第一次模拟训练A题

1 符号变量

符号变量	含义
$\mathbf{x}^{(\mathbf{k})}$	第 t_k时刻种群数量分布向量
$\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$	初始种群数量分布向量
$x_i^{(k)}$	第 t_k时刻第 i个年龄组的数量
$\mathbf{L}'$	子代雌雄个体总莱斯利矩阵
$\mathbf{L}$	雌性个体莱斯利矩阵
$\mathbf{y}_1$	选择矩阵，用于提取第一个元素
$\mathbf{y}_{12}$	选择矩阵，用于提取最后一个元素
$\mathbf{y}_{3,12}$	选择矩阵，用于提取第三个至最后一个元素
r	小母牛出售的比例
$w_{\text{小公牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小公牛所得金额
$w_{\text{小母牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小母牛所得金额
$w_{\text{老母牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻出售老母牛所得金额
$w_{\text{大母牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻大母牛所得金额
M	总贷款金额
m	每年还款额度
α	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
q_β	粮食的产量
q_γ	甜菜的产量
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间
$t_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛所需时间
$t_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛所需时间
t	总时间
c_β	种植粮食的成本
c_γ	种植甜菜的成本
$c_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛的成本
$c_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛的成本
c	总成本

2 独立参数

符号变量	含义
r	小母牛出售的比例
M	总贷款金额
α	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间

3 模型建立与求解

记t_k时刻种群中雌性(下文同)各年龄段数量分布向量

$$\mathbf{x^{(k)}} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

则初始时刻种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

当不出售第一个年龄段小母牛，t_k时刻种群中第一个年龄组的数量等于t_{k-1}时刻各年龄组产下所有雌性幼体的总和

$$x_1^{(\,k\,)} = a_1 x_1^{(\,k-1\,)} + a_2 x_2^{(\,k-1\,)} + \cdots + a_n x_n^{(\,k-1\,)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

当t_k时刻出售r比例的小母牛，即出售小母牛的数量为$x_1^{(k)} \times r$，$(k \neq 0)$，由此更新第一个年龄段种群雌性数量的迭代公式如下

$$\begin{gathered} x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)} - x_1^{(k)} \times r \\ \text{即}, x_1^{(k)}(1+r) = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)} \\ \text{也即}, x_1^{(k)} = \frac{a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}}{(1+r)} \end{gathered}$$

t_k时刻第$i+1$个年龄组中雌性奶牛的数量等于t_{k-1}时刻第i个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量，

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1\,, 2\,, \cdots, n-1$$

遍历上述$n-1$个存活条件，并在最初添加种群数量的繁殖条件公式，有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}}{(1+r)}, \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}. \end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为L，即

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{1+r} & \frac{a_2}{1+r} & \cdots & \frac{a_{n-1}}{1+r} & \frac{a_n}{1+r} \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

即，

$$\mathbf{L}=\frac{1}{1+r}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

则t_k时刻种群数量分布向量递推公式为

$$\mathbf{x^{(k)}}=\mathbf{L}x^{(k-1)},\quad k=1,2,\cdots$$

由上式得，

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{L}\mathbf{x}^{(0)}, \\ \mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{L}\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{L}^2\mathbf{x}^{(0)}, \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k-1)}=\mathbf{L}^k\mathbf{x}^{(0)},\quad k=1,2,\cdots \end{gathered}$$

本题初始种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}}=[10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10]^{\mathrm{T}}$$

种群数量分布莱斯利雌雄总矩阵为

$$\mathbf{L}''=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

子代为雌性的几率为0.5,则种群数量分布莱斯利雌矩阵为

$$\mathbf{L}'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑第一个年龄段的雌性出售比率为r，种群数量分布莱斯利雌矩阵应更新为

$$
\mathbf{L} = \frac{1}{1+r}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}
$$

3.1 小公牛

t_k时刻出售小公牛所得金额 = t_k时刻出售小公牛数量 × 一只小公牛的价格

$$
w^{(k)}_{\text{小公牛}} = \mathbf{x}^{(k-1)} L \mathbf{y}_1 \times 30
$$

其中

$$
y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第一个元素，即为待出售的小公牛的数量

$$
\sum_{k=1}^{5} w^{(k)}_{\text{小公牛}} = 30 \sum_{k=1}^{5} (\mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L} \mathbf{y}_1 \times r)
$$

3.2 小母牛

$$
w^{(k)}_{\text{小母牛}} = \mathbf{x}^{(k-1)} L \mathbf{y}_1 \times 40
$$

其中

$$
y_1 \times r = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第一个元素，即小母牛的数量,r为出售小母牛的比例
则 $x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r$ 即为待出售小母牛的数量

$$
\sum_{k=1}^{5} w^{(k)}_{\text{小母牛}} = 40 \sum_{k=1}^{5} (\mathbf{x}^{(k-1)} L \mathbf{y}_1 \times r)
$$

3.3 老母牛

$$
w^{(k)}_{\text{老母牛}} = \mathbf{x}^{(k-1)} L \mathbf{y}_{12} \times 120
$$

其中

$$
y_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出最后一个元素，即待出售老母牛的数量

$$
\sum_{k=1}^{5} w^{(k)}_{\text{老母牛}} = 120 \sum_{k=1}^{5} (\mathbf{x}^{(k-1)} L \mathbf{y}_{12})
$$

3.4 大母牛

$$w_{大母牛}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} L \mathbf{y}_{3,12} \times 370$$

其中

$$y_{3,12} \times r = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第三至第十二个元素，即为能正常产奶的奶牛数量

$$c_{大母牛} = 370 \sum_{k=0}^{5} \mathbf{x}^{(k-1)} L \mathbf{y}_{3,12}$$

3.5 贷款

设总贷款金额为M,贷款金额全部用于投资,此时，有

$$\sum_{i=1}^{12} x^{(\ k\ )} \leq \frac{M}{200} + 130, k = 0, \ldots, 5$$

至于还款,要求等额还款,市面上流行的还款方式为等额本金还款及等额本息还款，但仅有后者可保证每年还款数额固定不变，故确定还款方式为等额本息还款
有，

$$每年应还额度 = \frac{贷款本金 \times 年利率 \times (1 + 年利率)^{还款年数}}{(1 + 年利率)^{还款年数} - 1}$$

则，每年还款额度 m 计算公式如下

$$m = \frac{M \times 0.15 \times (1 + 0.15)^{10}}{(1 + 0.15)^{10} - 1}$$

3.6 饲料

设牧草，甜菜，粮食种植所需土地分别为 α英亩, β英亩, γ英亩
由题意知，每头小母牛需要$\frac{2}{3}$英亩的土地养活它，每头大母牛需要1英亩的土地养活它，然每头奶牛除了吃牧草以外，每年还需要0.6吨粮食和0.7吨甜菜. 即现有的200英亩土地分配β英亩, γ英亩分别种植甜菜和粮食外，剩余α英亩土地均布满牧草

3.6.1 对牧草(α)

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2} x_i \times \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{12} x_i \times 1$$

3.6.2 对粮食(β)

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$$
$$q_\beta = 1.1 \times \beta_1 + 0.9 \times \beta_2 + 0.8 \times \beta_3 + 0.6 \times \beta_4$$
$$if \quad q_\beta \geq 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (q_\beta - 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i) \times 75$$
$$if \quad q_\beta \leq 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i - \mathrm{q}_{\text{粮食}}) \times 90$$
$$\beta_1 \leq 20$$
$$\beta_2 \leq 30$$
$$\beta_3 \leq 30$$
$$\beta_4 \leq 10$$

3.6.3 对甜菜(γ)

$$q_\gamma = 1.5 \times \gamma$$
$$if \quad q_\gamma \geq 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (q_\gamma - 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i) \times 58$$
$$if \quad q_\gamma \leq 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i - q_\gamma) \times 70$$

3.6.4 对整体

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 200$$

3.7 时间

$$t_{\text{小母牛}} = \sum_{i=1}^{2} x_i^k \times 10$$
$$t_{\text{大母牛}} = \sum_{i=3}^{12} x_i^k \times 42$$
$$t_\beta = \alpha \times 4$$
$$t_\gamma = \beta \times 14$$
$$t = t_{\text{小母牛}} + t_{\text{大母牛}} + t_\beta + t_\gamma$$
$$if \quad t \leq 5500$$
$$then \quad c = 4000$$
$$if \quad t \geq 5500$$
$$then \quad c = 4000 + (t - 5500) \times 1.2$$

3.8 资金

$$c_{\text{小母牛}} = 500 \times \sum_{i=1}^{2} x_i^{(k)}$$

$$c_{\text{大母牛}} = 100 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)}$$

$$c_\beta = \beta \times 15$$

$$c_\gamma = \gamma \times 10$$