Intégrales d'Euler

Juillet 2025

Ce problème est une introduction aux fonctions spéciales par les intégrales d'Euler à travers le programme de CPGE. Il a pour but de les définir en tant que fonctions réelles puis de les étudier en déterminant quelques unes de leurs propriétés et valeurs ainsi que leur comportement asymptotique. Il présente aussi des applications au calcul de deux intégrales.
Le problème est posé à la manière d'un sujet de concours plutôt de type Centrale. Nonobstant, il est important de prendre en compte que les résultats que nous étudions jouissent d'une multitude de démonstrations. Ainsi l'ordre définit par le sujet n'est pas la seule manière de procéder.

Cadre et Notations :
Dans tout le problème, on travaille avec des fonctions d'une ou plusieurs variable(s) réelle(s) et à valeurs réelles.

- Pour tout ensemble X et toute fonction f définie sur X, on désigne par $\mathrm{dom}(f)$ son domaine de définition, c'est à dire la plus grande sous-partie de X sur laquelle f est une bien définie.
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ celui des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_+^*$ celui des nombres réels strictement positifs.
- Pour Y un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$ l'espace vectoriel des fonctions de Y dans $\mathbb{R}$ continues et $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$ formé des fonctions de carré intégrable sur Y,
$$\mathrm{L}^2(\mathrm{Y}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathrm{Y}),\ \int_{\mathrm{Y}} f^2 < +\infty \right\}$$
- On dit qu'une fonction réelle f à valeurs strictement positives est *logarithmiquement convexe* ou *log-convexe* lorsque $\ln \circ f$ est convexe.
- Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tels que $\left(\prod_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ admet une limite, on note $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n$.
- On admet le résultat sur l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

1 Préliminaires

1.1 Produit infini

Soit $(a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\left(\prod_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Justifier que $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n)\right)$.

1.2 Espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$

Soit Y un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
3. En déduire que $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$ puis que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathrm{L}^2(\mathrm{Y})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathrm{Y}} fg \end{cases}$$

   définit un produit scalaire sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})$.

1.3 Constante gamma d'Euler-Mascheroni

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 1$.
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une valeur γ dont on donnera un encadrement.

1.4 Une intégrale d'Euler

On définit les intégrales :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)d\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos\theta)d\theta$$

6. Montrer que I et J sont bien définies puis que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
7. Calculer $\mathrm{K} = \mathrm{I} + \mathrm{J}$.
8. En déduire la valeur de I.

2 Fonction Gamma d'Euler

2.1 Définition et premières propriétés

On pose, lorsque cela est définit :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

9. Déterminer le domaine de définition de Γ.
10. Démontrer que $\forall x \in \mathrm{dom}(\Gamma),\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
11. En déduire une expression de $\Gamma(n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
12. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine et exprimer ses dérivées sous forme d'intégrales.
13. Montrer que Γ est convexe sur son domaine.
14. Déterminer un équivalent de Γ en 0^+.
15. Montrer que Γ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il est atteint en un seul point.
16. Déterminer la limite de Γ en $+\infty$.

2.2 Formule de Stirling généralisée

Soit $x > 0$.

17. Démontrer que $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} (s\sqrt{x}+x)^x e^{-s\sqrt{x}-x}\sqrt{x}ds$.
18. En déduire que $\Gamma(x+1) = \left(\dfrac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-s\sqrt{x}}ds$.
19. Montrer que $\forall u \in]-1, 0]$,
$$\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2} \leq 0$$
20. En déduire que $\forall s \in]-\sqrt{x}, 0]$,
$$x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x} \leq \frac{s^2}{2}$$
21. Conclure que
$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

2.3 Théorème de Bohr-Mollerup

On considère maintenant une application $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui vérifie :

— $f(1) = 1$;

— $\forall x > 0,\ f(x+1) = xf(x)$;

— f est log-convexe.

Le but de cette partie est de montrer que $f = \Gamma$ (théorème de Bohr-Mollerup).
Pour cela on pose $\mathrm{W} = \ln\circ f - \ln\circ\Gamma$ et on se donne $x \in]0, 1]$ ainsi que $n \in \mathbb{N}$.

22. Démontrer que Γ est log-convexe.
23. Montrer que W est 1-périodique.
24. En utilisant les quatre points $n, n+1, n+1+x, n+2$, montrer que :

$$-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\mathrm{W}(n+x+1)-\mathrm{W}(n+1)}{x} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

25. En déduire que $\mathrm{W}(x) = 0$ puis que $f = \Gamma$.

3 Fonction Bêta d'Euler

3.1 Définition et premières propriétés

On pose, lorsque cela est définit :

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

26. Déterminer le domaine de définition de B.
27. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathrm{dom(B)},\ \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.
28. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathrm{dom(B)},\ \mathrm{B}(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\mathrm{B}(x,y)$.
29. En déduire une expression de $\mathrm{B}(n,p)$ pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
30. Montrer que B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer ses dérivées partielles à tout ordre sous forme d'intégrales.

3.2 Lien entre Γ et B

31. Démontrer que $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \mathrm{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
   Indication : On pourra utiliser le théorème de Bohr-Mollerup.
32. En déduire une expression des dérivées partielles de B à partir de B et de la fonction digamma $\psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$.
33. Donner une expression simple de $\mathrm{B}(n+1,y)$ pour $(n,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$.

4 Quelques formules

4.1 Formules de Gauss et de Weierstrass

Soit $x > 0$.

34. Démontrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$.
35. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}dt$.

36. En déduire la formule de Gauss :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

37. Puis en déduire la formule de Weierstrass :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

38. En déduire une expression de $\psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ sous la forme de la somme d'une série de fonction.
39. Retrouver le résultat sur la convexité logarithmique de Γ à partir de la formule de Weierstrass.

4.2 Formule de duplication de Legendre

40. Déduire de la formule de Gauss la formule de duplication :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$$

<u>Indication :</u> *On pourra commencer par justifier que* $\Gamma(2x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)^{2x}(2n+1)!}{2x(2x+1)\cdots(2x+2n+1)}$.

41. En déduire un calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
42. Retrouver la formule de duplication à l'aide du théorème de Bohr-Mollerup.

5 Applications

5.1 Valeurs particulières

43. Montrer que $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$ et en déduire un calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
44. Exprimer $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
45. Calculer $\Gamma'(1)$ à l'aide de la formule de Weierstrass.
46. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma'(n+1) = n!(\mathrm{H}_n - \gamma)$.
(On prendra la convention $\mathrm{H}_0 = 0$).
47. Exprimer I à l'aide d'une dérivée partielle de B.
48. Calculer $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$.
49. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \gamma - 2\ln(2)\right)$.
50. Soit $n \in \mathbb{N}$. Retrouver les formules pour $\Gamma'(n+1)$ et $\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right)$ en utilisant l'expression de la fonction ψ obtenue question 38.

5.2 Calcul d'une intégrale

51. Justifier la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$. Quel est son signe ?

5.3 Intégrale de Raabe

52. Justifier que $\ln \circ \Gamma$ est intégrable au voisinage de 0^+ puis, en utilisant la formule de duplication déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \ln(\Gamma(x))dx$.
53. En déduire que $\forall a \geq 0$,

$$\int_a^{a+1} \ln(\Gamma(x))dx = a\ln(a) - a + \frac{\ln(2\pi)}{2}$$