Intégrales d'Euler

Correction

Juillet 2025

Ce problème est une introduction aux fonctions spéciales par les intégrales d'Euler à travers le programme de CPGE. Il a pour but de les définir en tant que fonctions réelles puis de les étudier en déterminant quelques unes de leurs propriétés et valeurs ainsi que leur comportement asymptotique. Il présente aussi des applications au calcul de deux intégrales.
Le problème est posé à la manière d'un sujet de concours plutôt de type Centrale. Nonobstant, il est important de prendre en compte que les résultats que nous étudions jouissent d'une multitude de démonstrations. Ainsi l'ordre définit par le sujet n'est pas la seule manière de procéder.

Cadre et Notations :
Dans tout le problème, on travaille avec des fonctions d'une ou plusieurs variable(s) réelle(s) et à valeurs réelles.

— Pour tout ensemble X et toute fonction f définie sur X, on désigne par $\mathrm{dom}(f)$ son domaine de définition, c'est à dire la plus grande sous-partie de X sur laquelle f est une bien définie.

— $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls.

— $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_+^*$ celui des nombres réels strictement positifs.

— Pour Y un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$ l'espace vectoriel des fonctions de Y dans $\mathbb{R}$ continues et $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$ formé des fonctions de carré intégrable sur Y,

$$\mathrm{L}^2(\mathrm{Y}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathrm{Y}),\ \int_{\mathrm{Y}} f^2 < +\infty \right\}$$

— On dit qu'une fonction réelle f à valeurs strictement positives est *logarithmiquement convexe* ou *log-convexe* lorsque $\ln \circ f$ est convexe.

— Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tels que $\left(\prod_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ admet une limite, on note $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n$.

— On admet le résultat sur l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

1 Préliminaires

1.1 Produit infini

1. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes strictement positifs, $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \ln\left(\prod_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n\right) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \ln(a_n)$.

   Par continuité du logarithme on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(a_n)$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n) = \ln\left(\prod_{n=0}^{+\infty} a_n\right)$.

   Autrement dit $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n)\right)$.

1.2 Espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
   $(a-b)^2 \geq 0 \implies a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
3. Tout d'abord, la fonction nulle est trivialement de carré intégrable sur Y. Fixons ensuite $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $2|fg| \leq f^2 + g^2$. Par conséquent,

   $$\int_{\mathrm{Y}} (f+g)^2 = \int_{\mathrm{Y}} f^2 + 2fg + g^2 \leq \int_{\mathrm{Y}} f^2 + \int_{\mathrm{Y}} 2|fg| + \int_{\mathrm{Y}} g^2 \leq 2\left(\int_{\mathrm{Y}} f^2 + \int_{\mathrm{Y}} g^2\right) < +\infty$$

   De plus, $\int_{\mathrm{Y}} (\lambda f)^2 = \lambda^2 \int_{\mathrm{Y}} f^2 < +\infty$.
   Ainsi, $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$.
   Ensuite, on a montré que fg est intégrable sur Y donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bien définie. De plus $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est :
   - Symétrique : $\langle g, f \rangle = \int_{\mathrm{Y}} gf = \int_{\mathrm{Y}} fg = \langle f, g \rangle$;
   - Linéaire à gauche :
     $\forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Y}),\ \langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle = \int_{\mathrm{Y}} (f_1 + \lambda f_2) g = \int_{\mathrm{Y}} f_1 g + \lambda \int_{\mathrm{Y}} f_2 g = \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle$.
     Puis bilinéaire par symétrie ;
   - Positif et défini positif : $\langle f, f \rangle = \int_{\mathrm{Y}} f^2 \geq 0$ car $f^2 \geq 0$, et comme f^2 est continue sur Y, par stricte positivité de l'intégrale $\langle f, f \rangle = 0 \implies f^2 = 0 \implies f = 0$.

   Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$.

1.3 Constante gamma d'Euler-Mascheroni

4. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$.
   On intègre sur $[k, k+1]$:

   $$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$

Fixons $n \geq 2$ un entier. En sommant les inégalités précédentes pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ on obtient :

$$\mathrm{H}_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) \leq \mathrm{H}_n - \frac{1}{n}$$

C'est à dire,

$$\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$$

Cette encadrement reste vrai pour $n = 1$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$.
   Or on rappelle que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En effet, ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ \ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.
   Donc $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1$.
   En particulier, pour $x = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ on obtient $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq -\dfrac{1}{n+1}$ d'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
   Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   Ensuite, d'après la question 1 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée (par 0 par exemple) et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.

1.4 Une intégrale d'Euler

6. La fonction $\theta \mapsto \ln(\sin\theta)$ est continue par morceaux sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   De plus, $\ln(\sin\theta) \underset{\theta\to 0}{=} \ln(\theta + o(\theta)) \underset{\theta\to 0}{=} \ln\theta + \ln(1 + o(1)) \underset{\theta\to 0}{=} \ln\theta + o(1) \underset{\theta\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$. Donc I converge.
   Ensuite, en posant $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ on a :
   $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)(-d\varphi) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos\varphi)d\varphi = \mathrm{J}$ (ce qui justifie que J converge).
7.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} + \mathrm{J} &= \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin\theta) + \ln(\cos\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)\cos(\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right) \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2\theta))d\theta - \int_0^{\pi/2} \ln 2\ d\theta
\end{aligned}$$

Or en posant $\varphi = 2\theta$ dans la première intégrale on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2\theta))d\theta &= \int_0^{\pi} \ln(\sin\varphi)\frac{d\varphi}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\varphi)d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin\varphi)d\varphi\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{I} + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin\varphi)d\varphi\right)\end{aligned}$$

Enfin en posant $\psi = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$ dans la seconde intégrale :
$\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin\varphi)d\varphi = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\right)d\psi = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos\psi)d\psi = \mathrm{J}.$
Ainsi on a montré que $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \dfrac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{2} - \dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

8. D'après la question 6, $\mathrm{I} = -\dfrac{\pi \ln 2}{2}$.

2 Fonction Gamma d'Euler

2.1 Définition et premières propriétés

9. Posons $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. Fixons $x \in \mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$. Donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en $+\infty$ et est intégrable en 0 si et seulement si $x-1 > -1$ i.e $x > 0$.
On en déduit que $\mathrm{dom}(\Gamma) = \mathbb{R}_+^*$.
10. Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par IPP sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt \\ &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

Le crochet est nul en 0 car $x > 0$ et nul en $+\infty$ par croissances comparées.
11. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
On calcule $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ donc par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.
12. On va appliquer un théorème de dérivation sous l'intégrale.

— Pour tout $t>0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et,
$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x>0,\ \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}$.

— Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x>0$. $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \underset{t\to 0}{=} o(t^\eta)$ avec $-1<\eta<x-1$ donc $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $b>a>0$ et $x \in [a,b]$.

$$\forall (x,t) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln(t)|^k t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t)$$

Avec $\varphi(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t>1 \end{cases}$. On vient de montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $a>0$ et $b>0$.

On en déduit que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x>0$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

13. D'après la question précédente, Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t}$.
Or si $x>0$ alors $\forall t>0,\ \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t}>0$. Donc par positivité de l'intégrale, Γ'' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
14. En faisant tendre x vers 0 par valeurs strictement positives dans l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on obtient par continuité de Γ, $x\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1$. Donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
15. D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ donc $\exists \alpha \in]0,2[,\ \Gamma(\alpha) > \Gamma(2)$. De plus, $1 = \Gamma(2) < \Gamma(3) = 2$. Donc les pentes $p = \dfrac{\Gamma(2)-\Gamma(\alpha)}{2-\alpha}$ et $q = \dfrac{\Gamma(3)-\Gamma(2)}{3-2} = 1$ sont de signes opposés. Comme Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,3]$ l'égalité des accroissements finis assure l'existence de $x_p \in]\alpha,2[$ tel que $\Gamma'(x_p) = p<0$ ainsi que de $x_q \in]2,3[$ tel que $\Gamma'(x_q) = 1$. Or comme Γ est strictement convexe ($\Gamma''>0$), Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection on sait alors que Γ' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons x_0 tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. On sait alors, comme Γ est convexe, que Γ admet un minimum global en x_0 et que de plus, comme Γ est strictement convexe, ce minimum n'est atteint qu'en x_0.
16. Soit $a>x_0$. Comme Γ est strictement convexe, $\Gamma'(a) > \Gamma'(x_0) = 0$.
De plus par convexité, $\forall x>0,\ \Gamma(x) \geq \Gamma'(a)(x-a)+\Gamma(a)$. Le membre de droite tend vers $+\infty$ pour $x\to+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

2.2 Formule de Stirling généralisée

17. On pose $t = s\sqrt{x}+x$ i.e $s = \dfrac{t-x}{\sqrt{x}}$. Justifions que le changement de variable est licite. $t \mapsto \dfrac{t-x}{\sqrt{x}}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\sqrt{x},+\infty[$ strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est une fonction

affine). Alors,

$$\Gamma(x+1)=\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}(s\sqrt{x}+x)^x e^{-s\sqrt{x}-x}\sqrt{x}ds$$

18.
$$\Gamma(x+1)=\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}x^x\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-s\sqrt{x}}e^{-x}\sqrt{x}ds=\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}ds$$

19. Soit $u\in]-1,0]$. $|u|<1$ donc $\ln(1+u)=\ln(1-|u|)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|u|^n}{n}$.

Donc $\ln(1+u)-u+\frac{u^2}{2}=-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{|u|^n}{n}\leq 0$.

Remarque : On peut aussi écrire la formule de Taylor avec reste intégral et remarquer que l'intégrale est négative.

20. Soit $s\in]-\sqrt{x},0]$. $\frac{s}{\sqrt{x}}\in]-1,0]$ donc d'après la question précédente, $\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-\frac{s}{\sqrt{x}}\leq-\frac{s^2}{2x}$.

Puis on multiplie par $x>0$ pour obtenir :

$$x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}\leq-\frac{s^2}{2}$$

21. D'après la question 16 il s'agit de montrer que $\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}ds\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\sqrt{2\pi}$.

Notons $\varphi:(y,s)\mapsto\begin{cases}y\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{y}}\right)-s\sqrt{y} & \text{si } s>-\sqrt{y}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

- Pour tout $y>0$, $s\mapsto e^{\varphi(y,s)}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $s\in\mathbb{R}$, $\varphi(y,s)\underset{y\to+\infty}{=}y\left(\frac{s}{\sqrt{y}}-\frac{s^2}{2y}\right)-s\sqrt{y}+o\left(\frac{1}{y}\right)\underset{y\to+\infty}{=}-\frac{s^2}{2}+o(1)$ ($s>-\sqrt{y}$ pour y assez grand). C'est à dire pour tout $y>0$, $e^{\varphi(y,s)}\longrightarrow e^{-\frac{s^2}{2}}$.
- $s\mapsto e^{-\frac{s^2}{2}}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- D'après la question 18,

$$\forall(y,s)\in\mathbb{R}^2,\ |e^{\varphi(s,t)}|\leq e^{-\frac{s^2}{2}}$$

  Or la fonction $s\mapsto e^{-\frac{s^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est paire et $e^{-\frac{s^2}{2}}\underset{s\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{s^2}\right)$.

On en déduit d'après le théorème de convergence dominée que :

$$\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,s)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

Enfin, on effectue le changement de variable $t=\frac{s}{\sqrt{2}}$ pour obtenir avec le résultat admis :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}(\sqrt{2}dt)=\sqrt{2\pi}$$

Finalement,

$$\Gamma(x+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}$$

2.3 Théorème de Bohr-Mollerup

22. On a montré question 12 que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus par stricte positivité de l'intégrale, Γ est à valeurs strictement positives. Ainsi par composition $\ln\circ\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et,
    - $(\ln\circ\Gamma)' = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$;
    - $(\ln\circ\Gamma)'' = \dfrac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$.

    On en déduit que le signe de $\ln\circ\Gamma$ est celui de $\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2$.

    Or toujours d'après la question 12, on sait que $\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)^2t^{x-1}e^{-t}dt$.

    On rappelle que d'après la question 3, $\langle\cdot,\cdot\rangle : \begin{cases} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt \end{cases}$ est un produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$.

    En posant pour $x > 0$ $f_x : t \mapsto t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}$ et $g_x : t \mapsto \ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}$ qui sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on remarque que $(\Gamma'(x))^2 = \langle f_x, g_x\rangle^2$, $\Gamma(x) = \|f_x\|^2$ et $\Gamma''(x) = \|g_x\|^2$ avec $\|.\|$ la norme associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (ce qui justifie $f_x, g_x \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ car $x > 0$).

    Par conséquent d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\Gamma')^2 \leq \Gamma''\Gamma$ et par suite $(\ln\circ\Gamma)''$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est à dire Γ est log-convexe.
23. $\forall x > 0,\ \mathrm{W}(x+1) = \ln(f(x+1)) - \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(xf(x)) - \ln(x\Gamma(x)) = \ln(x) + \ln\circ f(x) - \ln(x) - \ln\circ\Gamma(x) = \mathrm{W}(x)$.
24. Fixons $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) = \Gamma(n+1) = n!$.

    On va utiliser la croissance des pentes sur $\ln\circ f$, qui est convexe, au points $n,\ n+1,\ n+x+1,\ n+2$:

$$\begin{aligned} \ln\circ f(n+1) - \ln\circ f(n) \leq \frac{\ln\circ f(n+x+1) - \ln\circ f(n+1)}{x} &\leq \ln\circ f(n+2) - \ln\circ f(n+1) \\ \iff \ln(n) \leq \frac{\ln\circ f(n+x+1) - \ln\circ f(n+1)}{x} &\leq \ln(n+1) \end{aligned}$$

Puis sur $\ln\circ\Gamma$:

$$\begin{aligned} \ln\circ\Gamma(n+1) - \ln\circ\Gamma(n) \leq \frac{\ln\circ\Gamma(n+x+1) - \ln\circ\Gamma(n+1)}{x} &\leq \ln\circ\Gamma(n+2) - \ln\circ\Gamma(n+1) \\ \iff \ln\circ\Gamma(n+1) - \ln\circ\Gamma(n+2) \leq \frac{\ln\circ\Gamma(n+1) - \ln\circ\Gamma(n+x+1)}{x} &\leq \ln\circ\Gamma(n) - \ln\circ\Gamma(n+1) \\ \iff -\ln(n+1) \leq \frac{\ln\circ\Gamma(n+1) - \ln\circ\Gamma(n+x+1)}{x} &\leq -\ln(n) \end{aligned}$$

D'où en sommant :

$$-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) - \ln(n+1) \leq \frac{\mathrm{W}(n+x+1) - \mathrm{W}(n+1)}{x} \leq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

25. Par 1-périodicité,

$$\begin{aligned}
&-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\mathrm{W}(n+x+1)-\mathrm{W}(n+1)}{x} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
\iff\ &-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\mathrm{W}(x)-\mathrm{W}(1)}{x} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
\iff\ &-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\mathrm{W}(x)}{x} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Et donc en faisant tendre n vers $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{W}(x)}{x} = 0$ c'est à dire $\mathrm{W}(x) = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in]0,1]$, par 1-périodicité W est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ c'est à dire $f = \Gamma$.

3 Fonction Bêta d'Euler

3.1 Définition et premières propriétés

26. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Notons $f_{x,y} : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. $f_{x,y}$ est continue par morceaux et positive sur $]0,1[$.
De plus, $f_{x,y}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ donc $f_{x,y}$ est intégrable en 0 si et seulement si $x > 0$.
Similairement, $f_{x,y}(t) \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^{y-1}$ donc $f_{x,y}$ est intégrable en 1 si et seulement si $y > 0$.
Finalement, $\mathrm{dom}(\mathrm{B}) = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

27. Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On pose $u = 1-t$:
$\mathrm{B}(x,y) = \displaystyle\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-du) = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = \mathrm{B}(y,x)$.

28. Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

$$\begin{aligned}
(x+y)\mathrm{B}(x+1,y) &= x\mathrm{B}(x+1,y) + \int_0^1 t^x y(1-t)^{y-1}dt\\
&= x\mathrm{B}(x+1,y) + \left[-t^x(1-t)^y\right]_0^1 + \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y dt \qquad \text{(par IPP)}\\
&= x\int_0^1 \left(t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y\right)dt\\
&= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t+(1-t))dt\\
&= x\mathrm{B}(x,y)
\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathrm{B}(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$.

29. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que par stricte positivité de l'intégrale, B est strictement positive sur son domaine.
D'après la question précédente,
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{B}(n+1,p) = \dfrac{n}{n+p}\mathrm{B}(n,p)$ i.e $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\mathrm{B}(n+1,p)}{\mathrm{B}(n,p)} = \dfrac{n}{n+p}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

Par produit, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{B}(k+1,p)}{\mathrm{B}(k,p)} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+p}$, c'est à dire $\displaystyle\frac{\mathrm{B}(n,p)}{\mathrm{B}(1,p)} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(k+p)} = \frac{(n-1)!p!}{(p+n-1)!}$.

Enfin, on calcule $\mathrm{B}(1,p) = \mathrm{B}(p,1) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}dt = \frac{1}{p}$ et on en déduit que $\mathrm{B}(n,p) = \dfrac{(n-1)!(p-1)!}{(p+n-1)!}$.

Remarque : Il s'agit de la formule $\mathrm{B}(n,p) = \dfrac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}$ *qui est démontrée plus généralement dans des questions ultérieures. On peut aussi exprimer le résultats à l'aide des coefficients binomiaux :* $\mathrm{B}(n,p) = \dfrac{1}{n\dbinom{n+p-1}{n}}$.

30. Fixons $y > 0$ et notons $\beta_y : (x,t) \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$.
    — Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto \beta_y(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[,\ \dfrac{\partial^k \beta_y}{\partial x^k}(x,t) = \ln(t)^k t^{x-1}(1-t)^{y-1}$.
    — Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k \beta_y}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$; en effet $\dfrac{\partial^k \beta_y}{\partial x^k}(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)^k t^{x-1} \underset{t\to 0}{=} o(t^\alpha)$ avec $\alpha \in]-1, x-1[$.
    — Soit $a > 0$. $\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,1[$,
    $$\left|\frac{\partial^k \beta_y}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln(t)|^k t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq |\ln(t)|^k t^{a-1}(1-t)^{y-1} = \left|\frac{\partial^k \beta_y}{\partial x^k}(a,t)\right|$$
    Et on a déjà vu que la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k \beta_y}{\partial x^k}(a,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ car $a > 0$.

    On en déduit par théorème de transfert $\mathcal{C}^\infty$ que B admet une dérivée partielle selon x à tout ordre, sur $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et que :
    $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \frac{\partial^k \mathrm{B}}{\partial x^k}(x,y) = \int_0^1 \ln(t) t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$
    Ensuite d'après la question 20, $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.

    Par conséquent $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \dfrac{\partial^k \mathrm{B}}{\partial y^k}(x,y) = \dfrac{\partial^k \mathrm{B}}{\partial x^k}(y,x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)^k t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$.

3.2 Lien entre Γ et B

31. Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$. On va montrer que $g : x \mapsto \dfrac{\Gamma(x+y)\mathrm{B}(x,y)}{\Gamma(y)}$ vérifie les hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup.

    Tout d'abord, $g(1) = \dfrac{\Gamma(y+1)\mathrm{B}(1,y)}{\Gamma(y)} = y\mathrm{B}(y,1) = \displaystyle\int_0^1 yt^{y-1}dt = [t^y]_0^1 = 1$ et,

$$\forall x>0,\ g(x+1)=\frac{\Gamma(x+1+y)\mathrm{B}(x+1,y)}{\Gamma(y)}=\frac{(x+y)\Gamma(x+y)\cdot\dfrac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)}{\Gamma(y)}=xg(x).$$

g est à valeurs strictement positives et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et quotient de fonctions à valeurs strictement positives de classes $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x>0,\ (\ln\circ g)(x)=(\ln\circ\Gamma)(x+y)+(\ln\circ\mathrm{B})(x,y)-(\ln\circ\Gamma)(y)$.
Donc par somme $\ln\circ g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et,

$$\forall x>0,\ (\ln\circ g)''(x)=(\ln\circ\Gamma)''(x+y)+\frac{\dfrac{\partial^2\mathrm{B}}{\partial x^2}(x,y)\mathrm{B}(x,y)-\left(\dfrac{\partial\mathrm{B}}{\partial x}(x,y)\right)^2}{\mathrm{B}(x,y)^2}.$$

On sait déjà d'après le théorème de Bohr-Mollerup que le premier terme est positif, il suffit de montrer que le deuxième l'est aussi. Pour cela on va procéder de manière similaire à la démonstration de la log-convexité de Γ question 22.
Fixons $x\in\mathbb{R}_+^*$. On note $u_x:t\mapsto t^{\frac{x-1}{2}}(1-t)^{\frac{y-1}{2}}$ et $v_x:t\mapsto \ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}(1-t)^{\frac{y-1}{2}}$ ainsi que :

$$\langle\cdot|\cdot\rangle:\left\{\begin{array}{ccc}\mathrm{L}^2(]0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt\end{array}\right.$$

On sait d'après la question 3 que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire de $\mathrm{L}^2(]0,1])$ et on remarque que $\langle u_x|v_x\rangle=\dfrac{\partial\mathrm{B}}{\partial x}(x,y)$, et que $\mathrm{N}(u_x)^2=\mathrm{B}(x,y)$ et $\mathrm{N}(v_x)^2=\dfrac{\partial^2\mathrm{B}}{\partial x^2}(x,y)$ pour N la norme associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
Ainsi d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\dfrac{\partial^2\mathrm{B}}{\partial x^2}\mathrm{B}\geq\left(\dfrac{\partial\mathrm{B}}{\partial x}\right)^2$ et par suite $(\ln\circ g)''$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
Finalement, d'après le théorème de Bohr-Mollerup $g=\Gamma$ c'est à dire $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \mathrm{B}(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

32. Fixons $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On dérive l'identité précédente par rapport à x :

$$\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial x}(x,y)=\frac{(\Gamma'(x)\Gamma(x+y)-\Gamma'(x+y)\Gamma(x))\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)^2}=(\psi(x)-\psi(x+y))\,\mathrm{B}(x,y)$$

De même, $\dfrac{\partial\mathrm{B}}{\partial y}(x,y)=\dfrac{(\Gamma'(y)\Gamma(x+y)-\Gamma'(x+y)\Gamma(y))\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)^2}=(\psi(y)-\psi(x+y))\,\mathrm{B}(x,y)$.

33. Fixons $n\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la formule démontrée question 31 et la question 11 :

$$\mathrm{B}(n+1,y)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(y)}{\Gamma(n+1+y)}=\frac{n!\Gamma(y)}{(n+y)(n-1+y)\cdots(1+y)y\Gamma(y)}=\frac{n!}{(n+y)(n-1+y)\cdots(1+y)y}$$

Remarque : On note parfois pour $\alpha\in\mathbb{C}$, $\dbinom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ *le coefficient binomial généralisé. On pourrait alors noter* $\mathrm{B}(n+1,y)=\dfrac{1}{(n+1)\dbinom{n+y}{n+1}}$ *pour généraliser la formule trouvée question 29.*

4 Quelques formules

4.1 Formules de Gauss et de Weierstrass

34. Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$. h_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montre classiquement que pour tout $t > 0$, $h_n(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-t} t^{x-1}$ (APCR on a bien $t \in]0, n]$). $f : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'inégalité de convexité classique du ln, $\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \leq -\dfrac{t}{n}$.
Donc $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.
Par suite, $|h_n(t)| = h_n(t) \leq f(t)$ où f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque l'intégrale vaut $\Gamma(x)$).
Ainsi d'après le théorème de convergence dominée,
$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} h_n(t) dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x)$$

35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u = \dfrac{t}{n}$.
$\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1 - u)^n (nu)^{x-1} (ndu) = n^x \int_0^1 (1 - u)^n u^{x-1} du.$

36. On remarque que l'on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \mathrm{B}(n + 1, x)$.
D'après la question 33 on a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
Ainsi par unicité de la limite, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

37. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.
$\displaystyle\frac{\mathrm{N}^x \mathrm{N}!}{x(x+1)\cdots(x+\mathrm{N})} = \frac{\mathrm{N}^x}{x} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{n}{x+n} = \frac{\mathrm{N}^x}{x} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.
Or $\mathrm{N}^x = \displaystyle\prod_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^x = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$.
Donc $\displaystyle\frac{\mathrm{N}^x \mathrm{N}!}{x(x+1)\cdots(x+\mathrm{N})} = \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{\mathrm{N}}\right)^x} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$.
Et donc comme $\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{N}}\right)^x \underset{\mathrm{N} \to +\infty}{\longrightarrow} 1$,
$$\Gamma(x) = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{\mathrm{N}}\right)^x} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$
Pour la deuxième égalité il suffit d'écrire $-\gamma x = \displaystyle\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} x \ln(\mathrm{N}) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x}{n}$, d'où par continuité de

l'exponentielle $e^{-\gamma x} = \lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{N^x}{\prod\limits_{n=1}^{N} e^{\frac{x}{n}}} = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{e^{\frac{x}{n}}}$.

Ainsi par produit de limites,

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

38. D'après la question 1, $\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ et $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement vers u sur $\mathbb{R}_+^*$.

u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n'(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

Soit $a \geq x$. $|u_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+a} = \dfrac{a}{n(n+a)}$. Donc $\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \dfrac{a}{n(n+a)}$.

Or $\dfrac{a}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n'$ converge normalement, et a fortiori uniformément, sur $\bigcup\limits_{a>0}]0,a] = \mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent d'après le théorème de transfert $\mathcal{C}^1$, u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

On en déduit que $\psi(x) = -\gamma x - \ln x + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

39. On reprend les notations de la question précédente. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

u_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{x}{n(n+x)}$ et $u_n''(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

D'une part on a déjà montré que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement vers u et que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n'$ converge simplement (vers u').

D'autre part $|u_n''(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc $\|u_n''\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n''$ converge normalement, et a fortiori uniformément, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent d'après le théorème de transfert $\mathcal{C}^2$, u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n''(x)$.

On en déduit que $(\ln\circ\Gamma)''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2} \geq 0$ et donc que Γ est log-convexe.

4.2 Formule de duplication de Legendre

40. Soit $x > 0$. D'une part par produit de limite,

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\cdot\frac{n^{x+\frac{1}{2}}n!}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(x+\frac{2n+1}{2}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2x}\sqrt{n}(n!)^2}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{2x+2k}{2}\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{2x+2k+1}{2}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2x}\sqrt{n}(n!)^2}{2^{-2n-2}\cdot 2x(2x+1)\cdots(2x+2n+1)}\end{aligned}$$

D'autre part, $\Gamma(2x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+1)^{2x}(2n+1)!}{2x(2x+1)\cdots(2x+2n+1)}$. En effet il s'agit de la limite d'une suite extraite (celle des termes impairs).
Or d'après la formule de Stirling,

$$(2n{+}1)! = (2n{+}1)(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n{+}1)\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n+2}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\sqrt{\pi}n^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Ainsi $(2n+1)^{2x}(2n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{2n+2}n^{2x}(n!)^2\sqrt{n}$ et finalement :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+2}n^{2x}\sqrt{n}(n!)^2}{2x(2x+1)\cdots(2x+2n+1)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{1-2x}\sqrt{\pi}(2n+1)^{2x}(2n+1)!}{2x(2x+1)\cdots(2x+2n+1)}\\ &= 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)\end{aligned}$$

41. Dans un premier temps il faut lier l'intégrale de Gauss à Γ.
On remarque qu'en posant $u=\sqrt{t}$ alors $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du.$
La dernière égalité découlant de la parité de l'intégrande.
Ensuite pour déterminer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ on aimerait utiliser la formule de duplication en $x=0$. Γ n'est pas définie en 0 mais on a d'après la question 14 l'équivalent $\Gamma(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$. On en déduit :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{x} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

42. Remarquons d'abord que :

$$\left(\forall x>0,\ \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\Gamma(2x)\right) \iff \left(\forall x>0,\ \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\Gamma(x)\right)$$

On va montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ vérifie les hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup.

Tout d'abord h est évidemment à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma(1) = \dfrac{2^0}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 1$ d'après la question précédente.

Puis $\forall x > 0,\ h(x+1) = \dfrac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{x}{2}+1\right) = \dfrac{2^x}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\cdot\dfrac{x}{2}\Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right) = xh(x)$.

Enfin, $\forall x > 0,\ \ln(h(x)) = x\ln(2) - \dfrac{\ln(\pi)}{2} + \ln\left(\Gamma\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\Gamma\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right)$.

Donc $\forall x > 0,\ (\ln\circ h)''(x) = \dfrac{1}{4}(\ln\circ\Gamma)''\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1}{4}(\ln\circ\Gamma)''\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \geq 0$.

Ainsi d'après le théorème de Bohr-Mollerup $h = \Gamma$, c'est à dire :

$$\forall x > 0,\ \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\Gamma(x)$$

5 Applications

5.1 Valeurs particulières

43. En posant $u = \sqrt{t}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \\
&= \int_0^1 \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= [2\arcsin(u)]_0^1 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Ensuite d'après la question 31, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$. Donc $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

On a déjà vu d'autre part question 41 que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

44. Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(k-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^n}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

Et $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} k = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} k}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} k} = \dfrac{(2n)!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

45. On a montré question 38 que $\forall x > 0,\ \psi(x) = (\ln \circ \Gamma)'(x) = -\gamma - \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

    Donc $\Gamma'(1) = \Gamma(1)\psi(1) = -\gamma - 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\gamma$.

46. La question précédente prouve l'initialisation. Supposons que $\Gamma'(n+1) = n!(\mathrm{H}_n - \gamma)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
    En dérivant la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ il vient $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. Donc,

$$\begin{aligned}\Gamma'(n+2) &= \Gamma(n+1) + (n+1)\Gamma'(n+1)\\ &= n! + (n+1)!(\mathrm{H}_n - \gamma)\\ &= (n+1)!\left(\frac{1}{n+1} + \mathrm{H}_n - \gamma\right)\\ &= (n+1)!(\mathrm{H}_{n+1} - \gamma)\end{aligned}$$

    Ainsi par récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma'(n+1) = n!(\mathrm{H}_n - \gamma)$.

47. Posons $\theta = \arcsin(t)$ dans l'intégrale définissant I, ce qui est possible car $\arcsin : [0,1] \to \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante. $d\theta = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

    Puis on pose $u = t^2$ i.e $t = \sqrt{u}$. $dt = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{u})}{\sqrt{1-u}} \cdot \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}} du = \frac{1}{4}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

    On en déduit par la question 8, $\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = -2\pi \ln 2$.

48. D'après la question 32,

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\right) \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

    On en déduit $\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} + \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\right) \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

    Enfin, on rappelle les valeurs :
    - $\Gamma(1) = 1$;
    - $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \pi$ (question 43) ;

— $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (question 41 ou 43) ;
— $\Gamma'(1) = -\gamma$ (question 45) ;
— $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -2\pi \ln 2$ (question 47).

Ainsi $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -(\gamma + 2\ln 2)\sqrt{\pi}$.

49. La question précédente prouve l'initialisation.
Supposons que $\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1} - \gamma - 2\ln(2)\right)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
On sait que $\forall x > 0,\ \Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$.
Donc en remarquant que $\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(2n!)}{2^{2n}n!}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma'\left(n+1+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1} - \gamma - 2\ln(2)\right)\\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1} - \gamma - 2\ln(2)\right)\\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\sqrt{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2}{2k-1} - \gamma - 2\ln(2)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi par récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1} - \gamma - 2\ln(2)\right)$

50. On sait que,
$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\Gamma'(n+1)}{n!} = (\ln\circ\Gamma)'(n+1) = -\gamma - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1} = -\gamma - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.
Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma'(n+1) = n!(\mathrm{H}_n - \gamma)$.

De même, on sait que $\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ avec :

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\gamma - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+\frac{1}{2}} = -\gamma - \frac{2}{2n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+2n+1}$$

Remarquons que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} = \mathrm{H}_{2p+1} - \frac{1}{2}\mathrm{H}_p$. Fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k} - \frac{2}{2k+2n+1} &= \mathrm{H}_{\mathrm{N}} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{2}{2k+2n+1} \\
&= \mathrm{H}_{\mathrm{N}} - \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}+n} \frac{2}{2k+1} \\
&= \mathrm{H}_{\mathrm{N}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} - 2\sum_{k=0}^{\mathrm{N}+n} \frac{1}{2k+1} \\
&= \mathrm{H}_{\mathrm{N}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} - 2\mathrm{H}_{2(\mathrm{N}+n)+1} + \mathrm{H}_{\mathrm{N}+n} \\
(\mathrm{H}_{\mathrm{N}} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \ln(\mathrm{N}) + \gamma + o(1)) \quad &\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} \ln(\mathrm{N}) + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} - 2\ln(2(\mathrm{N}+n)+1) + \ln(\mathrm{N}+n) + o(1) \\
&\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} -2\ln(2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} + \ln(\mathrm{N}) - \ln(\mathrm{N}+n) + o(1) \\
&\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{=} -2\ln(2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} + o(1)
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{2}{2k+2n+1} = -2\ln(2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}$ et par suite, $\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln(2) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{2k+1}$.

On conclut que $\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1} - \gamma - 2\ln(2)\right)$.

Remarque : le lecteur intéressé pourra chercher à déterminer quelques valeurs de Γ'', notamment en utilisant l'expression $\psi'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ et le résultat bien connu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5.2 Calcul d'une intégrale

51. On a montré question 12 que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt$.
On a de plus déterminé question 45 la valeur $\Gamma'(1) = -\gamma$.
Donc
$$\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt = \Gamma'(1) = -\gamma$$
Enfin on avait obtenu question 5 $0 \leq \gamma \leq 1$; l'intégrale est donc négative.

5.3 Intégrale de Raabe

52. On sait que $\forall x > 0,\ \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(\Gamma(x)) + \ln(x)$.
 De plus, $\ln(\Gamma(x+1)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln(\Gamma(x)) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
 Ainsi $\ln\circ\Gamma$ est intégrable en 0^+. Ensuite d'après la formule de duplication,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(\Gamma(x))dx &= \int_0^1 \left[\ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + (x-1)\ln(2) - \frac{\ln(\pi)}{2}\right] dx \\
&= \int_0^{1/2} \ln(\Gamma(x))(2dx) + \int_{1/2}^1 \ln(\Gamma(x))(2dx) - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(\pi)}{2} \\
&= 2\int_0^1 \ln(\Gamma(x))dx - \frac{\ln(2\pi)}{2}
\end{aligned}$$

 Par suite, $\displaystyle\int_0^1 \ln(\Gamma(x))dx = \frac{\ln(2\pi)}{2}$.

53. Notons $f : a \mapsto \displaystyle\int_a^{a+1} \ln(\Gamma(x))dx$. On a montré à la question précédente que $\ln\circ\Gamma$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
 Donc d'après le théorème fondamental de l'analyse f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et,

$$\forall a \geq 0,\ f'(a) = \ln(\Gamma(a+1)) - \ln(\Gamma(a)) = \ln(a)$$

 Donc $\forall a \geq 0,\ f(a) = f(0) + \displaystyle\int_0^a \ln(t)dt = f(0) + [t\ln(t)]_0^a - \int_0^a 1\ dt = f(0) + a\ln(a) + a$.
 D'après la question précédente $f(0) = \dfrac{\ln(2\pi)}{2}$ d'où :

$$\forall a \geq 0,\ \int_a^{a+1} \ln(\Gamma(x))dx = a\ln(a) - a + \frac{\ln(2\pi)}{2}$$