudantes sobre o trabalho realizado e ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram.

Raciocinar matematicamente: Em atividades de investigação, é natural que os estudantes apresentem questões ou conjecturas que o professor não havia pensado antes. É preciso avaliar rapidamente se será apropriado parar para pensar junto com os estudantes ou deixar para um momento posterior.

Construir o raciocínio matemático junto com os estudantes pode ser interessante, pois é uma oportunidade de acompanharem o desenvolvimento da ideia, enquanto o professor pensa em voz alta, colocando a questão debatida em termos matemáticos e buscando a sua justificativa.

Tudo o que foi exposto até este ponto deixa claro que em toda atividade de investigação devem ser dados um tempo e uma oportunidade aos estudantes para que possam organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los para os colegas e para o professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Desse modo, será possível a todos reconhecer o valor dos processos matemáticos, adquirir confiança em sua capacidade de fazer Matemática e, finalmente, tornar-se aptos a resolver problemas.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas a serem propostas se restrinjam apenas às investigativas. Depois de propor problemas de investigação, o professor deve abordar problemas de familiarização com o novo conhecimento apresentando diferentes domínios matemáticos e contextos.

Os contextos podem variar entre propostas envolvendo aspectos da história da Matemática, explorações de situações envolvendo a Etnomatemática, e, como os jovens estão conectados o tempo todo – inclusive durante as aulas –, atividades envolvendo as Tecnologias da Informação e Comunicação são potencialmente ricas nesse processo.

Pensamento computacional

O desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado no Ensino Fundamental, pode ser aprofundado nesta etapa da escolaridade. A BNCC aponta que esse tipo de pensamento

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (BNCC, 2018, p. 474).

Desse modo, ele pode ser entendido como um processo de formulação e resolução de problemas cujas soluções são representadas por meio de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente. Esse processo envolve ações de pensamento que tratam da decomposição do problema em etapas, do reconhecimento de padrões e suas repetições, da abstração e generalização que permite a construção de algoritmos e, por fim, da avaliação da solução.

Para auxiliar os estudantes a desenvolver seu pensamento computacional, é necessário orientá-los para que empreguem estas quatro ações no momento da resolução de problemas:

- **ponto de partida**: decomposição do problema em partes, dividindo-o em problemas menores e mais fáceis de manejar. Tal ação, além de tornar todo o processo de solução mais explícito, facilita a detecção de erros pelo caminho.
- **reconhecimento de padrões**: essa ação é composta de dois momentos, um primeiro em que se deve buscar características e/ou propriedades que sejam comuns às várias partes do problema decomposto e que podem ser replicadas em cada uma delas. No segundo momento, deve ocorrer uma busca de soluções já utilizadas anteriormente que possam ser empregadas no problema atual, mesmo que com adaptações. Esse segundo momento é o passo necessário para a próxima ação.
- **abstração e generalização**: trata-se de identificar, em uma situação, quais elementos não são relevantes reduzindo, assim, o foco de atenção aos detalhes substanciais para a resolução do problema. Nesse movimento, é possível detectar características/propriedades comuns a um conjunto de dados e identificar, por generalização, quais procedimentos ou algoritmos poderão ser adotados e, por fim, escrever o algoritmo. Reconhecer tipos de estruturas que podem ser reaplicadas faz os problemas se tornarem mais simples.
- **avaliação**: ela ocorre a todo momento, desde que se toma conhecimento sobre o problema a resolver até se chegar ao algoritmo que o resolve. É necessário que, em cada uma das ações, aspectos como eficácia, consumo de recursos, rapidez, facilidade, abrangência da solução, entre outros sejam analisados para que se tenha, ao final, um resultado mais robusto e confiável. Outra característica da avaliação é a de manter controle sobre as necessidades e propósitos das estratégias adotadas para prevenir que pequenos erros de percurso não se tornem grandes complicações ao final.

Muitos dos problemas discutidos em sala de aula podem ser analisados sob esse ponto de vista, sendo recomendado propor aos estudantes que representem as soluções por meio de fluxogramas que descrevam o processo de solução ou que realizem descrições orais e/ou escritas do passo a passo de suas resoluções.

Por outro lado, é também necessário que, no planejamento de sequências de trabalho e de ações pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula, sejam consideradas as descobertas recentes, as novas tecnologias e a sua influência no conhecimento científico. Nesse contexto, destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos para o ensino e a aprendizagem matemática. Essas explorações devem, na medida do possível, ser feitas também por meio de atividades investigativas. Nesta Coleção, a seção

Explorando a tecnologia, presente em todos os Volumes, relaciona explorações matemáticas a *softwares* específicos, que atendem ao proposto na BNCC referente à cultura digital

> [...] fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica (BNCC, 2018, p. 474).

Os *softwares* explorados na Coleção são o **GeoGebra**, o **LibreOffice** e o **Scratch**, todos eles gratuitos e com facilidade de acesso *on-line*.

O **GeoGebra** é um *software* específico de Matemática voltado para o estudo de Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Ele é conhecido como um *software* de matemática dinâmica por proporcionar movimentações e modificações do objeto matemático construído, permitindo, assim, o desenvolvimento de processos investigativos nas diferentes frentes estudadas, graças à interconexão que possui entre geometria, álgebra e planilha de cálculo. Em todos os Capítulos em que se propõe sua utilização, há uma sugestão de uso com suporte para a exploração pelos estudantes.

O **LibreOffice** também é apresentado nesta Coleção como um recurso gratuito para o uso de planilhas eletrônicas, editor de fórmulas matemáticas e gráficos, além de textos e apresentações. Nos Capítulos em que seu uso é sugerido, há indicações de possibilidades de exploração pelos estudantes, cabendo ao professor mobilizar os processos investigativos por meio de questões que os incentivem a realizar ações de busca para a aprendizagem esperada.

O **Scratch** é um *software* voltado para a programação de animações ou jogos, utilizando imagens e sons disponíveis. Essa programação é feita a partir de blocos com os comandos básicos para a movimentação pretendida do personagem em cena. Seu uso em sala de aula é favorecido por ser extremamente intuitivo e visual com manipulação simples de suas estruturas e construção dos comandos. Esse recurso dá respaldo ao trabalho do desenvolvimento do pensamento computacional, pois favorece a capacidade analítica de antecipação da ação que se espera do personagem, montada por meio de blocos preestabelecidos, passíveis de serem encaixados uns com os outros de acordo com a lógica desejada. Sua aplicação também tem caráter investigativo, uma vez que os resultados podem ser imediatamente testados e observados na tela, de modo a permitir a análise do erro e sua correção a cada etapa construída.

> AVALIAÇÃO

Diante de diferentes propostas metodológicas que podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula, é preciso considerar que apenas os processos tradicionais de avaliação não são suficientes para revelar a qualidade das aprendizagens reais dos estudantes e para fornecer essa informação a todos que dela vão fazer uso – gestores, professores, estudantes.

A avaliação é base para tomadas de decisão e, por isso, deve ser considerada como uma ação que está sempre a serviço de desvelar a qualidade da realidade. De acordo com Luckesi (2016), precisamos “ter clareza de que nossos atos avaliativos sempre operam com um único algoritmo metodológico, que se resume em coletar dados da realidade e qualificá-la tendo por base um padrão de qualidade”.

Coletar dados da realidade significa considerar a educação integral do estudante, isto é, observá-lo não somente do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo, mas também de seu aprimoramento socioemocional, como apontado pela BNCC.

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades (BNCC, 2018, p. 14).

Note que esse parágrafo traz elementos substanciais para a construção de uma pauta de observação para se realizar uma avaliação que de fato possa qualificar a realidade da aprendizagem desenvolvida. Essa pauta de observação deve ser feita pelo professor durante a elaboração de seu planejamento e deve estar sempre presente no decorrer de todo o processo vivido pelo estudante, o que caracteriza uma avaliação processual. Cabe aqui ressaltar que esse processo avaliativo não descarta a verificação das aprendizagens específicas de cada objeto de conhecimento trabalhado, que, normalmente, estão presentes nas avaliações externas como Saeb, Enem, vestibulares, que também são abordadas nos Volumes desta Coleção.

Embora para cada um dos componentes curriculares seja preciso eleger as habilidades específicas, uma pauta de observação pode ter a seguinte configuração:

Aplicar conhecimentos para resolver problemas			
Habilidades específicas	**Qualidade**		
Identificar uma ...			
Realizar transformações entre ...			
Realizar cálculos envolvendo números...			
Determinar ... e reconhecer que ...			
Resolver problemas que envolvam ... validando estratégias e resultados			
Identificar regularidades e padrões em ...			
Identificar e utilizar diferentes formas e propriedades ...			
Reconhecer que os valores obtidos são ...			
Construir argumentos consistentes para explicar ...			
Analisar os elementos obtidos e produzir a comunicação de suas conclusões a serem apresentadas tanto oralmente como por escrito.			
Habilidades socioemocionais			
Utilizar as informações disponíveis de modo ético.			
Atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais.			
Ter autonomia para tomar decisões.			
Ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções.			
Conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.			

No registro da qualidade observada, pode-se dar valores, por exemplo, de 0 a 2:

- 0 – a ser desenvolvida, requer investimento do professor e do estudante.
- 1 – em desenvolvimento, apresenta instabilidade e requer intervenções de suporte por parte do professor.
- 2 – desenvolvida e consolidada.

Essa pauta de observação deve ser ainda apoiada pelo quadro de acompanhamento da construção dos processos argumentativos pelos estudantes.

Outro aspecto da avaliação a ser tratado é o da autoavaliação, que contribui para estimular o estudante a tomar consciência de seu próprio percurso de aprendizagem e se responsabilizar pelo seu empenho em avançar.

Nessa perspectiva, entende-se que a autoavaliação é um componente importante ao ser utilizada como um instrumento da avaliação formativa, pois auxilia os estudantes a adquirirem uma capacidade cada vez maior de analisar suas próprias responsabilidades, atitudes, comportamento, pontos fortes e fracos, sua condição de aprendizagem e suas necessidades para atingir os objetivos. Com o exercício constante da autoavaliação, os estudantes serão capazes de desenvolver sentimentos de responsabilidade pessoal e de apreciação da força dos empenhos individuais e de grupo. Além disso, aprendem a encarar prontamente as capacidades em várias empreitadas e a afinar suas potencialidades e contribuições, além de desenvolver a capacidade de análise contínua na qual leva em conta o que já aprendeu, o que ainda não aprendeu, os aspectos facilitadores e os dificultadores do seu trabalho, conseguindo planejar suas ações. Além disso, a autoavaliação também incentiva os jovens a pensar sobre si mesmos e os conduz a uma modalidade de apreciação que se pratica durante a vida inteira e os ajuda a avançar em sua autonomia.

A autoavaliação também deve ser orientada pelo professor por meio de questões que estimulem os estudantes a refletir sobre suas ações durante a realização das atividades. No quadro a seguir, há exemplos de questões para esse fim.

AUTOAVALIAÇÃO	
1.	Entre os assuntos abordados, qual você considerou mais interessante? E o menos interessante? Explique suas escolhas.
2.	Comparando o trabalho de seu grupo com os dos outros, como você avalia a produção de vocês?
3.	Considerando a avaliação feita anteriormente, você acha que a produção do seu grupo poderia ter sido melhor? Em qual(is) aspecto(s)?
4.	Como você avalia a participação de cada um dos integrantes de seu grupo para a realização do trabalho? Como você se classifica dentro do seu grupo de trabalho: colaborativo(a), proativo(a), coordenador(a), inovador(a), organizador(a)?
5.	As discordâncias entre você e seus colegas de grupo ocorreram de modo a chegarem a um consenso, com respeito pelas ideias do outro e a construção de argumentação consistente, proposta com cordialidade? Dê um exemplo.
6.	Você e seu grupo criaram estratégias para evitar distrações e manter a concentração, o esforço e a motivação durante a realização das tarefas? Dê um exemplo.
7.	Durante as apresentações dos vários grupos, você se manteve envolvido e participante das discussões? O que você aprendeu que não sabia?
8.	Quais conhecimentos matemáticos você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
9.	Quais conhecimentos de outras áreas você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
10.	Em que medida a seção **Para refletir** contribuiu para a análise de sua aprendizagem em cada um dos Capítulos que compuseram os temas desse período?

Volumes da obra

Esta Coleção é formada por seis Volumes, sendo cada um constituído por um conjunto de objetos de conhecimento que estão integrados dentro da própria Matemática. Além disso, apresentam também situações cuja contextualização evidencia os modelos matemáticos que representam fatos e fenômenos de outras áreas de conhecimento e presentes no cotidiano.

Tal estruturação pode ser observada em todos os Volumes da Coleção, uma vez que essas integrações são destacadas em várias das seções que compõem os Capítulos – **Abertura**, **Conexões**, **História da Matemática**, além de destaques sobre alguns aspectos do conhecimento matemático, que embasam reflexões sobre temas transversais e aspectos curiosos de sua presença na vida e no desenvolvimento humano, apontados nos boxes **Fórum**, **Saiba que...** e **Pense e responda**.

Essa estruturação permite que os Volumes possam ser utilizados nas diferentes séries do Ensino Médio, de acordo com a proposta curricular que embasa o planejamento do professor e da sua escola, e com a distribuição da carga horária destinada à formação geral e aos itinerários formativos.

Outro aspecto a ser destacado é que como o mais indicado ao desenvolvimento das propostas é que sejam feitas de modo investigativo, não se considera como requisito de trabalho o conhecimento prévio dos estudantes. Consideramos que se não houver por parte dos estudantes algum conhecimento necessário para o desenvolvimento da atividade proposta, essa ausência de conhecimento passa também a ser um aspecto da investigação. Essa condição é também significativa para a flexibilidade de uso dos livros que compõem esta Coleção. O professor, ao diagnosticar a ausência de estabilidade no emprego de algum conhecimento requerido na situação proposta, deve indicar aos estudantes a necessidade de buscar apoio em outros materiais disponíveis ou na internet e em aplicativos.

> ESTRUTURA DA OBRA

Esta obra foi elaborada tendo em vista atender à BNCC, contemplando propostas de trabalho que promovam o desenvolvimento das competências gerais, específicas e habilidades presentes nesse documento, sem, no entanto, deixar de lado suas características essenciais de atendimento às expectativas de professores e estudantes do Ensino Médio.

Cada um dos livros que compõem esta Coleção está estruturado com seções e boxes que possibilitam ao professor uma exploração mais dinâmica do material, podendo indicar aos estudantes por qual das propostas iniciar o trabalho.

A **Abertura** de Capítulo sempre apresenta uma contextualização interessante de aplicação do conteúdo que será abordado. Considerando a diversidade possível de uso dos conteúdos matemáticos, ora são apresentadas situações atuais, da história da Matemática, ora sobre alguma profissão, porém sempre tendo em vista o estabelecimento de uma relação entre o que está sendo apresentado e os conteúdos a serem desenvolvidos no Capítulo. O professor poderá usá-la para um levantamento diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já possuem sobre o conteúdo a ser desenvolvido. Além disso, estão também indicadas as habilidades e competências que os assuntos abordados no Capítulo possibilitam desenvolver.

A seção **Atividades resolvidas** tem por princípio a apresentação de uma forma organizada de resolução e de emprego da linguagem matemática. Um aspecto dessa seção a ser considerado e analisado, tanto pelos professores como pelos estudantes, é que há situações nas quais diferentes caminhos são discutidos para se chegar à solução de uma questão, buscando destacar o fato de que não há um único modo de resolução em Matemática e que os estudantes têm liberdade de criar estratégias próprias de resolução.

Com as **Atividades**, busca-se a familiarização dos estudantes com os conteúdos estudados no Capítulo, tanto com problemas envolvendo diferentes contextos do dia a dia como com questões específicas para a sistematização de procedimentos necessários para utilização em diferentes situações. Estão presentes nessa seção questões do Enem ou de vestibulares de instituições de Ensino Superior de todas as regiões do país e outras elaboradas pelos autores para que os estudantes tenham maiores oportunidades de desenvolvimento das competências e habilidades desenvolvidas em cada Capítulo.

A seção **Conexões** explora temas diversos, com foco na interdisciplinaridade, com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes. A seção apresenta um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, explorando gráficos, infográficos, tabelas etc. que se conectam com o conteúdo tratado no Capítulo. As questões apresentadas nessa seção são principalmente voltadas a atividades investigativas a serem realizadas em duplas ou grupos colaborativos e vão exigir processos reflexivos e/ou tomadas de decisão sobre intervenções na comunidade. Outro aspecto importante dessa seção é o fato de em muitas propostas os estudantes serem convidados a apresentar suas produções aos colegas e ao professor, o que possibilita o desenvolvimento de sua comunicação matemática.

A seção **História da Matemática** aborda fatos históricos ligados à Matemática, a fim de contextualizar o conteúdo abordado no Capítulo e/ou apresentar o desenvolvimento e a evolução de determinada ideia ou teoria, ao longo do tempo. A abordagem histórica é sempre um modo interessante de motivar os estudantes para as possibilidades de criação em Matemática e para destacar aspectos referentes à observação, análise e percepção de regularidades que estão por trás dessas descobertas.

Explorando a tecnologia é uma seção que promove o desenvolvimento e/ou aprofundamento de conhecimentos matemáticos, por meio de explorações de *softwares* livres, propiciando um trabalho interativo com alternativas para investigar possibilidades de resolução e de análise de consequências em uma representação ao se fazer modificações em outra, por exemplo. Para essas discussões, há orientações iniciais de como utilizar o *software* indicado para cada situação, além de indicação de endereço para a realização do *download* e orientações para sua instalação. O pensamento computacional também poderá ser desenvolvido por meio de atividades chamadas de *desplugadas*, por não dependerem de uso do computador, e que colocam em evidência o emprego da lógica de programação.

A seção **Atividades complementares** tem por objetivo apresentar questões do tipo múltipla escolha presentes em exames oficiais como Enem, olimpíadas nacionais e vestibulares realizados em todas as regiões brasileiras, priorizando os mais recentes. Sua presença no livro e as possíveis discussões a serem realizadas pelos professores a partir deles apontam para a necessidade da sistematização de alguns aspectos e procedimentos abordados no Capítulo.

Com a seção **Para refletir,** os estudantes são estimulados a realizar reflexões para identificar possíveis conexões com o que foi estudado no Capítulo e avaliar sua aprendizagem com as ações desenvolvidas no decorrer do trabalho. São ótimas oportunidades para a realização da autoavaliação pelos estudantes.

Além das seções, os Volumes apresentam também boxes que enriquecem as propostas apresentadas e ampliam as possibilidades de os estudantes desenvolverem as competências gerais da BNCC.

No boxe **Fórum** é apresentada uma situação referente a um tema contemporâneo, que possui alguma relação com o conteúdo abordado no Capítulo, seguido de algumas questões, com o intuito de promover debates e/ou trocas e compartilhamento de conhecimentos. Tais ações exigem a mobilização de estratégias de debate e de construção de argumentação coerente para defesa de seu ponto de vista. Além disso, há a possibilidade de ser utilizado em momentos *on-line* por meio de grupos fechados de discussão em *e-mail*, rede social ou aplicativos de troca de mensagens.

O **Pense e responda** é um boxe que traz perguntas curtas e diretas sobre propostas a serem investigadas pelos estudantes, incentivando-os a elaborar hipóteses e buscar sua comprovação ou negação.

O boxe **Saiba que...** tem como função principal fornecer uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo. Pode ser referente à teoria apresentada, a uma determinada forma de resolução de um problema ou, ainda, para implementar o conteúdo apresentado.

Nos boxes **Para ler**, **Para assistir**, **Para acessar** e **Para ouvir**, como o próprio nome indica, são fornecidas sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. Sua finalidade é a de fornecer um canal confiável com informações complementares a respeito do tópico que está em estudo.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA E COMENTADA

BONOMI, M. C.; LAURO, M. M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.

- Aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.

BOYER, C. **História da Matemática**. 4. ed. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

- O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília, DF: Presidência da República, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1 000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conhecida como o Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, habilidades e aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 14 ago. 2020.

- As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2ª ed. Brasília, DF, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento explicativo sobre os Temas Contemporâneos Transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, J.; CARRANO, P.; MAIA, C. L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARDOSO, M. C.; HORA, D. M. **Competências e habilidades**: alguns desafios para a formação de professores. Disponível em: http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada11/artigos/7/artigo_simposio_7_713_micheli_ccardoso@yahoo.com.br.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Texto sobre a formação de professores frente às novas demandas educativas no mundo contemporâneo.

CARVALHO, J. P. de. Um problema de Fibonacci. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 17. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta uma explicação sobre a história de Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. Campos dos Goytacazes: UENF, 2016.

- O material explora a utilização do *software* **GeoGebra** e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Reflexões sobre o trabalho colaborativo e seu uso em sala de aula.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

- O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática cronologicamente.

FAJARDO, R. A. S. **Teoria dos Conjuntos**. IME-USP. São Paulo, 2017. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Texto produzido para estudantes do curso de graduação, disciplina de Teoria dos Conjuntos. Nele o assunto é abordado de forma acadêmica, possibilitando o aprimoramento do estudo por parte do professor.

HONÓRIO, H. L. G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática – estudos iniciais. *In*: EBRAPEM, XX. **Artigo** [...]. Paraná, 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Reflexões sobre a metodologia ativa de sala de aula invertida a partir de sua aplicação prática.

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.

- Livro que aborda os conceitos de conjuntos, números e funções.

LUCKESI, C. **Tipificação da avaliação em educação**: uma questão epistemológica. Artigo 109, 2016. Disponível em: http://luckesi.blogspot.com.br/. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Nesse artigo, há discussões sobre as adjetivações aplicadas ao ato de avaliar, discutindo como são colocadas de acordo com os momentos de sua execução.

MELO, M. C. P.; JUSTULIN, A. M. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: Encontro Paranaense de Educação Matemática, XV. **Anais** [...]. Londrina, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresentação teórica e prática da metodologia ativa de resolução de problemas.

MONTEIRO, M. S.; CERRI, C. **História dos números complexos**. São Paulo: CAEM – IME-USP, 2011. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

MORÁN, J. **Mudando a educação com metodologias ativas**. Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. vol. II. Carlos Alberto de Souza e Ofélia Elisa Torres Morales (Org.). PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: https://www.uniavan.edu.br/uploads/arquivo/N62vWDM7yb.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Discussões do pesquisador brasileiro sobre a importância do trabalho com metodologias ativas no ensino atual.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

- Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

- Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

- Nessa obra, o autor discute e qualifica quais são os saberes que servem de base ao ofício de professor.

TENENTE, L. 30% dos domicílios no Brasil não têm acesso à internet; veja números que mostram dificuldades no ensino à distância. **G1**, 26 maio 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2020/05/26/66percent-dos-brasileiros-de-9-a-17-anos-nao-acessam-a-internet-em-casa-veja-numeros-que-mostram-dificuldades-no-ensino-a-distancia.ghtml. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta alguns dos desafios do ensino remoto emergencial, necessário na pandemia, devido à limitação de acesso à internet e de equipamentos adequados para estudo.

UNESCO. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien, 1990. Brasília, DF, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas? **RPM**, Rio de Janeiro, n. 33. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES DE ABORDAGEM PARA ESTE VOLUME

Os conteúdos propostos e desenvolvidos nesta obra buscam despertar no estudante sua curiosidade intelectual, explorando diversas situações de forma reflexiva e crítica, no contexto da própria Matemática, do dia a dia e de outras áreas de conhecimento, interpretando e analisando dados para tomar decisões éticas e socialmente responsáveis. Nesse sentido, espera-se que o estudante reconheça a relação entre o conhecimento matemático e as práticas sociais inerente à relação do ser humano com o mundo e à necessidade de resolver problemas diversos.

Do ponto de vista didático-pedagógico, os conceitos matemáticos em estudo devem ser bem fundamentados e possibilitar ao estudante novos saberes que estimulem processos mais elaborados de reflexão e de abstração, dando sustentação ao pensamento que permite formular e resolver problemas, bem como construir de forma autônoma uma visão integrada da Matemática e de outras áreas. Para isso, as situações de aprendizagem devem ser planejadas tendo como perspectiva o protagonismo do estudante para que possa assumir uma postura ativa nos diversos contextos em que a Matemática está presente.

O objetivo deste material é oferecer subsídios para a atividade docente, que assume um papel relevante dentro do complexo processo de ensino e aprendizagem, de forma articulada com as propostas apresentadas no **Livro do estudante**.

Nesta parte das **Orientações para o professor**, são apresentadas algumas estratégias para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de forma a contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades previstas na BNCC. Além disso, há sugestões de atividades complementares e referências de outros materiais atualizados que podem ser utilizados. Vale pontuar que esta não pretende ser a única referência de consulta, ou ainda, apresentar soluções plenas para os desafios enfrentados pelos professores, mas constituir mais uma alternativa para auxiliar a atividade docente e a aprendizagem, contribuindo para otimização do tempo do professor quanto ao planejamento de suas aulas.

Este Volume é organizado em quatro capítulos e destacamos, entre seus objetivos, a oportunidade de criar e resolver problemas por meio de análise crítica e validação de hipóteses. Além disso, o estudante pode se apropriar do uso de recursos digitais e de comunicação, ampliando as possibilidades de ler e interpretar a realidade, além de construir argumentação consistente, desenvolvendo principalmente as competências gerais **2**, **5** e **7**.

O primeiro capítulo oferece a oportunidade para que os estudantes pesquisem e explorem a obra de Escher para investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, em especial as transformações isométricas e homotéticas, além da observação de padrões, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e sua Tecnologias**, habilidade **EM13MAT105**. O estudo dos tópicos propostos possibilita conhecer e aplicar as relações métricas, incluindo as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos, permitindo o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308.**

No início do segundo capítulo, é proposta uma situação que possibilita aos estudantes conhecer um instrumento utilizado por alguns profissionais, o que pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **2**, articulando-se também com a competência específica **1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, bem como com a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**, ao retomar e aprofundar as relações trigonométricas no triângulo retângulo, incluindo as leis do seno e do cosseno, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos em variados contextos. Uma importante atividade, que investiga elementos técnicos envolvidos na construção de uma rampa, permite aproximação com o Tema Contemporâneo Transversal **Direitos da Criança e do Adolescente**, tratando sobre a garantia de estruturas ambientais propícias à acessibilidade, bem como com a competência geral **7**.

No terceiro capítulo, ao estudar sobre o uso do astrolábio, os estudantes terão oportunidade de refletir a respeito de como viajantes faziam para se localizar na época das Grandes Navegações, comparando e chegando a conclusões sobre como isso é feito na atualidade. A exploração de situações como essa pode propiciar o desenvolvimento da competência geral **1**, bem como da competência específica **2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, e da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. A exploração desse tema também dialoga com o Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia**. Além disso, a ampliação das noções relacionadas à Trigonometria para a circunferência trigonométrica permite a resolução de uma variedade maior de situações, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT306**.

O estudo sobre fenômenos periódicos, proposto na abertura do quarto capítulo, baseado em calendários lunares, permite que os estudantes tenham contato com conhecimentos historicamente construídos, reforçando o desenvolvimento de uma abordagem interdisciplinar envolvendo a competência geral **1** da BNCC e a competência específica **2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Além disso, o uso de estratégias e conceitos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, promovendo o estudo das funções trigonométricas aplicadas à resolução de problemas, contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT306**.

As **atividades resolvidas e as atividades propostas** ao longo dos capítulos buscam possibilitar ao estudante o aprofundamento das aplicações por meio da investigação e da reflexão. Na seção **Explorando a tecnologia**, por exemplo, há propostas utilizando o GeoGebra e planilhas eletrônicas para que seja possível verificar, por meio de recursos interativos, propriedades relacionadas aos conceitos estudados. Além disso, o uso de fluxogramas em diversos contextos permite conhecer aspectos do pensamento computacional. Temas como *skate* e ciclismo, entre outros, figuram nas seções **Conexões**, possibilitando ampliação da leitura da realidade e articulando conhecimentos de diferentes áreas do conhecimento. As questões coletivas, propostas nas **Abertura** e nos boxes **Fórum**, bem como em diversos momentos, possuem um papel importante, pois promovem a construção de ideias por meio da interação, do diálogo e do respeito mútuo.

No quadro a seguir, são apresentados os principais tópicos trabalhados neste Volume e alguns temas relacionados.

	Tópicos	Temas relacionados
Capítulo 1 **Proporcionalidade e semelhança**	• Proporcionalidade • Transformações isométricas • Congruência de triângulos • Figuras semelhantes • Polígonos semelhantes • Transformações homotéticas • Semelhança de triângulos • Relações métricas no triângulo retângulo	• Conjuntos numéricos • Trigonometria
Capítulo 2 **Trigonometria no triângulo**	• Razões trigonométricas no triângulo retângulo • Seno e cosseno de ângulos suplementares • Lei dos cossenos • Lei dos senos • Área de um triângulo qualquer	• Conjuntos numéricos • Proporcionalidade e semelhança
Capítulo 3 **Razões trigonométricas na circunferência**	• Arcos de circunferência • Ângulo central • Medida e comprimento de arcos de circunferência • Unidades de medida de arcos de circunferência • Circunferência orientada • Circunferência trigonométrica • Arcos côngruos • Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica • Seno e cosseno de um arco • Relações entre seno e cosseno • Tangente de um arco	• Conjuntos numéricos • Proporcionalidade e semelhança • Trigonometria no triângulo
Capítulo 4 **Funções trigonométricas**	• Funções periódicas • Função seno • Gráfico da função seno • Função cosseno • Gráfico da função cosseno • Equações trigonométricas • Inequações trigonométricas	• Conjuntos numéricos • Funções inversas • Trigonometria no triângulo • Razões trigonométricas na circunferência

Cronograma

O quadro a seguir apresenta uma sugestão de cronograma semestral, considerando cinco aulas semanais. No entanto, é importante que o professor avalie sua realidade e realize as adequações necessárias de modo a privilegiar o desenvolvimento dos estudantes de acordo com suas necessidades e com as escolhas feitas pela comunidade escolar, e em especial, pelo próprio estudante.

Semana (5 aulas)	Capítulo	Tópicos
1ª	1	Abertura / Introdução / Proporcionalidade / Transformações isométricas
2ª	1	Congruência de triângulos / História da Matemática / Figuras semelhantes / Polígonos semelhantes
3ª	1	Transformações homotéticas / Explorando a tecnologia / Semelhança de triângulos / Conexões
4ª	1	Relações métricas no triângulo retângulo / Para refletir
5ª	2	Abertura / Introdução / Razões trigonométricas no triângulo retângulo
6ª	2	Explorando a tecnologia / Conexões / Seno e cosseno de ângulos suplementares
7ª	2	Lei dos cossenos / Lei dos senos
8ª	2	Área de um triângulo qualquer / Para refletir
9ª	3	Abertura / Introdução / Arcos de circunferência / Ângulo central / Medida e comprimento de arcos de circunferência / Unidades de medida de arcos de circunferência / Circunferência orientada / Circunferência trigonométrica
10ª	3	Arcos côngruos / Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica / Seno e cosseno de um arco
11ª	3	Relações entre seno e cosseno / Tangente de um arco / Explorando a tecnologia
12ª	3	História da Matemática / Conexões / Para refletir
13ª	4	Abertura / Funções periódicas / Função seno
14ª	4	Função cosseno
15ª	4	Equações trigonométricas / Inequações trigonométricas / Conexões
16ª	4	Explorando a tecnologia / Para refletir

Para todos os blocos semanais, estão disponíveis atividades resolvidas e atividades propostas. Recomenda-se a seleção de parte das atividades para ser desenvolvida em sala de aula (individualmente, em duplas ou grupos maiores) e outra parte para ser realizada fora do horário de aula. Além disso, é fundamental estabelecer um cronograma de avaliações que permita acompanhar os processos de aprendizagens dos estudantes no decorrer dos capítulos. No cronograma apresentado anteriormente, sugere-se que as avaliações ocorram no fim de cada ciclo de duas semanas de estudo.

CAPÍTULO 1

Proporcionalidade e semelhança

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades para desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades, e listados e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

> **Competências gerais:** 2, 3, 7 e 9

> **Competências específicas e habilidades**
Área de Matemática e suas Tecnologias
- Competência específica 1: **EM13MAT105**
- Competência específica 3: **EM13MAT308**, **EM13MAT315**
- Competência específica 4: **EM13MAT405**

Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
- Competência específica 3

> **Temas Contemporâneos Transversais**:
- Diversidade Cultural
- Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

O tema da **Abertura** do Capítulo pode ser trabalhado de forma interdisciplinar com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, em parceria com o professor do componente curricular Arte, estimulando pesquisas a respeito do artista, suas obras, técnicas etc, ampliando e valorizando o repertório multicultural dos estudantes por meio das produções artísticas.

A exploração do tema contribui para o desenvolvimento da competência geral **3** e também pode ser retomada no conteúdo sobre figuras congruentes e transformações no plano, apresentando obras de Escher e estimulando os estudantes a pensar sobre o assunto e a produzir suas próprias obras. Também no conteúdo sobre semelhança, essa mesma exploração pode ser feita apresentando as obras de tesselação (*tessellation)* de Escher e estabelecendo relações com o tema.

Na atividade **1**, comentar que é comum encontrar, em livros e na internet, diversos exemplos das obras do artista para ilustrar alguns conteúdos relacionados à Geometria e à Matemática. Para incentivar a pesquisa, indicamos os materiais a seguir, que contêm mais detalhes sobre o trabalho de Escher:

- M. C. ESCHER COLLECTION. Disponível em: https://mcescher.com/. Acesso em: 30 ago. 2020. *Site* oficial de M. C. Escher (em inglês) que apresenta uma biografia do artista, suas principais obras e informações sobre exposições.

- MACHADO, B. Quem foi M. C. Escher?. **Superinteressante**, 4 jul. 2018. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quem-foi-m-c-escher/. Acesso em: 30 ago. 2020. Artigo da revista **Superinteressante** que traz informações a respeito do artista, apresentadas com linguagem acessível.
- MATTOS, W. Desvendando a técnica de M. C. Escher. **Walter Mattos**, 14 dez. 2015. Disponível em: https://waltermattos.com/tutoriais/desvendando-a-tecnica-de-escher/. Acesso em: 30 ago. 2020.
  Texto do *site* do *designer* Walter Mattos que explora as técnicas de Escher em seus trabalhos e divulga vídeos explicativos.

Na atividade **2** cada estudante pode ser atraído por algum aspecto da obra. A intenção do item **a** é que eles observem a imagem com atenção, dedicando um tempo para examinar suas características. É importante dar esse tempo para que depois as respostas sejam compartilhadas com o restante da turma.

No item **b** é interessante observar como os estudantes identificam e relatam as características da imagem. Nesse momento, já podem surgir relatos a respeito das simetrias e transformações feitas pelo artista na concepção do desenho.

Como atividade de ampliação, pode ser feito um trabalho sobre acessibilidade, propondo aos estudantes que encontrem formas de tornar essas obras acessíveis aos deficientes visuais, por exemplo. Outra possibilidade é propor aos estudantes que, divididos em duplas, acessem o *site* oficial do artista (ou tenham em mãos um livro com suas obras), para que um deles escolha uma das obras de Escher para descrever, enquanto o outro, sem ver, adivinhe qual obra foi escolhida a partir da descrição feita pelo colega.

No item **c** espera-se que os estudantes identifiquem que a obra é formada por repetições de um mesmo desenho (no caso, uma espécie de lagarto) justapostas em diferentes posições e com três cores distintas, de maneira que não exista espaço sem preenchimento (tesselação). Nesse momento, os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito dos temas de transformações no plano, congruência, semelhança e simetria podem ser identificados, de acordo com as impressões trazidas por eles. As observações feitas nos pequenos grupos podem ser debatidas com toda a turma. Pode ser feita também a conexão com o vídeo do *designer* Walter Mattos, cujo *link* foi citado anteriormente, nos comentários relativos à atividade **1**, que usa um programa de computador para reproduzir uma das obras de Escher.

A atividade **3** propõe que os estudantes realizem uma pesquisa. De acordo com o dicionário **Houaiss**:

- Litografia é o "processo de reprodução que consiste em imprimir sobre papel, por meio de prensa, um escrito ou um desenho executado com tinta graxenta sobre uma superfície calcária ou uma placa metálica, geralmente de zinco ou alumínio".

LITOGRAFIA. *In*: INSTITUTO Antônio Houaiss. **Houaiss eletrônico**. São Paulo: Objetiva, 2010. Versão multiusuário 2009.5.

- Xilografia é o "processo e técnica de gravura em relevo sobre madeira que permite a impressão tipográfica de figura(s) ou texto(s), cujos caracteres (não móveis) são entalhados na prancha de suporte".

XILOGRAFIA. *In*: INSTITUTO Antônio Houaiss. **Houaiss eletrônico**. São Paulo: Objetiva, 2010. Versão multiusuário 2009.5.

Orientar os estudantes a buscar as informações para a pesquisa em fontes confiáveis, seja na internet, seja em livros. Por exemplo, no *site* da Enciclopédia Itaú Cultural é possível encontrar um verbete para litografia, disponível em <http://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo5086/litografia> (acesso em: 30 ago. 2020). As atividades de pesquisa permitem exercitar a investigação e a análise crítica com base em procedimentos científicos, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **2**.

As xilogravuras de Escher podem ser vistas em <https://mcescher.com/gallery/woodcut/> e as litogravuras, em: <https://mcescher.com/gallery/lithograph/> (acessos em: 30 ago. 2020).

O vídeo **Escher working on Snakes**, disponível em <https://mcescher.com/about/video-on-m-c-escher/> (acesso em: 30 ago. 2020), mostra o artista trabalhando na xilogravura **Serpentes**, de 1969.

Como atividade complementar, os estudantes podem desenvolver, com o professor de Arte, da área de **Linguagens e suas Tecnologias**, um painel ou mosaico inspirado nas obras de Escher, explorando o contraste das cores, a dualidade e a construção de mosaicos.

Neste Capítulo, os estudantes devem explorar os padrões geométricos, as semelhanças de figuras, a proporcionalidade e as transformações no plano, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT105**.

Sugestões de leitura para o professor:

- SANTOS, D. F. dos; CARLINI, J. M. Escher e o ensino da geometria. **Regrasp**, São Paulo, v. 2, n. 3, jun. 2017. Disponível em: http://seer.spo.ifsp.edu.br/index.php/regrasp/article/view/65. Acesso em: 30 ago. 2020.
  Esse artigo traz algumas atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, além de explicar como foram feitas algumas obras de Escher.
- BRANCO, E. S. Escher e a matemática. **Portal do Professor**, 17 out. 2010. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23463. Acesso em: 30 ago. 2020.
  Nessa breve sequência didática, a autora sugere algumas atividades inspiradas nas obras de Escher para serem aplicadas nas aulas de Matemática.

Introdução

Na **Introdução**, é importante estimular os estudantes a responder à pergunta inicial, elaborando hipóteses para a questão. Caso seja possível, solicitar que pesquisem previamente sobre o assunto e compartilhem com a turma os resultados da pesquisa. Explicar aos estudantes que atualmente existe uma norma da Organização Internacional de Padronização (ISO, na sigla em inglês) que determina as medidas exatas que um cartão de crédito deve ter, além de outras especificações.

Com a abordagem do boxe **Pense e responda**, pretende-se iniciar o assunto que será desenvolvido ao longo do Capítulo. No primeiro item, é possível verificar se os estudantes recordam o conceito de razão que costuma ser abordado no Ensino Fundamental. Retomar o conceito: Razão é o quociente entre dois números. Dados dois números a e b com $b \neq 0$, denomina-se razão entre a e b o quociente $\frac{a}{b}$ ou $a : b$. No segundo item, explorar aspectos técnicos e históricos da razão áurea, obtida ao realizar a divisão de um segmento em média e extrema razão, e que vale $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}62$. Como atividade complementar, pode-se propor aos estudantes que pesquisem a demonstração de que essa é a razão entre o raio de um círculo e o lado do decágono regular inscrito nesse círculo.

No terceiro item do boxe, ao investigarem a razão entre as medidas de um cartão de crédito e encontrarem um valor bem próximo ao valor da razão áurea, os estudantes podem estabelecer relação com uma situação cotidiana. No quarto item, incentivar a pesquisa também colocará os estudantes em contato com outras situações. Espera-se que mencionem o Parthenon, na Grécia, a obra **Homem vitruviano**, de Leonardo da Vinci, entre outros. Caso a sequência de Fibonacci apareça na pesquisa, comentá-la com os estudantes, citando aplicações dela na natureza e nas construções feitas pelo ser humano.

É importante explicar as notações descritas no boxe **Saiba que...** deste tópico e utilizar outros exemplos para verificar se os estudantes as compreenderam.

Proporcionalidade

A noção de **segmentos de reta proporcionais** antecede um resultado importante da geometria plana e pode ser apresentada com o auxílio de alguns exemplos numéricos simples. Destacar para os estudantes que, mesmo que o resultado do **teorema de Tales** pareça intuitivo, é preciso que ele seja provado para que tenha validade na Matemática.

No tópico **Feixe de retas paralelas**, sugere-se propor aos estudantes as seguintes atividades: “Escreva todos os pares de segmentos correspondentes no exemplo dado.”; “Escolha um ponto *E* sobre a reta *t* e descreva como obter o ponto *E*′ sobre a reta *r* de modo que *E* e *E*′ sejam correspondentes.”; “Faça o mesmo para um ponto *X* sobre a reta *r*.”

É interessante explorar com os estudantes o boxe **Saiba que...** do tópico **Teorema de Tales**, articulando a história da Matemática ao teorema de Tales. Esse teorema foi estabelecido por Tales com base na observação dos raios solares que chegavam inclinados à Terra. Dada a grande distância entre o Sol e a Terra, esses raios podem ser considerados paralelos. Tales concluiu que havia uma proporcionalidade entre a medida da sombra e a altura dos objetos.

É importante explicar cada passo da demonstração do teorema de Tales, observando as premissas necessárias para efetuar os cálculos. Howard Eves, autor de uma das obras mais conhecidas sobre história da Matemática, reforça a importância das demonstrações para a compreensão da Matemática como área de conhecimento:

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “*Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e “*Por que* o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê*. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor. Segundo a tradição a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.”
>
> EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 94.

No boxe **Pense e responda** do tópico **Teorema de Tales**, os estudantes são convidados a refletir sobre quais outras proporções podem ser consideradas no teorema de Tales, ampliando a compreensão. As outras proporções são: $\frac{BC}{AB} = \frac{NP}{MN}$, $\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$ e $\frac{AC}{AB} = \frac{MP}{MN}$.

Antes de iniciar a demonstração do **teorema da bissetriz interna de um triângulo**, pode-se explorar o primeiro boxe **Pense e responda** desse tópico, retomando o conceito de bissetriz em um triângulo. Verificar se os estudantes lembram que a bissetriz de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice do triângulo ao seu respectivo lado oposto, dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos de mesma medida. Pode ser interessante realizar a construção com régua e compasso, ou mesmo utilizando um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra. No segundo boxe **Pense e responda**, fornecer exemplos de ângulos congruentes em outras figuras geométricas e verificar se os estudantes conseguem expressar a definição.

Ao trabalhar a demonstração, explicar aos estudantes que pode-se usar o teorema de Tales, pois foi demonstrado anteriormente. É importante que eles percebam como se dá a construção das demonstrações em Matemática, quais resultados podem ou não ser usados e, principalmente, por quê. Uma possível estratégia para tornar esse momento mais dinâmico e atrativo aos estudantes, é solicitar que eles apresentem algumas ideias sobre como fariam para construir uma argumentação logicamente encadeada e que comprovasse a hipótese. Essa pode ser uma oportunidade enriquecedora para que os estudantes tenham contato com a forma como a Matemática se desenvolve. A publicação disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_uel_mat_pdp_roseli_aparecida_barlati.pdf> (acesso em: 29 ago. 2020) pode fornecer indícios de como mediar essa situação em sala de aula.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Na seção de atividades resolvidas, são apresentadas duas atividades que tratam de aplicações do teorema de Tales e do teorema da bissetriz interna, discutidos neste Capítulo.

No item **a** da atividade proposta **2**, estimular os estudantes a pensar a respeito de quais informações precisam para determinar as medidas solicitadas. Com isso, trabalha-se o raciocínio lógico e exige-se dos estudantes um entendimento maior do conteúdo apresentado, não apenas a aplicação mecanizada de um procedimento.

Já na atividade **5**, espera-se que os estudantes percebam que não é possível resolver a atividade com os elementos dados. Estimular o debate sobre os motivos da impossibilidade e a discussão sobre quais são as possíveis informações que permitiriam resolver a atividade. Essa é uma forma de estimular a análise crítica e a argumentação, contribuindo para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **7**.

É interessante observar as estratégias desenvolvidas pelos estudantes e pedir que compartilhem o raciocínio com o restante da turma ou em pequenos grupos. Como ampliação, solicitar que grupos de três ou quatro estudantes elaborem uma atividade semelhante. Em seguida, os grupos devem trocar o material elaborado e um deve resolver o do outro. A correção deve ser feita pelo grupo que criou a atividade, para que desenvolvam habilidades de avaliação do trabalho dos colegas, exercitando a avaliação por pares.

É importante salientar que os estudantes devem procurar valores que sejam válidos para os dados já fornecidos pelo problema. Por exemplo, uma possível informação é $DF = 26$ cm. Com isso, chega-se a $DE = 16$ cm e $EF = 10$ cm. Os estudantes podem, inclusive, sugerir que a figura seja medida, e a proporção, calculada, para se determinarem os valores faltantes.

A atividade proposta **7** também se apresenta como uma oportunidade para que os estudantes pensem de forma autônoma sobre as estratégias para resolver um problema envolvendo o teorema de Tales. Se possível, promover um painel de soluções com outras proporções. Essa estratégia valoriza as resoluções feitas pela turma, incentivando-a a compartilhar suas ideias, e mostra que em um problema matemático, nem sempre há apenas uma única possibilidade de resolução.

A atividade **8** oferece uma aplicação da proporcionalidade nas escalas termométricas. Pode ser uma oportunidade para um breve trabalho de pesquisa em conjunto com o professor de Física, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, proporcionando uma ampliação dos conhecimentos dos estudantes a respeito das diferentes unidades existentes para medir temperatura. Pode-se, ainda, sugerir aos estudantes que escrevam a expressão da função que relaciona as temperaturas em grau Celsius e em grau Fahrenheit.

Transformações isométricas

Este tópico está relacionado à competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT105**, e para abordá-lo, é retomada uma das obras de Escher para servir como motivação à exploração. Por meio do primeiro boxe **Pense e responda**, estimular os estudantes a argumentar sobre o que responderam, como descreve a competência geral **7**. Eles podem usar uma régua para medir os comprimentos e verificar os formatos, fazer uma reprodução da obra, recortar os peixes centrais e sobrepor um ao outro. Podem também utilizar papel vegetal para copiar um deles e verificar o traço sobrepondo o desenho a outro peixe.

Perguntar aos estudantes qual é o nome que figuras com essas características recebem. Espera-se que eles se recordem do que já viram no Ensino Fundamental a respeito de figuras congruentes. Na investigação da obra, os estudantes podem notar a rotação de um dos peixes em torno do ponto em comum entre eles por um ângulo de 180°. Eles não precisam necessariamente utilizar esses termos na resposta; é interessante observar como se expressam. Procurar fazer perguntas para auxiliar os estudantes a se lembrarem dessas nomenclaturas, que possivelmente foram estudadas no Ensino Fundamental.

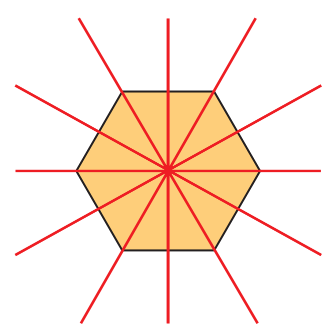
É interessante também explorar o segundo boxe **Pense e responda** deste tópico. As principais isometrias são a reflexão, a rotação e a translação. Os estudantes também podem mencionar combinações dessas isometrias, como a reflexão transladada. A palavra isometria vem do grego *iso*, que significa igual e *metria*, que nos remete à medida, medição. Assim, é possível dizer que a palavra isometria significa medidas iguais. Nesse momento, pode ser feito um trabalho com o professor de Língua Portuguesa, da área de **Linguagens e suas Tecnologias** por meio de uma breve pesquisa sobre a etimologia das palavras.

No tópico **Reflexão**, é interessante questionar os estudantes sobre as propriedades da reflexão: “Vocês acham que estas propriedades valem sempre para uma reflexão? Argumentem.”

A seguir, são apresentados dois tipos importantes de simetria e uma sugestão de atividade envolvendo essas simetrias.

Quando existe um segmento de reta que divide uma figura em duas partes iguais, de forma que é possível sobrepor essas partes ponto a ponto “dobrando” a figura, tem-se uma **simetria de reflexão**. A reta que divide essa figura simétrica é chamada de **eixo de simetria**.

O hexágono regular, por exemplo, é uma figura simétrica e tem seis eixos de simetria:

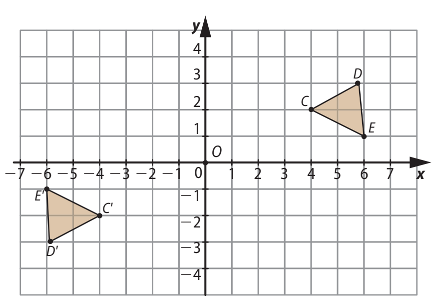


EDITORIA DE ARTE

Sugere-se propor um exemplo para verificar a sobreposição de figuras simétricas, como descrito no boxe **Saiba que...** do tópico **Reflexão**.

Tem-se uma **simetria central** quando é aplicada uma **reflexão em relação a um ponto** que é o **centro de simetria**.

Por exemplo, aplicando ao triângulo *CDE* a reflexão em relação ao ponto *O* (origem do sistema cartesiano), obtém-se o triângulo *C′D′E′*.



EDITORIA DE ARTE

Observar que as coordenadas cartesianas de cada vértice do triângulo $C'D'E'$ estão às mesmas distâncias das coordenadas correspondentes dos vértices do triângulo *CDE* em relação ao ponto *O*. Os triângulos *CDE* e $C'D'E'$ são congruentes.

Em duplas, os estudantes podem conhecer procedimentos sobre as simetrias de reflexão e central e construir, com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica (como o GeoGebra), outras figuras que apresentem essas simetrias. Essa atividade pode ser tema de uma pequena exposição, relacionando as produções dos estudantes com o que viram a respeito das obras de Escher, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **3**.

Ao trabalhar com o boxe **Pense e responda** logo antes do tópico **Translação**, é importante estimular os estudantes a retomar as características das isometrias vistas no início do tópico. A translação, assim como as demais isometrias, preserva a forma e o tamanho, alterando a posição da figura. Procurar incentivá-los a buscar o significado da palavra translação no dicionário, para que consigam ter uma ideia mais ampla dessa transformação geométrica. Uma das possibilidades é o movimento de translação do planeta Terra, entre outras situações.

No primeiro item do boxe **Pense e responda** deste tópico, retomar a obra de Escher da abertura do Capítulo e conduzir as explicações para que os estudantes apliquem corretamente o conceito de translação. Uma resposta possível para o questionamento feito é: O lagarto preto na porção central do quadro é uma translação do lagarto preto mais à direita, na mesma posição, apenas deslocado para a direita. Espera-se que os estudantes concluam que um dos modos de identificar o vetor de translação é unir um ponto de uma das figuras com o seu correspondente na outra figura.

Os segundo e terceiro itens do boxe abordam os vetores, e podem ser trabalhados em conjunto com o professor do componente curricular de Física, da área de Ciências na **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Caso os estudantes se interessem, é possível dividi-los em grupos e pedir a eles que façam um breve seminário sobre o assunto, o que pode contribuir para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. É interessante ressaltar que esse é um assunto no qual os estudantes costumam ter dificuldade, principalmente no estudo da cinemática vetorial. Realizar o seminário sugerido pode auxiliar na compreensão e no desenvolvimento dos conteúdos relacionados, assim como explicitar a interdisciplinaridade. Quanto ao significado de vetores, estimular os estudantes a pesquisar em livros da área de **Matemática e suas Tecnologias** e **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e em *sites* confiáveis, como o indicado a seguir:

- **USP e-Física**, portal elaborado e mantido pelo Instituto de Física da Universidade de São Paulo, disponível em <https://efisica.atp.usp.br/home/> (acesso em: 29 ago. 2020).

Caso os estudantes decidam pesquisar o significado da palavra vetor no dicionário, encontrarão outros significados, relacionados a outras áreas (como o vetor de transmissão de uma doença, considerando a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**). É importante observar e mediar o desenvolvimento dessa percepção e a identificação do significado que se encaixa no contexto proposto.

FAIRY-N/SHUTTERSTOCK.COM

Ao abordar o tópico **Rotação**, pode ser interessante promover uma pesquisa a respeito de mandalas, quais são suas origens, suas representações e relações com diferentes culturas e religiosidades. A exploração artística e matemática dessa figura, contribui para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **Diversidade Cultural**.

O boxe **Pense e responda** visa desenvolver nos estudantes a capacidade de argumentação de suas ideias, estimulando-os a expressarem conceitos matemáticos em língua materna. Para o primeiro item, uma resposta possível é: Rotacionar o elemento ao redor do ponto central da mandala até chegar ao próximo elemento. Os estudantes podem tentar determinar o ângulo de rotação, que é de 45° (360° : 8 = 45°). No caso do segundo item, os estudantes podem indicar qualquer um dos elementos que se repetem na mandala. Alguns deles estão destacados na figura ao lado. Para obter as repetições, o processo é o mesmo do elemento anterior, rotacionar em relação ao ponto central.

FÓRUM

Explorar este boxe é uma oportunidade para integrar conhecimentos e, em certos casos, ampliar o universo cultural dos estudantes, favorecendo o desenvolvimento da competência geral 3 e do Tema Contemporâneo Transversal **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**. Ao explorar as figuras do ponto de vista matemático, comentar a respeito da possibilidade de unir mais de um tipo de isometria para obter uma figura. Por exemplo, uma reflexão e uma translação. O texto a seguir pode subsidiar a discussão:

> [...]
>
> A representação gráfica visual é uma parte do estudo sobre linguagem visual. Conduz mensagens inteligíveis e pode representar tanto um padrão decorativo para um observador externo, como um significado para indivíduo de uma determinada cultura. Por esta razão, para um integrante de uma comunidade indígena este tipo de representação visual pode ser um motivo que informa sobre a cultura, sua cosmovisão e suas mitologias.
>
> [...]
>
> [...] [A] arte nas sociedades indígenas cumpre uma função social e se insere no âmbito de outras expressões culturais humanas. É uma criação em conjunto que passada de geração em geração cria memória e identidade ao grupo.
>
> [...] A ornamentação para o indígena integra o objeto a que se aplica, seja ele o corpo humano ou um artefato. [...]
>
> [...]
>
> O grafismo faz parte da vida social dos povos tradicionais, mesmo que tenha se perdido no tempo, é fator de identidade cultural. A arte está na história e nas experiências de uma sociedade: suas especificidades, autonomia e valor estético não a separam das outras manifestações da vida. [...]
>
> [...]

CAVALCANTE, A. L. B. L. *et al.* A iconografia em comunidades indígenas. **Projética**, Londrina, v. 4, n. 2, p. 9-28, jul./dez. 2013. Disponível em: http://www.uel.br/revistas/uel/index.php/projetica/article/viewFile/16043/14237. Acesso em: 30 ago. 2020.

No primeiro item, as imagens apresentadas como exemplos devem ser exploradas para que os estudantes reconheçam as isometrias. Como atividade de ampliação, podem identificar simetrias e traçar eixos de simetria.

Para o segundo item, a seleção de imagens pode ser feita durante a aula, se a turma tiver acesso à internet, ou os estudantes podem trabalhar na pesquisa fora da aula e trazer o resultado para o debate. Eles podem trazer as imagens impressas ou em fotos tiradas com o celular.

Explorar os questionamentos propostos neste boxe pode promover a troca e o compartilhamento de ideias entre os estudantes, ampliando suas estratégias de diálogo sobre as diversidades culturais e contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **9**.

Congruência de triângulos

Esse tópico contribui para o desenvolvimento da competência específica 3 da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**. Como esse tema é trabalhado no Ensino Fundamental, uma abordagem inicial pode incluir questionamentos sobre os conhecimentos de que os estudantes se recordam a respeito da congruência de triângulos e uma sugestão é registrar na lousa as ideias que surgirem (significados, simbologia etc.). O primeiro boxe **Pense e responda** pode contribuir para esse diálogo. Observar se os estudantes mencionam que os lados correspondentes devem ter mesma medida, assim como a medida dos ângulos internos correspondentes também deve ser igual. Sugere-se propor a questão: "Dois polígonos com o mesmo número de lados são sempre congruentes? Argumente.".

O segundo boxe **Pense e responda** deste tópico apresenta um complemento importante sobre o assunto. É importante aproveitar para enfatizar que símbolos iguais indicam lados (ou ângulos) de mesma medida, tipo de notação comum em Matemática, recordando as indicações dos "risquinhos" nos lados e os pequenos arcos nos ângulos, e que as letras que indicam os vértices dos triângulos devem estar na ordem da sua correspondência. Como o ângulo $\hat{C}$ é correspondente (e congruente) ao ângulo $\hat{F}$, eles devem aparecer na mesma posição na indicação da congruência dos triângulos. O mesmo vale para os demais vértices. Pode-se por exemplo, escrever $\triangle ACB \cong \triangle DFE$.

Ao apresentar os casos de congruência de triângulos, é importante enfatizar que, para cada caso, é possível fazer a demonstração. Se julgar interessante, pedir aos estudantes que pesquisem e apresentem a demonstração de um ou mais casos. Espera-se que os estudantes sejam capazes de fazer a identificação de cada caso com base na análise dos ângulos e dos lados dos triângulos. Conhecendo os casos de congruência, não é necessário verificar os seis elementos de um triângulo: verificar três deles já é suficiente para afirmar se um triângulo é ou não congruente a outro.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Depois de resolver a atividade resolvida **4**, propor a questão: "A imagem é simétrica em relação à reta vertical que passa pelo ponto médio do lado horizontal? Justifique."

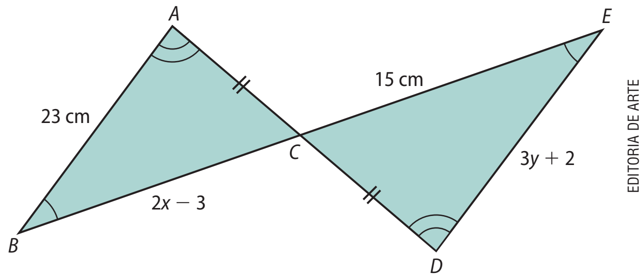
É importante dar destaque para a atividade resolvida **6**. Nela, é elaborado um fluxograma com indicação dos passos a serem seguidos na construção da reflexão de uma figura em relação a uma reta. Explorar essa resolução com os estudantes contribui para a promoção da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT315**, relacionada ao pensamento computacional.

No primeiro item do boxe **Pense e responda** da atividade resolvida **6**, não faz diferença o vértice escolhido para começar. No segundo item, espera-se que os estudantes concluam que esse processo pode ser aplicado para realizar a reflexão de qualquer polígono em relação a uma reta.

As atividades propostas **10** e **11** propõem o trabalho com isometrias, estabelecendo importantes conexões com aquilo que foi sendo construído ao longo do Capítulo. A atividade **14** propõe uma demonstração de um "fato" observável na figura. Aqui pode-se novamente comentar sobre a importância da demonstração em Geometria.

Para a elaboração proposta na atividade **16**, retomar com os estudantes a congruência de triângulos e as atividades já resolvidas. Sistematizar os tópicos estudados e então incentivá-los a elaborar os problemas. Os estudantes podem utilizar os modelos resolvidos em sala de aula. Nesse caso, verificar se fizeram adaptações nos problemas. Acompanhar essa elaboração, auxiliando quando for necessário. Organizar os estudantes de forma que possam fazer as trocas com os colegas e discutir as diferentes possibilidades de resolução.

Pode-se sugerir aos estudantes que elaborem um enunciado, se possível contextualizado, que envolva figuras de triângulos congruentes como a seguinte.



Resolução:

$\hat{A} \cong \hat{D}$

$\overline{AC} \cong \overline{CD}$

$\hat{B} \cong \hat{E}$

Pelo caso ALA, $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.

Então:

$2x - 3 = 15 \Rightarrow x = 9$

$3y + 2 = 23 \Rightarrow y = 7$

Já a atividade **17** propõe a elaboração de um fluxograma. Observar se ele é construído corretamente, e em caso de dúvidas, retomar a atividade resolvida **6**.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Esta seção apresenta fatos históricos relacionados à Matemática com o intuito de contextualizar conteúdos e contribuir para a compreensão da evolução de ideias e de teorias ao longo do tempo. Nesse caso, pode ser solicitado que os estudantes realizem pesquisas sobre Tales de Mileto e ser proposto um momento de exposição sobre o que descobriram. Em meio às informações trazidas por eles, certamente haverá diversas conexões com os temas abordados neste Capítulo. Além disso, também deve surgir o tema da semelhança de triângulos, que já foi estudado no Ensino Fundamental.

Antes de iniciar uma explanação sobre esse tema, pode ser promovida uma atividade na qual essa ideia seja aplicada na obtenção de alguma medida inacessível no prédio da escola, como a altura de uma torre, ou a altura em que se encontra algum objeto, como um holofote.

Figuras semelhantes

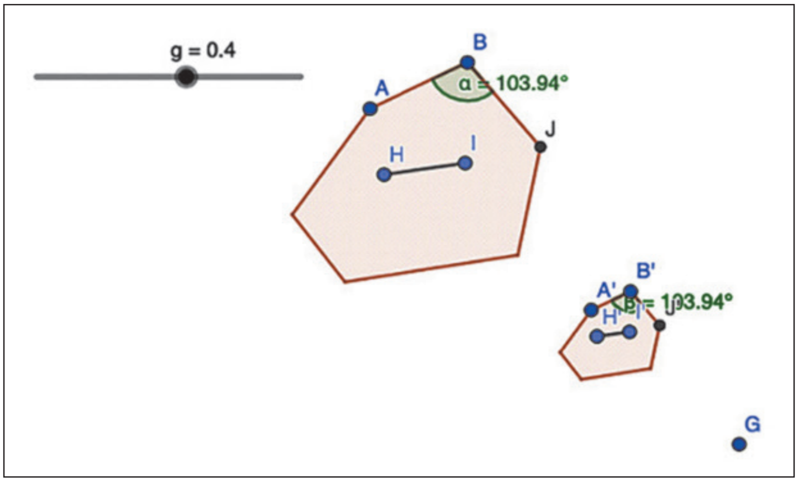
Uma possibilidade de abordagem é iniciar um diálogo com os estudantes sobre os significados da palavra “semelhante”, para, em seguida, relacioná-los com o significado matemático. É importante destacar que os significados não são os mesmos. Uma breve atividade externa pode ser proposta, solicitando que tirem fotografias com o celular, para que compreendam a relação com a ampliação e a redução de figuras. A pergunta do boxe **Pense e responda** (cuja resposta é 22,5 cm) pode ser explorada nesse momento.

É importante explorar também a semelhança de figuras de um modo mais amplo, ressaltando a congruência dos ângulos correspondentes, bem como a proporcionalidade entre as medidas dos lados. Para isso, pode-se organizar a turma em grupos com quatro ou cinco estudantes e fornecer pares de figuras semelhantes ou não, para que explorem as medidas de seus lados e ângulos. Ao final, promover um ciclo de apresentações sobre as conclusões.

Polígonos semelhantes

Ao iniciar esse assunto, explorar a pergunta do boxe **Pense e responda**, a partir de uma retomada, com os estudantes, do assunto já visto no Ensino Fundamental. É importante que concluam que a resposta é não, pois há figuras semelhantes que não apresentam a mesma medida. No entanto, duas figuras congruentes, que apresentam as mesmas medidas, serão sempre semelhantes. Os dois boxes **Saiba que...** deste tópico também contribuem para uma exploração aprofundada do conceito. Importante enfatizar as ideias de ampliação e redução relacionadas à razão de semelhança.

Sugere-se realizar uma atividade de ampliação e redução de um pentágono, utilizando o *software* GeoGebra, como mostra a figura a seguir. O polígono cujo um dos lados é $\overline{AB}$ é rígido, o controle deslizante varia de -3 a 3, o ponto G é livre e é o centro de homotetia. É interessante variar o valor de g e observar o resultado.



GEOGEBRA

Transformações homotéticas

Esse tópico contribui para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT105**. Ao iniciar esse assunto, podem ser exploradas as perguntas do boxe **Pense e responda**, a partir das observações dos estudantes sobre a obra de Escher. Outra estratégia interessante pode ser propor que os estudantes pesquisem sobre o significado da palavra homotetia, seguindo procedimentos adotados anteriormente, que reforçam a importância dos significados e da etimologia dos termos no contexto da geometria plana. Nesse diálogo, fazer que a relação com a ampliação e a redução de figuras fique clara.

Como sugestões de leituras complementares, além da indicação do boxe **Para acessar**, consultar os *links* <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2020/02/const_Geom_homot_menor.pdf> e <http://moodle.

profmat-sbm.org.br/MA13/2014-2/unidade9-1.pdf> (acessos em: 29 ago. 2020), que apresentam materiais para aprofundamento de estudos sobre homotetia, e o *link* <https://novaescola.org.br/conteudo/2711/geometria-das-transformacoes> (acesso em: 29 ago. 2020), que traz um artigo sobre o desenvolvimento desse tema em sala de aula.

Caso seja possível utilizar recursos computacionais, como um *software* de geometria dinâmica (por exemplo, o GeoGebra), explorar a sugestão indicada no segundo boxe **Pense e responda** desse tópico, pois, assim, o conceito de homotetia ficará mais claro para os estudantes. Pode-se aproveitar e ampliar o uso dessa ferramenta para outras figuras. Outra exploração interessante que pode ser feita com os estudantes é a obtenção do triângulo de Sierpinski e sua relação com os fractais.

Nos *links* a seguir, estão mais informações sobre como desenvolver atividades a respeito do triângulo de Sierpinski em sala de aula: <https://www.institutoclaro.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/o-triangulo-de-sierpinski/> e <https://www.youtube.com/watch?v=X_D4BXramdc> (acessos em: 29 ago. 2020).

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

A atividade resolvida **8** apresenta a construção de outro fractal interessante: a curva de Koch. Explorar essa resolução, incluindo as indicações do boxe **Para acessar** deste tópico, pode contribuir para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT105**.

Para complementar a atividade **18**, pode-se propor aos estudantes a questão: "Você acha que todos os paralelogramos são semelhantes? Dê dois argumentos para fundamentar sua resposta." Espera-se que os estudantes respondam que nem todos os paralelogramos são semelhantes, pois podem não ter lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

A atividade **19** é uma importante oportunidade de compartilhamento de ideias entre os estudantes. Pode-se organizar a turma em pequenos grupos para que elaborem perguntas relacionadas com a situação proposta. Em seguida, eles devem trocar as questões entre os grupos para que um grupo responda às perguntas elaboradas pelo outro. Ao final, promover o compartilhamento de algumas perguntas e respostas, valorizando as produções dos estudantes. Seguem algumas sugestões de perguntas:

1) Quanto mede o segmento $\overline{MN}$?

$$\frac{27}{18} = \frac{25}{x} \Rightarrow x \simeq 16{,}7\text{ cm}$$

2) Qual é a medida do ângulo $\hat{C}$?

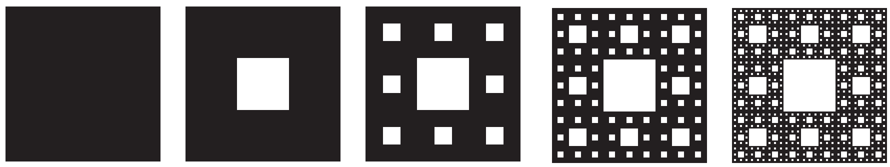
$$360° - 104° - 76° - 42° = 138°$$

Na atividade **21**, uma possível justificativa para o item **a** é que a razão de semelhança entre os comprimentos e as alturas foi mantida, ou seja, $\frac{800\text{ cm}}{16\text{ cm}} = \frac{450\text{ cm}}{9\text{ cm}} = 50$. Aqui, reforça-se que o tema da atividade envolve razão de semelhança. Caso seja necessário, retomar uma explicação mais detalhada a respeito de escala e outras razões entre grandezas.

Na atividade **24**, os estudantes devem anotar a transformação escolhida e os cálculos utilizando a razão de homotetia. Se escolherem $k \geqslant 1$, a figura será uma ampliação, caso escolham $k < 1$, a figura será uma redução. Eles devem determinar o centro de homotetia e traçar as semirretas para obter a nova figura.

Na atividade **26**, os estudantes podem utilizar régua e compasso, ou um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, se for possível. Para a construção desse fractal, é utilizado o mesmo princípio do triângulo de Sierpinski, conforme descrito anteriormente.

As figuras a seguir mostram o tapete de Sierpinski após algumas iterações.



ALEJO MIRANDA/ SHUTTERSTOCK.COM

Informações complementares sobre o tapete de Sierpinski (que também pode ser chamado de carpete de Sierpinski) podem ser encontradas no *link* <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico5.php> (acesso em: 29 ago. 2020).

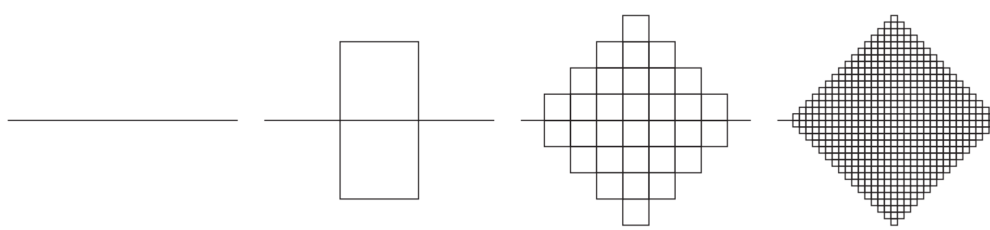
Na realização da atividade **27**, os estudantes podem fazer a construção utilizando régua ou por meio de um *software* de geometria dinâmica, de acordo com os passos indicados a seguir.

Passo 1: Traça-se um segmento de reta.

Passo 2: Divide-se esse segmento em três partes iguais.

Passo 3: Por esse segmento, constrói-se um retângulo que intersecte o segmento de forma que o retângulo seja dividido em duas partes iguais pelo segmento, formando dois quadrados de lado igual a $\frac{1}{3}$ da medida do segmento.

Passo 4: Repetem-se os passos 2 e 3. A curva de Peano é obtida por processo iterativo.



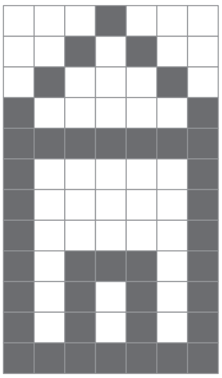
EDITORIA DE ARTE

> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

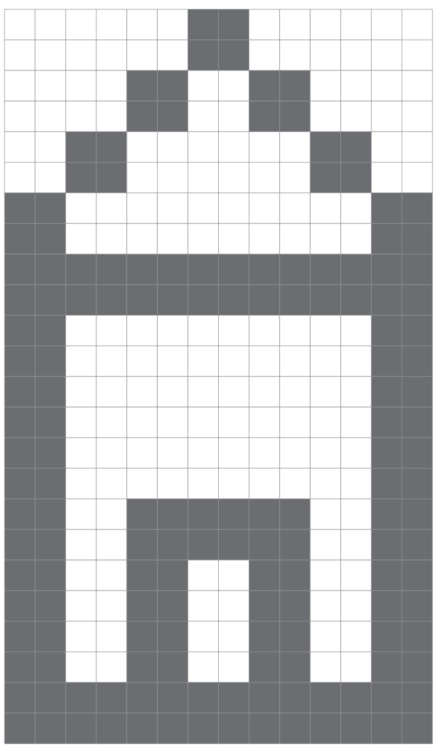
Esta seção é uma oportunidade para promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados a noções de linguagem de programação, proporcionando novas formas de resolver uma atividade. É uma ocasião para que seja explorada a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT405**, relacionada ao pensamento computacional. No boxe **Pense e responda**, fazer a mediação dos questionamentos e procurar orientar os estudantes a chegar às respostas: os números indicam as quantidades de quadrinhos que serão pintados de branco ou de preto; quando a sequência começa com zero, significa que o primeiro quadradinho da linha será preto; as linhas com o mesmo código produzem imagens iguais. É possível aproveitar para levantar outros questionamentos e observações feitos pelos estudantes.

A atividade dessa seção tem como proposta explorar o pensamento computacional sem a utilização de computadores. Para a realização dos itens **a** e **b**, providenciar folhas de papel quadriculado com quadradinhos 1 cm $\times$ 1 cm. Uma sugestão é organizar os estudantes em duplas e permitir que realizem as representações. Após terem realizado as construções, fazer a mediação das conclusões obtidas e verificar se estabeleceram relação com a proporcionalidade. Caso haja possibilidade, incentivar que cada dupla crie uma figura para que outra dupla a amplie, usando os comandos trabalhados nessa atividade. A seguir estão as respostas esperadas.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Código de armazenamento para a imagem ampliada.

Linha 1: 6, 2, 6

Linha 2: 6, 2, 6

Linha 3: 4, 2, 2, 2, 4

Linha 4: 4, 2, 2, 2, 4

Linha 5: 2, 2, 6, 2, 2

Linha 6: 2, 2, 6, 2, 2

Linha 7: 0, 2, 10, 2

Linha 8: 0, 2, 10, 2

Linha 9: 0, 14

Linha 10: 0, 14

Linha 11: 0, 2, 10, 2

Linha 12: 0, 2, 10, 2

Linha 13: 0, 2, 10, 2

Linha 14: 0, 2, 10, 2

Linha 15: 0, 2, 10, 2

Linha 16: 0, 2, 10, 2

Linha 17: 0, 2, 2, 6, 2, 2

Linha 18: 0, 2, 2, 6, 2, 2

Linha 19: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

Linha 20: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

Linha 21: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

Linha 22: 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

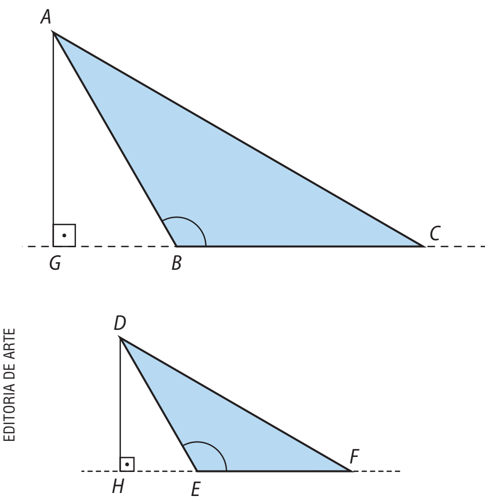
Linha 23: 0, 14

Linha 24: 0, 14

Pode ser interessante, ao terminar a atividade, fomentar a discussão sobre a comparação dos códigos antes e depois da redução. Algumas sugestões de perguntas são: “O que aconteceu com os dígitos dos códigos? E com as linhas?”; “Se o objetivo fosse ampliar a imagem original em sete vezes, como ficariam os códigos?”.

Semelhança de triângulos

Neste tópico, será trabalhada a definição de semelhança de triângulos e os casos de semelhança serão apresentados. Trata-se de um tópico associado à competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**, e que servirá como suporte para o desenvolvimento de outras ideias e demonstrações de resultados importantes. Nesse sentido, convém enfatizar aos estudantes o teorema fundamental da semelhança e as consequências da semelhança de triângulos, como forma de explicitar a importância desses conceitos. Incentivar os estudantes a justificar as propriedades da primeira consequência da semelhança de triângulos.



EDITORIA DE ARTE

Na demonstração de uma das propriedades da 1ª consequência, sobre a razão de semelhança entre as áreas de dois triângulos semelhantes, destacar que na primeira parte foi demonstrado que a razão entre as medidas de duas alturas homólogas também é *k*. Sugere-se propor a seguinte questão: "Se os triângulos da demonstração fossem obtusângulos e desenhados como na figura, a demonstração seria a mesma? Justifique." Espera-se que os estudantes concluam que sim, que o desenho é apenas uma representação, mas que a demonstração feita vale para qualquer tipo de triângulo.

Sobre a 2ª e 3ª consequências da semelhança de triângulos, pode-se perguntar: "A 3ª consequência é a recíproca da 2ª? Argumente."; "Considere o ponto *M* sobre o lado $\overline{AB}$, de modo que $AM = \frac{AB}{3}$. Enuncie dois resultados que sejam equivalentes aos resultados da 2ª e da 3ª consequências. Justifique."

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

A atividade resolvida **9** apresenta aplicações bastante comuns da semelhança e do teorema fundamental da semelhança para a obtenção de medidas desconhecidas. Explorá-la pode explicitar aos estudantes as situações em que mais se aplicam essas ideias.

Na atividade proposta **29**, acompanhar as resoluções dos estudantes, verificando se os triângulos criados satisfazem à condição de existência: a soma das medidas de dois lados é maior do que a medida do terceiro lado. Esse tipo de situação é bastante importante para que os estudantes compreendam que também podem elaborar problemas, e não apenas resolver os elaborados por outros.

As atividades propostas **30** e **31** representam oportunidades para avaliar os conhecimentos conceituais e procedimentais construídos pelos estudantes, pois apresentam aplicações bem diversificadas em situações-problema. Acompanhar as respostas dadas pelos estudantes nessas ocasiões é importante para verificar se é possível avançar ou se será necessário retomar algum ponto.

A atividade **32** pode ser ampliada com a construção de um pantógrafo pelos estudantes, sob supervisão, caso seja possível sua realização em sala de aula. No endereço eletrônico <https://www.youtube.com/watch?v=Ji7YorM_t_0> (acesso em: 11 jul. 2020) há um vídeo com orientações sobre essa construção, que pode ser indicado aos estudantes.

No item **b**, pode-se questionar: "Qual é a razão de semelhança?". No item **d**, sugere-se perguntar: "Que informações você usou para responder a esse item? Justifique."

Como questões complementares, sugere-se propor: "Como você usaria o pantógrafo da página 41 para reduzir uma figura dada? Explique."; "Como você usaria o pantógrafo da página 41 para ampliar uma figura dada com razão 4? Explique."; "Esboce o desenho de um pantógrafo que faça reduções/ampliações de razão 3.";

"Reúna-se a um colega e façam uma pesquisa para descobrir pelo menos dois tipos de indústria que usam ferramentas do tipo pantógrafo. Apresentem aos colegas os resultados obtidos com essa pesquisa."

CONEXÕES

Nesta seção, trabalha-se a aplicação da semelhança de triângulos em situações reais, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**.

Pode ser explorada de diversas formas, promovendo aulas em outros ambientes da escola, por exemplo. A atividade tem potencial para ser realizada em grupos e, após a conclusão, pode ser solicitado um relatório como instrumento avaliativo.

Na atividade **1**, uma resposta esperada é que no passado a alternativa para medição era o nivelamento barométrico, realizado com o barômetro, e os valores obtidos apresentavam imprecisões da ordem de metros. Com as novas tecnologias, os instrumentos de medida evoluíram em precisão, como a inserção do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e, assim, podem-se obter medidas mais precisas dos picos.

A atividade **2** pode ser realizada em duplas para favorecer a troca de ideias e percepções. No item **a**, os picos são: Picos da Neblina e 31 de março – Amazonas; Pico da Bandeira – Espírito Santo/Minas Gerais; Pico Pedra da Mina – Minas Gerais/São Paulo; Pico das Agulhas Negras – Rio de Janeiro; Pico do Cristal – Minas Gerais; Monte Roraima – Roraima. No item **b**, a resposta depende do local onde os estudantes residem.

A atividade **3** é uma aplicação da semelhança de triângulos para a determinação de uma altura inacessível. Trata-se de uma simulação do processo atribuído a Tales de Mileto para a determinação das alturas das pirâmides egípcias. Pode ser uma oportunidade para retomar esse assunto, abordado ao longo do Capítulo. Para essa questão, é esperada a resolução a seguir:

$$\frac{1{,}8}{1{,}5} = \frac{2\,995{,}3}{x} \Rightarrow 1{,}8x = 4\,492{,}95 \Rightarrow x \simeq 2\,496{,}08 \text{ m}$$

Para a atividade **4**, será necessário providenciar com antecedência pratos de plástico para a realização da atividade. Estimular os estudantes a pesquisar o procedimento indicado. Caso seja necessário, para explicar melhor esse método, compartilhar o *link* a seguir com os estudantes: <https://www.youtube.com/watch?v=eB7NCwY-7Us&t=333s> (acesso em: 29 ago. 2020).

Relações métricas no triângulo retângulo

Esse assunto geralmente também é trabalhado no Ensino Fundamental e já pode ter sido visto pelos estudantes. As relações métricas no triângulo retângulo são consequências da semelhança e são aplicadas na resolução de inúmeras situações. É importante dar destaque ao teorema de Pitágoras, à nomenclatura dos lados do triângulo retângulo e a uma de suas inúmeras demonstrações, como um dos resultados mais relevantes da geometria plana. Também é interessante demonstrar com os estudantes as relações métricas no triângulo retângulo a partir da semelhança de triângulos, contribuindo assim para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**.

ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

A atividade resolvida **10** apresenta uma aplicação do teorema de Pitágoras para determinar a diagonal de um quadrado. Se necessário, esse momento também pode ser aproveitado para falar sobre a altura de um triângulo equilátero.

Nas atividades propostas, temos uma grande variedade de aplicações das relações métricas no triângulo retângulo, permitindo abordagens diversificadas.

A atividade **38** traz uma investigação sobre as triplas pitagóricas. Explorar essa situação com outros exemplos, bem como com os números triangulares, pentagonais etc., ampliará os conhecimentos dos estudantes e pode favorecer a conexão com a história da Matemática, relacionada ao tema. A atividade proposta **40** é uma situação que exige a aplicação de diversos conceitos relacionados ao tópico estudado, bem como de outros temas já vistos no Ensino Fundamental, como área de triângulo e porcentagem.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Essas atividades são oportunidades de avaliar o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, respectivamente habilidades **EM13MAT105** e **EM13MAT308**, pelos estudantes ao longo do Capítulo, identificando pontos que ainda necessitem de retomada de conteúdo.

Esta seção permite também que os estudantes experimentem como os temas estudados neste Capítulo aparecem em avaliações externas, como o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) e os vestibulares.

Isso pode ser observado, por exemplo, na situação da atividade complementar **6**. Esta é uma questão do Enem que requer a aplicação de conceitos vistos no Capítulo, como rotações.

PARA REFLETIR

Explorar com os estudantes a seção final do Capítulo é uma oportunidade para promover a reflexão individual, uma síntese do próprio processo de aprendizagem. Ela pode, também, ser utilizada como uma autoavaliação. Várias estratégias podem ser desenvolvidas, como um diálogo coletivo sobre as aprendizagens ou breves apresentações das sínteses em forma de seminário. Outra estratégia que pode ser promovida é a utilização de rubricas: os tópicos podem ser copiados no caderno e, para cada um deles, os estudantes podem assinalar sua percepção em relação ao que aprenderam. Por exemplo, podem ser propostos os seguintes níveis: Ainda preciso aprender mais./Estou satisfeito com meu aprendizado./Aprendi bastante e consigo ajudar outros colegas a aprender.

Esse momento contribui para o desenvolvimento da autopercepção e da autonomia, pois compreender os avanços e as dificuldades é uma maneira de os estudantes se integrarem ao processo de aprendizagem de forma responsável e comprometida. Além disso, essa reflexão explicita a necessidade de retomada e/ou aprofundamento de alguns dos tópicos estudados.

CAPÍTULO 2

Trigonometria no triângulo

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades, e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

- **Competências gerais:** 2, 3, 5, 7 e 9
- **Competências específicas e habilidades:**
  Área de Matemática e suas Tecnologias
  - Competência específica 3: **EM13MAT307** e **EM13MAT308**

  Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 1
- **Temas Contemporâneos Transversais:**
  - Direitos da Criança e do Adolescente e Educação Ambiental.

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

O tema da abertura do Capítulo pode ser explorado de modo a instigar a curiosidade dos estudantes para situações que envolvam o uso do teodolito em atividades profissionais, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **2**. Se for possível, convidar um profissional que faz uso desse instrumento em seu cotidiano para que os estudantes o entrevistem. Para isso, é interessante mediar a elaboração prévia de perguntas que serão feitas por eles.

Outra estratégia interessante que pode ser realizada com o tema de abertura é a construção e a utilização de um teodolito artesanal, com a finalidade de os estudantes conhecerem esse instrumento de forma prática e vivencial. No endereço eletrônico <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12635> (acesso em: 30 ago. 2020), há um roteiro com a descrição de uma atividade que contribuirá para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

As questões da abertura podem ser utilizadas para promover um diálogo inicial sobre os conceitos do Capítulo. Promover uma socialização das respostas, permitindo um tempo em aula para que os estudantes realizem as pesquisas propostas e depois compartilhem o que pesquisaram e o que conhecem sobre o tema.

Na atividade **1**, pode ser dada uma resposta pessoal, mas é importante destacar que, atualmente, é comum ver profissionais utilizando o teodolito na demarcação de terras, na construção de estradas e no mapeamento de localidades urbanas. Espera-se que os estudantes encontrem, em suas pesquisas, informações sobre aparelhos antigos, como a groma e o astrolábio, precursores do teodolito, criado em 1720 por Jonathan Sisson. (Fonte dos dados: ZILKHA, E. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos**: teodolito. Rio de Janeiro: Impa, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/esther_zilkha.pdf. Acesso em: 30 ago. 2020.)

Para a atividade **2**, no cálculo de distâncias desconhecidas, os profissionais utilizam o teodolito a fim de medir os ângulos horizontais e verticais. Por meio desses ângulos, é possível realizar cálculos trigonométricos para encontrar tais distâncias. Ressaltar que os teodolitos mecânicos obrigam seus usuários a anotar os dados e fazer os cálculos manualmente; já os mais modernos, os teodolitos eletrônicos, informam as distâncias. A utilização do teodolito depende do conhecimento do profissional e, geralmente, são necessárias duas pessoas para operá-lo: um observador e um auxiliador.

Para a resposta da atividade **3**, espera-se que os estudantes encontrem informações similares a estas: a Topografia é a ciência que estuda os acidentes geográficos, como declives de terrenos e erosões, não apenas na Terra, mas também em outros planetas, por meio de observações espaciais e modelagens; a Cartografia se encarrega de produzir mapas a partir do conhecimento da geografia de uma região.

Na atividade **4**, é esperado que os estudantes relacionem o ângulo de observação com a posição do observador e a posição do que é observado. Pode-se definir ângulo de observação como o ângulo formado entre a reta suporte do feixe luminoso que passa pelo ponto observado e chega aos olhos do observador e a reta horizontal ou vertical entre o observador e o ponto observado, gerando, assim, uma representação dada por um triângulo retângulo.

Introdução

O assunto abordado fornece informações sobre a importância da Trigonometria e seus procedimentos de cálculo ao longo da história, e pode ser explorado para estabelecer relação com toda a discussão promovida durante a abertura do Capítulo.

O trabalho indicado a seguir fornecerá mais subsídios para o desenvolvimento das atividades e discussões.

- GAIESKI, R. V. **Trigonometria e aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014. Disponível em: http://sites.uem.br/profmat/reges_gaieski.pdf. Acesso em: 30 ago. 2020.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Ao abordar o tópico, retomar as relações métricas estudadas no Capítulo anterior, destacando as relações entre as medidas dos comprimentos da hipotenusa, dos catetos, da altura e das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, obtidas por meio da semelhança de triângulos. A noção de **razões trigonométricas no triângulo retângulo** apoia-se nos padrões numéricos observados nas relações estabelecidas entre as medidas dos lados e dos ângulos.

Neste Capítulo, é proposta uma abordagem que permite articulação com um dos Temas Contemporâneos Transversais sobre **Direitos da Criança e do Adolescente**, além de ser uma oportunidade que contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**. Os conteúdos abordados neste Capítulo dão suporte para o trabalho com a habilidade **EM13MAT306** no Capítulo **4** deste Volume.

O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), sancionado em 13 de julho de 1990, estabelece, entre outros itens, o direito à educação de todas as crianças e adolescentes, sem discriminação de qualquer natureza. Isso inclui as pessoas com deficiência, entre elas, aquelas que fazem uso de cadeira de rodas, chamadas de cadeirantes. No *link* <https://www.gov.br/mdh/pt-br/centrais-de-conteudo/crianca-e-adolescente/estatuto-da-crianca-e-do-adolescente-versao-2019.pdf> (acesso em: 30 ago. 2020), é possível ter acesso ao texto do ECA na íntegra. No texto do **Livro do estudante** está em destaque a questão da inclusão das pessoas com deficiência, em especial das cadeirantes, tanto no ambiente escolar como em espaços públicos, como ruas, parques, entre outros, especificamente no que se refere à estrutura física do ambiente, pela instalação e utilização de rampas de acesso.

As questões propostas no primeiro boxe **Pense e responda** desse tópico podem promover uma análise do ponto de vista técnico da construção de rampas de acessibilidade, para o qual existe a norma NBR 9050 (o texto da norma pode ser acessado por meio do *link* <https://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/upload/ABNT%20 9050%202015.pdf> (acesso em: 30 ago. 2020)), além da exploração da ideia de seno, cosseno e tangente como razões e taxas de variação entre duas medidas. Espera-se que os estudantes concluam que, se a medida do ângulo que a rampa forma com a horizontal for muito grande, a rampa ficará muito íngreme e sem condições de uso, pois nem pedestres nem cadeirantes conseguirão subi-la. Por isso, é necessário que haja uma norma para delimitar o ângulo máximo de inclinação da rampa de modo que ela seja, de fato, acessível.

No segundo boxe **Pense e responda**, há uma questão sobre a razão relacionada com a inclinação da rampa. Nesse caso, espera-se que os estudantes concluam que a cada 1 cm da altura do desnível são necessários 10 cm de comprimento horizontal da rampa. Já o terceiro boxe **Pense e responda** trabalha as razões trigonométricas, tomando como referência o ângulo β. Se necessário, auxilie os estudantes a determinar as razões solicitadas.

Após tratar as **relações entre razões trigonométricas**, com destaque para a relação fundamental da Trigonometria, é importante retomar a situação do agrimensor proposta no boxe **Pense e responda**. A seguir, apresentamos uma sugestão de resolução, que pode ser explorada com os estudantes:

Considerando, $\text{tg}(50°) = 1{,}192$ e $\text{tg}(41°) = 0{,}869$, valores que podem ser obtidos em uma calculadora científica ou uma tábua trigonométrica, por exemplo, tem-se:

No $\triangle ABD$: $\text{tg}\ 50° = \dfrac{h}{AB} \Rightarrow h = 1{,}192 \cdot AB$ (I)

No $\triangle ACD$: $\text{tg}\ 41° = \dfrac{h}{AB + 20} \Rightarrow h = 0{,}869 \cdot AB + 17{,}38$ (II)

Igualando (I) e (II): $1{,}92 \cdot AB = 0{,}869 \cdot AB + 17{,}38 \Rightarrow AB = \dfrac{17{,}38}{0{,}323} \simeq 53{,}81$

Logo, $h \simeq 64{,}1$ m.

ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Na atividade resolvida **1**, há uma boa oportunidade para retomar e destacar a importância do conceito de frações equivalentes. Uma situação que apresenta relação com os contextos práticos estudados até aqui é a apresentada na atividade resolvida **2**, que simula a utilização do teodolito. Na atividade resolvida **4**, é importante lembrar que a função sen^{-1} é a função inversa da função seno, chamada de arcsen, e não o inverso do valor do seno. Todas essas situações são representativas da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**.

A atividade proposta **1** também oferece uma oportunidade para explorar um pouco mais a situação da construção de uma rampa. A atividade **7** requer a utilização de uma calculadora científica, permitindo aos estudantes que vivenciem outra situação em que se faz necessário o apoio de um equipamento tecnológico para contribuir com os cálculos, simulando contextos de aplicações reais da Trigonometria.

Incentivar e acompanhar as produções dos estudantes na resolução da atividade **15**. O problema a ser elaborado deve ter um contexto diferente do anterior, mas deve envolver o mesmo esquema formando o triângulo *ABC* com a pessoa em *A* e os *drones* em *B* e *C*. As medidas devem ser diferentes daquelas utilizadas na atividade anterior.

FÓRUM

Essa seção apresenta uma oportunidade para que os estudantes pesquisem e promovam discussões entre os pares e com professores de outras áreas do conhecimento em uma oportunidade de trabalho multidisciplinar. Podem ser organizados pequenos seminários e momentos de exposição das ideias dos estudantes.

O desenvolvimento da competência geral **5** é favorecido à medida que se compreende que a tecnologia digital dos *drones* é usada para a obtenção de informações de monitoramento de áreas, especialmente áreas de difícil acesso. As competências gerais **7** e **9** são contempladas ao se realizar atividade em grupo e promover o debate, o que permite exercitar a argumentação, a defesa de ideias e pontos de vista, a consciência socioambiental e de cuidado com o planeta, a empatia, o diálogo e a cooperação entre os estudantes. A discussão sobre o tema desmatamento também contribui para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, bem como do Tema Contemporâneo Transversal **Educação Ambiental**.

Para contribuir com a pesquisa proposta na atividade dessa seção, podem ser sugeridas aos estudantes algumas fontes para complementar as informações sobre as Unidades de Conservação. Algumas sugestões são os *links*:

- BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. ICMBio. **Planos de manejo**. Brasília, DF, c2020. Disponível em: https://www.icmbio.gov.br/portal/unidadesdeconservacao/planos-de-manejo. Acesso em: 30 ago. 2020.
- BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Plano de manejo**. Brasília, DF, c2020. Disponível em: https://www.mma.gov.br/areas-protegidas/unidades-de-conservacao/plano-de-manejo.html. Acesso em: 30 ago. 2020.
- O QUE SÃO unidades de conservação. **O Eco**, 19 abr. 2013. Disponível em: https://www.oeco.org.br/dicionario-ambiental/27099-o-que-sao-unidades-de-conservacao/. Acesso em: 30 ago. 2020.
- O QUE SÃO unidades de conservação? **Toda Matéria**, 16 jul. 2019. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/unidades-de-conservacao/. Acesso em: 30 ago. 2020.

No trabalho com o tópico **Ângulos de 30°, de 45° e de 60°** verificar, inicialmente, se os estudantes já conhecem algo relacionado a essa temática. Se possível, organizar breves momentos para que eles apresentem uns aos outros as formas de se obter os valores, observando se compreenderam os cálculos desenvolvidos em cada caso. Sugere-se propor a questão: "Observe que, conhecidos o seno, o cosseno e a tangente de 30°, ficam também determinados o seno, o cosseno e a tangente de 60°. Por quê? Justifique." Pode-se, ainda, solicitar aos estudantes que, em duplas, elaborem dois fluxogramas diferentes, cujas instruções permitam a construção, com régua não graduada e compasso, de dois triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo de 30°. A ideia de pedir dois fluxogramas diferentes está relacionada ao fato de possibilitar aos estudantes uma reflexão sobre como usar conhecimentos matemáticos amparados em diferentes conceitos. Eles poderão, por exemplo, utilizar o que está sendo verificado no estudo de Trigonometria (nesse caso, construindo um segmento de meia unidade de comprimento, perpendicular a uma reta suporte e, posteriormente, construindo a hipotenusa do triângulo, com uma unidade de comprimento, intersectando a reta suporte mencionada anteriormente, determinando o outro cateto do triângulo, utilizando nessa construção o fato de que sen $30° = \frac{1}{2}$); ou ainda, utilizar a construção do triângulo equilátero para obter um ângulo de 60° e, com isso, determinar o ângulo de 30°. Incentive os estudantes a compartilhar as soluções para essa atividade.

O boxe **Pense e responda** apresenta uma questão interessante que relaciona a Trigonometria com a Geometria Plana: a figura questionada é o quadrado. As razões trigonométricas podem ser obtidas traçando-se uma das diagonais do quadrado. Desse modo, ele ficará dividido em dois triângulos retângulos isósceles, e os cálculos seguem como apresentado no **Livro do estudante**.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Explorar as aplicações apresentadas nas atividades resolvidas, destacando o fato de que os enunciados, em geral, não fornecem os valores das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, de 45° e de 60°.

As atividades propostas oferecem situações diversas de aplicações, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT308**.

Na atividade **26**, os estudantes, primeiro, podem assistir ao vídeo antes da aula, reunir os materiais necessários e trazê-los para a aula, durante a qual montarão seus teodolitos. Caso tenham dificuldade de obter os materiais ou na montagem, uma opção é construir um modelo mais simples, com transferidores e canudos (de preferência, com materiais recicláveis ou biodegradáveis), cujas instruções para montagem podem ser consultadas em:

- BRAGA, A. de A. **Relações trigonométricas**. Plano de trabalho. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/012016/be8360045b5c203d7201b2140480d1e4.pdf. Acesso em: 30 ago. 2020.

Durante a aula, os estudantes podem selecionar pontos, como: altura de uma árvore, altura dos prédios, comprimento da quadra, entre outros. Os cálculos serão realizados por meio das razões trigonométricas do triângulo retângulo. Se possível, seria muito interessante que as medidas reais fossem apresentadas posteriormente para que os estudantes comparem com os resultados que obtiveram em suas medidas e cálculos com o teodolito construído por eles. No caso de resultados muito diferentes das medidas reais, podem ter existido erros de observação, de cálculo ou mesmo na construção do equipamento.

O professor de Geografia, da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, também pode utilizar o teodolito em suas aulas para discutir a respeito dos acidentes geográficos e da importância de conhecer o local, especialmente, em casos de construção de casas e edifícios.

Seguem algumas sugestões de leitura que podem subsidiar o trabalho:

- NASCIMENTO FILHO, A. R.; SANTOS, R. E. dos; SILVA, T. de J. E. dos S. **Aplicações do teodolito caseiro e virtual no ensino da trigonometria**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Unifap, Vitória do Jari, 2015. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/TCC-FINALIZADO.pdf. Acesso em: 30 ago. 2020.

Nesse *link* os autores discutem como utilizar um teodolito caseiro em aulas de Trigonometria.

- SOARES, M. Z. M. C. *et al*. A altura da árvore: experimento. **Matemática Multimídia**, c2020. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/994. Acesso em: 30 ago. 2020.

Nessa proposta, os professores encontram material para realizar um experimento em sala de aula, que trabalha a função tangente, alturas e ângulos.

> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Essa seção é uma oportunidade para promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados ao uso de recursos tecnológicos informatizados disponíveis, proporcionando novas formas de resolver uma atividade. Auxilia no desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias** ao promover uma experiência que faz uso de tecnologia para facilitar a aprendizagem. O cálculo das razões trigonométricas com base na semelhança de triângulos, na prática, por meio da utilização do aplicativo sugerido, permite aos estudantes que consigam resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos em diferentes contextos com maior desenvoltura. Essa atividade contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EF13MAT308**.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes indiquem o caso de semelhança AA (ângulo-ângulo), que se justifica, pois os ângulos $C\hat{A}B$ e $D\hat{A}E$ são congruentes e os ângulos $C\hat{B}A$ e $D\hat{E}A$ são retos. Na atividade **2**, os triângulos ABC e AED são retângulos. Na atividade **3**, f e j representam a razão trigonométrica seno, entre o cateto oposto e a hipotenusa; g e k representam a razão trigonométrica cosseno, entre o cateto adjacente e a hipotenusa; i e l representam a razão trigonométrica tangente, entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Todas tomando como referência os ângulos congruentes $C\hat{A}B$ e $D\hat{A}E$ permitindo que se conclua que são constantes, mantendo-se a medida do ângulo. Para a atividade **4**, espera-se que os estudantes notem que o elemento da construção que se altera ao movimentarmos o controle h é o ângulo $C\hat{A}B$, mudando os valores das razões trigonométricas.

Para concluir, tomando como referência o ângulo $D\hat{A}E$ do triângulo *ADE*, esperam-se as seguintes respostas na atividade **5**:

$$f = \text{sen}\,(DAE) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$g = \cos\,(DAE) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$i = tg\,(DAE) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Caso haja tempo disponível e interesse dos estudantes, sugerir mais uma atividade no GeoGebra: a construção de um teodolito virtual que permite medições de objetos em cenário virtual em 3D. As instruções podem ser consultadas em:

- ZILKHA, E. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos**: teodolito. Rio de Janeiro: Impa, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/esther_zilkha.pdf. Acesso em: 30 ago. 2020.

> CONEXÕES

A seção **Conexões** oferece possibilidades interessantes para explorar temas diversos e promover a interdisciplinaridade, quando possível. Contribui também para desenvolver a competência leitora e o senso crítico, capacidades essenciais para a participação cidadã dos estudantes, relacionadas às competências gerais e específicas da BNCC.

Nesse caso, a proposta é trabalhar aplicações da Trigonometria em situações reais, contribuindo para o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3** e **9**, quando se recorre à abordagem própria da Matemática para resolver problemas e criar uma solução tecnológica para a construção da pista de *skate*. Os textos e as atividades apresentados nessa seção valorizam a manifestação do *skate* como esporte, a cultura de rua e a arte, não só da técnica envolvida na marcenaria, mas também como a destreza nos movimentos, além de exercitar o diálogo, o respeito e a cooperação na atividade em grupo.

A atividade tem ainda potencial como instrumento avaliativo, pois, após a conclusão, pode ser solicitado um relatório com breves apresentações das produções. Na atividade **1**, é esperada uma resposta pessoal, baseada nas pesquisas e na socialização de ideias. A atividade **2** pode ser resolvida aplicando-se o teorema de Pitágoras: $(1{,}5)^2 + (2{,}2)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 7{,}09 \Rightarrow x \simeq 2{,}66$. Para a atividade **3**, pode ser mostrada aos estudantes a construção de algumas pistas feitas com material reciclável, encontrada no seguinte artigo:

- SILVA, A. L. da *et al*. *SKATE* de dedo e as relações trigonométricas no triângulo retângulo. *In*: ENCONTRO NACIONAL DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII. **Relato de experiência** [...]. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4985_2348_ID.pdf. Acesso em: 30 ago. 2020.

A seguir, outros *links* sobre o assunto, que podem subsidiar o trabalho proposto nessa atividade:

- *Site* que reúne imagens, vídeos e informações sobre quinze pistas de *skate* em cidades brasileiras: <http://blog.casadoskatista.com.br/15-pistas-de-skate-mais-insanas/>;
- *Site* da Confederação Brasileira de *Skate*, com informações sobre torneios, regulamentos etc.: <http://www.cbsk.com.br/>. (Acessos em: 30 ago. 2020).

Seno e cosseno de ângulos suplementares

Nesse item, são discutidas as relações trigonométricas de ângulos maiores do que 90°. Uma alternativa que pode auxiliar os estudantes a verificar os resultados apresentados é a utilização do GeoGebra para representar os ângulos, manipulando as medidas e comparando as razões obtidas.

Lei dos cossenos

Antes de abordar o tópico **Lei dos cossenos** com os estudantes, é importante retomar as relações entre **senos e cossenos de ângulos suplementares**. Para isso, alguns exemplos numéricos relacionados aos ângulos notáveis podem ser comentados brevemente. Explorar as demonstrações da lei dos cossenos é importante para que os estudantes compreendam o encadeamento das noções matemáticas envolvidas. É importante destacar que essa lei pode ser aplicada a qualquer triângulo.

Se possível, em parceria com o professor de Física da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, pode ser comentada a “regra do paralelogramo”, usada para calcular o módulo do vetor resultante entre dois vetores conhecidos, conforme pode-se ver no *link* <http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/vetores/somar/> (acesso em: 30 ago. 2020). Essa regra é utilizada, por exemplo, ao calcular a intensidade da força resultante de duas outras forças em Física. É interessante solicitar aos estudantes que façam um esboço dessa situação.

ATIVIDADE RESOLVIDA E ATIVIDADES

A atividade resolvida apresenta uma situação de aplicação da expressão da lei dos cossenos.

As atividades propostas oferecem uma grande diversidade de aplicações da lei dos cossenos e devem ser exploradas para sistematização do conteúdo.

Atenção especial deve ser dada aos estudantes no momento da resolução da atividade **30**, que é irresolúvel por falta de um dado. Observar se os estudantes estão atentos a isso. É interessante verificar esse fato utilizando o GeoGebra. Ao construir um paralelogramo $ACDC'$, tal que $AC = DC'$ e $AD = 37^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ e movimentar o ponto D, observa-se que os ângulos mudam.

Lei dos senos

Dando continuidade às aplicações da Trigonometria em triângulos que não sejam retângulos, explorar a demonstração da **lei dos senos** com os estudantes, destacando a relação com o diâmetro (2*R*) de uma circunferência.

Ainda como complementação aos tópicos sobre as leis do cosseno e do seno, procurar enfatizar para os estudantes que essas relações ampliam as possibilidades de resolução de problemas envolvendo Trigonometria em triângulos quaisquer. Comentar também que, considerando um triângulo qualquer, em geral, a lei dos cossenos pode ser aplicada quando são conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo formado entre eles, e a lei dos senos pode ser aplicada quando são conhecidos dois ângulos e a medida do lado compreendido entre esses ângulos. Essa diferenciação na aplicação de ambas as leis pode auxiliar os estudantes na resolução de muitas situações-problema.

> ATIVIDADE RESOLVIDA E ATIVIDADES

A atividade resolvida apresenta exatamente a consideração feita anteriormente sobre a aplicação da lei dos senos. Destacar esse fato para os estudantes. Sugere-se, ainda, propor a questão: "Você conhece algum outro resultado de Geometria que permite concluir isso, sem usar a lei dos senos? Argumente." Os estudantes devem ter estudado no Ensino Fundamental que ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa. Assim, é possível concluir que $AC > BC$, porque $64° > 50°$.

As atividades propostas apresentam situações de aplicação da lei dos senos. Na atividade **39**, por exemplo, percebe-se a consideração feita anteriormente sobre a aplicação da lei dos senos.

Área de um triângulo qualquer

Uma importante aplicação da Trigonometria é o cálculo da área de um triângulo a partir da medida de dois de seus lados e do seno do ângulo formado entre eles. A demonstração é relativamente simples e pode ser explorada com os estudantes. Essa noção representa uma ampliação em relação ao que os estudantes já conhecem sobre o cálculo da área de um triângulo como sendo a metade do produto entre as medidas de sua base e de sua altura, permitindo aplicações na resolução de outras situações-problema. Com isso, é trabalhado o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT307**.

> ATIVIDADE RESOLVIDA E ATIVIDADES

A atividade resolvida oferece uma possibilidade de aplicação do cálculo da área de um triângulo qualquer utilizando a Trigonometria e o conhecimento dos ângulos notáveis.

As atividades complementam o estudo de aplicação da fórmula em diversas situações.

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Nessa seção, há uma grande variedade de aplicações dos conceitos estudados, permitindo abordagens diversificadas e configurando-se uma oportunidade para avaliar o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT307** e **EM13MAT308** pelos estudantes ao longo do Capítulo, identificando pontos que ainda necessitem de retomada. Solicitar aos estudantes que resolvam as atividades em grupos e, posteriormente, socializem as respostas com a turma. Esse trabalho, desenvolvido em grupo, pode também figurar como uma avaliação do processo de aprendizagem dos estudantes, no qual eles também poderão verificar se precisam retomar algum conceito que necessite ser mais bem trabalhado, bem como esclarecer dúvidas.

As atividades **7**, **11** e **18** podem ser destacadas, pois remetem a situações reais de aplicação das relações trigonométricas, além de servirem de exemplo de como os conceitos estudados neste Capítulo aparecem em avaliações externas, como vestibulares e o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Na atividade **7**, chamar a atenção para a apresentação de dados no enunciado, que não são utilizados na resolução, o que contribui para que o estudante desenvolva a percepção, reflita sobre dados e analise de maneira crítica as informações contidas nas situações a serem resolvidas, como prevê a competência geral **2**.

Na atividade **9**, pedir aos estudantes que observem se o esquema está bem desenhado, porque o trecho superior é menos inclinado que o inferior.

PARA REFLETIR

Explorar com os estudantes a seção final do Capítulo é uma oportunidade para promover a reflexão individual e uma síntese em relação a seu próprio processo de aprendizagem. Essa seção pode também ser trabalhada como uma autoavaliação. Podem ser desenvolvidas várias estratégias de trabalho: um diálogo coletivo sobre as aprendizagens ou breves apresentações das sínteses em forma de seminário, por exemplo. Incentivar momentos de socialização dos conhecimentos adquiridos, permitindo que alguns estudantes apresentem suas conclusões, elaboradas por eles mesmos, o que contribui para desenvolver competências relacionadas à argumentação, à oratória e à capacidade de expor ideias publicamente.

Esse momento também contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, além da autopercepção e da autonomia, pois compreender seus próprios avanços e dificuldades é uma maneira de se integrar ao processo de aprendizagem de forma responsável e comprometida. Além disso, explicita a necessidade de retomada e/ou aprofundamento de alguns dos tópicos estudados.

Especificamente neste Capítulo, espera-se que os estudantes reconheçam a aplicação das razões trigonométricas na obtenção de medidas inacessíveis, diretamente ou na construção civil. É esperado que consigam expressar seno, cosseno e tangente por meio das razões que as representam. Também é importante acompanhar se, nos relatos dos estudantes, são estabelecidas relações com a atividade usando o GeoGebra, caso tenha sido possível realizá-la.

CAPÍTULO 3

Razões trigonométricas na circunferência

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas, habilidades e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

- **Competências gerais:** 1, 4 e 7
- **Competências específicas e habilidades:**
  Área de Matemática e suas Tecnologias
  - Competência específica 3: **EM13MAT306**

  Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 2
- **Temas Contemporâneos Transversais:**
  - Ciência e Tecnologia
  - Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

O tema da abertura do capítulo pode ser explorado com atividades que permitam aos estudantes estabelecer relações nas perspectivas técnica, científica e histórica, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **1**. Os *links* indicados nas sugestões de leitura para o professor apresentam algumas possibilidades de atividades que complementam esse estudo. Pode ser interessante aos estudantes explorar aspectos históricos do astrolábio e visualizar articulações com os aspectos matemáticos, particularmente com a Trigonometria e com o uso do teodolito, assuntos estudados no Capítulo **2** deste Volume.

As atividades propostas na abertura podem ser utilizadas para promover um diálogo inicial sobre os conceitos do Capítulo, contribuindo para sistematizar conhecimentos adquiridos durante a realização das atividades com o astrolábio. Promover uma socialização das respostas, permitindo espaço em aula para que os estudantes expressem o que descobriram e suas reflexões sobre o tema.

Na atividade **1**, pode ser dada uma resposta pessoal, mas espera-se que os estudantes encontrem, em suas pesquisas, informações sobre aparelhos antigos, como a groma e o astrolábio, que são precursores do teodolito, criado em 1720 por Jonathan Sisson. (Fonte dos dados: ZILKHA, E. **Utilização do GeoGebra na construção de instrumentos**:

teodolito. Rio de Janeiro: Profmat-Impa, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/esther_zilkha.pdf. Acesso em: 31 ago. 2020.)

Para a atividade **2**, espera-se que os estudantes elaborem explicações com base nos conhecimentos deles sobre Trigonometria, particularmente sobre a tangente, para os cálculos das distâncias feitos pelos navegadores no período das Grande Navegações.

Caso seja possível, pode ainda ser estimulada uma discussão sobre os avanços tecnológicos ao longo dos séculos, comparando o uso do astrolábio e o funcionamento dos equipamentos modernos de localização, como o GPS (*Global Positioning System*). Essa estratégia pode contribuir para um estudo relacionado ao Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia**.

Sugestões de leitura para o professor:

- 1001 INVENTIONS. **Guia de atividades para o professor para Ensino Fundamental II e Médio**. Disponível em: http://www.1001inventions.com/files/teachers_guide_brazil.pdf. Acesso em: 31 ago. 2020.
  Material com atividades diversas sobre Ciência e Astronomia. Na página 23 desse material, há instruções para a construção de um astrolábio simples.
- BRINCANDO com trigonometria: oficinas: obtendo medidas inacessíveis. **Clubes de Matemática da OBMEP**, c2020. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-oficinas-obtendo-medidas-inacessiveis/. Acesso em: 31 ago. 2020. No endereço eletrônico, pode-se ver uma sequência de atividades práticas para explorar o uso da Trigonometria para o cálculo de medidas inacessíveis diretamente.

Introdução

O assunto abordado na **Introdução** e desenvolvido ao longo dos tópicos relacionados aos **arcos de circunferência** fornece importantes noções para as compreensões das ideias essenciais do Capítulo.

Sugere-se o uso do livro dinâmico sobre Trigonometria disponível em: <https://www.geogebra.org/m/M3vta5Uv> (acesso em: 31 ago. 2020). É possível utilizá-lo ao longo de todo este Capítulo e no próximo, sobre funções trigonométricas. É possível solicitar aos estudantes que façam as atividades do *link* em casa, antes da aula, trabalhando com o conceito de sala de aula invertida (metodologia ativa). O uso da geometria dinâmica para investigar padrões e desenvolver conjecturas contribui para a construção e apropriação de conhecimentos por parte do estudante, que pode desempenhar um papel autônomo em relação ao processo de aprendizagem.

Os temas desenvolvidos neste Capítulo fomentam o trabalho com funções trigonométricas que será desenvolvido no próximo Capítulo, ligado ao desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT306**.

Arcos de circunferência

É importante verificar se os estudantes compreenderam a identificação dos dois arcos definidos por dois pontos distintos de uma circunferência. Sugere-se propor exemplos para que tornar clara essa definição.

Ângulo central

Relacionar o conceito de ângulo central ao de arco de circunferência é fundamental para a compreensão dos temas deste Capítulo, entretanto, pode não ser óbvio quando essas definições estão aplicadas em situações-problema. Explore com os estudantes os exemplos apresentados e peça a eles que construam no caderno circunferências, representando ângulos centrais de diferentes medidas e destacando os arcos correspondentes. Se possível, explorar também essas representações utilizando *softwares* de geometria dinâmica.

Medida e comprimento de arcos de circunferência

Ao explorar o boxe **Pense e responda** desse tópico, espera-se que os estudantes compreendam que o comprimento do arco depende do raio da circunferência, pois, quanto maior o raio, maior o comprimento do arco subtendido pelo mesmo ângulo central. Já a medida angular depende apenas do **ângulo central**. Na imagem, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ indicados têm mesma medida angular, mas comprimentos diferentes.

Unidades de medida de arcos de circunferência

É importante certificar-se de que os estudantes compreendam as unidades de medida **grau** e **radiano**. A exploração das questões apresentadas no primeiro boxe **Pense e responda** pode colaborar para isso ao esclarecer que $1° = 60$ min, 1 min $= 60$ s e $1° = 3600$ s. Depois de apresentar a definição de **radiano**, discutir as questões propostas no segundo boxe **Pense e responda** desse tópico, cujas respostas são: 3 rad, $5r$, $x \cdot r$ e aproximadamente 57°. Os três primeiros itens desse boxe têm o objetivo de auxiliar os estudantes a compreender a definição de radiano e conseguir generalizar para uma abertura de ângulo central qualquer. Isso auxiliará no desenvolvimento da relação entre o grau e o radiano. O quarto item do boxe faz que os estudantes verifiquem, experimentalmente, a equivalência de 1 radiano em grau.

No terceiro boxe **Pense e responda**, uma resposta possível para as questões apresentadas é dividir por 2 os valores em radiano e os respectivos valores em grau. Espera-se que os estudantes percebam a proporcionalidade existente nas relações. Por exemplo, π é metade de 2π, então, para determinar o equivalente em grau, dividimos 360° por 2, obtendo 180°. No quarto boxe **Pense e responda**, a resolução da atividade é dada por:

$$\begin{array}{lcc} \pi \text{ rad} & \text{——} & 180° \\ 1 \text{ rad} & \text{——} & x \end{array} \qquad \text{Logo, } x = \frac{180°}{\pi} \simeq 57{,}29°$$

Auxiliar os estudantes caso tenham dificuldade em organizar o cálculo. Orientar que, embora muitas vezes deixamos os resultados expressos em função de π, neste caso, é preciso substituir por um valor aproximado para obter o valor final. Caso estejam trabalhando com a calculadora simples, podem utilizar a aproximação $\pi \simeq 3,14$. Neste caso, o resultado obtido será 57,32.

O cálculo realizado resulta 1 rad $\simeq 57{,}3°$.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas e propostas oferecem situações para que as relações entre grau e radiano fiquem consolidadas, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT306**.

A atividade proposta **2** é uma oportunidade para que os estudantes troquem ideias em duplas sobre as possibilidades de resolução. Ao compartilhar o raciocínio utilizado, os estudantes são convidados a revisitar a resolução que fizeram e explicá-la ao colega. Com isso, a argumentação é trabalhada e o estudante precisa encadear o raciocínio feito para conseguir explicar. Assim, é possível que os próprios estudantes percebam incorreções ao longo da execução da atividade ou confirmem o resultado obtido. Essa atividade contribui para o desenvolvimento da competência geral **4**. Quanto ao resultado, alguns estudantes podem ter feito os cálculos em grau e no final transformado em radiano, enquanto outros podem ter feito os cálculos direto usando os ângulos em radiano. A atividade proposta **6** faz relação com o relógio de pêndulo e pode oferecer uma oportunidade para aprofundamento em parceria com um professor de Física, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Sugere-se pedir aos estudantes que pesquisem um pouco mais sobre pêndulos e descubram a importância de se expressar a medida de ângulos em radiano.

FÓRUM

Esta seção propõe uma atividade de pesquisa e debate que busca contribuir para o desenvolvimento da competência geral **7** e do Tema Contemporâneo Transversal **Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso**. O Estatuto do Idoso, como é conhecida a Lei 10.741/2003, visa à garantia dos direitos assegurados às pessoas com idade igual ou superior a 60 anos, abordando questões familiares, de saúde, discriminação e violência contra o idoso. No *link* <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.741.htm> (acesso em: 31 ago. 2020), tem-se acesso ao texto integral do estatuto. A respostas para as questões propostas são pessoais e dependem da cidade onde os estudantes residem, mas espera-se que compreendam a importância de a sociedade oferecer condições e possibilidades para que os idosos possam se manter ocupados e ativos para a manutenção da saúde física e mental. Para isso, além das atividades já mencionadas, os estudantes podem citar viagens, convivência com familiares e amigos, entre outras.

Circunferência orientada

Dando continuidade ao tema do Capítulo, no tópico **Circunferência orientada**, os estudantes verificam que são estabelecidos os sentidos (anti-horário e horário) e os respectivos sinais (positivo e negativo) para a localização de arcos na circunferência trigonométrica. Auxilie-os a analisar os exemplos apresentados, esclarecendo eventuais dúvidas.

Circunferência trigonométrica

É importante destacar que a circunferência trigonométrica é a circunferência orientada com um sistema de eixos em seu centro, o que estabelece os quadrantes do ciclo.

No boxe **Pense e responda** desse tópico, são abordadas as coordenadas de pontos no ciclo trigonométrico. A resposta para essa questão é $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ e $D(0, -1)$.

Arcos côngruos

Um tópico a ser destacado é o que trata sobre os arcos côngruos, pois a compreensão dessa noção também está relacionada com o tema estudado no Capítulo **4** deste Volume. No primeiro boxe **Pense e responda** a resposta para a questão proposta é porque 2π é o comprimento da circunferência trigonométrica (que tem raio unitário).

Na sequência do estudo dos arcos, o segundo boxe **Pense e responda** desse tópico propõe algumas questões para reflexão. A resposta para a primeira questão é que o arco obtido ao fazer $k = 0$ na expressão dos arcos côngruos é a 1ª determinação positiva dos arcos côngruos a ele. Na segunda questão, quando k é um valor negativo, deve-se percorrer a circunferência no sentido horário para obter a extremidade do arco. Na terceira, o arco côngruo a $\frac{\pi}{3}$ na segunda volta negativa é $-\frac{11\pi}{3}$. Para chegar a essa conclusão, os estudantes podem substituir $k = -2$ na expressão geral dos arcos côngruos, fazendo $\frac{\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{11\pi}{3}$, ou utilizar a circunferência trigonométrica para localizar o ângulo e determinar a sua medida. Se possível, promover um momento de compartilhamento das estratégias.

Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

Esse tópico deve ser explorado para consolidar a compreensão acerca da representação de arcos de qualquer valor numérico, sendo esse um dos objetivos de estudo deste Capítulo.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas e propostas oferecem diversas situações que contribuem para a compreensão das noções de arcos côngruos e de 1ª determinação positiva, tanto em grau quanto em radiano. Explorar essas situações com os estudantes contribuirá para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT306**. Recomenda-se, sempre que possível, utilizar um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, para verificar os resultados obtidos nas atividades.

Das atividades propostas, destaca-se a atividade **11**, que, ao ser realizada em duplas, propõe uma troca de ideias sobre a sua resolução. As demais atividades reforçam os conceitos estudados. Verificar se os estudantes demonstram alguma dificuldade na resolução dessas atividades, aproveitando para retomar algum conceito que, porventura, precise ser mais bem trabalhado.

Seno e cosseno de um arco

Para iniciar esse tema, fazer uma revisão dos conceitos de seno e cosseno de ângulos agudos em um triângulo retângulo. O primeiro boxe **Pense e responda** retoma esses conceitos ao solicitar a definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo β. Na sequência, após o estudo da localização de números reais na circunferência trigonométrica, o segundo boxe **Pense e responda** propõe retomadas das ideias de seno e cosseno para relacionar com a noção de seno e cosseno de um arco. Essas definições coincidem para $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, pois todos os triângulos formados no 1º quadrante da circunferência trigonométrica são retângulos.

Em seguida, são destacados os sinais que seno e cosseno assumem em função do quadrante no qual está localizado o arco na circunferência trigonométrica. O terceiro boxe **Pense e responda** aborda os valores máximo e mínimo do seno e do cosseno na circunferência trigonométrica, além dos valores para pontos que estão sobre os eixos. Os valores máximo e mínimo do seno e do cosseno são respectivamente iguais a 1 e -1. Quando um ponto *M* está sobre o eixo *x*, o seno é zero e o cosseno pode ser negativo ou positivo, dependendo da posição do ponto *M*. Quando um ponto *M* está sobre o eixo *y*, o seno pode ser negativo ou positivo, dependendo da posição do ponto *M*, e o cosseno é zero.

No trabalho com o tópico **Alguns valores do seno e do cosseno**, se possível, assista com os estudantes a animação disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/mod3_recursos/geogebra/circulo_trigo.html> (acesso em: 31 ago. 2020). Ela pode contribuir para a visualização desses valores.

Durante a abordagem do tópico sobre **Redução ao primeiro quadrante**, o primeiro boxe **Pense e responda** propõe que os estudantes se reúnam em duplas para analisar como fariam para determinar o seno e o cosseno de um arco de 150°. Incentive que as duplas compartilhem as estratégias, contribuindo para o desenvolvimento da argumentação e da comunicação de ideias.

No segundo boxe **Pense e responda** desse tópico, espera-se que os estudantes verifiquem que podemos afirmar que $(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ pela congruência dos triângulos, que podem ser observados na figura indicada na dica. Além disso, $(\pi - \alpha)$ é um arco localizado no 2º quadrante, onde o sinal do cosseno é negativo. Como resposta para sen 150° e cos 150°, tem-se $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Aproveitar essa oportunidade para incentivar os estudantes a compartilhar entre si o modo como refletiram para responder à questão proposta.

Ao final do estudo desse tema de reduções ao 1º quadrante, no boxe **Pense e responda** que solicita aos estudantes descreverem como determinar o seno e o cosseno de arcos que estão fora da primeira volta da circunferência trigonométrica, como $\frac{11\pi}{4}$, é esperado que respondam que é necessário obter a 1ª determinação positiva do arco, pois o seno e o cosseno do arco fora da primeira volta terão o mesmo valor que o seno e o cosseno da 1ª primeira determinação positiva. Por exemplo, a 1ª determinação positiva de $\frac{11\pi}{4}$ é igual a $\frac{3\pi}{4}$, pois $\frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi$. Como $\frac{3\pi}{4} = 225°$ é um arco do 3º quadrante, tem-se $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Relações entre seno e cosseno

Esse tópico aborda as relações entre as razões trigonométricas seno e cosseno, com destaque para a Relação Fundamental da Trigonometria. No primeiro boxe **Pense e responda**, espera-se que os estudantes concluam que podemos afirmar que $OM = 1$ porque o segmento $\overline{OM}$ é o raio da circunferência trigonométrica que, por definição, é igual a 1. Além disso, espera-se que visualizem que os pontos dos arcos indicados estão respectivamente localizados sobre os eixos horizontal (*x*) e vertical (*y*). Assim, no primeiro caso, o ponto *M'*, projeção ortogonal de *M* sobre o eixo *y*, coincide com o ponto *O*, e temos apenas dois pontos distintos. Analogamente, no segundo caso, o ponto *M''*, projeção ortogonal de *M* sobre o eixo *x*, coincide com o ponto *O*, e também temos apenas dois pontos distintos.

O segundo boxe **Pense e responda** solicita que sejam refeitos os cálculos para mostrar que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, quando $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. De fato, como $\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$, chega-se às mesmas expressões, ou seja, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ e $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Após a atividade resolvida **8**, há um boxe **Pense e responda** que pode ser explorado para auxiliar na compreensão de uma estratégia para obter a 1ª determinação positiva de um arco. Essa estratégia pode ser compreendida como a divisão inteira de um arco dado por 2π ou 360°. Para obter a 1ª determinação positiva de 14π, podemos fazer, por exemplo: $14\pi = 0\pi + 14\pi = (0 + 14)\pi = 2\pi\left(\frac{0+14}{2}\right) = (0 + 7)2\pi = 0 + 7 \cdot 2\pi$. Assim, conclui-se que 14π é côngruo a 0.

Após a atividade resolvida **10**, o **Pense e responda** apresenta dois questionamentos importantes para a compreensão dessa atividade, que poderão apoiar a resolução de outras situações semelhantes. Algebricamente, quando resolvemos uma equação da forma $x^2 = a$ no conjunto dos números reais, vamos obter $x = \pm\sqrt{a}$. O cosseno na circunferência trigonométrica assume valores positivos no 1º e 4º quadrantes, e valores negativos no 2º e 3º quadrantes. Por isso, a informação dada no enunciado sobre o quadrante no qual está localizado o arco é importante para determinar o sinal correto.

Sugere-se propor esta atividade complementar:

Considerando os valores de *m* obtidos na atividade resolvida **11**, quais são os possíveis valores de α?

Resolução

Substituindo os valores de *m* obtidos, temos:

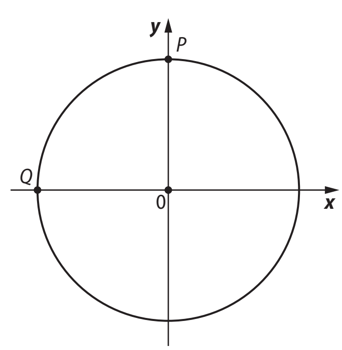
Para $m = 0$:

$\text{sen}\,\alpha = 1 \qquad \cos\alpha = 0$

Para $m = -1$:

$\text{sen}\,\alpha = 0 \qquad \cos\alpha = -1$

Localizamos os pontos na circunferência trigonométrica cujos valores do seno e do cosseno estão apresentados na figura.



EDITORIA DE ARTE

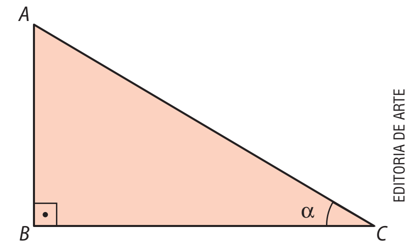
O ponto *P* está associado a α para $m = 0$ e o ponto *Q* para $m = -1$. Então:

- para $m = 0$: $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- para $m = -1$: $\alpha = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

A atividade **20** oferece uma oportunidade para que os estudantes se reúnam em duplas e discutam sobre as conclusões obtidas. Caso seja possível, promover um momento de socialização, verificando se as soluções encontradas satisfazem o problema, solicitando aos estudantes que validem as respostas ou façam a correção, caso haja resposta incorreta. A exploração da atividade **39** oferece uma oportunidade para ampliação do universo cultural e artístico dos estudantes, colocando-os em contato com elementos matemáticos da cultura japonesa. É interessante propor a exposição com a produção dos estudantes.

Tangente de um arco

Dando continuidade ao estudo das razões trigonométricas na circunferência trigonométrica, a tangente será objeto de estudo nesse tópico. O primeiro boxe **Pense e responda** solicita que seja feita uma relação entre as definições de tangente no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica. Uma possibilidade para abordar essa relação é considerar um triângulo retângulo *ABC*, conforme a figura ao lado.



Nesse triângulo, podemos escrever, para um de seus ângulos agudos $\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, as seguintes razões: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{AB}{AC}$, $\cos\alpha = \dfrac{BC}{AC}$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{AB}{BC}$.

Na razão $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{AB}{BC}$, dividindo numerador e denominador pela medida *AC* da hipotenusa, temos: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\dfrac{AB}{AC}}{\dfrac{BC}{AC}} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$. Essas definições coincidem para $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, pois todos os triângulos formados no 1º quadrante da circunferência trigonométrica são retângulos. Podemos afirmar que os triângulos *OM″M* e *OAT* são semelhantes porque os segmentos $\overline{M''M}$ e $\overline{AT}$ são paralelos (teorema fundamental da semelhança de triângulos). Solicitar aos estudantes que verifiquem se na calculadora, de um celular disponível (deles ou de um familiar), existe a função tangente e qual é a notação usada.

É importante que os estudantes justifiquem os sinais da tangente em cada quadrante da circunferência trigonométrica, por meio das razões trigonométricas. O segundo boxe **Pense e responda** provoca algumas reflexões importantes sobre os valores que a tangente pode assumir. Espera-se que os estudantes concluam que não há um valor máximo nem um valor mínimo, pois ela cresce ou diminui indefinidamente. Além disso, quando o ponto *M* está sobre o eixo *x*, a tangente é zero, e quando *M* está sobre o eixo *y*, a tangente não está definida.

Assim como foi feito com o seno e o cosseno, pode-se destacar também alguns valores da tangente, enfatizando os arcos para os quais não está definida. Em seguida, pode-se explorar a situação proposta no terceiro boxe **Pense e responda**, para que os estudantes se reúnam em duplas para discutir como fariam para determinar a tangente de $\dfrac{5\pi}{4}$. Espera-se que reconheçam a correspondência com $\dfrac{\pi}{4}$ e concluam que $\text{tg}\ \dfrac{5\pi}{4} = -\text{tg}\ \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\dfrac{5\pi}{4}$ é um arco do 3º quadrante.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas e as atividades propostas apresentam situações diversificadas para aplicação dos conceitos estudados sobre tangente de um arco, que encontram relação direta com o que foi feito no estudo do seno e do cosseno.

Na seção de atividades, incentive os estudantes a realizar a discussão proposta na atividade **44**. Peça a eles que exponham como pensaram para resolver a questão. Na atividade **52**, sugerir aos estudantes que façam um esboço da circunferência trigonométrica para representar os arcos, analisar os resultados e justificar a resposta.

EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Essa seção é uma oportunidade para promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados ao uso de recursos tecnológicos disponíveis, proporcionando novas formas de resolver uma atividade. Dessa forma, é possível favorecer o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao se promover uma experiência que faz uso de tecnologia para facilitar a aprendizagem. Se possível, desenvolver a atividade em uma sala de informática, com os estudantes reunidos em duplas, para promover a troca de ideias.

Orientar e acompanhar o passo a passo da criação da planilha. Em seguida, na atividade **1**, espera-se que os estudantes concluam que é preciso "aninhar" as duas funções. As expressões ficam: "Sen(Radianos(A3))", "Cos(Radianos(A3))" e "Tan(Radianos(A3))". Para a atividade **2**, uma das respostas possíveis é utilizar um valor aproximado ou utilizar a função pi( ). A resposta da atividade **3** depende do ângulo escolhido pelos estudantes.

O boxe **Pense e responda** que vem logo em seguida incentiva que os estudantes ampliem a planilha para estudar o que ocorre com as razões trigonométricas cotangente, secante e cossecante. Entre as conclusões possíveis, observar se os estudantes verificaram que $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$, $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ e que $\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Essa seção apresenta fatos históricos relacionados à Matemática, com o intuito de contextualizar os conteúdos e contribuir para a compreensão da evolução, ao longo do tempo, de uma ideia ou de uma teoria, o que contribui para o desenvolvimento da competência geral **1**. Nesse caso, propõe-se uma viagem às raízes da Trigonometria, remetendo a aplicações na Babilônia e no Egito Antigo.

CONEXÕES

A seção **Conexões** oferece possibilidades interessantes para explorar temas diversos e promover a interdisciplinaridade, quando possível. Contribui também para desenvolver a comunicação em diferentes linguagens, o senso crítico e a argumentação, capacidades essenciais para a participação cidadã dos estudantes, relacionadas às competências gerais **1**, **4** e **7**. Nesse caso, são apresentados quatro textos que remetem às modalidades de ciclismo que integraram os Jogos Olímpicos Rio 2016.

Na atividade **1**, propor aos estudantes pesquisarem a respeito de espaços na cidade para a prática de atividades com bicicleta. E, se não houver, sugerir que pensem em formas de solicitar ao poder público a construção de espaço como esses. Essa atividade pode ser desenvolvida em um trabalho integrado com os professores da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. Destacar a questão da cidadania na busca por soluções para a comunidade.

Na atividade **2**, sugerir trabalho com o professor de Física, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, para falar sobre atrito, velocidade, aerodinâmica e aderência do pneu ao solo. Esse trabalho favorece o desenvolvimento da competência específica **2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Na atividade **3**, espera-se que os estudantes associem o aro da bicicleta ao comprimento da circunferência do pneu. Se possível, levar uma bicicleta para a sala de aula e desenvolver com os estudantes a medição do comprimento externo do pneu. A resposta esperada é aproximadamente 207,4 cm.

Procurar estimular que os estudantes se informem também por meio dos *links* e vídeos sugeridos. A resposta esperada para a pergunta proposta no boxe **Pense e responda** é que foi aplicado o cálculo do comprimento da circunferência na resolução das questões.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Nessa seção, temos uma grande variedade de aplicações dos conceitos estudados, permitindo abordagens diversificadas e configurando-se como oportunidades para avaliar o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT306** pelos estudantes ao longo do Capítulo, identificando pontos que ainda necessitem de retomada. Incentivar que os estudantes resolvam as atividades em grupo e socializem as respostas com a turma.

A atividade **4**, entre outras, pode ser destacada pois remete a uma situação real de aplicação das razões trigonométricas na circunferência. De modo geral, todas as questões desta seção são exemplos de como o assunto deste Capítulo é trabalhado em avaliações externas, como vestibulares e o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

PARA REFLETIR

Explorar com os estudantes a seção final do capítulo é uma oportunidade para promover a reflexão individual, uma síntese em relação a seu próprio processo de aprendizagem e pode também ser pensado como uma autoavaliação. Várias estratégias podem ser desenvolvidas, como um diálogo coletivo sobre as aprendizagens ou breves apresentações das sínteses em forma de seminário, por exemplo. Procurar incentivar momentos de socialização dos conhecimentos adquiridos, permitindo que alguns estudantes apresentem suas conclusões, contribuindo para desenvolver competências relacionadas à argumentação, à oratória e à capacidade de expor ideias publicamente.

Esse momento contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, além da autopercepção e da autonomia, pois compreender seus próprios avanços e dificuldades é uma maneira de o estudante se integrar ao processo de aprendizagem de forma responsável e comprometida. Além disso, pode explicitar necessidades de retomada e/ou aprofundamento de alguns dos tópicos estudados.

Especificamente neste Capítulo, espera-se que os estudantes reconheçam a conexão com o que já estudaram sobre as razões trigonométricas, bem como compreendam a ampliação representada pela circunferência trigonométrica, passando pela relação entre grau e radiano. Também é importante acompanhar se, nas sínteses dos estudantes, são estabelecidas relações com o uso do astrolábio e com a atividade usando a planilha eletrônica, pois essas relações representam um aprofundamento de conteúdos.

CAPÍTULO 4

Funções trigonométricas

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas, habilidades e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156 e 157 deste livro.

- **Competências gerais:** 1, 2 e 5
- **Competências específicas e habilidades:**
  Área de Matemática e suas Tecnologias
  - Competência específica 1: **EM13MAT101**
  - Competência específica 3: **EM13MAT306**

  Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 2
- **Tema Contemporâneo Transversal:**
  - Ciência e Tecnologia

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

O tema da abertura do Capítulo pode ser explorado junto aos professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, podendo ser desenvolvidos aspectos da competência específica **2** dessa área e junto aos professores da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, podendo ser desenvolvida a competência específica **1** dessa área. Uma sugestão é propor investigações em relação à cultura de povos indígenas e do conhecimento utilizados por eles em seu dia a dia. Pode-se ampliar a pesquisa, também, para outros povos em diferentes tempos e espaços.

Em relação à área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes podem desenvolver a competência específica **3** e, particularmente, a habilidade **EM13MAT306**. Promover um diálogo inicial com base nas informações apresentadas no **Livro do estudante**, e solicitar aos estudantes que compartilhem outras informações obtidas por meio da pesquisa que realizaram.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes reconheçam a Astronomia como a ciência que estuda o Universo e os corpos celestes, com o fim de situá-los no espaço e no tempo, além de buscar explicar seus movimentos e seu funcionamento.

Estimular, na atividade **2**, a pesquisa sobre o significado do termo período irá ajudar os estudantes a perceberem que esse termo significa a repetição de um fato dentro de um intervalo de tempo determinado.

No trabalho com a atividade **3**, destacar que muitas culturas possuem crenças e tradições tomando como referência as fases da Lua; por exemplo, tribos indígenas e povos asiáticos que têm calendários lunares. O debate deve ser promovido, em sala de aula, para discutir sobre crenças populares e sobre o conhecimento científico, sempre respeitando as características de cada cultura e ressaltando as semelhanças entre os saberes.

Esse debate pode contribuir com o desenvolvimento da competência geral **1** na medida em que se valorizam os conhecimentos historicamente construídos para explicar a realidade. Como ampliação, pode-se explorar o artigo disponível em <https://super.abril.com.br/ciencia/sob-o-dominio-da-lua-os-mitos-deste-satelite/> (acesso em: 3 set. 2020) que trata de mitos e crendices sobre a Lua.

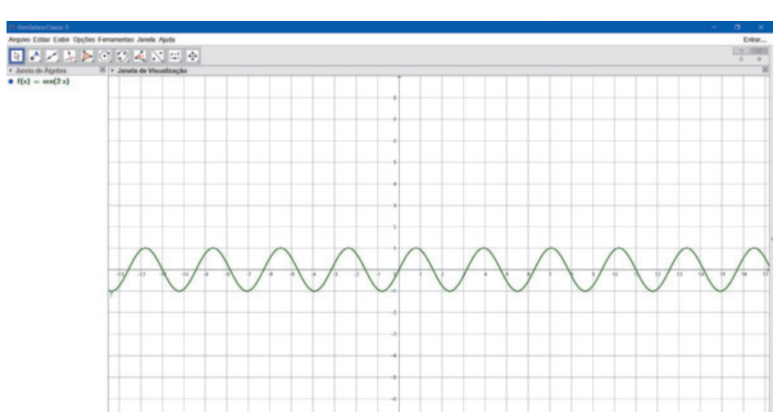
Artigos e outros materiais que abordam a influência da Lua na agricultura também podem ser analisados pelos estudantes. Um exemplo é o artigo que trata sobre o cultivo de cenoura, disponível em <https://orgprints.org/27592/> (acesso em: 3 set. 2020) ou o artigo que fala do cultivo do coentro, disponível em <https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/97489/1/Influencia-do-Ciclo-Lunar-no-Desenvolvimento-13759-62319-1-PB-ROMULO-CARVALHO.pdf> (acesso em: 3 set. 2020).

Funções periódicas

Ao abordar esse tópico, é importante estimular os estudantes a apresentarem outros fenômenos periódicos, promovendo o diálogo sobre o que entendem a respeito do termo. As funções trigonométricas constituem-se em um dos tipos de funções periódicas.

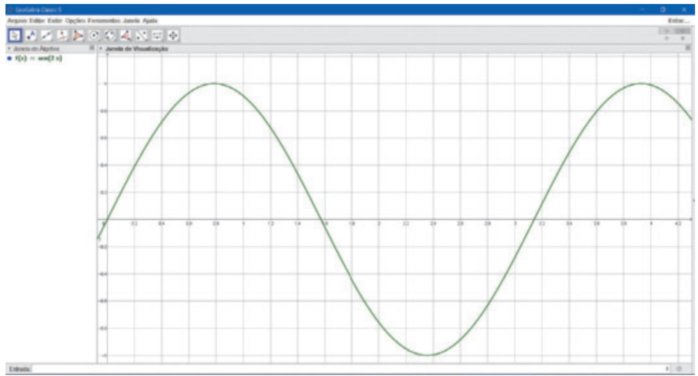
Para explorar a definição de função periódica, pode-se fazer uso de *softwares* que permitem obter gráficos dessas funções para que os estudantes comparem o comportamento de cada uma delas determinando, por exemplo, o número real p (ou uma aproximação dele) da definição indicada no **Livro do estudante**. Neste momento, não é necessário explorar qual é a lei de formação da função cujo gráfico é analisado, mas possibilitar aos estudantes a visualização gráfica.

Por exemplo, utilizando o GeoGebra, pode-se obter o gráfico da função definida por $f(x) = \text{sen}(2x)$ como indicado na figura a seguir. Observando-o, os estudantes podem perceber que o gráfico é periódico, que o valor máximo assumido pela função f é 1 e o valor mínimo assumido por f é -1. É importante aproveitar o momento para retomar a ideia de zeros de funções, de conjunto imagem, domínio etc. Além disso, peça a eles que observem o período da função. Nesse exemplo, o período da função é $p = \pi$ e, por meio do gráfico, os estudantes podem perceber que, em $x = \pi$, o valor da função se anula. Como o *software* trabalha com aproximações, espera-se que os estudantes verifiquem que isso acontece entre 3,1 e 3,2.



GEOGEBRA

Utilizando os recursos do *software*, como a ferramenta que permite ampliar uma região do gráfico, os estudantes podem verificar com mais detalhes os intervalos.



GEOGEBRA

Essa análise gráfica pode ser feita com diferentes funções periódicas, favorecendo a assimilação do conceito e a definição em questão pelos estudantes. Essa abordagem colabora para o desenvolvimento da competência geral **5**.

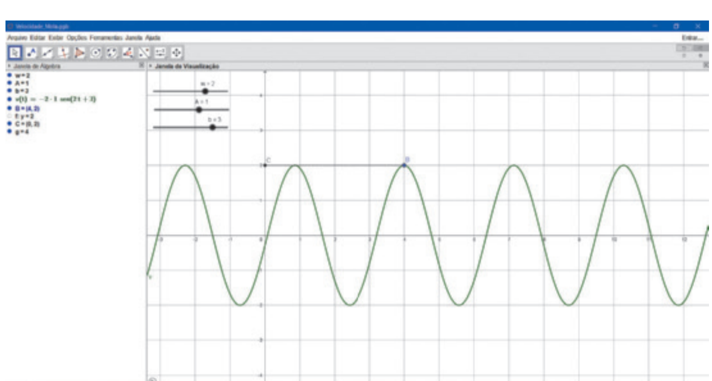
Função seno

Ao apresentar as características do gráfico da função seno, é importante dar destaque ao período e ao conjunto imagem, retomando e associando à discussão do tópico anterior.

Caso seja possível, é interessante realizar com os estudantes o experimento com um sistema massa-mola para ilustrar um fenômeno periódico modelado por uma função seno. A intenção não é fazê-los compreender todos os elementos que compõem a função da velocidade de um oscilador harmônico simples, mas entender que a função seno pode ser utilizada na modelagem de fenômenos naturais. Se possível, alinhar esse conteúdo com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101**.

Para analisar a velocidade desse oscilador harmônico, podem-se utilizar *softwares* de geometria dinâmica a fim de simular o comportamento da função velocidade em questão. Uma sugestão é, utilizando o GeoGebra, criar três controles deslizantes, w, A e b, e obter o gráfico da função definida por $v(t)$, dada por $v(t) = -w \cdot A \cdot \text{sen}(w \cdot t + b)$. Em seguida, criar um ponto B relacionado ao gráfico (no GeoGebra, isso pode ser feito com o botão **Ponto em objeto**, por exemplo), e criar a reta y (que passa por B e é perpendicular ao eixo vertical) e o ponto C (intersecção dessa reta com o eixo vertical). Sugere-se manter a reta y invisível, e manter visível apenas o segmento $\overline{BC}$.

Com essa construção no *software*, é possível simular e analisar diferentes funções da velocidade do oscilador harmônico e explorar o conteúdo, relacionando-o às funções trigonométricas, particularmente, à função seno. A figura a seguir ilustra esse modelo criado no GeoGebra.



GEOGEBRA

ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Explorar com os estudantes a construção do gráfico da função seno apresentada na atividade resolvida **1**, oferecendo condições para que eles realizem algumas das atividades propostas que solicitam esse procedimento. Além disso, ressaltar as diferenças que surgem no período da função seno ao serem promovidas alterações no arco $\left(x, 2x \text{ e } \frac{x}{2}\right)$. É importante explorar argumentos para justificar a escolha dos valores de x escolhidos, que podem ser, por exemplo, a facilidade de se obter o valor de y relacionado a eles em cada função. Outra consideração que os estudantes poderão perceber é que esses valores são suficientes, pois o comportamento das funções em questão é conhecido: o valor máximo e o valor mínimo assumidos pelas funções, a periodicidade etc.

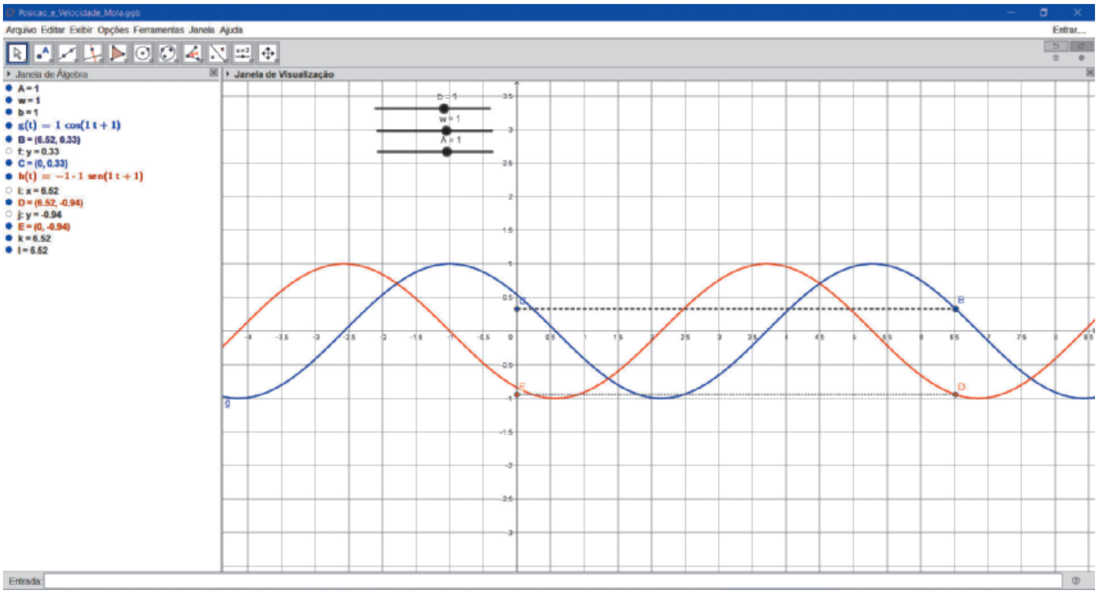
Também é importante comentar a respeito das atividades resolvidas **2** e **3**, que promovem a compreensão sobre conjunto imagem da função seno. Pode-se questionar, por exemplo, se o raciocínio seria o mesmo para uma função definida por $g(x) = 3 - \text{sen}(5x)$ e verificar se os estudantes argumentam adequadamente. Espera-se que a resposta seja afirmativa, pois a imagem da tal função g é o intervalo $[2, 4]$.

Estimular a resolução das atividades propostas para ampliar a compreensão a respeito de período e conjunto imagem de casos diversos da função seno. As atividades **11** e **12** apresentam situações modeladas pela função seno, e a exploração dessas situações pelos estudantes pode favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306**.

Função cosseno

Na abordagem do tópico **Gráfico da função cosseno**, estimular os estudantes a reconhecer diferenças e analogias em relação ao gráfico da função seno. Um quadro com as observações dos estudantes pode ser feito para ajudar nessa visualização. Uma sugestão para a comparação é utilizar os recursos como *softwares* de geometria dinâmica para obter o gráfico, por exemplo, de $f(x) = \text{sen } x$ e de $g(x) = \cos x$. Verificar se os estudantes percebem o conjunto imagem de cada função, o período, as raízes, os valores do domínio em que $f(x) = g(x)$ etc.

No tópico **O sistema massa-mola: posição**, pode-se retomar o trabalho com professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, e estimular os estudantes a apresentar argumentos da Física que justifiquem a modelagem da velocidade e da posição da mola serem dadas pelas funções seno e cosseno. De modo semelhante ao trabalho realizado em relação à velocidade de um oscilador harmônico (no tópico anterior, **Função seno**), pode-se explorar o sistema massa-mola em relação à posição por meio dos recursos digitais. Considerando que a função da posição da mola é dada por $g(t) = A \cdot \cos(w \cdot t + b)$, pode-se representar graficamente essa função e a da velocidade (como indicado na figura anterior, no tópico **Função seno**), obtendo uma representação análoga, como pode ser observado na imagem a seguir.



GEOGEBRA

Explorar o boxe **Pense e responda** relacionado ao sistema massa-mola também pode contribuir para conclusões a respeito da comparação entre os gráficos das duas funções. Neste momento, a intenção não é a de que o estudante compreenda todos os elementos que compõem a função da posição de um oscilador harmônico simples, mas sim que compreenda que a função cosseno pode ser utilizada na modelagem de fenômenos naturais com uma característica igual à sua. Se possível, alinhar esse conteúdo com o professor de Física.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas **4** e **5** apresentam situações contextualizadas modeladas por funções seno e cosseno que ilustram a aplicação dos conceitos estudados, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306**.

Assim como no estudo da função seno, as atividades propostas contribuem para a compreensão de aspectos observados nos gráficos e relacionados ao período e ao conjunto imagem da função cosseno.

A atividade **23** propõe uma aplicação de uma função periódica (função cosseno) no estudo das marés. Explorar o item **b** pode ser uma oportunidade de avaliação do que os estudantes compreenderam até agora no Capítulo. Também se configura como um momento de socialização e elaboração de problemas, estimulando os estudantes a vivenciarem outra experiência de aprendizagem.

Equações trigonométricas

Esse tópico pode ser trabalhado de modo coletivo e por meio da análise gráfica em um primeiro momento. Estimular os estudantes a resolverem a equação do item **a**, incentivando-os a compartilhar os resultados e argumentando sobre a estratégia utilizada. O mesmo pode ser feito com os demais itens. Os recursos tecnológicos, como calculadora científica ou *softwares* de geometria dinâmica são recomendados para o desenvolvimento. Os estudantes também podem ter acesso a uma tabela trigonométrica, por exemplo.

Inequações trigonométricas

Com base na ideia de equação, pode-se desenvolver o tópico inequações trigonométricas utilizando como recurso a circunferência trigonométrica. Pode-se propor a resolução dos itens desse tópico por meio de uma abordagem expositiva-dialogada.

FÓRUM

O **Fórum** apresenta uma oportunidade para que os estudantes pesquisem e promovam discussões com seus colegas sobre o papel da modelagem na descrição e compreensão de fenômenos, complementando aquilo que vem sendo apresentado em exemplos ao longo deste Capítulo (como no estudo das marés).

Organizar pequenos seminários e promover um momento de exposição das ideias dos estudantes. É interessante que eles reflitam e exponham suas impressões sobre o papel da Matemática e suas contribuições para a compreensão de fenômenos da natureza, da sociedade e do ser humano. Essa ocasião também favorece o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**, e da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Como material complementar sobre modelos matemáticos, sugere-se o disponível em <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf> (acesso em: 3 set. 2020). Nesse material, o autor explora o que é um modelo matemático, suas aplicações, alguns tipos de modelos etc.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

A atividade resolvida **6** apresenta de forma objetiva a diferença entre apresentar a(s) solução(ões) de uma equação trigonométrica considerando diferentes conjuntos universo: a primeira volta da circunferência trigonométrica ($0 \leqslant x < 2\pi$) e o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Destacar essas noções aos estudantes para ampliar a compreensão deles sobre o assunto.

A atividade resolvida **8** apresenta uma estratégia: a utilização de uma incógnita auxiliar. Explorar essa resolução com os estudantes também contribuirá para um melhor entendimento das situações apresentadas nas atividades propostas.

É importante acompanhar os estudantes nas resoluções das atividades, observando como estão desenvolvendo o raciocínio e verificando se compreenderam a definição de conjunto universo em cada situação. Uma estratégia para os momentos de correção é promover a socialização de ideias e explorar diferentes abordagens e estratégias desenvolvidas para obter as soluções.

> CONEXÕES

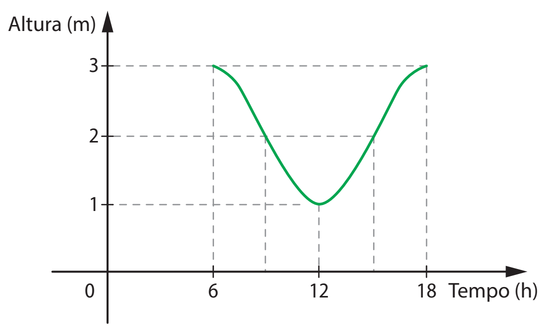
Nessa seção o contexto do movimento das marés é ampliado e favorece a compreensão desse fenômeno por meio de uma abordagem matemática. Com isso, pode-se desenvolver a habilidade **EM13MAT306**.

Pode-se propor um trabalho integrado com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, por exemplo, retomando a situação explorada inicialmente na abertura deste Capítulo sobre a influência da Lua e desenvolvendo a competência específica **2** dessa área.

Espera-se que, na atividade **1**, os estudantes respondam que os movimentos das marés possuem relação com a Lua e o Sol, conforme apontado no texto. Na atividade **2**, pode-se estimular os estudantes a pesquisarem a respeito do tema e espera-se que respondam que o conhecimento sobre o movimento das marés auxilia esse profissional a definir parâmetros, como velocidade e distância entre as embarcações, evitando acidentes, como colisões entre navios, e prejuízos a pessoas e cargas, por exemplo.

Também é possível propor uma pesquisa em relação a essa temática, para favorecer o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia**, estimulando os estudantes a realizar atividades que relacionem os conhecimentos matemáticos e o desenvolvimento tecnológico e científico. A dissertação de mestrado profissional disponível em <http://www.bdtd.ufrr.br/tde_arquivos/7/TDE-2015-06-19T045317Z-235/Publico/JoerkdaSilvaOliveira.pdf> (acesso em: 3 set. 2020) traz aplicações da Trigonometria em diversas áreas do conhecimento, como Ciências econômicas, Engenharia civil, Astronomia, Ciências biológicas e outras. O trabalho com projetos de pesquisa relacionados a esses temas favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101**.

A resposta esperada para a atividade **3** é que os ciclos de maré, por serem periódicos e apresentarem amplitude, podem ser representados por funções trigonométricas. A lei de uma função que expressa o que está descrito na atividade **4** é $h(t) = 2 + \cos(2t)$, com $h(t)$ sendo a altura da maré, em metro, e t, a hora do dia em que a altura foi registrada. O esboço do gráfico dessa função é mostrado a seguir.



EDITORIA DE ARTE

> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Essa seção é uma oportunidade para promover o aprofundamento de conhecimentos matemáticos associados ao uso de recursos tecnológicos. Permite contribuir também para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**.

Nesse caso, propor uma investigação acerca das alterações que ocorrem nos gráficos das funções seno e cosseno, em decorrência de mudanças em seus parâmetros. A indicação de uso de um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, além de promover aproximações com o Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia**, justifica-se para que a atividade possa cumprir seus objetivos de aprendizagem relacionados ao tópico das funções trigonométricas, ampliando compreensões e incorporando novos hábitos de pensamento.

Uma sugestão é reunir os estudantes no laboratório de informática, organizando-os em duplas. Acompanhar o desenvolvimento do passo a passo descrito no **Livro do estudante**. Após a criação dos controles, na atividade **1**, espera-se que os estudantes descrevam a translação vertical do gráfico da função seno. A curva em si não se altera, mas se desloca de cima para baixo, conforme se movimenta o controle *a*.

Na atividade **2**, espera-se que os estudantes notem que há mudanças na amplitude vertical da função cosseno, conforme se movimenta o controle *b*. Quando $b = 0$, o gráfico se torna uma reta sobre o eixo *x*, representando a função constante $y = 0$. Outras explorações podem ser propostas, como manter o controle *a* fixo em 0 e variar o controle *b* para a função seno.

Incentivar que os estudantes explorem um pouco mais os controles e registrem suas conclusões. Essas anotações podem servir como instrumento avaliativo, pois podem dar indícios acerca da compreensão desenvolvida pelos estudantes na exploração do tópico e do conteúdo deste Capítulo, bem como fornecer subsídios para eventuais retomadas de temas que precisam ser mais bem trabalhados.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Nessa seção há variedade de aplicação dos conceitos estudados, permitindo abordagens diversificadas e configurando-se em excelentes oportunidades de avaliar o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT306** pelos estudantes, identificando pontos que ainda necessitem de retomada.

As atividades **1**, **2**, **9**, **11**, **12**, **16** e **17** podem ser destacadas, pois remetem a situações reais de aplicação das funções trigonométricas seno e cosseno, além de servirem como exemplo de como essas situações aparecem em avaliações externas, como vestibulares e o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Essas atividades podem ser trabalhadas em sala de aula com os estudantes organizados em grupos possibilitando-lhes que compartilhem os conhecimentos e estratégias de resolução. Esse trabalho, desenvolvido em grupo, pode também figurar como uma avaliação do processo de aprendizagem dos estudantes, no qual eles também poderão verificar se precisam retomar algum conceito que necessite ser mais bem trabalhado, bem como esclarecer dúvidas. Se possível, disponibilizar recursos tecnológicos como calculadoras científicas ou *softwares* de geometria dinâmica como ferramentas auxiliares para a resolução das atividades.

PARA REFLETIR

Explorar essa seção é uma oportunidade de promover a reflexão individual, uma síntese em relação ao próprio processo de aprendizagem e pode, inclusive, ser utilizada como uma autoavaliação. Várias estratégias podem ser desenvolvidas, como um diálogo coletivo sobre a aprendizagem ou breves apresentações das sínteses em forma de seminário, por exemplo.

Procurar incentivar momentos de socialização dos conhecimentos adquiridos, permitindo aos estudantes que apresentem suas conclusões, contribuindo para desenvolver competências relacionadas à argumentação, à oratória e à capacidade de expor ideias publicamente.

Especificamente neste Capítulo, espera-se que os estudantes reconheçam a relação das funções trigonométricas seno e cosseno com os fenômenos periódicos, como o movimento das marés e os ciclos lunares. Também é esperado que reconheçam que os valores máximos e mínimos assumidos pelas funções definidas por $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são iguais, respectivamente, a 1 e -1, além de explicarem que uma função é periódica quando seus valores se repetem após um determinado intervalo, chamado período, e que as funções seno e cosseno são exemplos desse tipo de função em Matemática.

Capítulo 1 • Proporcionalidade e semelhança

Atividades

1. Como as duas medidas, a altura da pessoa e a medida da sombra, já estão em metro:

$$\frac{1{,}95}{2{,}60}=\frac{3}{4}$$

2. a) Sim, pois:

$$\frac{4}{9}=\frac{3}{y}=\frac{2}{x}$$

b) Pelas informações do enunciado, pode-se calcular:

$$\frac{4+2}{9+x}=\frac{4}{9}\Rightarrow x=4{,}5$$

$$\frac{4+3}{9+y}=\frac{4}{9}\Rightarrow y=6{,}75$$

3. Segundo o esquema do enunciado, como há um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AM}{AN}\Rightarrow\frac{30}{40}=\frac{AM}{50}\Rightarrow AM=37{,}5$$

$$\frac{AN}{NP}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{50}{160}=\frac{40}{BC}\Rightarrow BC=128$$

Portanto, $BC = 128$ m e $CD = 37{,}5$ m.

4. Considerando as informações fornecidas pelo enunciado:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{PQ}\Rightarrow\frac{x+3}{x-2}=\frac{40}{30}\Rightarrow 30(x+3)=40(x+2)$$

$30x + 90 = 40x - 80 \Rightarrow x = 17$

Portanto:

$AB = x + 3 \Rightarrow AB = 17 + 3 = 20$

$CD = x - 2 \Rightarrow CD = 17 - 2 = 15$

$AB = 20$ cm e $CD = 15$ cm.

5. a) Não, pois, para resolver o problema, é necessário estabelecer uma razão entre as retas r e s e, para isso, são necessárias medidas correspondentes em ambas as retas, o que não ocorre na reta s.

b) Para resolver a atividade, é necessário saber a medida de $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{DF}$.

6. Considerando as informações fornecidas pelo enunciado:

$$\begin{cases} AB+CD=12 \\ AB-CD=2 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações: $AB = 7$. Substituindo esse resultado em qualquer uma das equações do sistema: $CD = 5$.

Ainda utilizando as informações do enunciado: $EF = 3GH - 2$.

Considerando $GH = x$:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}\Rightarrow\frac{7}{5}=\frac{3x-2}{x}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 7x = 5(3x - 2) \Rightarrow 7x = 15x - 10 \Rightarrow x = 1{,}25$

Logo, $EF = 3 \cdot 1{,}25 - 2 = 1{,}75$

Então, $AB + CD + EF + GH = 7 + 5 + 1{,}75 + 1{,}25 = 15$

7. a) Sim, está correta, pois, $FH - 30 = FG$ que é correspondente ao lado MP que mede 40.

b) Sim, pois a proporção apresenta apenas uma incógnita e, portanto, pode ser calculada.

c) Sim. Uma possibilidade é $\frac{FH}{30}=\frac{64}{24}$.

8. Estabelecendo uma relação de proporcionalidade entre os termômetros:

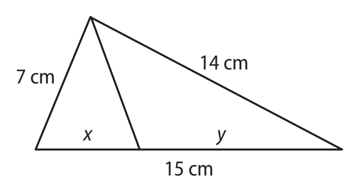
$$\frac{212-32}{t_F-32}=\frac{100-0}{t_C-0}\Rightarrow 180t_C=100(t_F-32)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_C=\frac{5}{9}(t_F-32)$$

Portanto, considerando a temperatura da foto:

$$t_C=\frac{5}{9}(t_F-32)\Rightarrow t_C=\frac{5}{9}(100{,}9-32)\simeq 38{,}28\Rightarrow t_C\simeq 38{,}28\,°C$$

9. Considerando as informações do enunciado, pode-se obter o seguinte esboço:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Aplicando o teorema da bissetriz, pode-se concluir que:

$$\frac{x}{y}=\frac{7}{14}\Rightarrow y=2x$$

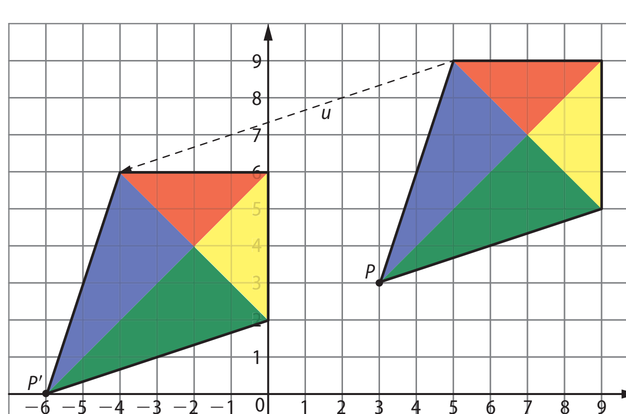
Como $x + y = 15$, tem-se:

$x + y = 15 \Rightarrow x + 2x = 15 \Rightarrow x = 5$

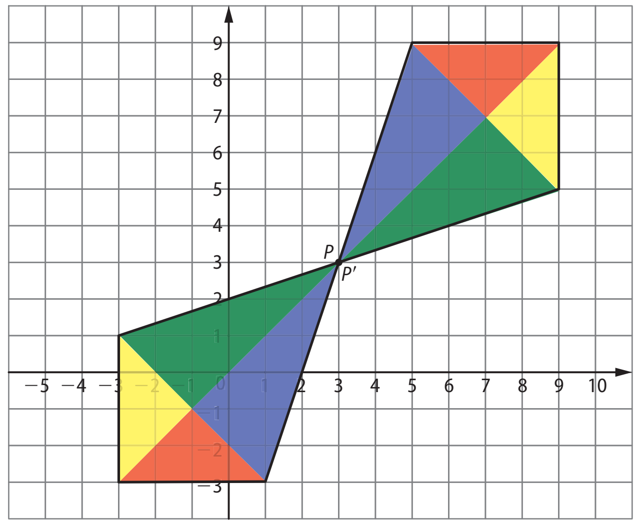
O menor segmento medirá 5 cm.

10. Translações em duas direções, rotações de 90° e de 180°, reflexões em reta, reflexões deslizantes, todos os centros de rotação pertencem a eixos de reflexão.

11. a) Ao transladar a pipa por meio do vetor $\vec{u}$:



b) Ao rotacionar a pipa 180°, no sentido anti-horário:



• Caso a rotação fosse 180° no sentido horário a mesma imagem seria obtida.

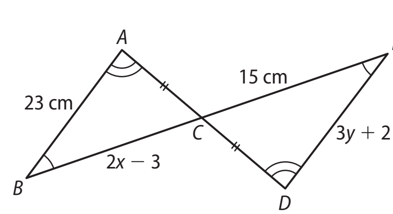
12. Como ambos os triângulos possuem dois lados congruentes (3 cm e 4 cm) e o ângulo formado entre esses lados é 120°, pode-se concluir que esses triângulos são congruentes pelo caso: LAL

13. Se os triângulos *ABC* e *MNP* são congruentes, os lados possuem a mesma medida e, por isso, a medida do perímetro de ambos os triângulos é igual.
Logo:
$5q + q + 6 + 3q + 8 = 68 \Rightarrow 9q = 54 \Rightarrow q = 6$

14. Considerando o caso especial de congruência de triângulos retângulos:
$\overline{BD} \cong \overline{DC}$ são os catetos dados;
$\overline{DA}$ é a hipotenusa (comum a ambos os triângulos).
Pode-se concluir que $\triangle ABD \cong \triangle ACD$. Portanto, pode-se afirmar que $AB = AC$.

15. Considerando as informações fornecidas pelo enunciado:
$\overline{EJ} \cong \overline{JT}$ (*J* é o ponto médio do segmento *ET*)
$S\hat{J}E \cong P\hat{J}T$ (são ângulos opostos pelo vértice)
$\overline{SJ} \cong \overline{JP}$ (*J* é o ponto médio do segmento *SP*)
Portanto, pelo caso de congruência LAL, os triângulos *EJS* e *TJP* são congruentes. Logo:
$2x + 7 = 21 \Rightarrow x = 7$
Encontrando o valor de *x* e sabendo que os lados $\overline{SJ}$ e $\overline{JP}$ são congruentes, pode-se afirmar que a distância que Júlia deverá percorrer até o parque saindo de sua casa será de 7 km.

16. Resposta pessoal. Como sugestão, os estudantes poderão elaborar um enunciado que pode ser contextualizado e que envolva figuras de triângulos congruentes, em que deve-se calcular o valor de *x* e *y*, como a seguir:



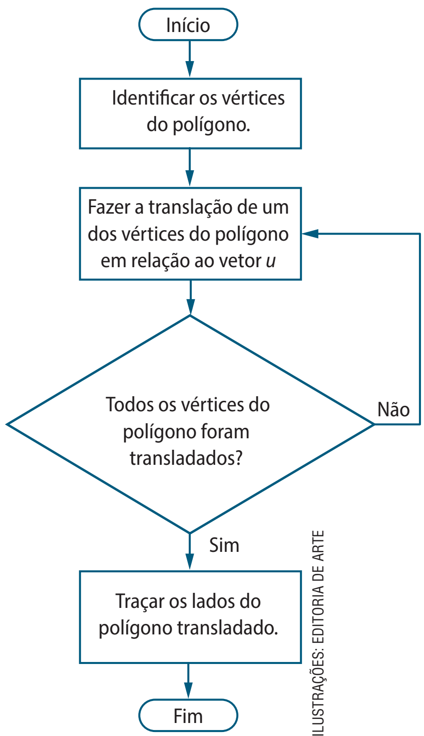
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$\hat{A} \cong \hat{D}$
$\overline{AC} \cong \overline{CD}$
$\hat{B} \cong \hat{E}$
Pelo caso ALA, $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.

$\Rightarrow$

Então:
$2x - 3 = 15 \Rightarrow x = 9$
$3y + 2 = 23 \Rightarrow y = 7$

17. Um possível fluxograma que constrói a translação de um polígono por um vetor $\vec{u}$ é:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

18. Para que dois polígonos sejam semelhantes, é necessário que os ângulos internos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes, proporcionais.

Em um paralelogramo os ângulos adjacentes são suplementares, portanto os ângulos internos correspondentes dos paralelogramos são congruentes.

Verificando a proporcionalidade dos lados correspondentes:

$$\frac{10}{30} = \frac{4}{12}$$

Portanto, os paralelogramos são semelhantes.

19. Resposta pessoal. Sugestões de perguntas:

1. Qual é a razão de semelhança entre os trapézios *ABCD* e *MNPQ*?

Como os lados *CD* e *NP* são correspondentes, pois são a base menor de ambos os trapézios, pode-se responder:

$$\frac{CD}{NP} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

2. Qual é a medida do lado *PQ*?

Como já se sabe a razão de proporcionalidade entre os trapézios, e o lado correspondente de $\overline{PQ}$ é $\overline{DA}$, pode-se responder:

$$\frac{DA}{PN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{25}{PN} = \frac{3}{2} \Rightarrow PN = \frac{50}{3}$$

20. Como o lado correspondente de *MN* é *AB*, conclui-se:

$$\frac{6}{MN} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3MN = 30 \Rightarrow MN = 10$$

21. a) Resposta pessoal. O desenho ficou semelhante à sala de aula original porque as medidas dos lados correspondentes do retângulo são proporcionais:

$$\frac{8}{16} = \frac{4{,}5}{9}$$

b) Se calcularmos a razão entre a sala e o desenho:

8 m = 800 cm

$$k = \frac{800}{16} = 50 \Rightarrow k = 50$$

Se calcularmos o desenho em relação à sala:

$$k = \frac{16}{800} = \frac{1}{50} \Rightarrow k = \frac{1}{50}$$

c) Considerando que 2,8 m = 280 cm:

$$\frac{280}{x} = 50 \Rightarrow x = 5{,}6$$

A altura da maquete será de 5,6 cm.

22. Como os decágonos regulares são semelhantes, pode-se afirmar que $\frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{5}$, em que l_2 representa o lado do polígono de maior lado. Diante dessa informação pode-se concluir:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{P_1}{720} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{2\,160}{5} = 432$$

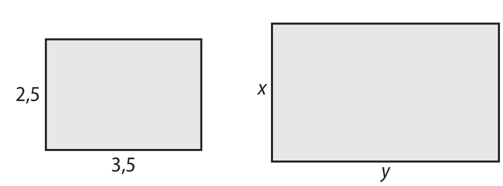
Portanto, o perímetro do polígono menor é 432 mm.

Assim, o lado do menor decágono será:

$$l_1 = \frac{432}{10} = 43{,}2$$

Ou seja, l_1 = 43,2 mm ou 4,32 cm.

23. A partir dos dados fornecidos pelo enunciado, pode-se construir a seguinte ilustração:



Como a razão de semelhança entre o tampo maior e o menor é 1,5:

$$\frac{x}{2{,}5} = \frac{y}{3{,}5} = 1{,}5$$

Logo:

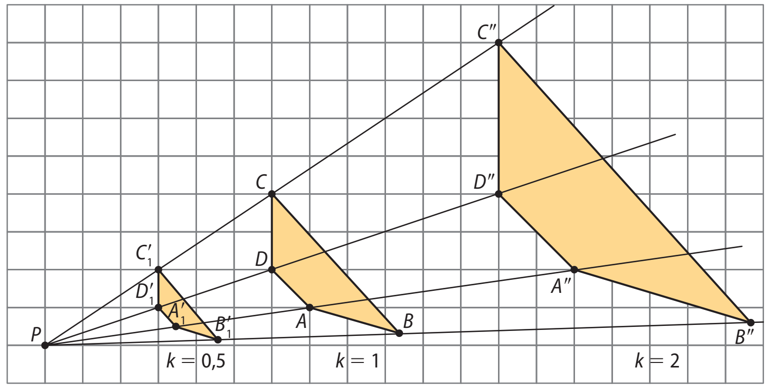
$x = 2{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}75$

$y = 3{,}5 \cdot 1{,}5 = 5{,}25$

Portanto, o perímetro do tampo maior será:

$P = 2 \cdot 3{,}75 + 2 \cdot 5{,}25 = 18 \Rightarrow P = 18$ m

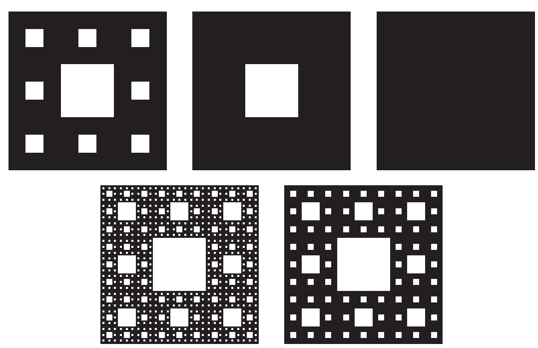
24. Resposta pessoal. Considerando como exemplo o quadrilátero *ABCD*, $k = 1$ e, a partir dele, dois casos de homotetia, uma para $k = 2$ e outra para $k = 0{,}5$:



EDITORIA DE ARTE

25. A resposta depende da escolha dos estudantes.

26. A figura obtida é o Tapete de Sierpinski.



ALEJO MIRANDA/SHUTTERSTOCK.COM

27. Resposta pessoal. Para construir a curva de Peano, são necessários os seguintes passos:

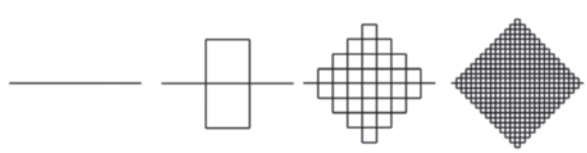
Passo **1**: Traçar um segmento de reta.

Passo **2**: Dividir esse segmento em 3 partes iguais.

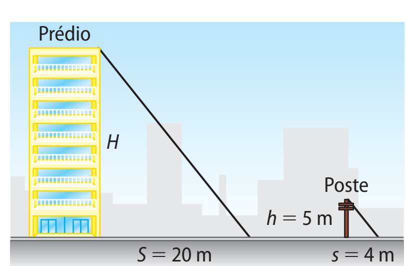
Passo **3**: Por meio desse segmento, construir um retângulo que intercepte o segmento de forma que o retângulo seja dividido em duas partes iguais, formando dois quadrados de lado igual a $\frac{1}{3}$ da medida do segmento.

Passo **4**: Repetir os passos **2** e **3** para cada segmento vertical ou horizontal. A curva de Peano é obtida por processo iterativo.

REPRODUÇÃO/MAYCON SEDREZ, 2009.



28. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, pode-se elaborar o seguinte esquema:



EDITORIA DE ARTE

Como ambos os triângulos são semelhantes:

$$\frac{H}{h}=\frac{S}{s}\Rightarrow\frac{H}{5}=\frac{20}{4}\Rightarrow H=25$$

Resposta: alternativa **a**.

29. Sejam x, y, z lados do triângulo semelhante respectivos aos lados 10, 12, 18:

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{12}=\frac{z}{18}$$

Como o perímetro dos triângulos é 40 cm e 60 cm:

$$\frac{60}{40}=\frac{x}{10}\Rightarrow x=15$$

$$\frac{60}{40}=\frac{y}{12}\Rightarrow y=18$$

$$\frac{60}{40}=\frac{z}{18}\Rightarrow z=27$$

Os lados do triângulo semelhantes têm medida 15 cm, 18 cm e 27 cm.

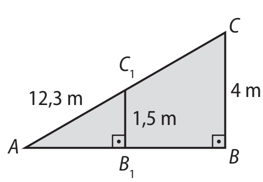
30. Sabendo que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, verifica-se que os triângulos APB e CPD são semelhantes; logo:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{DP}{BP}\Rightarrow\frac{CD}{36}=\frac{40}{5}\Rightarrow 5\cdot CD=36\cdot 40\Rightarrow CD=288$$

O comprimento da lagoa é 288 metros.

Resposta: alternativa **c**.

31. a) Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, pode-se elaborar a seguinte ilustração:



b) Como os triângulos AB_1C_1 e ABC são semelhantes e considerando que $CC_1=x$, conclui-se:

$$\frac{1,5}{4}=\frac{12,3}{12,3+x}\Rightarrow 12,3+x=\frac{4\cdot 12,3}{1,5}$$

$x=32,8-12,3\Rightarrow x=20,5$

A pessoa deve caminhar 20,5 m.

32. a) $B\hat{A}C$, $F\hat{B}S$, $S\hat{C}M$ e $B\hat{S}C$; $A\hat{B}S$ e $A\hat{C}S$; $B\hat{F}S$, $B\hat{S}F$, $C\hat{S}M$ e $C\widehat{M}S$.

b) Sim. Pode-se justificar pelo caso AA, conforme a congruência identificada no item anterior.

c) Sim. Como os ângulos $B\hat{S}P$ e $A\widehat{M}S$ são congruentes (item **a**), e os ângulos $B\hat{P}S$ e $A\hat{S}M$ são perpendiculares, os triângulos BPS e ASM são semelhantes e retângulos em P e S, respectivamente.

d) Pelo teorema de Tales, os ângulos $B\hat{A}C$, $F\hat{B}S$ e $S\hat{C}M$ são congruentes. As medidas dos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{AM}$ são iguais a 20 cm, logo $\triangle AFM$ é isósceles. Sendo assim, $FS=SM$, em comprimento.

Como B e C são pontos médios de $\overline{AF}$ e $\overline{AM}$, respectivamente, med$(\overline{FB})$ = med$(\overline{MC})$, mas $FS=SM$, logo $\triangle FBS \sim \triangle SCM$ pelo caso LAL e, portanto, $\triangle FBS$ é semelhante a $\triangle AFM$ (basta observar os ângulos internos e que med$(\overline{AF})$ = 2med$(\overline{FB})$).

Disso, tem-se que $\triangle BFS$ é isósceles (assim como $\triangle CSM$), portanto, med$(\overline{BS})$ = med$(\overline{FB})$ = = 10 cm. Daí, $\triangle BPS \sim \triangle ASM$, logo,

$$\frac{\overline{AM}}{y}=\frac{\overline{BS}}{x}\Rightarrow\frac{20}{y}=\frac{10}{x}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{10}{20}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

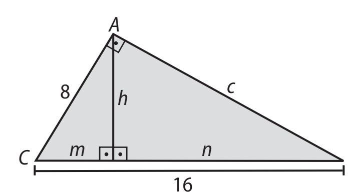
33. O corrimão é formado por duas partes horizontais de 30 cm cada uma e uma parte inclinada, que corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 90 cm e 120 cm (5 degraus com 24 cm cada um). Com base nesses dados, a medida (C) do corrimão será:

$$C=30+30+\sqrt{90^2+120^2}=60+\sqrt{8\,100+14\,400}=$$
$$=60+\sqrt{22\,500}=60+150=210$$

O corrimão mede 210 cm ou 2,10 m.

Resposta: alternativa **d**.

34. De acordo com a ilustração fornecida pelo enunciado e aplicando as relações métricas do triângulo retângulo:



$16^2=8^2+c^2\Rightarrow c^2=256-64\Rightarrow c^2=192\Rightarrow c=8\sqrt{3}$

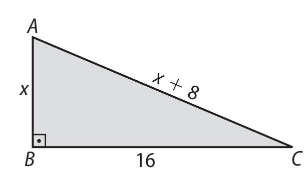
$c^2=16\cdot n\Rightarrow\left(8\sqrt{3}\right)^2=16n\Rightarrow n=\frac{192}{16}\Rightarrow n=12$

$8^2=16\cdot m\Rightarrow m=\frac{64}{16}=m=4$

$h^2=m\cdot n\Rightarrow h^2=12\cdot 4\Rightarrow h=\sqrt{48}\Rightarrow h=4\sqrt{3}$

As medidas são: $m=4$, $n=12$, $h=4\sqrt{3}$ e $c=8\sqrt{3}$.

35. De acordo com o enunciado, pode-se obter a ilustração a seguir:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$(x+8)^2=x^2+16^2$

$x^2+16x+64=x^2+256$

$16x=256-64\Rightarrow x=12$

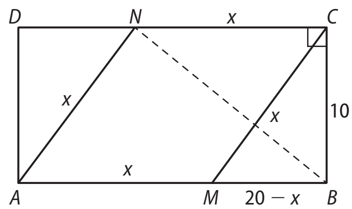
$AC=x+8$

$AC=12+8=20$

$AC=20$ m

36. Não. Como a altura é relativa à hipotenusa, não é possível calcular as medidas dos catetos. Para ser possível calcular, seria necessário mais uma informação, por exemplo: a medida de uma das projeções.

37. Considerando as informações do enunciado, pode-se elaborar a imagem a seguir:



Por meio do triângulo *BCM*, que é retângulo em *B*, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$x^2 = (20 - x)^2 + 10^2 \Rightarrow x^2 = 400 - 40x + x^2 + 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow 40x = 500 \Rightarrow x = \dfrac{25}{2}$

Portanto, para calcular a medida *NB*, pode-se considerar o triângulo retângulo *BCN*. Assim:

$NB^2 = x^2 + 10^2 \Rightarrow NB^2 = \left(\dfrac{25}{2}\right)^2 + 10^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow NB^2 = \dfrac{1\,025}{4} \Rightarrow NB = \sqrt{\dfrac{1025}{4}} = \dfrac{5\sqrt{41}}{2} \simeq 16$

38. Observando a sequência, os quadrados representados pelas 4ª, 11ª e *n*ª figuras correspondem aos números inteiros 5^2, 12^2 e x^2, em que $x = n - 1$.

Como *x* precisa ser o maior número, conclui-se:

$x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13$

Portanto, será a 12ª figura.

Resposta: alternativa **b.**

39. Como o trecho *RS* mede 1 700 m, então o trecho *ST* mede 300 m.

Assim, considerando o triângulo *STU*, que é retângulo em *T*, tem-se que $ST = 300$, $TU = 400$ e $US = x$. Portanto:

$US^2 = ST^2 + TU^2 \Rightarrow x^2 = 300^2 + 400^2 \Rightarrow x = 500$

Assim, o custo de instalação será:

Tubulação através do rio: $500 \cdot 830 = 415\,000$

Tubulação terrestre: $1700 \cdot 400 = 680\,000$

Custo total: $415\,000 + 680\,000 = 1\,095\,000$

Resposta: alternativa **d**.

40. a) Com base nos dados da figura, podemos utilizar semelhança de triângulos para chegar à seguinte relação:

$\dfrac{40}{50} = \dfrac{a}{40}$

$40^2 = 50 \cdot a \Rightarrow 1\,600 = 50a \Rightarrow a = \dfrac{1\,600}{50} = 32$

$a = 32$ m

b) Com base nos dados da figura:

$50 = 32 + b \Rightarrow b = 50 - 32 = 18 \Rightarrow b = 18$ m

c) Com base nos dados da figura:

$50^2 = 40^2 + c^2$

$2\,500 = 1\,600 + c^2 \Rightarrow 2\,500 - 1\,600 = c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \pm\sqrt{900} = 30 \Rightarrow c = 30$ m

d) $a^2 + h^2 = 40^2$

$32^2 + h^2 = 1\,600$

$h^2 = 1\,600 - 1\,024 = 576$

$h = \pm\sqrt{576} = 24$

A área do primeiro terreno é dada por

$A_1 = \dfrac{32 \cdot 24}{2} = 384\ \text{m}^2.$

A área do terreno comprado é dada por

$A_2 = \dfrac{18 \cdot 24}{2} = 216\ \text{m}^2.$

Sendo assim, pode-se aplicar a regra de três:

m²	%
384	100
216	*x*

$216 \cdot 100 = x \Rightarrow x = 56{,}25\%$

A proporção, em porcentagem, é de 56,25%.

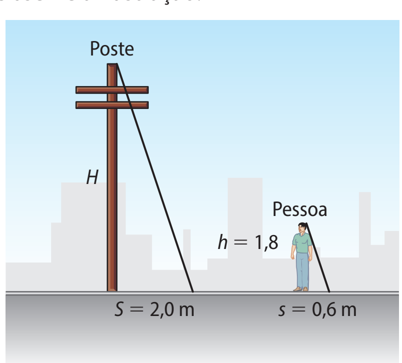
Atividades complementares

1. Considerando *y* como a altura do compartimento do meio, pode-se escrever a seguinte relação:

$\dfrac{6x}{3x} = \dfrac{42}{y} \Rightarrow 2y = 42 \Rightarrow y = 21$

Resposta: alternativa **d**.

2. Considerando a medida da pessoa e da árvore, em centímetros, pode-se calcular o comprimento da sombra da árvore. Observe a ilustração:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$\dfrac{H}{h} = \dfrac{S}{s} \Rightarrow \dfrac{H}{1{,}8} = \dfrac{2{,}0}{0{,}6} \Rightarrow 0{,}6H = 3{,}6 \Rightarrow H = 6{,}0$

Após a sombra do poste diminuir 0,50 m, a sombra da pessoa será:

$\dfrac{H}{h} = \dfrac{S - 0{,}5}{s} \Rightarrow \dfrac{6}{1{,}8} = \dfrac{2{,}0 - 0{,}5}{s} \Rightarrow \dfrac{6{,}0}{1{,}8} = \dfrac{1{,}5}{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6{,}0s = 2{,}7 \Rightarrow s = 0{,}45$

A sombra será de 0,45 m ou 45 cm.

Resposta: alternativa **b**.

3. Como a altura do poste e de Ana são proporcionais às medidas de suas respectivas sombras, então:

$$\frac{1,5}{2,4}=\frac{x}{3,7}\Rightarrow x=2,3$$

Resposta: alternativa **b**.

4. Pelo esquema e pelos dados fornecidos no enunciado, conclui-se que:

$MB = 10 \Rightarrow$ Pois $MN = 16$ e $BN = 6$

Assim, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{AB}{MB}=\frac{BC}{BN}\Rightarrow\frac{AB}{10}=\frac{9}{6}\Rightarrow AB=15$$

Outra informação que se pode obter é:

$BD = 19 \Rightarrow$ Pois, $BC = 9$ e $CD = 10$

Assim, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{DE}{DI}=\frac{BD}{GD}\Rightarrow\frac{4}{2}=\frac{19}{m+5}\Rightarrow 2m+10=19\Rightarrow m=4,5$$

Por fim, tem-se:

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}\Rightarrow\frac{15}{FG}=\frac{9}{4,5}\Rightarrow FG=\frac{15\cdot 4,5}{9}\Rightarrow FG=7,5$$

Como $FG = 7,5$ e $GH = 4,5$, tem-se que $FH = 12$.

Portanto, $AB + FH = 15 + 12 = 27$, ou seja, divisível por 3.

Resposta: alternativa **a**.

5. Pelo enunciado é possível estabelecer as relações:

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}\Rightarrow\frac{90}{135}=\frac{40}{A'B'}\Rightarrow A'B'=\frac{135\cdot 40}{90}=60$$

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{CD}{C'D'}\Rightarrow\frac{90}{135}=\frac{20}{C'D'}\Rightarrow C'D'=\frac{135\cdot 20}{90}=30$$

Portanto, $A'B' - C'D' = 60 - 30 = 30$

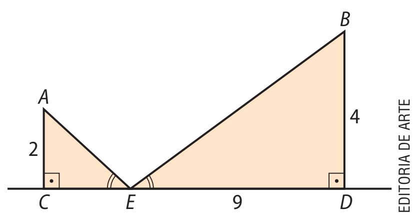
Resposta: alternativa **b**.

6. O espaço indicado será preenchido pela peça 2, pois a cor do triângulo na peça 1 é mais escura.

Porém, para a peça 2 encaixar corretamente, ou seja, para que as bases dos triângulos fiquem juntas, será necessário rotacioná-la 90° no sentido anti-horário.

Resposta: alternativa **c**.

7. Considerando as informações do enunciado, pode-se elaborar a seguinte ilustração:



Portanto, pode-se afirmar que:

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{E}A\cong D\hat{E}B \\ \hat{C}\cong\hat{D}\text{ (retos)}\end{array}\right\}\triangle ACE\sim\triangle BDE$$

Como os triângulos são semelhantes, conclui-se:

$$\frac{ED}{CE}=\frac{4}{2}\Rightarrow\frac{ED+CE}{CE}=\frac{4+2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{9}{CE}=\frac{6}{2}\Rightarrow CE=3$$

Resposta: alternativa **a**.

8. Como o trajeto é formado por três segmentos que formam um percurso fechado, conclui-se que esse trajeto é um triângulo.

Após andar 30 cm, a instrução II pede para realizar um giro de 90°, portanto esse triângulo é retângulo.

A instrução IV, que pede para voltar ao ponto inicial, representa a construção da hipotenusa do triângulo, pois é oposta ao ângulo de 90°, ou seja, as instruções I e III formam os catetos do triângulo retângulo. Assim, nomeando a hipotenusa desse triângulo como x:

$x^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow x = 50$

Resposta: alternativa **a**.

9. Considerando as informações do enunciado, depois de duas horas, Antônio estará a 120 m de distância do ponto de partida, enquanto Marcos estará a 160 km de distância.

Assim, a distância entre eles será:

$x^2 = 120^2 + 160^2 \Rightarrow x = 200$

A distância entre eles será de 200 km.

Resposta: alternativa **d**.

10. Pelo enunciado pode-se obter que:

$BC = 2,9 - 1,3 = 1,6$

Como $r_1 // r_2$, pode-se estabelecer a relação:

$$\frac{8}{3}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow\frac{8}{3}=\frac{1,6}{CD}\Rightarrow CD=0,6$$

Resposta: alternativa **a**.

11. De acordo como enunciado pode-se concluir que:

$$CE=\frac{3BC}{4}\ \text{ e }\ AF=\frac{2AD}{3}.$$

Como $AF \simeq CE$, pois são os lados opostos de um paralelogramo, pode-se afirmar que $AF=\frac{2AD}{3}=\frac{2BC}{3}$.

Assim, a razão de semelhança entre os lados correspondentes dos triângulos GCE e GAF é:

$$\frac{CE}{AF}=\frac{\frac{3BC}{4}}{\frac{2BC}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$$

Portanto, a razão de semelhança entre as áreas dos triângulos será:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{81}{64}=1,265625$$

Ou seja, a área do triângulo GCE é, aproximadamente, 27% maior que a área do triângulo GAF.

Resposta: alternativa **a**.

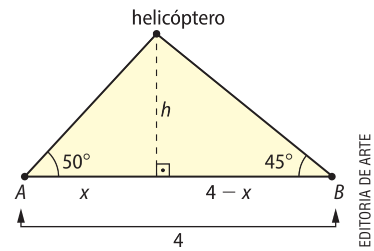
Capítulo 2: Trigonometria no triângulo

Atividades

1. a) Tangente. No triângulo retângulo formado, h é a medida do cateto oposto ao ângulo de inclinação e c é a medida do cateto adjacente.

b) Significa que a razão entre a altura do desnível e o comprimento horizontal da rampa é de $\frac{8}{100}$.

2. Utilizando o esboço a seguir como referência, tem-se:



$$\text{tg } 45° = \frac{h}{4-x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{4-x} \Rightarrow h = 4 - x \Rightarrow x = 4 - h$$

Sendo $\text{tg } 50° = \frac{h}{x} \Rightarrow 1{,}19 = \frac{h}{4-h} \Rightarrow 1{,}19(4 - h) = h \Rightarrow h \simeq 2{,}17$

A medida h é aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m.

3. Utilizando a tangente do ângulo formado entre os raios solares e o chão é possível chegar à seguinte relação:

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{50} \Rightarrow 0{,}58 = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 29$$

A altura do prédio é aproximadamente 29 m.

4. Relembrando que $\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$, para encontrar o tempo solicitado na atividade é necessário determinar a distância x, em metro, percorrida pelo ciclista, no caso, a medida da hipotenusa. Sendo assim:

$$\text{sen } 3° = \frac{30}{x} \Rightarrow 0{,}05 = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{0{,}05} = 600$$

Com o valor de x já determinado, usar da fórmula da velocidade para obter o tempo t, em segundos.

$$4 = \frac{600}{t} \Rightarrow t = \frac{600}{4} = 150$$

Convertendo o tempo para minutos, tem-se $t = \frac{150}{60} = 2{,}5$ min

Resposta: alternativa **a**.

5. Utilizando as relações trigonométricas apresentadas neste Capítulo é possível determinar o que se pede:

a) $\text{sen } \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos \gamma = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } \gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

b) $\text{sen } \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$

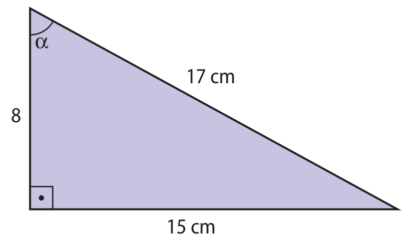
$\cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$

$\text{tg } \beta = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$

6. Pode-se determinar a medida do cateto adjacente por meio do teorema de Pitágoras:

$17^2 = x^2 + 15^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$

$x = 8$ cm (menor lado) $\rightarrow$ menor ângulo agudo



Aplica-se então a definição de seno, cosseno e tangente:

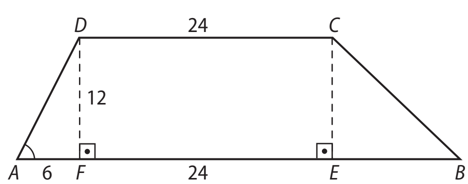
$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{15}{17}$; $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$; $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{15}{8}$

7. a) Utilizando a definição das medidas trigonométricas é possível determinar o valor do cosseno do ângulo a:

$\cos\alpha = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$. Sendo assim, utiliza-se a função $\cos^{-1}$ da calculadora científica chegando-se ao valor de $\alpha \simeq 51°$.

b) Seno do ângulo a: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{40}{120} = 0{,}333$. Utiliza-se então a função $\cos^{-1}$ da calculadora científica chegando-se ao valor de $\alpha \simeq 19°$.

c) A partir das informações do enunciado, considere a figura a seguir:



A medida $EC = DF = 12$. Já a medida AF deve ser obtida subtraindo a medida AE de FE, portanto $AF = 30 - 24 = 6$. Determina-se então a tangente de α: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{DF}{AF} = \dfrac{12}{6} = 2$. Logo, com a função tg^{-1} da calculadora científica, tem-se que $\alpha \simeq 63°$.

8. Utilizando a 2ª relação trigonométrica, é possível determinar o que se pede:

a) $\cos 25° = \text{sen}\,65° = 0{,}90$

b) $\cos 80° = \text{sen}\,10° = 0{,}17$

c) $\text{sen}\,40° = \cos 50° = 0{,}64$

9. O ângulo entre a escada rolante e o 2º piso é de 150°. Sendo assim, o ângulo α entre a escada rolante e a altura H é de $150° - 90° = 60°$. Utilizando a definição de cosseno é possível determinar ao que se pede:

$$\cos 60° = \frac{h}{11} \Rightarrow h = 11 \cdot \frac{1}{2} = 5{,}5 \Rightarrow h = 5{,}5$$

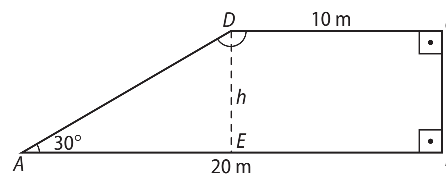
A altura h é 5,5 m.

10. Utilizando a definição de seno e de cosseno, tem-se:

$\cos 40° = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 8 \cdot \cos 40° \Rightarrow x = 6{,}16$

$\text{sen}\,40° = \dfrac{y}{8} \Rightarrow y = 8 \cdot \text{sen}\,40° \Rightarrow y = 5{,}12$

11. Como a soma das bases é igual a 30 m e a base maior é o dobro da menor, pode-se concluir que a base menor mede 10 m e a base maior, 20 m. Como o ângulo obtuso $C\hat{D}A$ mede 150°, então o ângulo $D\hat{A}B$ mede 30°, pois são suplementares. Logo:



Como $\text{sen}\,30° = 0{,}5$ e $\text{sen}^2\,30° + \cos^2 30° = 1$ então:

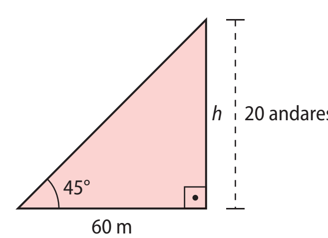
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, a altura DE vale:

$$\text{tg}\,30° = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

A altura do trapézio é $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ m.

12. Utilizando a representação a seguir, é possível determinar a altura do edifício:

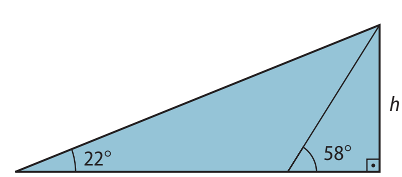


$$\text{tg}\,45° = \frac{h}{60} \Rightarrow 1 = \frac{h}{60} \Rightarrow h = 60$$

Como são 20 andares, a altura de cada apartamento, em metro, é dada por $\dfrac{60}{20} = 3$.

Portanto, cada andar tem 3 m.

13. Utilizando a representação a seguir como referência, considera-se que a altura do prédio mede h e a distância que a pessoa se afastou mede x. Logo:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\text{tg } 58° = \frac{h}{10} \Rightarrow 1{,}6 = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 16$$

$$\text{tg } 22° = \frac{h}{x+10} \Rightarrow \text{tg}22° = \frac{16}{x+10} \Rightarrow x+10 = \frac{16}{0{,}4} \Rightarrow x = 30$$

Portanto, o prédio possui 16 metros de altura, e a pessoa se afastou 30 metros.

14. Como o submarino está a 400 m de profundidade, tem-se:

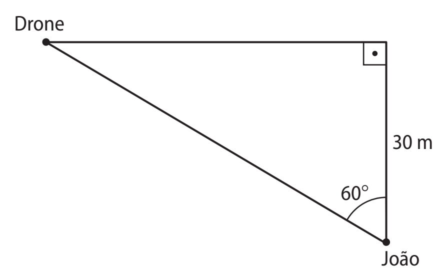
Distância horizontal (x) do submarino A até o barco B: $\text{tg } 62° = \frac{x}{400} \Rightarrow x = \text{tg } 62° \cdot 400 = 1{,}9 \cdot 400 = 760$

Distância horizontal (y) do submarino A até o barco C: $\text{tg } 40° = \frac{y}{400} \Rightarrow y = \text{tg } 40° \cdot 400 = 0{,}8 \cdot 400 = 320$

Portanto, a distância entre os barcos é de 760 m + 320 m = 1 080 m.

15. Resposta pessoal. Sugestão de problema: João ganhou um *drone* de presente e foi ao clube de aeromodelismo, com seu pai, fazê-lo voar. Porém, para evitar possíveis problemas, o clube instituiu a seguinte regra: a distância máxima entre o *drone* e seu respectivo proprietário deve ser de 70 m. Como um bom estudante de Matemática, João quis verificar se ele e seu pai estavam cumprindo a regra. Sendo assim, ele verificou que os equipamentos estavam voando pairados a 30 metros do chão, formando um ângulo de 30° entre a altura e suas posições. Determine se João estava ou não cumprindo a regra. Considere cos 60° = 0,5.

Elaborando uma ilustração a partir do enunciado do problema, obtém-se que:

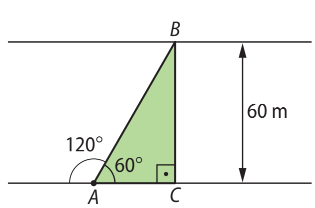


A distância entre João e o *drone* equivale a hipotenusa no triângulo, que será definida com x. Logo:

$$\cos 60° = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{0{,}5} = 60$$

Como a distância entre eles é de 60 m, João está cumprindo a regra do clube.

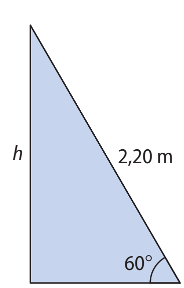
16. A partir do esquema a seguir, é possível perceber que o ângulo BÂC é de 60°. Sendo assim:



$$\text{sen } 60° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AB} \Rightarrow AB = 40\sqrt{3} \Rightarrow AB = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

17. Utilizando o esquema a seguir como referência, é possível determinar a altura em que a pessoa se encontra do chão:

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



$$\text{sen } 60° = \frac{h}{2{,}2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2{,}2} \Rightarrow h = 1{,}903$$

A pessoa estará a 1,903 m do chão.

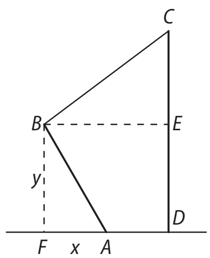
18. Utilizando a definição de tangente, tem-se:

$$\text{tg } 30° = \frac{12}{x} \Rightarrow 0,58 = \frac{12}{x}$$

$$x = \frac{12}{0,58} \simeq 20,6 \Rightarrow x \simeq 20,6$$

A distância é aproximadamente 20,6 m.

19. Segundo enunciado, sabe-se que $BA = 8$ m, $FA = 4$ m e $BC = 10$ m. Então, considerando-se $DE = BF = y$ e $BE = x + 4$, como na figura a seguir, tem-se:



$$\text{sen } 60° = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 8 \cdot \text{sen } 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triangulo CEB, tem-se:

$BC^2 = CE^2 + BE^2 \Rightarrow 10^2 = CE^2 + 8^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow CE^2 = 100 - 64 \Rightarrow CE = 6$

Portanto, a altura do poste é:

$CD = CE + DE = 6 + 4\sqrt{3}$

A altura do poste em relação ao solo é $6 + 4\sqrt{3}$ m.

20. **a)** Para determinar a medida CH, em centímetros, basta aplicar a definição de tangente:

$$\text{tg } 30° = \frac{CH}{12} \Rightarrow CH = 12 \cdot \text{tg } 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

b) Calculando a tangente do ângulo $B\hat{A}C$, tem-se:

$$\text{tg } \alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 1$$

Portanto, o ângulo solicitado é igual a 45°.

21. Sabendo que o segmento $\overline{BC}$ mede 50 metros, determina-se assim a medida de $\overline{AB}$:

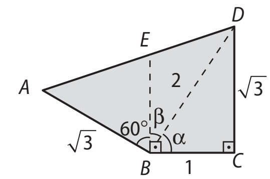
$$\text{tg } 60° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 50\sqrt{3}$$

Com a medida AB calculada, determina-se então a medida AD, em metros:

$$\text{sen } 30° = \frac{AB}{AD} = 50\sqrt{3} \Rightarrow AD = 100\sqrt{3}$$

Resposta: alternativa **e**.

22. Utilizando o segmento auxiliar $\overline{BD}$, divide-se o quadrilátero nos seguintes triângulos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔDCB, obtém-se:

$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 \Rightarrow BD = 2$

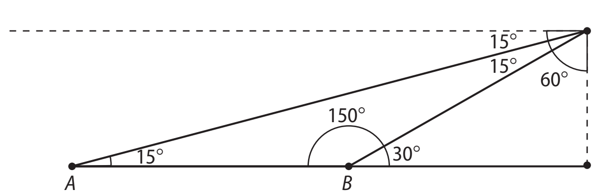
Logo, $\text{sen } \alpha = \frac{DC}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Então:

$\alpha = 60° \Rightarrow \beta = 30° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABD, obtém-se:

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 \Rightarrow (AD)^2 = 3 + 4 \Rightarrow AD = \sqrt{7}$

23. Considerando o esquema a seguir, percebe-se que os ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{A}B$ medem 15°, portanto o triângulo DAB é isósceles, logo a distância entre as cidades A e B é a mesma que a distância entre as cidades B e D, ou seja, $AB = BD$. Sendo assim, basta determinar a medida de $\overline{BD}$ para calcular a distância entre as cidades.

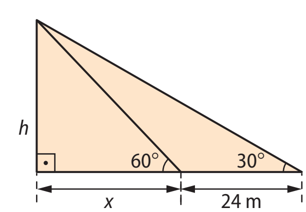


$$\cos 60° = \frac{DC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{2}} = 6$$

A distância entre as cidades B e D é 6 km.

Resposta: alternativa **e**.

24. Observando o esquema a seguir, é possível determinar a altura do prédio:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad \text{(I)}$$

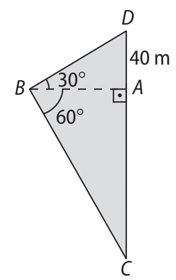
$$\text{tg } 30° = \frac{h}{x+24} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+24} \Rightarrow x = h\sqrt{3} - 24 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), vem:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3} - 24 \Rightarrow h = 3h - 24\sqrt{3} = \frac{24\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 12\sqrt{3} \Rightarrow h = 12\sqrt{3} \text{ m}$$

25. A partir das informações fornecidas no enunciado, pode-se utilizar o esquema a seguir:



Aplicando a definição de tangente no triângulo *BAD*, tem-se que:

$$\text{tg}\,30° = \frac{40}{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 40\sqrt{3} \Rightarrow AB = 40\sqrt{3}\ \text{m}$$

Para obter a medida da largura do rio, deve-se determinar a medida AC, que é um cateto do triângulo *BAC*. Assim, ao aplicar a definição de tangente, obtém-se que:

$$\text{tg}\,60° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{40\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 40\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow AC = 120\,\text{m}$$

26. Resposta pessoal. Uma resposta possível: Com a construção de um teodolito, efetuar o cálculo da altura do prédio mais próximo da escola, considerando as medidas realizadas em pelo menos duas posições diferentes.

27. Aplicando a lei dos cossenos, tem-se:

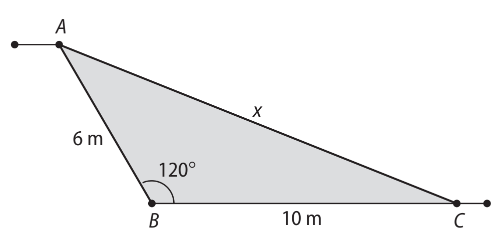
$(AB)^2 = 80^2 + 100^2 - 2 \cdot 80 \cdot 100 \cdot \cos 60°$

$(AB)^2 = 6\,400 + 10\,000 - 16\,000 \cdot \dfrac{1}{2}$

$AB = \sqrt{8\,400} \simeq 91{,}65$

A medida de *AB* é aproximadamente 91,65 m.

28. A partir das informações do enunciado, pode-se considerar a seguinte representação:



Aplicando a lei dos cossenos no triangulo *ABC*, tem-se:

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 36 + 100 + 60 = 196 \Rightarrow x = 14$

Resposta: alternativa **e**.

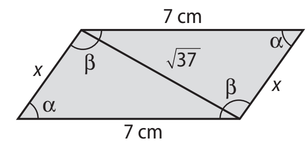
29. Aplicando a lei dos cossenos, tem-se:

$AB^2 = 32^2 + 13^2 - 2 \cdot 32 \cdot 13 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = 1\,609 \Rightarrow AB \simeq 40{,}1$

A distância entre os pontos *A* e *B* é aproximadamente 40 m.

30. Utilizando o esquema a seguir, aplica-se a lei dos cossenos para determinar o ângulo α:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$37 = x^2 + 49 - 2 \cdot x \cdot 7 \cdot \cos \alpha$

$x^2 - 14x \cdot \cos \alpha = -12$

Como a medida *x* do lado do paralelogramo não é conhecida, é impossível determinar uma medida para o ângulo α.

31. A partir das informações contidas no enunciado, sabe-se $AC = 2$ cm e que *B* é o ponto médio de *AC*, logo $AB = 1$ cm. Além disso, o $\triangle AEB$ é equilátero, então $AE = EB = AB = 1$ cm e o ângulo $A\hat{B}E = 60°$. Do $\triangle BCD$ é possível determinar que $C\hat{B}D = 60°$ e que $EB = BC = 1$ cm. Portanto, pode-se calcular a medida *BD* por meio da seguinte relação:

$$\text{sen}\,30° = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BD = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = 2$$

Sendo assim, aplicando a lei dos cossenos, determina-se a distância *DE*, em centímetros, é:

$DE^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow DE^2 = 3 \Rightarrow DE = \sqrt{3}$

Resposta: alternativa **e**.

32. Sabendo que uma volta completa no relógio equivale a 360°, determina-se que cada hora equivale a um giro de $\dfrac{360°}{12} = 30°$. Logo, o ângulo entre os ponteiros é de 60°, já que o relógio marca duas horas.

Sendo assim, aplica-se a lei dos cossenos para determinar a distância *x* entre as extremidades do relógio:

$x^2 = 80^2 + 50^2 - 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4\,900 \Rightarrow x = 70$

A distância entre os ponteiros é de 70 cm.

33. Aplicando a lei dos cossenos para um triângulo, pode-se calcular a medida *BC*, em centímetros:

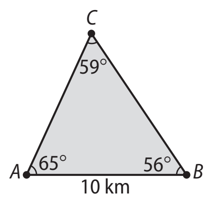
$BC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow BC^2 = 31 \Rightarrow BC \simeq 5{,}56$

Logo, para cada triângulo é necessário 5 cm + 6 cm + 5,56 cm = 16,56 cm. Como são 4 triângulos no total, Joana vai precisar de:

$$4 \cdot 16{,}56\ \text{cm} \simeq 66{,}28\ \text{cm}.$$

34. A partir das informações do enunciado, pode-se considerar a seguinte imagem:



Na calculadora, pode-se obter as aproximações:

sen 56° = 0,82904

sen 65° = 0,90631

sen 59° = 0,85717

Aplicando a lei dos senos no triangulo *ABC*, tem-se:

$$\frac{10}{\text{sen } 59°} = \frac{AC}{\text{sen } 56°} \Rightarrow AC = 9{,}67$$

$$\frac{10}{\text{sen } 59°} = \frac{BC}{\text{sen } 65°} \Rightarrow BC = 10{,}57$$

Portanto, a distância da torre *A* é 9,67 km e a distância da torre *B* é 10,57 km.

35. Aplicando a lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{AC}{\text{sen } 60°} = \frac{BC}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \frac{4}{\text{sen } 60°} = \frac{3}{\text{sen } \alpha}$$

$$4 \text{ sen } \alpha = 3 \text{ sen } 60° \Rightarrow \text{ sen } \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

36. **a)** Considerando o ângulo $A\hat{D}B = \alpha$, conclui-se que:

ABD: $61° + 93° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 26°$

Aplicando a lei dos senos no triângulo *ABD*, obtém-se:

$$\frac{AB}{\text{sen } 26°} = \frac{AD}{\text{sen } 61°} \Rightarrow \frac{25}{0{,}44} \simeq \frac{AD}{0{,}87} \Rightarrow AD \simeq 49{,}43$$

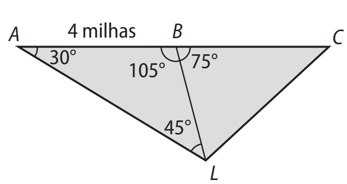
A distância é de aproximadamente 49,43 m.

b) Considerando o triângulo *ACD*, obtém-se:

$$\text{sen } 56° = \frac{h}{AD} \Rightarrow 0{,}83 \cdot 49{,}43 = h \Rightarrow h \simeq 41$$

O balão está a aproximadamente 41 m do solo.

37. Considerando as informações do enunciado, pode-se obter o esquema a seguir:



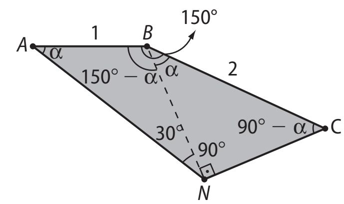
Aplicando a lei dos senos, obtém-se:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{BL}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BL}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BL = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow BL = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow BL = 2\sqrt{2}$$

A distância entre o farol e o ponto B é de $2\sqrt{2}$ milhas.

38. Seja α o ângulo $N\hat{B}C$:



a) Pela lei dos senos, no triângulo *ABN*, tem-se:

$$\frac{AB}{\text{sen } 30°} = 2r \Rightarrow 2r = 2 \cdot AB \Rightarrow r = 1$$

O raio da circunferência mede 1 km.

b) Ainda no triângulo *ABN*:

$$\frac{NB}{\text{sen } \alpha} = 2 \cdot r \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{NB}{2} \qquad \text{(I)}$$

No triangulo retângulo *BCN*:

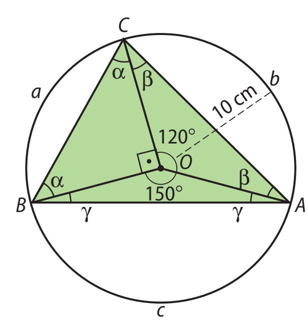
$$\cos \alpha = \frac{BN}{2} \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), pode-se concluir que sen α = cos α; logo, $\alpha = 45°$.

$$NB = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

O comprimento do segmento *NB* é $\sqrt{2}$ km.

39. **a)** Utilizando a informações contidas no enunciado, obtém-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Como os arcos são proporcionais a 3, 4 e 5, então:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{12} = \frac{360°}{12} = 30°$$

Logo:

$$\text{med}\left(B\hat{O}C\right) \Rightarrow \frac{a}{3} = 30° \Rightarrow a = 90° \Rightarrow$$

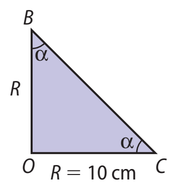
$$\Rightarrow \text{med}\left(B\hat{A}C\right) = 45°$$

$$\text{med}\left(C\hat{O}A\right) \Rightarrow \frac{b}{4} = 30° \Rightarrow b = 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{med}\left(C\hat{B}A\right) = 60°$$

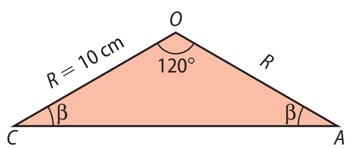
$$\text{med}\left(B\hat{O}A\right) \Rightarrow \frac{c}{5} = 30° \Rightarrow c = 150° \Rightarrow \text{med}\left(B\hat{C}A\right) = 75°$$

b) Considerando o $\triangle COB$, a medida de BC, em centímetro, é:



$(BC)^2 = R^2 + R^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \Rightarrow$
$\Rightarrow BC = \sqrt{200} \Rightarrow BC = 10\sqrt{2}$

Considerando o $\triangle COA$, a medida de CA, em centímetro, é:

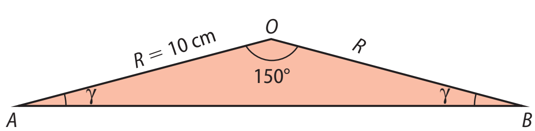


$(CA)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow (CA)^2 = 2R^2 - 2R^2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3R^2$

$CA = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \Rightarrow CA = 10\sqrt{3}$

Considerando o $\triangle BOA$, a medida de AB, em centímetro, é:



$(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 150°$

$(AB)^2 = 2R^2 - \cancel{2}R^2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = 2R^2 + \sqrt{3}R^2 = R^2\left(2+\sqrt{3}\right)$

$AB = R\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}$

40. A partir do triângulo ABC, considera-se que $A\hat{C}B = \gamma$, logo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow 75° + 60° + \gamma = 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \gamma = 45°$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, pode-se concluir que a medida de AC, em centímetro, é:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{AB}{\text{sen } 60°} \Rightarrow \frac{30}{\text{sen } 45°} = \frac{AC}{\text{sen } 60°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{6}$$

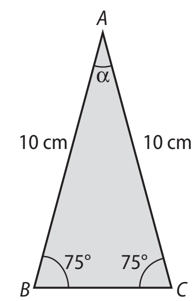
Considerando o $\triangle ACD$, pode-se concluir que a medida de CD, em centímetros, é:

$$\text{tg } 30° = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{15\sqrt{6}} \Rightarrow CD = 15\sqrt{2}$$

Ao dividir CD por $\sqrt{2}$, obtém-se:

$$\frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 15 \text{ m}$$

41. Considerando a representação a seguir e o teorema da área de um triângulo qualquer, pode-se resolver a atividade.



$a + 150° = 180° \Rightarrow a = 30°$

$$A = \frac{10 \cdot 10 \cdot \text{sen } 30°}{2} = \frac{100 \cdot 0{,}5}{2} = 25$$

$A = 25 \text{ cm}^2$

42. Da figura apresentada no enunciado, sabe-se que a área total é dada por:

$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{AEDF} + S_{FDC}$

Considerando o $\triangle ABC$, determina-se a medida AC e, depois, FC:

$(AC)^2 = 40^2 + 38^2 - 2 \cdot 40 \cdot 38 \cdot \cos 60°$

$(AC)^2 = 1\,600 + 1\,444 - 2 \cdot 152 \cdot \dfrac{1}{2}$

$(AC)^2 = 1\,524 \Rightarrow AC \simeq 39$

$FC = 39 - 25 = 14 \Rightarrow FC \simeq 14$

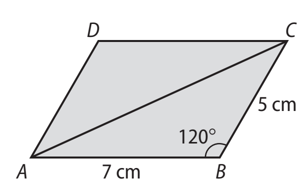
$$S_{ABCDE} = \frac{38 \cdot 40 \cdot \text{sen } 60°}{2} + 30 \cdot 25 + \frac{14 \cdot 30}{2}$$

$S_{ABCDE} = 760 \cdot 0{,}86 + 750 + 210 \simeq 1\,613{,}60 \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{ABCDE} \simeq 1\,613{,}60 \text{ m}^2$

Preço: $35{,}00 \cdot 1\,613{,}60 = 56\,476$

O valor do terreno é R$ 56.476,00.

43. Por meio do esquema a seguir, construído com as informações do enunciado, evidencia-se que a área total do paralelogramo é igual ao dobro da área do triângulo ABC, portanto:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$A_{\triangle ABC} = \frac{7 \cdot 5 \cdot \text{sen } 120°}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_T = 2 \cdot A_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot 35\sqrt{3}}{4} = \frac{35\sqrt{3}}{2}$$

A área é $A_T = \dfrac{35\sqrt{3}}{2}$ cm².

44. Sabendo que $A\hat{C}B = 120°$, tem-se que $B\hat{A}C = 30°$, logo o $\triangle ABC$ é isósceles e $BC = AC$. Portanto, com base no teorema da área de um triângulo qualquer, obtém-se a medida AC que, em centímetro, é:

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AC \cdot \text{sen}\,120°}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25\sqrt{3} = \frac{AC \cdot AC \cdot \text{sen}\,120°}{2} \Rightarrow AC = 10$$

Aplicando a lei dos cossenos, determina-se AB:

$AB^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow AB^2 = 300$

$AB = 10\sqrt{3} \simeq 17$ cm

Portanto o perímetro do triângulo é aproximadamente 37 cm (10 + 10 + 17).

45. A área total do hexágono é igual a seis vezes a área de cada triângulo. Logo, utilizando o teorema da área de um triângulo qualquer, tem-se, que a área do hexágono, em cm^2, é:

$$S_{hex} = 6 \cdot \frac{x \cdot x \cdot \text{sen}\,60°}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$$

Atividades complementares

1. Utilizando a definição da tangente nos dois ângulos, tem-se:

$$\begin{cases} \text{tg}\,20° = \dfrac{h}{d} \\ \text{tg}\,18 = \dfrac{h-5}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 0{,}36d & \text{(I)} \\ h - 5 = 0{,}32d & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de h, da equação (I), na equação (II), obtém-se:

$0{,}36d - 5 = 0{,}32d \Rightarrow 0{,}04d = 5 \Rightarrow d = 125$

Substituindo o valor de d na equação (I), obtém-se:

$h = 0{,}36 \cdot 125 = 45$

Resposta: alternativa **d**.

2. Por meio do cálculo da tangente, determina-se a altura dos olhos de João até o topo da estátua:

$$\text{tg}\,66° = \frac{h}{16} \Rightarrow h \simeq 36{,}94$$

Logo, a altura da estátua é de 36,94 m + 1,90 m ≃ 38 m

Resposta: alternativa **e**.

3. Por meio das coordenadas dos pontos, considera-se que x é a distância entre o ponto P e a origem. Logo:

$(x)^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow x = 17$

Portanto, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{8}{17}$.

Resposta: alternativa **c**.

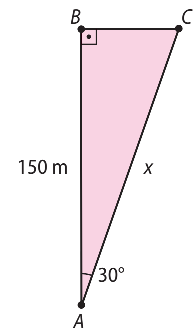
4. Sendo $\overline{AB}$ o cateto adjacente a 60° e $\overline{AC}$ a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, então:

$$\cos 60° = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{160}{AC} \Rightarrow AC = 320$$

Portanto, o cidadão está a 320 m do poço.

Resposta: alternativa **b**.

5. Utilizando a figura a seguir como referência e sabendo que o ângulo BÂC = 30°, calcula-se a distância percorrida pelo barco:



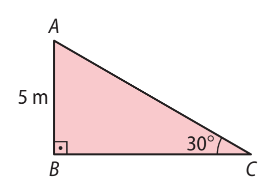
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\cos 30° = \frac{150}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\sqrt{3} = 300 \Rightarrow x = \frac{300\sqrt{3}}{3} = 100\sqrt{3}$$

A distância percorrida pelo barco foi de $100\sqrt{3}$ metros.

Resposta: alternativa **d**.

6. Calculando o seno do ângulo destacado na figura, tem-se:



$$\text{sen}\,30° = \frac{5}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{AC} \Rightarrow AC = 10 \text{ m}$$

Resposta: alternativa **b**.

7. Se h é a altura em que se encontrava o balão, tem-se:

$$\text{tg}\,60° = \frac{h}{1{,}8} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{1{,}8} \Rightarrow h = 3{,}11 \Rightarrow h = 3{,}1 \text{ km}$$

Resposta: alternativa **c**.

8. Utilizando a definição de cosseno e considerando as informações do enunciado, tem-se:

$$\cos 45° = \frac{100}{AB} \Rightarrow AB = \frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 100\sqrt{2}$$

Resposta: alternativa **b**.

9. Seja x a distância entre a Estação Minizoo e a Estação Vista do Céu. Pelo enunciado, tem-se que:

$x + 3x = 480 \Rightarrow x = 120$

Logo, $3x = 360$.

Portanto, para determinar a altura da estação Vista do Céu basta adicionar a altura de cada um dos triângulos da figura correspondentes à altura da Estação Minizoo (h_1) e à diferença entre a altura da Estação Vista do Céu e a da Estação Minizoo (h_2). Essas alturas podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$\text{sen}\,60° = \frac{h_1}{360} \Rightarrow h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 360 = \frac{1{,}7}{2} \cdot 360 = 306 \Rightarrow h_1 = 360 \text{ m}$$

$$\text{sen}\,30° = \frac{h_2}{120} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60 \Rightarrow h_2 = 60 \text{ m}$$

Portanto, em metro, a altura total é $h_1 + h_2 = 366$.
Resposta: alternativa **c**.

10. Aplicando a definição de tangente no triângulo *ABE*, determina-se o valor de *x*: $\text{tg}\,30° = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$
Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:
$BE^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow BE = 4\sqrt{3}$
Logo, o perímetro do triângulo em metro, é dado por: $6 + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}$.
Resposta: alternativa **c**.

11. Aplicando a lei dos cossenos, tem-se:
$BC^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow BC^2 = 300$
$BC = 10\sqrt{3} \simeq 17$ cm
Como o raio mede aproximadamente 17 cm, então o material será do tipo IV.
Resposta: alternativa **d**.

12. Seja *x* a medida do lado do quadrado. Sabendo que a área do cartão mede 256 cm², então:
$x^2 = 256 \Rightarrow x = 16$
O lado do cartão mede 16 cm.
Além disso, sabe-se que o $\triangle APB$ é retângulo em *P*, logo:

$$\text{sen}\,30° = \frac{BP}{16} \Rightarrow BP = 8$$

$$\cos 30° = \frac{AP}{16} \Rightarrow AP = 8\sqrt{3}$$

Portanto, o perímetro do triângulo em centímetro, é: $8 + 8\sqrt{3} = 8(3 + \sqrt{3})$.
Resposta: alternativa **d**.

13. Aplicando a lei dos cossenos, obtém-se:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos 60° \Rightarrow BC^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$BC^2 = 144 + 225 - 180$$

$$BC^2 = 189$$

Como $\sqrt{169} < \sqrt{189} < \sqrt{196}$, então $13 < \sqrt{189} < 14$, ou seja, a distância entre as pipas é um número compreendido entre 13 e 14.
Resposta: alternativa **c**.

14. Utilizando o teorema da área de um triângulo qualquer, tem-se que a área, em metro quadrado, é:

$$S = \frac{60 \cdot 30 \cdot \text{sen}\,150°}{2} = \frac{60 \cdot 30 \cdot \text{sen}\,30°}{2} = 450$$

Resposta: alternativa **e**.

15. Do enunciado, tem-se que $A\hat{B}C = 60°$. Logo, pela lei dos senos:

$$\frac{AC}{\text{sen}\,60°} = \frac{8}{\text{sen}\,45°} \Rightarrow AB = 8 \cdot \frac{\text{sen}\,60°}{\text{sen}\,45°} = 8 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6}$$

$AB = 4\sqrt{6}$ km
Resposta: alternativa **b**.

16. Aplicando o teorema de Pitágoras aos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, determinam-se *AC* e *AD*, respectivamente:

$$AC^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{5}$$

$$AD^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Sendo assim, por meio da lei dos cossenos, determina-se o ângulo θ:

$$5^2 = \sqrt{5}^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}\cos\theta \Rightarrow 25 = 5 + 40 - 4\sqrt{50}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{20}{4\sqrt{50}} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = 45°$.

Resposta: alternativa **c**.

17. Considerando as informações contidas no enunciado, tem-se que $C\hat{D}B = 120°$, logo $C\hat{B}D = 30°$. Sendo assim, o $\triangle BCD$ é isósceles e $CD = BD$. Portanto, tem-se:

$$\cos 60° = \frac{3}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{BD} \Rightarrow BD = 6$$

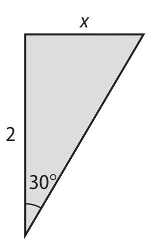
$$S_{ABD} = q = \frac{3\cdot 6\cdot \text{sen}\,60°}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BCD} = p = \frac{6\cdot 6\cdot \text{sen}\,120°}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2}$$

Logo, pela relação obtida, tem-se $p = 2q$

Resposta: alternativa **b**.

18. Utilizando a figura a seguir como referência, é possível calcular a área da parte de João:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$\text{tg}\,30° = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Assim, a área do terreno de João é, em quilômetro quadrado, dada por:

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

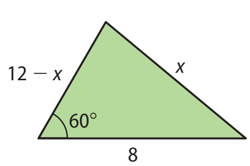
Área total $= 3 \cdot 2 = 6$

Como a área total deixada como herança é de 6 km², tem-se que a porcentagem do terreno de João equivale a cerca de 19%, pois:

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{9} \simeq 0{,}1925 = 19{,}25\%$$

Resposta: alternativa **e**.

19. Considerando as informações contidas no enunciado, pode-se afirmar que um lado mede 8 m e o perímetro do terreno é 20 m. Então os outros dois lados podem ser definidos como x e $12 - x$.



Aplicando a lei dos cossenos:

$$x^2 = (12 - x)^2 + 8^2 - 2\cdot 8\cdot (12 - x)\cdot \cos 60°$$

$$x^2 = 144 - 24x + x^2 + 64 - 96 + 8x \Rightarrow 16x = 112 \Rightarrow x = 7$$

Portanto, os lados medem 7 m e 5 m.

Alternativa **b**.

20. Do triângulo do enunciado, tem-se que $A\hat{C}B = 45°$. Logo, ao aplicar a lei dos senos, obtém-se:

$$\frac{AB}{\text{sen}\,45°} = \frac{12}{\text{sen}\,30°} \Rightarrow AB = 12\sqrt{2} \simeq 16{,}97$$

Conforme a atividade menciona, convertendo para a escala real, tem-se:

$$AB = 16{,}97 \cdot \frac{10\,000}{1} \simeq 1{,}7 \Rightarrow AB \simeq 1{,}7\ \text{km}$$

Resposta: alternativa **e**.

Atividades

1. Em cada um dos itens, aplica-se a regra de três simples para calcular o valor do ângulo em radianos, ou vice-versa.

a) 180° ——— π rad
60° ——— x

$$\frac{180°}{60°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow 3 = \frac{\pi \text{rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

b) 180° ——— π rad
210° ——— x

$$\frac{180°}{210°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow \frac{6}{7} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow 6x = 7\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

c) 180° ——— π rad
x ——— $\frac{10\pi}{9}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi \text{ rad}}{\frac{10\pi}{9} \text{ rad}} \Rightarrow \frac{180°}{x} = \frac{9}{10} \Rightarrow 9x = 1800 \Rightarrow x = 200°$$

d) 180° ——— π rad
x ——— $\frac{\pi}{20}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi \text{ rad}}{\frac{\pi}{20} \text{ rad}} \Rightarrow \frac{180°}{x} = \frac{20}{1} \Rightarrow 20x = 180 \Rightarrow x = 9°$$

2. Como o relógio analógico está dividido em 12 partes, cada parte mede 360° : 12 = 30°, ou seja, a cada 5 minutos o ponteiro percorre 30°. Então, em 25 minutos, o ponteiro percorre 30° · 5 = 150°.
Transformando em radianos, obtém-se:

180° ——— π rad
150° ——— x

$$\frac{180°}{150°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow 6x = 5\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

- Respostas pessoais. Uma possibilidade é observar uma volta completa no relógio, que equivale a 360°, e que há 12 divisões nele. Portanto, ao dividir por 12, tem-se, a cada 5 minutos, um arco de 30°.

3. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, obtêm-se as seguintes informações:
diâmetro = 32 cm

$$\text{raio} = \frac{\text{diâmetro}}{2} \Rightarrow \text{raio} = 16 \text{ cm}$$

$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 16 = 32\pi$

Como o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 8 cm, então:

2π rad ——— 32π cm
x ——— 8 cm

$$x = \frac{2\pi \cdot 8}{32\pi} = \frac{1}{2}$$

Logo, o arco $\overset{\frown}{AB}$ de 8 cm equivale a $\frac{1}{2}$ rad ou 0,5 rad.

4. Observe que é possível dividir o caminho em 3 partes.
Na primeira, de P a C representa uma semicircunferência de diâmetro igual a 4 m e, portanto, raio igual a 2 m.

Dessa forma, seu comprimento será:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{2} = 2\pi$$

Na segunda parte, de C a T obtém-se novamente uma semicircunferência de raio igual a 2 m. Seu comprimento será igual ao calculado anteriormente $C = 2\pi$.

Na terceira parte, de T a Q, obtém-se um quarto de circunferência de raio igual a 4 m. Seu comprimento será:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{4} = 2\pi$$

Somando os resultados de comprimento encontrados nas três partes do trajeto, obtém-se o comprimento total de 6π metros.

5. A distância total percorrida pela formiga A é metade do comprimento de uma circunferência de raio R:

$$\frac{C}{2} = \pi R$$

A distância total percorrida pela formiga B é metade do comprimento de uma circunferência de raio r mais a distância do segmento $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, ou seja, 1 cm para cada segmento. Logo:

$$\frac{C}{2} + 2 = \pi r + 2$$

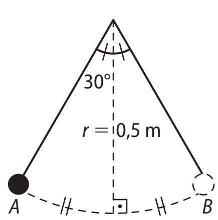
A diferença entre as distâncias percorridas pelas formigas A e B é:

$(\pi R) - (\pi r + 2) \Rightarrow \pi R - \pi r - 2 \Rightarrow \pi(R - r) - 2$

Como a diferença $(R - r)$ é 1 cm, então conclui-se que a diferença entre os caminhos das formigas é $\pi - 2$.

Resposta: alternativa **d**.

6. Observe que a figura representa o comprimento de um arco de 20°. Transformando 20° em radianos, obtém-se:

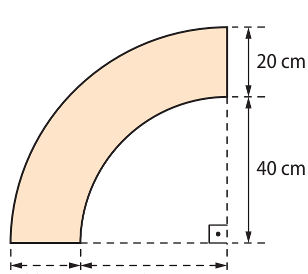


$$\frac{180°}{20°} = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow 9 = \frac{\pi \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

Utilizando a fórmula de comprimento de arco, obtém-se $L = \alpha \cdot r$, com $r = 0{,}5$ m

$$L = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow L = \frac{\pi}{18} \text{ m}$$

7. a)



Observe que a imagem representa a quarta parte de duas circunferências concêntricas e a distância entre elas é de 10 cm. Dessa forma conclui-se:

raio da circunferência maior $R = 20 + 10 = 30$, ou seja, 30 cm.

Comprimento da circunferência maior $C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 \Rightarrow C = 188{,}4$, ou seja, 188,4 cm

Como só há um quarto representado na figura, divide-se o resultado anterior por 4. Logo:

$\frac{C}{4} = 47{,}1$, ou seja, 47,1 cm.

Raio da circunferência menor $r = 20$ cm

Comprimento da circunferência menor $c = 2\pi r$

$c = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \Rightarrow c = 125{,}6$, ou seja, 125,6 cm

Como só há um quarto representado na figura, divide-se o resultado anterior por 4. Logo:

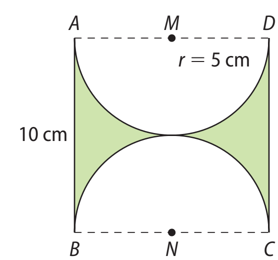
$\frac{c}{4} = 31{,}4$, ou seja, 31,4 cm.

Adicionando os resultados, obtém-se:

$31{,}4 + 47{,}1 + 10 + 10 = 98{,}5$.

O comprimento do contorno será 98,5 cm.

b)



Observe que a figura representa duas semicircunferências. Pode-se, então, calcular o comprimento de uma circunferência de raio = 5 cm e adicionar a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do quadrado ao resultado. Sendo assim:

$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4 \Rightarrow C = 31{,}4$ cm

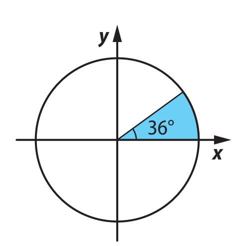
Perímetro total $= 31{,}4 + 10 + 10 = 51{,}4$

O comprimento do contorno será 51,4 cm.

8. a) $\frac{\pi}{5}$ equivale a:

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{5} = 36°$$

Logo, ao representar 36° na circunferência trigonométrica, obtém-se:

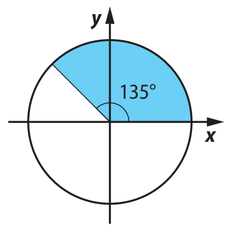


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

b) $\frac{3\pi}{4}$ equivale a:

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$$

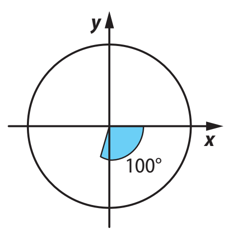
Logo, ao representar 135° na circunferência trigonométrica, obtém-se:



c) $-\dfrac{5\pi}{9}$ equivale a:

$$-\frac{5\pi}{9}=-\frac{5\cdot 180^\circ}{9}=-100^\circ$$

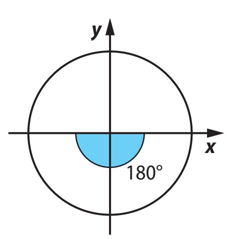
Logo, ao representar $-100°$ na circunferência trigonométrica, no sentido horário, obtém-se:



d) -5π equivale a:

$-5\pi = -5 \cdot 180^\circ = -900^\circ$

Como $-900°$ corresponde a duas voltas inteiras na circunferência mais 180° no sentido horário, ao representar na circunferência trigonométrica, obtém-se:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

9. a) Sabe-se que 360° representa uma volta completa ao ciclo trigonométrico, bem como $360k$, com k inteiro, representa k voltas ao ciclo trigonométrico.

Para que um ângulo α seja côngruo ao arco de 63°, α tem que ter mesmas origem e extremidade que 63°, ou seja, $63^\circ + k \cdot 360^\circ$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Sabe-se que 2π representa uma volta completa ao ciclo trigonométrico, bem como $2k\pi$, com k inteiro, representa k voltas ao ciclo trigonométrico.

Para que um ângulo α seja côngruo ao arco $\dfrac{3\pi}{4}$, α deve ter mesmas origem e extremidade que $\dfrac{3\pi}{4}$, ou seja, $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

10. a) Com relação ao ângulo 1 490°, pode-se escrever que:

$1\,490^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 50^\circ$

Com relação ao ângulo $-1\,030°$, pode-se escrever que:

$-1\,030^\circ = -2 \cdot 360^\circ - 310^\circ$

Como 50° e $-310°$ são côngruos, os ângulos 1 490° e $-1\,030°$ também o são.

b) Com relação ao ângulo $\dfrac{14\pi}{3}$ rad pode-se escrever que:

$$\frac{14\pi}{3} = 2\cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

Com relação ao ângulo $\dfrac{19\pi}{3}$ rad, pode-se escrever que:

$$\frac{19\pi}{3} = 3\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

Como $\dfrac{\pi}{3}$ rad e $\dfrac{2\pi}{3}$ rad não são côngruos, então os ângulos $\dfrac{14\pi}{3}$ rad e $\dfrac{19\pi}{3}$ rad também não o são.

11. Sabe-se que $-\dfrac{5\pi}{6}$ equivale a 210° e $\dfrac{7\pi}{6}$ equivale a 210°.

Logo, eles são pontos coincidentes na circunferência.

- Resposta pessoal.

12. a) Ao dividir $-1\,640°$ por 360°, obtém-se -4 e resto $-200°$.

Como $360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$, pode-se afirmar que $-1\,640°$ e 160° são côngruos e estão no segundo quadrante.

b) Ao dividir $\dfrac{2\,487\pi}{4}$ por 2π obtém-se 310 e resto $\dfrac{7\pi}{4}$.

Portanto, $\dfrac{2\,487\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$ são côngruos e estão no quarto quadrante.

13. a) Com relação ao ângulo 1 810°, pode-se escrever:

$1\,810^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 10^\circ$

Então, o móvel dá 5 voltas completas e para no primeiro quadrante.

b) Com relação ao ângulo $\dfrac{25\pi}{4}$, pode-se escrever:

$$\frac{25\pi}{4} = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Então, o móvel dá 3 voltas e para no primeiro quadrante.

c) Com relação ao ângulo $-1\,200°$, pode-se escrever:

$-1\,200^\circ = -3 \cdot 360^\circ - 120^\circ$

Como $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, pode-se afirmar que $-1\,200°$ e 240° são côngruos. Então, o móvel dá 3 voltas em sentido horário e para em 240°, ou seja, no terceiro quadrante.

d) Com relação ao ângulo 900°, pode-se escrever:

$900^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ$

Então, o móvel dá 2 voltas e para em 180°, ou seja, sobre o eixo x no ponto $(-1, 0)$.

e) Com relação ao ângulo $\dfrac{31\pi}{6}$, pode-se escrever que:

$$\frac{31\pi}{6} = 4\pi + \frac{7\pi}{6}$$

Então, o móvel dá 2 voltas e para no terceiro quadrante.

f) Com relação ao ângulo $\frac{9\pi}{2}$, pode-se escrever que:

$\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}$

Então, o móvel dá 2 voltas e para em $\frac{\pi}{2}$, ou seja, sobre o eixo y no ponto (0, 1).

14. Primeiro, deve-se verificar quantas voltas completas o corpo descreve, ou seja:

$600° = 360° + 240°$

Portanto, descreve uma volta completa e um arco de 240°.

Uma volta completa equivale a:

$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$

Com relação ao arco, conclui-se que:

$360° \text{ ——— } 2\pi r$

$240° \text{ ——— } x$

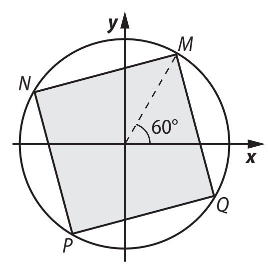
$x = \frac{\cancel{480}°\pi r}{\cancel{360}°} = \frac{4}{3}\pi r$

$x = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 41{,}87$

Portanto, a distância percorrida será, aproximadamente:

41,87 cm + 62,80 cm = 104,67 cm.

15. a)



EDITORIA DE ARTE

De acordo com a ilustração, têm-se que $M = 60°$, $N = M + 90°$, $P = N + 90°$ e $Q = P + 90°$. Como $90° = \frac{\pi}{2}$, obtém-se que:

$60° \text{ ——— } x$

$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$

$x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

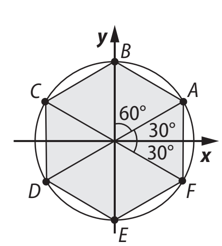
$M = 60°$ ou $M = \frac{\pi}{3}$

$N = 60° + 90° = 150°$ ou $N = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

$P = 150° + 90° = 240°$ ou $P = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$

$Q = 240° + 90° = 330°$ ou $Q = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}$

b)



De acordo com a ilustração, têm-se que $A = 30°$, $B = A + 60°$, $C = B + 60°$, $D = C + 60°$, $E = D + 60°$ e $F = E + 60°$. Como $60° = \dfrac{\pi}{3}$, obtém-se que:

$$\begin{array}{l} 30° \text{ ——— } x \\ 180° \text{ ——— } \pi \text{ rad} \end{array}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$A = 30° \text{ ou } A = \frac{\pi}{6}.$$

$$B = 30° + 60° = 90° \text{ ou } B = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$C = 90° + 60° = 150° \text{ ou } C = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$D = 150° + 60° = 210° \text{ ou } D = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

$$E = 210° + 60° = 270° \text{ ou } E = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

$$F = 270° + 60° = 330° \text{ ou } F = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

16. Convertendo o arco $\overset{\frown}{AM}$ em radianos, obtém-se:

$$AM = 13 \cdot 2\pi + \frac{1}{8} \cdot 2\pi = 13 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

Como as voltas estão no sentido horário, então deve-se considerar que:

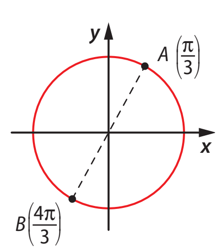
$$2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Logo, $13 \cdot 2\pi$ representam voltas completas, segue que:

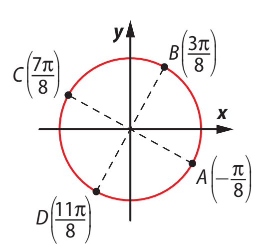
$\dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, representa todos os arcos $\overset{\frown}{AM}$.

17. Para representar na circunferência trigonométrica as extremidades dos arcos, as medidas deles são dadas pelas expressões a seguir:

a)



b)



c)

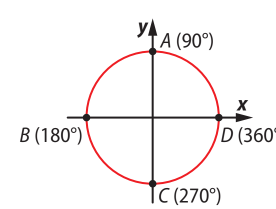


ILUSTRAÇÃO: EDITORIA DE ARTE

18. Fazendo a redução ao primeiro quadrante de cada item a seguir, obtêm-se:

a) $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen } 240° = -\text{sen } (240° - 180°) = -\text{ sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos 240° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

e) $\text{sen } 315° + \cos 315° = -\text{sen } 45° + \cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

19. a) 135° é um arco do 2º quadrante pois 90° ⩽ x ⩽ 180°. No 2º quadrante o seno possui um valor positivo e o cosseno, um valor negativo.

Logo:

$$\text{sen } 135° = \text{sen } (180° - 135°) = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = -\cos (180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\frac{5\pi}{6}$ é um arco do 2º quadrante, pois $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$. No 2º quadrante o seno possui um valor positivo e o cosseno, um valor negativo.

$$\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \text{sen } \left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $\frac{19\pi}{4}$ possui sua 1ª determinação positiva em $\frac{3\pi}{4}$, cujo arco pertence ao 2º quadrante, pois $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$. No 2º quadrante o seno possui um valor positivo e o cosseno, um valor negativo.

$$\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) −240° possui sua 1ª determinação positiva em 120°, cujo arco pertence ao 2º quadrante, pois 90° ⩽ x ⩽ 180°. No 2º quadrante o seno possui um valor positivo e o cosseno, um valor negativo.

$$\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos (180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

20. Para julgar cada item a seguir, pode-se converter o ângulo que está em radiano em grau e, a partir daí, verificar em qual quadrante ele está.

a) Verdadeiro.

$$\left.\begin{aligned} \pi \text{ rad} &— 180° \\ 8 \text{ rad} &— x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3{,}14}{10} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x = 458{,}6°$$

$x = 458{,}6° - 360° = 98{,}6°$

Como x está localizado no 2º quadrante, sabe-se que sen $x > 0$.

b) Verdadeiro.

$$\left.\begin{aligned} \pi \text{ rad} &— 180° \\ 10 \text{ rad} &— x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3{,}14}{10} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x = 573{,}2°$$

$x = 573{,}2° - 360° = 213{,}2°$

Como x está localizado no 3º quadrante, sabe-se que cos $x < 0$.

c) Falso.

$$\left.\begin{aligned} \pi \text{ rad} &— 180° \\ 5 \text{ rad} &— x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3{,}14}{10} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x = 286{,}6°$$

Como x está localizado no 3º quadrante, sabe-se que sen $x < 0$.

21. a) Considerando a expressão sen 360° + sen 540° − 4 sen 1 710°, pode-se concluir que:

sen 360°= 0;

sen 540°= sen 180° = 0

sen 1 710° = sen 270° = −1

Ao substituir na expressão, obtém-se: $0 + 0 - 4 \cdot (-1) = 4$.

b) Considerando a expressão $\cos 810° + 4 \cos 3\,780° - \dfrac{1}{2} \cos 1\,350°$, pode-se concluir que:

$\cos 810° = \cos 90° = 0$
$\cos 3\,780° = \cos 180° = -1$
$\cos 1\,350° = \cos 270° = 0$

Ao substituir na expressão, obtém-se: $0 + 4 \cdot (-1) - \dfrac{1}{2} \cdot (0) = -4$.

22. Ao simplificar cada item, obtêm-se:

a) $\text{sen}\,(9\pi - \alpha) + \text{sen}\,(5\pi - \alpha)$
$9\pi = 4 \cdot 2\pi + \pi \Rightarrow \text{sen}\,(9\pi - \alpha) = \text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,(\alpha)$
$5\pi = 2 \cdot 2\pi + \pi \Rightarrow \text{sen}\,(5\pi - \alpha) = \text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,(\alpha)$
$\text{sen}\,(9\pi - \alpha) + \text{sen}\,(5\pi - \alpha) = \text{sen}\,(\alpha) + \text{sen}\,(\alpha) = 2\,\text{sen}\,(\alpha)$

b) $\text{sen}\,(\alpha - 900°) + \cos\,(\alpha - 540°)$
$900° = 2 \cdot 360° + 180°$
$540° = 1 \cdot 360° + 180°$
$\text{sen}\,(\alpha - 900°) + \cos\,(\alpha + 540°) = \text{sen}\,(\alpha - 180°) + \cos\,(\alpha - 180°) = -\text{sen}\,(\alpha) - \cos\,(\alpha)$

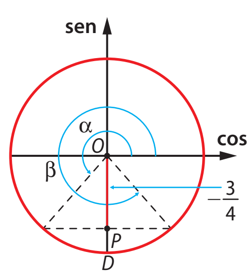
c) $\text{sen}\,(4\pi - \alpha) + \cos\,(8\pi - \alpha) - \text{sen}\,(720° - \alpha) = -\text{sen}\,(\alpha) + \cos\,(\alpha) - (-\text{sen}\,(\alpha)) =$
$= -\text{sen}\,(\alpha) + \cos\,(\alpha) + \text{sen}\,(\alpha) = \cos\,(\alpha)$

23. a) Sabe-se que o valor do cosseno de um ângulo é positivo no 1º e no 4º quadrantes e que o valor do seno de um ângulo é positivo no 1º e no 2º quadrantes. Logo, α está no 1º quadrante.

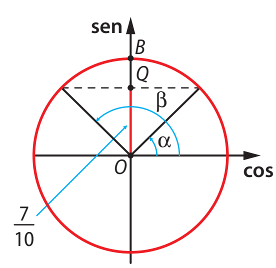
b) Sabe-se que o valor do cosseno de um ângulo é negativo no 2º e no 3º quadrantes e que o valor do seno de um ângulo é positivo no 1º e no 2º quadrantes. Logo, α está no 2º quadrante.

24. Para representar o seno de um ângulo na circunferência quando se conhece seu valor, primeiro localiza-se esse valor no eixo *y* e, em seguida, verificam-se os pontos na circunferência cuja projeção é o valor do seno. Para finalizar, encontram-se os ângulos responsáveis por esses pontos.

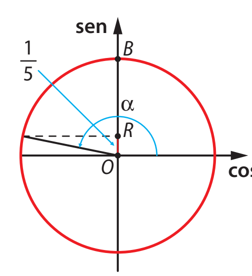
a) Dividir $\overline{OD}$ em 4 partes e considerar $OP = \dfrac{3}{4} \cdot OD$



b) Dividir $\overline{OB}$ em 10 partes e considerar $OQ = \dfrac{7}{10} \cdot OB$



c) Dividir $\overline{OB}$ em 5 partes e considerar $OR = \dfrac{1}{5} \cdot OB$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

25. Considerando a expressão $\text{sen}\,8\pi + \text{sen}\,\dfrac{11\pi}{2} - \text{sen}\,\dfrac{13\pi}{6}$ e como 8π e 2π são côngruos, pode-se concluir que:

$\text{sen}\,8\pi = \text{sen}\,2\pi = 0$

$$\frac{11\pi}{2} = 4\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{11\pi}{2} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{13\pi}{6} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$\text{sen}\,8\pi + \text{sen}\,\frac{11\pi}{2} - \text{sen}\,\frac{13\pi}{6} = 0 + (-1) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

26. Como $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ e $A = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} - 3 \cdot \text{sen}\,2\alpha + \dfrac{\text{sen}\,3\alpha}{4}$, conclui-se que:

$$A = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} - 3 \cdot \text{sen}\,\pi + \frac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}}{4} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow A = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4}$$

27. Como sen(π) = 0, então:

$$2 \text{ sen } \pi \cdot \text{sen } (\pi - \alpha) \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 0$$

28. Calculando a razão trigonométrica de cada item, obtêm-se:

a) $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (I)

b) $\text{sen } 150° = \text{sen } (180° - 150°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ (II)

c) $\cos 120° = -\cos (180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ (IV)

d) $\cos 150° = -\cos (180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (III)

e) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (IV)

f) $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \text{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (II)

g) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (I)

h) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (III)

Portanto, conclui-se que:
a-I; b-II; c-IV; d-III; e-IV; f-II; g-I; h-III.

29. Segundo as informações do enunciado, é possível estabelecer que:

$\text{sen}^2 (\alpha) = a - 2$ e $\cos^2 (\alpha) = (a - 1)^2$

Portanto:

$\text{sen}^2 (\alpha) + \cos^2 (\alpha) = 1 \Rightarrow a - 2 + (a - 1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

Ao resolver a equação $a^2 - a - 2 = 0$, obtêm-se as raízes $a' = -1$ e $a'' = 2$

Se $a = -1$, então:

$\text{sen}(-1) = \sqrt{-1 - 2} = \sqrt{-3}$

Como $\sqrt{-3}$ não é um número real, logo: $a = 2$.

30. Do enunciado, é possível estabelecer que:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{m} \\ \text{sen } x = \dfrac{\sqrt{m+1}}{m} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{m+1}}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 = 1$$

Resolvendo o sistema, obtém-se

$$\frac{m+1}{m^2} + \frac{1}{m^2} = 1 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

Ao resolver a equação do 2º grau obtêm-se as raízes $m' = 2$ ou $m'' = -1$.
Ao verificar as soluções, obtém-se:

para $m = 2$: $\left(\frac{\sqrt{2+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

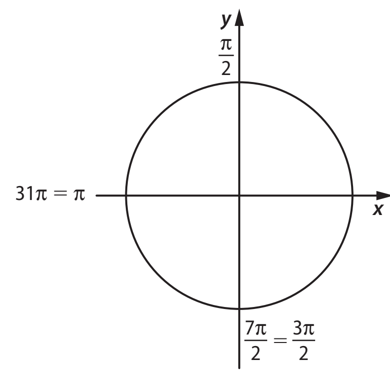
para $m = -1$:

$$\left(\frac{\sqrt{-1+1}}{-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{-1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{0}{1} + \frac{1}{1} = 1$$

Portanto, $m = 2$ ou $m = -1$.

31. a) Ao dividir 830° por 360°, obtém-se resto igual a 110° e ao dividir 1 195° por 360°, obtém-se resto igual a 115°.
Pelo ciclo trigonométrico, sen (115°) < sen (110°) porque ambos pertencem ao 2º quadrante. Portanto, sen (830°) > sen (1 195°).
b) Ao dividir −535° por 360°, obtém-se resto igual a −175°.
Pelo ciclo trigonométrico, cos (−175°) < cos (190°) porque ambos pertencem ao 3º quadrante. Portanto, cos (190°) > cos (−535°).

32. Ao localizar $\frac{7\pi}{2}$ e 31π no ciclo, obtém-se:



EDITORIA DE ARTE

Então: $\begin{cases} \cos 31\pi = \cos \pi = -1 \\ \text{sen}\,\frac{7\pi}{2} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1 \end{cases}$

Ao substituir esses valores na expressão dada, obtém-se:

$$\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \cos(31\pi) = (-1) \cdot (-1) = 1$$

33. De acordo com as informações do enunciado, deve-se calcular a expressão a seguir:

$$\cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 + (-1) + 0 = 0$$

34. Ao substituir $\frac{\pi}{2} - x$ por y, obtém-se:

$$\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}_{y} \Rightarrow \cos y = \text{sen}\,x, \text{ pois } \frac{\pi}{2} - x = y \Rightarrow x + y = 90°$$

Como x e y são ângulos complementares, logo:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\text{sen}\,x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 1 + 1 = 2$$

Resposta: alternativa **b**.

35. Como $\text{sen}\,(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, pode-se estabelecer que:

$$\text{sen}\,\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = p$$

36. Segundo as informações fornecidas no enunciado, pode-se afirmar que:

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4a^2 - 1 = 0$$

Portanto, ao resolver a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $a' = -\frac{1}{2}$ e $a'' = \frac{1}{2}$

Logo, $a = \pm\frac{1}{2}$

37. a) sen 205° = sen (180° + 25°) = − sen 25° = −0,42

cos 205°= cos (180° + 25°) = −cos 25° = −0,91

b) sen (−25°) = −sen 25°= −0,42

cos (−25°) = cos 25°= 0,91

c) sen 115° = sen (90°+ 25°) = cos 25°= 0,91

cos 115° = cos (90°+ 25°) = −sen 25°= −0,42

d) sen 65° = sen (90°− 25°) = cos 25°= 0,91

cos 65° = cos (90°− 25°) = sen 25°= 0,42

e) sen 335° = sen (360°− 25°) = −sen 25°= −0,42

cos 335° = cos (360°− 25°) = cos 25°= 0,91

38. Em ângulos complementares ($\alpha + \beta = 90°$), a seguinte relação é válida:

$\text{sen } \alpha = \cos \beta$ e $\text{sen } \beta = \cos \alpha$

Como 15° e 75° são ângulos complementares, conclui-se que:

a) sem 75° = cos 15° = 0,97

b) Pela relação fundamental da trigonometria, conclui-se que:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\text{sen } 15°)^2 + (0{,}97)^2 = 1$

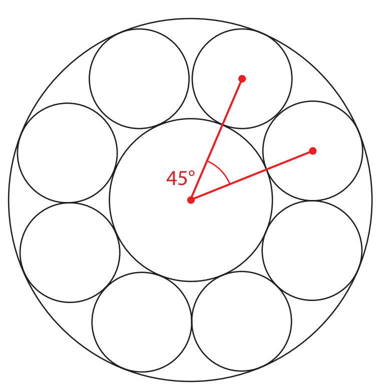
$(\text{sen } 15°)^2 = 1 - 0{,}9409 \Rightarrow (\text{sen } 15°)^2 = 0{,}0591 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } 15° \simeq 0{,}24$

c) sen 15° = cos 75° ≃ 0,24

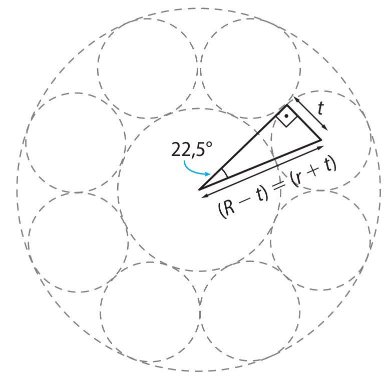
39. a) Uma sugestão seria trabalhar conceitos de etnomatemática como forma de explorar uma abordagem diferenciada com os estudantes. Também pode ser interessante explorar o momento histórico e cultural vivido pelo Japão durante a criação dessas gravuras em madeira.

b) Considerando a ilustração do enunciado, pode-se afirmar que o ângulo formado entre os centros de quaisquer dois pequenos círculos tangentes entre si e do maior círculo é 45°:



Agora considere o triângulo isósceles cujos vértices são os centros das circunferências. A base mede $2t$ e os lados congruentes medem $r + t$, no caso da circunferência concêntrica menor, ou $R - t$ no caso da circunferência concêntrica maior.

Agora, ao destacar, no triângulo retângulo formado pela altura do triângulo isósceles, a metade da base e um dos seus lados congruentes, podem-se obter as seguintes conclusões:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Logo, pode-se concluir que:

$$\text{sen}(22{,}5°) = \frac{t}{R-t} \Rightarrow 0{,}38(R - t) \simeq t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}38R = 1{,}38t \Rightarrow R = 3{,}63t$$

$$\text{sen}(22{,}5°) = \frac{t}{r+t} \Rightarrow 0{,}38(r + t) \simeq t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}38r = 0{,}62t \Rightarrow r = 1{,}63t$$

c) Elaboração dos estudantes. Espera-se que os estudantes elaborem um problema envolvendo *Sangaku* e depois compartilhem entre eles.

40. a) O arco de 150° pertence ao 2º quadrante, pois $90° \leq x \leq 180°$.

Logo:

$$\text{tg } 150° = \text{tg } (180° - 150°) = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) O arco de −945° possui 1ª determinação negativa em 225°. Logo, sua 1ª determinação positiva é 360° − 225° = 135°, cujo arco pertence ao 2º quadrante, pois $90° \leq x \leq 180°$.

Logo:

$\text{tg } 135° = \text{tg } (180° - 135°) = -\text{tg } 45° = -1$

c) O arco $\frac{5\pi}{6}$ é um arco do 2º quadrante, pois

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

Logo:

$$\text{tg } \frac{5\pi}{6} = \text{tg}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\text{tg } \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

d) O arco 7π possui 1ª determinação positiva em π, cujo arco corresponde a 180°. Dessa forma, tg 180° = 0.

41. a) $\text{tg } (3\pi - \alpha) = \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

$\text{tg } (-5\pi - \alpha) = \text{tg } (-\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

$\text{tg } (3\pi - \alpha) + \text{tg } (-5\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha - \text{tg } \alpha = -2\text{tg } \alpha$

b) $\text{tg } (\alpha + 540°) = \text{tg } (\alpha + 180°) = \text{tg } \alpha$

$\text{tg } (7\pi + \alpha) = \text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$

$\text{tg } (\alpha + 540°) - \text{tg } (7\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha - \text{tg } \alpha = 0$

42. $\text{sen } 3a + \cos 4a - \text{tg } 2a = \text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \text{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi - \text{tg } \pi = -1 + 1 - 0 = 0$

Logo, o valor da expressão é 0.

43. O arco de 510° possui 1ª determinação igual a 150°. Dessa forma:

$\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } \frac{3\pi}{4} = -1$

Logo:

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$$

44. Para verificar se tg 1 é maior, ou menor que tg 7, deve-se converter 1 rad e 2 rad em grau. Logo:

$$\left.\begin{aligned} \pi \text{ rad} &\text{ — } 180° \\ 1 \text{ rad} &\text{ — } x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{1} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x = \frac{180°}{\pi} \simeq 57°$$

$$\left.\begin{aligned} \pi \text{ rad} &\text{ — } 180° \\ 7 \text{ rad} &\text{ — } x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{7} = \frac{180°}{x} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 180°}{\pi} \simeq 401° \text{ cuja primeira determinação é } 41°$$

Como $57° > 41°$, tg 1 > tg 7.

- Resposta pessoal.

45. a) $\text{tg } \alpha + \text{tg } 3\alpha + \text{tg } 5\alpha = \text{tg } \frac{\pi}{4} + \text{tg } \frac{3\pi}{4} + \text{tg } \frac{5\pi}{4} = 1 + 1 - 1 = 1$

Logo, o valor da expressão é 1.

b) $\text{tg } \alpha + \text{tg } 2\alpha + \text{tg } 4\alpha = \text{tg}(-60°) + \text{tg}(-120°) + \text{tg}(-240°) = -\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$

46. Para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação, deve-se substituir α por $\frac{\alpha}{3}$ e resolvê-la para m.

$$\left(\text{tg } \frac{\pi}{3}\right)^2 - m\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\text{sen } \frac{\pi}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 - m\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{m}{4} = -\frac{3}{4} - 3 \Rightarrow m = 3 + 12 \Rightarrow m = 15$$

47. a) Pela relação fundamental da trigonometria, obtém-se:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como o arco é do terceiro quadrante, conclui-se que $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

b) $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$

48. Pela relação fundamental da trigonometria, obtém-se:

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como o arco é do segundo quadrante, $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = -\sqrt{15}$$

49. Ao simplificar a expressão $\dfrac{2-\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}$, conclui-se que:

$$\frac{2-\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{2-\text{sen}^2\,\alpha-\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{2\left(1-\text{sen}^2\,\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$

Aplicando a relação fundamental da trigonometria, obtém-se:

$$\frac{2\left(1-\text{sen}^2\,\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2$$

50. $\text{tg}\,x=\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow 4\text{sen}\,x=3\cos x \Rightarrow \text{sen}\,x=\dfrac{3\cos x}{4}$

Pela relação fundamental da trigonometria, obtém-se:

$$\left(\frac{3\cos x}{4}\right)^2+\cos^2 x=1 \Rightarrow \frac{9\cos^2 x}{16}+\cos^2 x=1 \Rightarrow 9\cos^2 x+16\cos^2 x=16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25\cos^2 x=16 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{16}{25} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{4}{5}$$

Como o arco se encontra no 3º quadrante, conclui-se que $\cos x=-\dfrac{4}{5}$. Logo:

$$\text{sen}\,x=\frac{3\cos x}{4} \Rightarrow \text{sen}\,x=\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}$$

Por fim:

$$\cos x-\text{sen}\,x=\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}$$

51. Como 28° é um arco do primeiro quadrante, a tangente será positiva.
Como 230° é um arco do terceiro quadrante, a tangente será positiva.
Como 307° é um arco do quarto quadrante, a tangente será negativa.
Dessa forma, pela regra de sinais, há um produto entre dois números positivos e um negativo, portanto o sinal da multiplicação será negativo.

52. Verdadeiro.

Convertendo $\dfrac{5\pi}{12}$ em grau, obtém-se 75°.

Portanto, será necessário verificar se $\text{tg}\,75° > \text{sen}\,75°$.
Sabe-se que o valor máximo que o seno de algum ângulo alcança é 1, porém tg 60° já e maior que 1, pois $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$. Como $\text{tg}\,75° > \text{tg}\,60° > 1$, pode-se concluir que tg 75° é maior que sen 75°, que é menor que 1.

53. Como o $\cos\theta < 0$ e $\text{tg}\,\theta < 0$, conclui-se que θ está localizado no 2º quadrante e, por isso, o valor de sen θ é positivo.
Pela relação fundamental da trigonometria, obtém-se:

$$\left(-\frac{3}{7}\right)^2+\text{sen}^2\,\theta=1 \Rightarrow \frac{9}{49}+\text{sen}^2\,\theta=1 \Rightarrow 9+49\text{sen}^2\,\theta=49 \Rightarrow \text{sen}^2\,\theta=\frac{40}{49}$$

$$\text{sen}\,\theta=\frac{\sqrt{40}}{7} \Rightarrow \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

Portanto, a tg θ será:

$$\text{tg}\,\theta=\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \text{tg}\,\theta=\frac{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}{-\dfrac{3}{7}} \Rightarrow \text{tg}\,\theta=\frac{14\sqrt{10}}{-21}=\frac{-2\sqrt{10}}{3}$$

Resolvendo a expressão proposta no enunciado, obtém-se:

$$x=\frac{2\,\text{tg}\,\theta}{1-\text{tg}^2\,\theta} \Rightarrow x=\frac{2\left(\dfrac{-2\sqrt{10}}{3}\right)}{1-\left(\dfrac{-2\sqrt{10}}{3}\right)^2} \Rightarrow x=\frac{\left(\dfrac{-4\sqrt{10}}{3}\right)}{1-\dfrac{4\cdot 10}{9}} \Rightarrow x=\frac{12\sqrt{10}}{31}$$

Atividades complementares

1. Ao considerar as duas raias mais internas da pista, a semicircunferência da primeira terá um raio de 10 m, a seguinte terá um raio de 12 m e o comprimento que cada atleta irá percorrer nessas raias, é dado a seguir

$\text{raia}_1: 3d + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 10 + 3d + k = 300$

$\text{raia}_2: 2d + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 12 + 3d + k = 300$

Fazendo a subtração $\text{raia}_1 - \text{raia}_2$, obtém-se

$d - 2\pi = 0 \Rightarrow d = 6$

Substituindo o valor de d em uma das equações:

$3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 10 + 3 \cdot 6 + k = 300 \Rightarrow k = 234$

Portanto, $k + d = 6 \text{ m} + 234 \text{ m} = 240 \text{ m}$

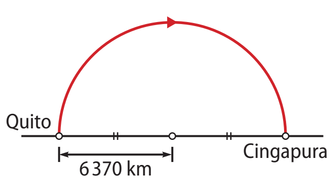
Resposta: alternativa **e**

2. Sabendo que o comprimento do arco determinado por um ângulo de abertura 1 rad em uma circunferência de raio 1 cm é igual a $\frac{2\pi \cdot 1}{2\pi} = 1$ cm. Assim, o perímetro do "monstro" será:

$P = (2\pi \cdot 1 - 1) + 1 + 1 = 2\pi - 1 + 1 + 1 = 2\pi + 1$

Resposta: alternativa **e**

3.



A distância (d) percorrida pelo avião será:

$d = \frac{2\pi \cdot 6\,370}{2} = 6\,370\pi$

$d \simeq 3{,}14 \cdot 6\,370 \simeq 20\,000$

Portanto, a distância percorrida será aproximadamente de 20 000 km.

1 h ——— 800 km

x ——— 20 000 km

$x = \frac{20\,000}{800} \Rightarrow x = 25 \Rightarrow x = 25 \text{ h}$

Resposta: alternativa **c**

4. Pelo círculo trigonométrico, observa-se que todos os possíveis valores de seno estão entre -1 e 1. Portanto:

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant m - 4 \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 1 \leqslant m \leqslant 4 + 1 \Rightarrow 3 \leqslant m \leqslant 5$

Resposta: alternativa **b**

5. Pelo círculo trigonométrico, observa-se que os todos os possíveis valores de cosseno estão entre -1 e 1. Portanto:

$-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2p - 1}{5} \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5 \leqslant 2p - 1 \leqslant 5 \Rightarrow -4 \leqslant 2p \leqslant 6 \Rightarrow -2 \leqslant p \leqslant 3$

Resposta: alternativa **c**

6. O ângulo central de um pentágono mede:

$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$ ou $\frac{2\pi}{5}$ rad

Partindo do ponto P_1, pode-se afirmar que:

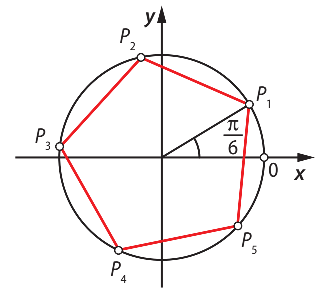


ILUSTRAÇÃO E GRÁFICO: EDITORIA DE ARTE

$P_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi + 12\pi}{30} = \frac{15\pi}{30}$ rad

$P_3 = \frac{17\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{17\pi + 12\pi}{30} = \frac{29\pi}{30}$ rad

$P_4 = \frac{29\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{29\pi + 12\pi}{30} = \frac{41\pi}{30}$ rad

Resposta: alternativa **d**

7. Pelo círculo trigonométrico, tem-se que $-1 < \cos\alpha < 1$. Assim:

$-1 < \frac{2x^2 - 3}{5} < 1 \Rightarrow -5 < 2x^2 - 3 < 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 < 2x^2 < 8 \Rightarrow -1 < x^2 < 4$

Logo:

$-1 \leqslant x^2$ (não serve) ou $x^2 \leqslant 4 \Rightarrow x' \leqslant 2$ ou $x'' \geqslant -2$

Portanto, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Resposta: alternativa **b**

8. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtêm-se:

$(\text{sen }\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\sqrt{m}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha + 2\text{sen }\alpha \cdot \cos\alpha = m$

Porém, pela relação fundamental da trigonometria obtém-se:

$1 + 2\text{sen }\alpha \cdot \cos\alpha = m$

Como $\text{sen }\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{n}{4}$, então:

$1 + 2 \cdot \frac{n}{4} = m \Rightarrow 1 + \frac{n}{2} = m \Rightarrow \frac{2 + n}{2} = \frac{2m}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + n = 2m \Rightarrow 2m - n = 2$

Resposta: alternativa **a**

9. I. Verdadeira. Pela relação fundamental da trigonometria, sabe-se que $\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$.

II. Falsa. Os valores de tangente não estão definidos para todos os valores de x.

III. Verdadeira. Ângulos complementares possuem $\cos x = \text{sen }(x + 90)$

Resposta: alternativa **d**

10. Como sen $\alpha = \dfrac{3}{5}$ e α está no 2º quadrante, conclui-se que o cosseno e a tangente de α são negativos.

Pela relação fundamental da trigonometria, obtém-se:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2\, \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

Como a tg $\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \alpha}$, então:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

Resposta: alternativa **c**

11. Sabe-se que:

$\cos 200° = -\cos 20°$

$\text{sen}\, 200° = -\text{sen}\, 20°$

$\text{tg}\, 200° = \dfrac{\text{sen}\, 20°}{\cos 20°}$

Como $\cos 0° = \text{sen}\, 90° = 1$, $\cos 90° = \text{sen}\, 0° = 0$ e $\cos 45° = \text{sen}\, 45°$, sabe-se que, enquanto o ângulo for maior do que 45°, o seno é maior do que o cosseno; enquanto for menor, o cosseno é maior do que o seno.

Portanto: $\cos 20° > \text{sen}\, 20°$ e $-\cos 20° < -\text{sen}\, 20°$. Logo, pode-se afirmar que $\cos 200° < \text{sen}\, 200°$.

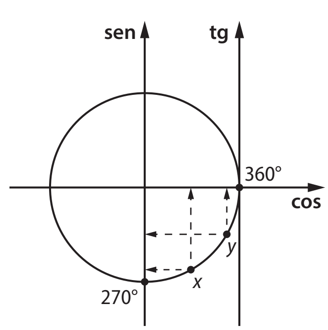
Agora, como sen 200° e cos 200° são negativos, a tg 200° é positiva, sendo maior do que o cosseno e do que o seno.

Portanto:

$\cos 200° < \text{sen}\, 200° < \text{tg}\, 200°$.

Resposta: alternativa **b**

12. Sendo $270° \leqslant x \leqslant y \leqslant 360°$ pode-se observar que x e y pertencem ao 4º quadrante e que $x < y$. Então:



Como no 4º quadrante o valor do cosseno é positivo, se $x < y$, conclui-se que $\cos y > \cos x$ e, por ser o seno negativo, $\text{sen}\, y > \text{sen}\, x$.

Sendo assim, as alternativas **a** e **b** ficam descartadas.

Como $\text{sen}\, x < 0$ e $\cos y > 0$ então $\text{sen}\, x \cdot \cos y < 0$, descartando, assim, a alternativa **e**.

Como x e y pertencem ao 4º quadrante, o sinal da tangente nesses quadrantes é negativo, logo $\text{tg}\, x < \text{tg}\, y$. Então descarta-se a alternativa **c**.

Sabe-se que $\cos y > \text{sen}\, x$, dessa forma $\cos y - \text{sen}\, x > 0$.

Resposta: alternativa **d**

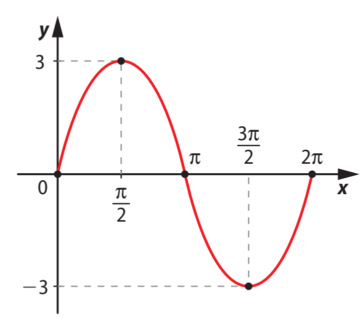
Capítulo 4 · Funções trigonométricas

Atividades

1. Como a função seno é periódica, em cada item dessa atividade, considera-se a função y dada e determinam-se alguns pontos (x, y) para o esboço do gráfico dessa função. Esses pontos são indicados nos quadros. Para o esboço indicado em cada item, considerou-se apenas um período, mas os gráficos podem ser representados em todo o eixo x.

a) Seja $y = 3 \cdot \text{sen}\, x$, então:

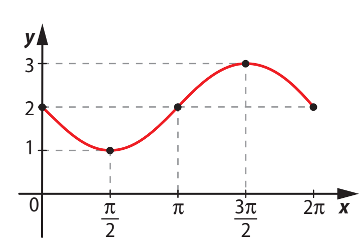
x	sen *x*	3 · sen *x*	y
0	0	$3 \cdot 0$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$3 \cdot 1$	3
π	0	$3 \cdot 0$	0
$\frac{\pi}{4}$	–1	$3 \cdot (-1)$	–3
2π	0	$3 \cdot 0$	0



$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = [-3, 3]$; $p = 2\pi$

b) $y = 2 - \text{sen}\, x$

x	sen *x*	2 − sen *x*	y
0	0	$2 - 0$	2
$\frac{\pi}{2}$	1	$2 - 1$	1
π	0	$2 - 0$	2
$\frac{3\pi}{2}$	−1	$2 - (-1)$	3
2π	0	$2 - 0$	2



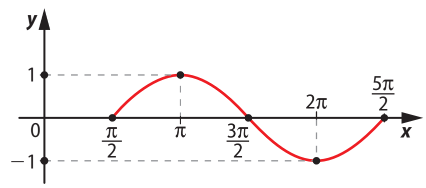
ILUSTRAÇÕES E GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

$D = \mathbb{R}$; $\text{Im} = [1, 3]$; $p = 2\pi$

c) Como $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, pode-se fazer a substituição:

$t = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$

t	x	sen t	y
0	$\frac{\pi}{2}$	sen 0	0
$\frac{\pi}{2}$	π	sen $\frac{\pi}{2}$	1
π	$\frac{3\pi}{2}$	sen π	0
$\frac{3\pi}{2}$	2π	sen $\frac{3\pi}{2}$	−1
2π	$\frac{5\pi}{2}$	sen 2π	0

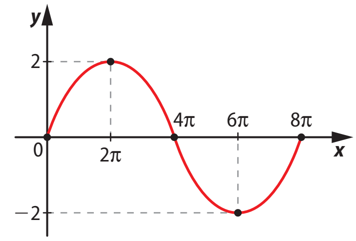


D = ℝ; Im = [−1, 1]; $p = 2\pi$

d) Como $y = 2\ \text{sen}\ \frac{x}{4}$, pode-se fazer a substituição:

$t = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4 \cdot t$

t	x	sen t	2 · sen t	y
0	0	0	2 · 0	0
$\frac{\pi}{2}$	2π	1	2 · 1	2
π	$4\ \pi$	0	2 · 0	0
$\frac{3\pi}{2}$	6π	−1	2 · (−1)	−2
2π	8π	0	2 · 0	0



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

D = ℝ; Im = [−2, 2]; $p = 8\pi$

2. Sabe-se que o período p de uma função $y = \text{sen } kx$ é dado por $p = \dfrac{2\pi}{k}$.

a) $y = \text{sen } 8x \Rightarrow p = \dfrac{2\pi}{8} \Rightarrow p = \dfrac{\pi}{4}$

b) $y = 5 \cdot \text{sen } 10x \Rightarrow p = \dfrac{2\pi}{10} \Rightarrow p = \dfrac{\pi}{5}$

3. Como $f(x) = 7\text{sen }(3x)$ e sabendo que $-1 \leqslant \text{sen }(3x) \leqslant 1$, tem-se que:

$-7 \leqslant 7\text{sen }(3x) \leqslant 7$

$-7 \leqslant f(x) \leqslant 7$

Portanto, $\text{Im} = [-7, 7]$.

4. Considerando que o período é dado por $p = \dfrac{2\pi}{k}$, tem-se:

a) $p = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

b) $p = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{8\pi}{\pi} = 8$

5. a) Considerando $4 \cdot \text{sen } \alpha$ e sabendo que $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$:

$4 \cdot (-1) \leqslant 4 \cdot \text{sen } \alpha \leqslant 4 \cdot 1 \Rightarrow -4 \leqslant 4 \text{ sen } \alpha \leqslant 4$

Logo, o valor máximo de A é 4 e valor mínimo é -4.

b) Considerando $5 - 2 \text{ sen } x$ e sabendo que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$:

$5 - 2 \cdot (1) \leqslant 5 - 2 \cdot \text{sen } x \leqslant 5 - 2 \cdot (-1) \Rightarrow 3 \leqslant 5 - 2 \text{ sen } x \leqslant 7$

Logo, o valor máximo é 7 e o valor mínimo é 3.

c) A expressão $\dfrac{1}{3 + \text{sen } y}$ terá valor máximo quando o denominador for mínimo.

Como o valor mínimo para sen y é -1, para $\text{sen } y = -1$, o valor de $\dfrac{1}{3 + \text{sen } y}$ é máximo, ou seja, $\dfrac{1}{3 - 1} = \dfrac{1}{2}$.

Analogamente, a expressão terá valor mínimo quando o denominador for máximo. Isso ocorre quando $\text{sen } y = 1$

Logo, $\dfrac{1}{3 + \text{sen } y}$ é mínimo para: $\dfrac{1}{3 + 1} = \dfrac{1}{4}$

Assim, o valor máximo de $\dfrac{1}{3 + \text{sen } y}$ é $\dfrac{1}{2}$ e o valor mínimo é $\dfrac{1}{4}$.

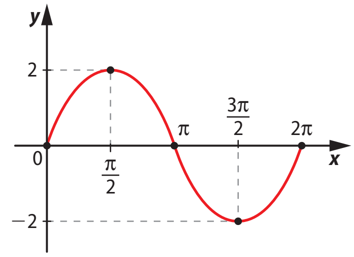
6. Considerando que $\text{sen } x = 2m - 1$ e como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, então:

$-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 1 - 1 \leqslant 2m \leqslant 1 + 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2m \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant m \leqslant 1$

$S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant 1\}$

7. Podem-se analisar os gráficos de f e g para verificar a afirmação de cada alternativa.

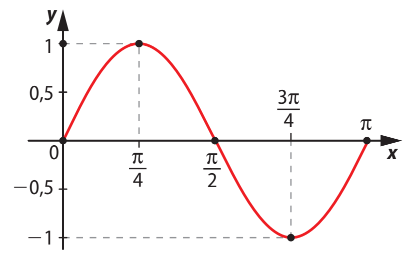
$f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$



EDITORIA DE ARTE

O período de $f(x)$ é $p = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$ e o máximo de $f(x)$ é 2.

$g(x) = \text{sen } 2x$



Período de $g(x)$: $p' = \dfrac{2\pi}{1} = \pi$

Portanto, o período de f é o dobro de g.

Resposta: alternativa **a**

8. Como $f(x) = \text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, o período de f é dado por $p = \dfrac{2\pi}{k}$, sendo $k = 2$. Assim: $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Resposta: alternativa **b**

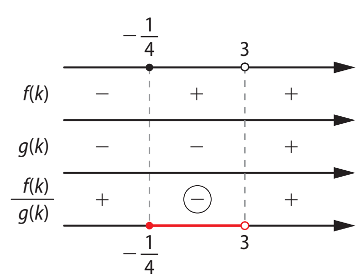
9. Assumindo que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Então, é possível afirmar que: $-1 \leqslant \dfrac{5k-2}{k-3} \leqslant 1$

Podem-se analisar as desigualdades $\dfrac{5k-2}{k-3} \leqslant 1$ e $\dfrac{5k-2}{k-3} \geqslant -1$

Em relação a $\dfrac{5k-2}{k-3} \leqslant 1$, tem-se que:

$$\frac{5k-2}{k-3} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{5k-2}{k-3} - 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{4k+1}{k-3} \leqslant 0$$

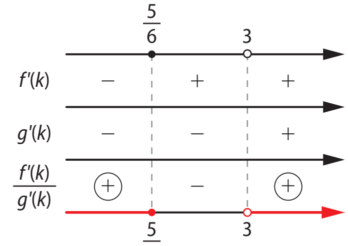
Considerando $f(k) = 4k + 1$ e $g(k) = k - 3$, pode-se realizar o estudo do sinal de: $\dfrac{f(k)}{g(k)} = \dfrac{4k+1}{k-3}$



Portanto, segue que: $\left\{k \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{4} \leqslant k < 3\right\}$ (I)

Em relação a $\dfrac{5k-2}{k-3} \geqslant -1$, tem-se que: $\dfrac{5k-2}{k-3} \geqslant -1 \Rightarrow \dfrac{5k-2}{k-3} + 1 \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{6k-5}{k-3} \geqslant 0$

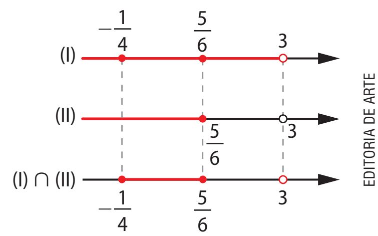
Considerando $f'(k) = 6k - 5$ e $g'(k) = k - 3$, pode-se realizar o estudo do sinal de $\dfrac{f'(k)}{g'(k)} = \dfrac{6k-5}{k-3}$



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

Portanto, segue que: $\left\{k \in \mathbb{R} \mid k \leqslant \dfrac{5}{6} \text{ ou } k > 3\right\}$ (II)

Fazendo (I) $\cap$ (II), temos:



$$S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{5}{6}\right\}$$

10. O valor de seno de um ângulo qualquer deve estar compreendido entre -1 e 1. Logo:

$$-1 \leqslant \text{sen}\ \theta \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2x-1}{3} \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 2x - 1 \leqslant 3 \Rightarrow -2 \leqslant 2x \leqslant 4 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 2$$

Resposta: alternativa **d**

11. Sabe-se que o número de clientes é calculado pela função $f(x) = 900 - 800 \cdot \text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right)$, $0 \leqslant x \leqslant 24$.

Seja $y_{máximo}$ o valor máximo de $f(x)$. Esse valor ocorre quando $\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right)$ é mínimo, ou seja, quando $\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right) = -1$. Portanto:

$y_{máximo} = 900 + 800 = 1\,700$

Seja $y_{mínimo}$ o valor mínimo de $f(x)$, que acontece quando $\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right)$ é máximo, ou seja, quando $\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right) = 1$. Portanto:

$y_{mínimo} = 900 - 800 = 100$

Logo:
$y_{máximo} - y_{mínimo} = 1\,700 - 100 = 1\,600$

Resposta: alternativa **e**

12. Seja $V(t) = y + z \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, com y, z e $t \in \mathbb{R}$, $z > 0$

Considerando $V_{\text{mínimo}} = 2$ e $V_{\text{máximo}} = 4$ o menor e o maior valor de $V(t)$, respectivamente, e sabendo que o valor mínimo de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ é -1, e o valor máximo de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ é 1, tem-se:

$V_{\text{mínimo}} = y + z \cdot (-1) \Rightarrow 2 = y - z$ (I)
$V_{\text{máximo}} = y + z \cdot 1 \Rightarrow 4 = y + z$ (II)

Disso, obtém-se que:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \text{ e } z = 1$$

Sendo assim:

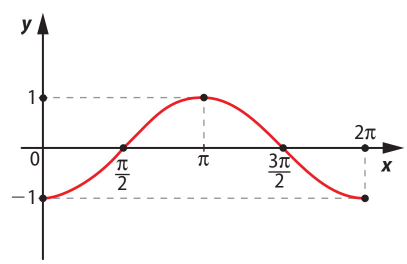
$$V(t) = y + z \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right) \Rightarrow V(t) = 3 + 1 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right) \Rightarrow V(t) = 3 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Resposta: alternativa **e**

13. Como a função cosseno é periódica, em cada item dessa atividade, considera-se a função *y* dada e determinam-se alguns pontos (*x*, *y*) para o esboço do gráfico dessa função. Esses pontos são indicados nos quadros. Para o esboço indicado em cada item, considerou-se apenas um período, mas os gráficos podem ser representados em todo o eixo *x*.

a) $y = -\cos x$

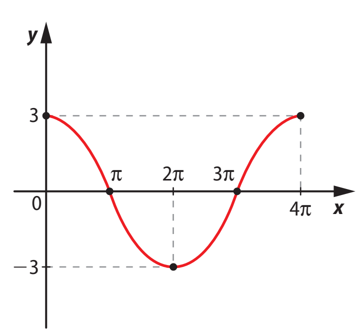
x	$\cos x$	y
0	1	−1
$\frac{\pi}{2}$	0	0
π	−1	1
$\frac{3\pi}{2}$	0	0
2π	1	−1



b) $y = 3\cos\frac{x}{2}$

$t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t$

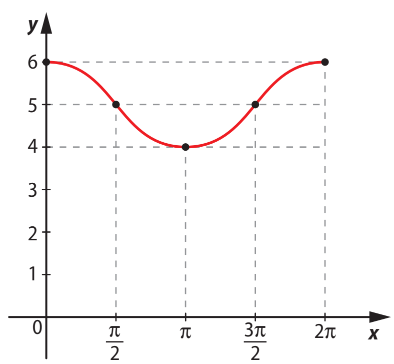
t	x	$\cos t$	$y = 3\cos t$
0	0	1	3
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0
π	2π	−1	−3
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0	0
2π	4π	1	3



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

c) $y = 5 + \cos x$

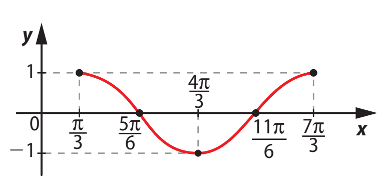
x	$\cos x$	$y = 5 + \cos x$
0	1	6
$\frac{\pi}{2}$	0	5
π	-1	4
$\frac{3\pi}{2}$	0	5
2π	1	6



d) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

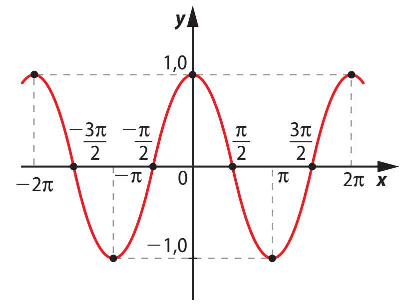
$t = x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{3}$

t	x	$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
0	$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	0
π	$\frac{4\pi}{3}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	0
2π	$\frac{7\pi}{3}$	1

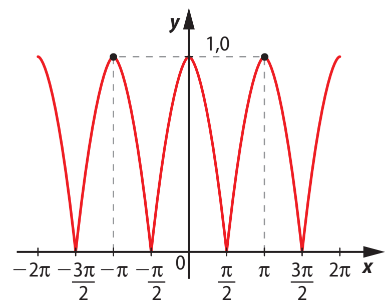


14. $f(x) = 1 + |\cos x|$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

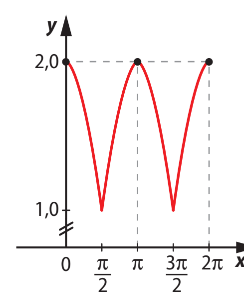
Seja $h(x) = \cos x$



Seja a função $g(x) = |\cos x|$, então o gráfico de $g(x)$ será:



Assim, com base no gráfico de $g(x)$, pode-se representar o gráfico de $f(x) = 1 + |\cos x|$



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

15. Sabe-se que se $y = \cos kx$, e o período p é dado por $p = \frac{2\pi}{|k|}$. Logo:

a) $y = \cos 8x \Rightarrow p = \frac{2\pi}{8} \Rightarrow p = \frac{\pi}{4}$

b) $y = 5 \cdot \cos 10x \Rightarrow p = \frac{2\pi}{10} \Rightarrow p = \frac{\pi}{5}$

c) $y = \cos \frac{4x}{7}$

$p = \frac{2\pi}{\frac{4}{7}} \Rightarrow p = \frac{7\pi}{2}$

d) $y = 6 \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} \Rightarrow p = 8\pi$

16. Seja p o período da função. Então:

$$p = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{4m} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 4$$

17. A expressão $\frac{10}{3 + \cos x}$ terá valor máximo quando o valor do denominador for mínimo, ou seja, quando $\cos x$ assume valor mínimo: $\cos x = -1$.

Logo:

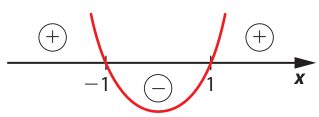
$$A = \frac{10}{3 - 1} = 5$$

18. Como x está no 4º quadrante, então $0 \leqslant \cos x \leqslant$. Logo:

$$\underbrace{\overbrace{0 \leqslant m^2 - 1}^{\text{(I)}} \leqslant 1}_{} \qquad \underbrace{m^2 - 1 \leqslant 1}_{\text{(II)}}$$

De (I), vem: $m^2 - 1 \geqslant 0$

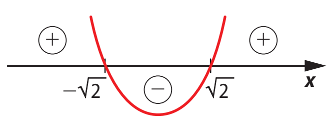
Estudando o sinal, temos:



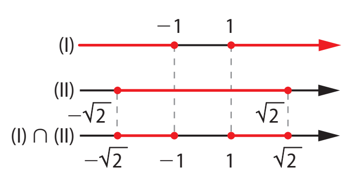
De (II), vem:

$m^2 - 1 \leqslant 1 \Rightarrow m^2 \leqslant 2$

Estudando o sinal, temos:



Na reta real:



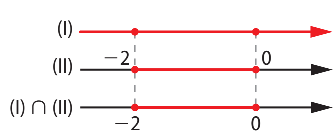
$S = \{m \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant m \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant m \leqslant \sqrt{2}\}$

19. Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ e $\cos x = m^2 + 2m + 1$, tem-se:

$-1 \leqslant m^2 + 2m + 1 \leqslant 1$

De $m^2 + 2m + 2 \geqslant 0$, obtém-se que qualquer m real satisfaz a inequação, pois $a > 0$ e o discriminante é negativo (-4). (I)

De $m^2 + 2m \leqslant 0$, obtém-se que qualquer m real no intervalo $-2 \leqslant m \leqslant 0$ satisfaz a equação. Disso:



ILUSTRAÇÕES E GRÁFICOS:
EDITORIA DE ARTE

$S = \{m \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant m \leqslant 0\}$

20. Sabe-se que o período p é dado por $p = \frac{2\pi}{|k|}$. Logo:

a) $p = \dfrac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 5\pi$

b) $p = \left|\dfrac{2\pi}{-2}\right| = \pi$

21. Como $f(0) = 20$, conclui-se que:

$f(0) = A \cdot \cos(B \cdot 0) \Rightarrow f(0) = A$

Portanto, $A = 20$.

Como $f(1) = 10$, temos:

$f(1) = 20 \cdot \cos(B) \Rightarrow 20 \cos(B) = 10 \Rightarrow \cos(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$

Assim:

$f(x) = 20 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \Rightarrow f(3) = 20 \cdot \cos(\pi) = -20$

22. a) $f(x) = 2^{\cos x}$ e $g(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$

$f(\pi) \cdot g(\pi) = 2^{\cos \pi} \cdot 2^{\operatorname{sen} \pi} = 2^{-1} \cdot 2^0 = \frac{1}{2}$

b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2^{\cos\frac{\pi}{6}} = 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Como $2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, conclui-se que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

23. a) Considerando que a altura da maré é dada por $A(t) = \cos(t - a) + b$. Além disso, sabe-se que, às 4:00 ($t = 4$), a altura registrada foi máxima (3 m), Logo:

$A(4) = \cos(4 - a) + b = 3$

O valor $A(4)$ é máximo quando $\cos(4 - a)$ é 1, então:

$4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$

Logo:

$A(t) = \cos(t - 4) + b$

Disso vem que $b = 2$, pois:

$A(4) = \cos(4 - 4) + b = 3 \Rightarrow 1 + b = 3 \Rightarrow b = 2$

Portanto, $A(t) = \cos(t - 4) + 2$, ou seja, $a = 4$ e $b = 2$.

b) Resposta pessoal. Sugestão de atividade: De acordo com as informações contidas no quadro, determine:

a) Qual é o período da maré?

b) Durante o dia, quais os melhores horários para frequentar a praia com segurança?

Resposta:

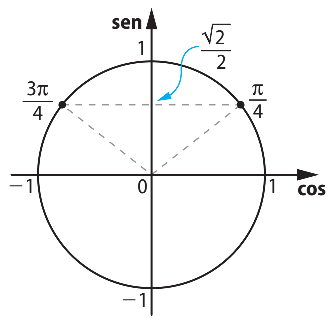
a) Olhando os momentos de pico, a maré atinge a maior altura às 4:00, às 10:17 e às 16:34. Logo, o período é de 6 horas e 14 minutos.

b) Os melhores horários para frequentar a praia em segurança são nos momentos em que a maré está mais baixa, ou seja, por volta das 7:10 da manhã e por volta das 13:25.

24. a) Sabe-se que sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que sen $\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ângulos notáveis).

sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

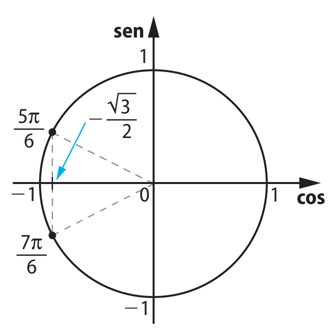
$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$



b) Sabe-se que cos $\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (valor notável do cosseno). Com isso, e com base no cosseno de ângulos suplementares, pode-se determinar que:

cos $\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Representando na circunferência trigonométrica, tem-se:



Assim, pode-se afirmar que:

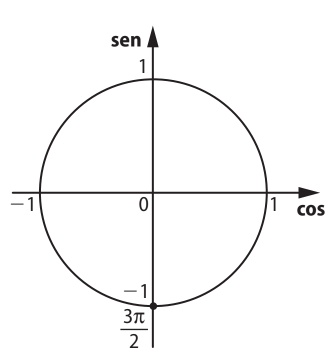
cos $x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.

Portanto:

$S = \left\{\frac{5\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}\right\}$

c) Como sen $x = -1$, então, $x = \frac{3\pi}{2}$, pois, dos valores notáveis do seno, sabe-se que sen $\frac{3\pi}{2} = -1$.

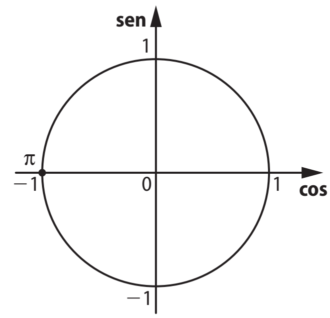
$S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

d) Como $\cos x = -1$, então $x = \pi$, pois sabe-se que $\cos \pi = -1$.

$S = \{\pi\}$



EDITORIA DE ARTE

25. a) Resolvendo a equação, obtém-se:

$2 \text{ sen } x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } \dfrac{7\pi}{6}$

Logo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $2 \text{ sen } 2x = 1 \Rightarrow \text{sen } 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 2x = \text{sen } \dfrac{\pi}{6}$

Logo:

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou} \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou} \\ x = \dfrac{15\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

26. Resolvendo a equação trigonométrica, obtêm-se que:

$$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{3}$$

Logo:

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

$$2x - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi < k \in \mathbb{Z}\right\}$$

27. Considerando as informações do enunciado, conclui-se que:

$I(t) = 40 \text{ sen } (120\,\pi t) \Rightarrow 20 = 40 \text{ sen } (120\,\pi t) \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \text{sen } (120\,\pi t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \dfrac{\pi}{6} = \text{sen } (120\,\pi t) \Rightarrow 120\,\pi t = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{720} \simeq 0{,}0014 \text{ s}$

28. a) Ao considerer a equação $2 \text{ sen}^2 x - 6 \text{ sen } x - 8 = 0$, deve-se substituir $\text{sen } x = y$, então:

$2 \text{ sen}^2 x - 6 \text{ sen } x - 8 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 6y - 8 = 0$

Ao resolver a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 4$ e $y'' = -1$.

Como $4 > 1$, não se deve considerar a solução positiva, pois sen $x \leqslant 1$.
Sendo assim, como sen $x = y$, tem-se:

$$\text{sen } x = -1 \Rightarrow \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Ao considerer a equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, deve-se substituir $\cos x = y$, então:
$\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow y^2 + y = 0$
Ao resolver a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 0$ e $y'' = -1$.
Como $\cos x = y$, tem-se:
- Para $\cos x = 0$:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ ou } \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- Para $\cos x = -1$:

$\cos \pi = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi < k \in \mathbb{Z}\right\}$$

29. Considerando $\text{sen}^2\, x = y$, tem-se $\text{sen}^4\, x = y^2$. Ao substituir na equação, obtém-se:
$2\,\text{sen}^4\, x - 3\,\text{sen}^2\, x + 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$

Ao resolver a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 1$ e $y'' = \frac{1}{2}$.

Como $\text{sen}^2\, x = y$, então:

$\text{sen}^2\, x = 1$ e $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{2}$

- Considerando $\text{sen}^2\, x = 1$, tem-se sen $x = \pm 1$, então:

$$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{sen } x = \text{sen } \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- Considerando $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{2}$, tem-se sen $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Então:

$$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

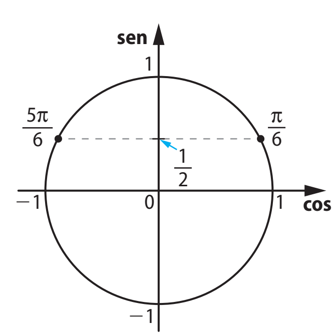
$$\text{sen } x = \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} k\pi < k \in \mathbb{Z}\right\}$$

30. Ao substituir sen $x = a$ na equação $4^{-\text{sen } x} = \frac{1}{2}$, obtém-se:

$$4^{-\text{sen } x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4^{-a} = \frac{1}{2}$$

Por meio das propriedades de potência, pode-se concluir que $a = -\frac{1}{2}$, logo:



$$\text{sen } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou}$$

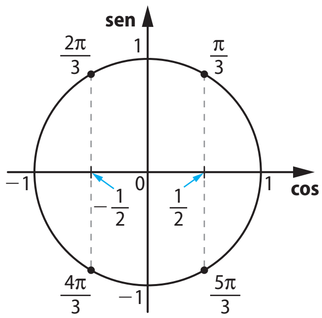
$$\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

31. Para resolver a equação $|\cos(\pi - x)| = \frac{1}{2}$, deve-se considerar que $\cos(\pi - x)$ pode assumir um valor positivo e um negativo, pois está em módulo. Portanto:

$\cos(\pi - x) = \pm\frac{1}{2}$

Representando esses valores no ciclo trigonométrico, obtém-se:



Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

E, ainda, como $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, então $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2\,k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

32. Como o enunciado sugere para considerar

$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $x \in [0, 2\pi]$, então:

$\cos 3x = \operatorname{sen} x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$

$3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$

ou

$3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi + 2k\pi$

- $3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

  Verificando valores de k, tais que $x \in [0, 2\pi[$:

  $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$; $k = 1 \Rightarrow = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$; $k = 2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$;

  $k = 3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}$

- $3x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

  $k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$; $k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

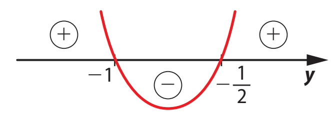
  $S = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

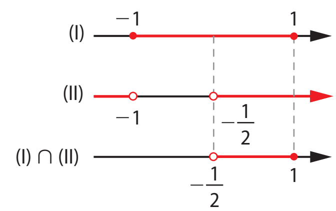
33. Para resolver a inequação $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$; $x \in [0, 2\pi[$, deve-se substituir $\cos x$.

Considerando a condição de existência de y: $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Ao resolver a inequação $2y^2 + 3y + 1 > 0$, obtêm-se as raízes $y' = -\frac{1}{2}$ e $y'' = -1$.

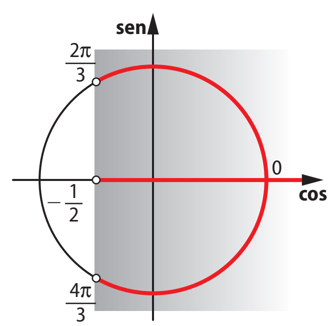
Observando o esboço da inequação, é possível anotar que o intervalo de interesse está fora das raízes.





Logo, obtém-se $-\frac{1}{2} < y \leqslant 1$ e portanto:

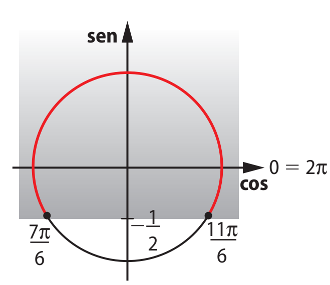
$-\frac{1}{2} < \cos x \leqslant 1$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

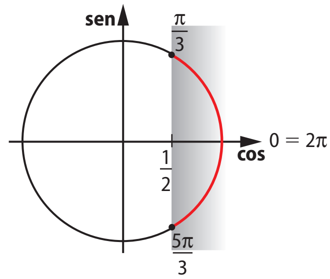
34. Ao esboçar o ciclo trigonométrico de cada inequação, obtém-se:

a) $2\operatorname{sen} x \geqslant -1 \Rightarrow \operatorname{sen} x \geqslant -\frac{1}{2}$



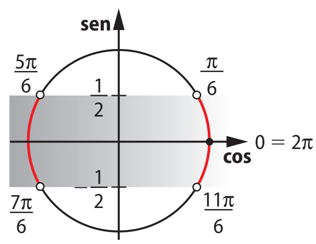
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$$

b) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$



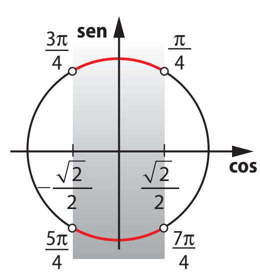
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$$

c) $|\text{sen } x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \text{sen } x < \frac{1}{2} \Rightarrow$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$$

d) $|\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



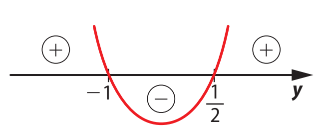
GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$$

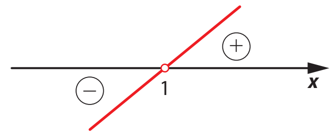
35. Para resolver a inequação $\frac{2\text{sen}^2\, x + \text{sen } x - 1}{\text{sen } x - 1} > 0$ deve-se considerar que sen $x = y$, com $y \neq 1$. Logo:

$$\frac{2y^2 + y - 1}{y - 1} > 0$$

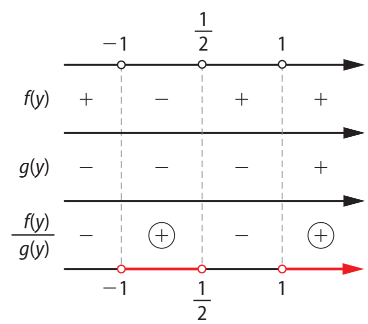
Considerando $f(x) = 2y^2 + y - 1 = 0$, obtêm-se as raízes $y' = -1$ ou $y'' = \frac{1}{2}$



Considerando $g(x) = y - 1 = 0$, obtém-se $y = 1$



Então:



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

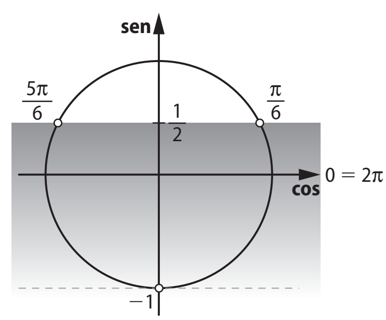
isto é, $-1 < y < \frac{1}{2}$ ou $y > 1$

Disso, obtém-se:

$-1 < \text{sen } x < \frac{1}{2}$

ou

sen $x > 1$ (não está definido).



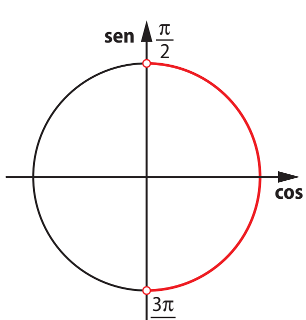
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right\}$$

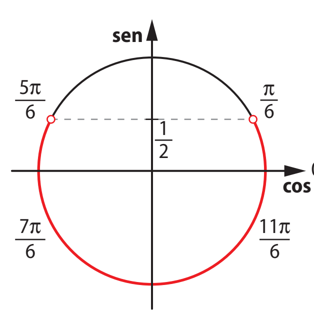
36. Simplificando a inequação, obtém-se:

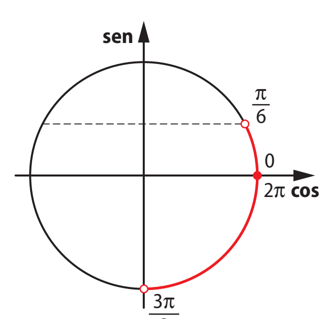
2 sen x cos x < cos $x \Rightarrow$ cos x (2 sen $x - 1) < 0$

Essa inequação será satisfeita quando (cos x) e (2 sen $x - 1$) possuírem sinais opostos.

1º caso: cos $x > 0$ e 2 sen $x - 1 < 0$, ou seja, quando cos $x > 0$ e sen $x < \frac{1}{2}$ cos $x > 0$

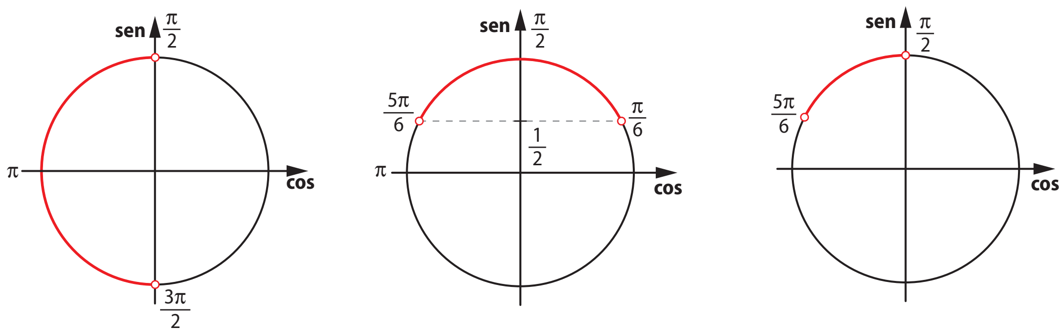






$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$

2º caso: cos $x < 0$ e 2 sen x − 1 > 0, ou seja, cos $x < 0$ e sen x > $\frac{1}{2}$



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}\}$

Comparando S_1 e S_2, obtém-se:

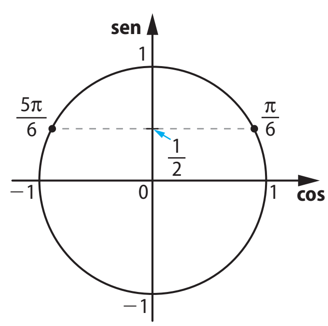
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$$

37. Segundo o enunciado, o pistão precisa alcançar a altura de 6 cm, por três vezes, em 4 segundos. Então, deve-se calcular os possíveis momentos para que a altura alcance os 6 cm, ou seja, $h(t) = 6$. Logo:

$$h(t) = 4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 6 = 4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Portanto, quando $\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ então $h(t) = 6$, porém isso deve ocorrer 3 vezes em menos de 4 segundos.

Observe o ciclo a seguir:



EDITORIA DE ARTE

Na primeira volta, para que $h(t) = 6$, deve-se considerar os arcos: $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

O terceiro arco sai da segunda volta, ou seja, $2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$.

Portanto, para $t = 4$ deve-se ter que $\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6}$, pois $\frac{13\pi}{6}$ é a terceira ocorrência que deve acontecer em 4 segundos. Logo:

$$\frac{\beta \cdot 4}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow 12\beta - 3\pi = 13\pi \Rightarrow \beta = \frac{16\pi}{12} = \frac{4\pi}{3}$$

Como calculamos o valor para 4 s e o problema exige que seja em menos de 4 segundos, então: $\beta > \frac{4\pi}{3}$

E como deve-se considerar $\pi = 3$, obtém-se: $\beta > \frac{4 \cdot 3}{3} \Rightarrow \beta > 4$

Logo, o menor inteiro é 5.

Resposta: alternativa **d**

Atividades complementares

1. Considerando o peso em maio, $P(5)$, em quilograma:

$$P(5) = 65 - 5\cos\left(\left(\frac{5+3}{6}\right)\pi\right) = 65 - 5\cos\frac{4\pi}{3} = 65 - 5\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = 65 + 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 65 + \frac{5}{2} = 67{,}5$$

Peso em agosto, $P(8)$, em quilograma:

$$P(8) = 65 - 5\cos\left(\left(\frac{8+3}{6}\right)\pi\right) = 65 - 5\cos\frac{11\pi}{6} = 65 - 5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 65 - \frac{5\sqrt{3}}{2} = 65 - 4{,}25 = 60{,}75$$

Fazendo P(8) − P(5):

60,75 − 67,5 = −6,75

Resposta: alternativa **03**

2. A altura máxima de $H(t) = 5 + 3\ \text{sen}\ (2t)$ ocorrerá quando o valor do seno for máximo, isto é, quando $\text{sen}\ (2t) = 1$.

Substituindo $\text{sen}\ (2t) = 1$ em $H(t)$, obtém-se:

$H_{\text{máxima}} = 5 + 3 \cdot \text{sen}(2t) = 5 + 3 \cdot 1 = 8$ metros

Resposta: alternativa **e**

3. Fazendo $x = \frac{\pi}{2}$ em:

$f(x)\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi\,\text{sen}(x))$, tem-se:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \pi\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + 3 = f(0)\left(\frac{\pi}{2} - \pi\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 = f(0)\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \Rightarrow 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0)\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Para determinar $f(0)$, faz-se:

$$f(0)\cos\left(\frac{0}{2} + \pi\right) + 3 = f\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)(0 - \pi\ \text{sen}(0)) \Rightarrow f(0)\cos\pi + 3 = f(0) \cdot 0 \Rightarrow -f(0) + 3 = 0 \Rightarrow f(0) = 3$$

Portanto:

$$3 - \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0)\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} + 3 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{3\pi}{2} + 3}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{3\pi + 6}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\pi + 6}{2}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}\,(\pi + 2)}{2}$$

Resposta: alternativa **e**

4. Da imagem da função $f(t) = 5 + 2\,\text{sen}(\pi t)$, para $0 < t < 2$, está definido entre os respectivos valores de máximo e mínimo da função, ou seja:

Valor máximo: quando $\text{sen}\ (\pi x) = 1$

Valor mínimo: quando $\text{sen}\ (\pi x) = -1$.

Portanto, o valor máximo que a função atinge é 7 (5 + 2) e o valor mínimo é 3 (5 − 2).

Logo, a $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 7\}$

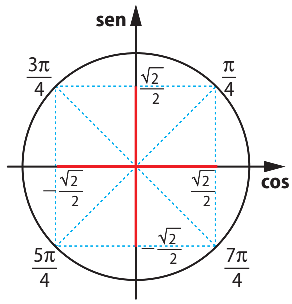
Resposta: alternativa **d**

5. Os gráficos se interceptam quando $1 + \text{sen}\, x = 1 - \cos x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

Resolvendo a equação $1 + \text{sen}\, x = 1 - \cos x$

$1 + \text{sen}\, x = 1 - \cos x$

$\text{sen}\, x = -\cos x$



EDITORIA DE ARTE

Os valores de seno e cosseno têm sinais opostos no terceiro e no quarto quadrantes.

$x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Resposta: alternativa **e**

6. O período de $g(x) = \text{sen}\, \beta x$ é 4π. Então:

$$4\pi = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Como a amplitude de $g(x)$ é menor que a de $f(x)$, pode-se afirmar que $0 < \alpha < 1$.

Resposta: alternativa **a**

7. Como $p(t) = 100 - 20\text{sen}(t)$, para $t \geqslant 0$, é verdade que $80 \leqslant p(t) \leqslant 120$. Disso, obtém-se que a amplitude da função $p(t)$ é 40. Como a amplitude corresponde ao diâmetro da circunferência, então o diâmetro mede 40.

Resposta: alternativa **b**

8. A função $f(x) = 3 - 5\text{sen}(2x + 4)$ terá valor máximo e mínimo, respectivamente, quando $\text{sen}(2x + 4)$ assumir valor mínimo e máximo. Assim:

$f(x)$ é máximo quando $\text{sen}(2x + 4) = -1$, logo, o valor máximo de $f(x)$ é $3 - 5(-1) = 8$

$f(x)$ é mínimo quando $\text{sen}(2x + 4) = 1$, logo, o valor mínimo de $f(x)$ é $3 - 5 \cdot 1 = -2$

O período p é dado por: $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Resposta: alternativa **b**

9. Ao considerar as informações contidas no enunciado, sabe-se que a função $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, possui imagem $78 \leqslant P(t) \leqslant 120$. Portanto:

$$\begin{cases} A + B = 120 \\ A - B = 78 \end{cases} \Rightarrow A = 99 \text{ e } B = 21$$

Como são 90 batimentos por minuto e o intervalo entre cada batimento representa o período p, tem-se:

$$p = \frac{90}{60} = \frac{2}{3}$$

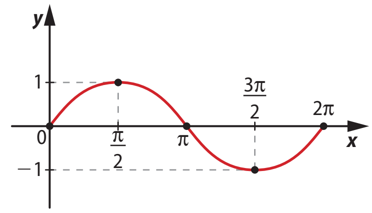
Além disso, sabe-se que $p = \dfrac{2\pi}{|k|}$. Portanto:

$$p = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 3\pi$$

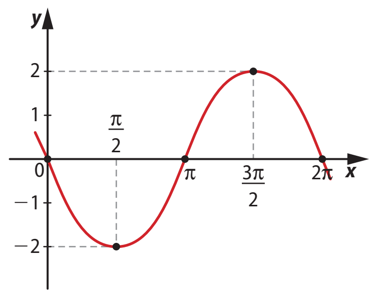
Logo, $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$

Resposta: alternativa **a**

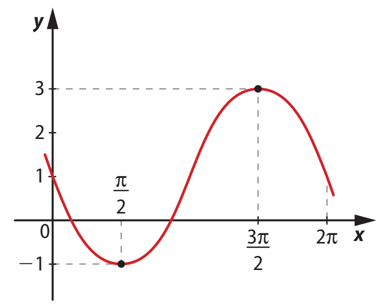
10. Considere o gráfico $f(x) = \text{sen}\ x$:



1º) Os pontos do gráfico foram multiplicados por $(-2) \Rightarrow b = -2$.



2º) Sua imagem foi deslocada 1 unidade para cima.



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

Logo, $a = 1$ e $b = -2$

Resposta: alternativa **d**

11. Com base no gráfico, pode-se determinar que o máximo da função é 168 m. Ainda é possível aferir que o período é 2π e que a amplitude é, portanto, dada por $168 - 88 = 80$. Disso, obtém-se que o mínimo da função $f(t)$ é dado por $88 - 80 = 8$.

Considera-se que $f(t) = A + B\,\text{sen}(t)$, logo:

$$\begin{cases} f(0) = A + B \cdot 0 = 88 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = A + B = 168 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 88 \\ A + B = 168 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se que $A = 88$ e $B = 80$.

Portanto: $f(t) = 88 + 80\,\text{sen}(t)$

Resposta: alternativa **a**

12. O mês de produção máxima ocorre quando o preço é mínimo. O preço será mínimo quando $\cos\left(\dfrac{\pi x - \pi}{6}\right)$ for mínimo. Assim:

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow x = 7$$

Portanto, a produção máxima ocorre em julho.

Resposta: alternativa **d**

13. Pelo enunciado, tem-se que:

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(x + \pi) + \text{sen}(x + 2\pi) +$$
$$+ \text{sen}(x + 3\pi) + ... + \text{sen}(x + n\pi)$$

Como n é par e $\text{sen}(x + \pi) + \text{sen}(x + 2\pi) = 0$;

$\text{sen}(x + 3\pi) + \text{sen}(x + 4\pi) = 0$; ...; $\text{sen}(x + (n - 1)\pi) + \text{sen}(x + n\pi) = 0$, tem-se:

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(x + \pi) + \text{sen}(x + 2\pi) + \text{sen}(x + 3\pi) + ... + \text{sen}(x + n\pi) = \text{sen}(x)$$

Resposta: alternativa **a**

14. Como o máximo da função é 5 e o mínimo é -1, o conjunto imagem é:

$\text{Im}(f) = [-1; 5]$

Resposta: alternativa **e**

15. O período será: $p = \dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{\pi}} = 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2$

Como a função assume valor máximo 8 e mínimo 2, o conjunto imagem de $f(x)$ será $\text{Im}(f) = [2, 8]$.
Resposta: alternativa **c**

16. Como $-1 \leqslant \cos(2\pi t) \leqslant 1$, o valor máximo e o valor mínimo de $P(t)$ ocorre, respectivamente, quando $\cos(2\pi t) = 1$ e quando $\cos(2\pi t) = -1$.

I. Verdadeira. $P(t) = 96 + 18 \cdot 1 = 96 + 18 = 114$
II. Verdadeira. $P(t) = 96 + 18 \cdot (-1) = 96 - 18 = 78$
III. Verdadeira. O período da função é $\dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$
IV. Falsa. $P\left(\dfrac{1}{3}\right) = 96 - 18 \cdot \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 96 + 18 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 96 - 9 = 87$
V. Falsa. Sendo $P(0) = 114$, o gráfico apresentado não é o de $P(t)$.

Resposta: I:V; II: V; III: V; IV: F; V: F

17. Como a embarcação precisa de uma profundidade mínima de 2 m, ou seja, $h(t) = 2$, deve-se encontrar os momentos do dia em que isso ocorre. Logo:

$$h(t) = 3 - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) \Rightarrow 2 = 3 - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) = \frac{1}{2}$$

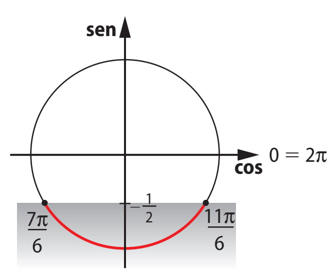
Sabe-se que o valor de seno é $\dfrac{1}{2}$ para $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$. Então:

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 2 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi t}{12} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = 10$$

Como a medição começou a ocorrer às 6 h da manhã, então, nesse momento $t = 0$.
As soluções encontradas são $t = 2$, que corresponde a 8 h, e $t = 10$ que corresponde a 16 h.
Como o navio estava encalhado às 11 h, ele precisará esperar até as 16 h, ou seja, esperar mais 5 horas.
Resposta: alternativa **b**

18. Ao resolver a inequação $2\,\text{sen}\,x \leqslant -1$, obtém-se:

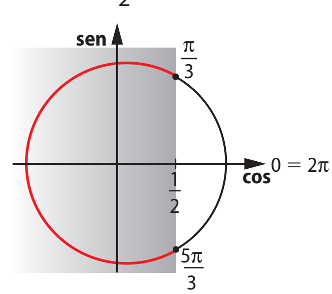
$$2\,\text{sen}\,x \leqslant -1 \Rightarrow \text{sen}\,x \leqslant -\frac{1}{2}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Resposta: alternativa **a**

19. Ao resolver a inequação $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$, obtém-se:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Resposta: alternativa **c**

HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada

Música: Francisco Manuel da Silva

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heroico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
- Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

ISBN 978-65-5742-021-8
9 786557 420218