第一次模拟

1　符号变量

变量符号	含义
$\mathbf{x^{(k)}}$	第 t_k时刻种群数量分布向量
$\mathbf{x^{(0)}}$	初始种群数量分布向量
$\mathbf{L}'$	子代雌雄个体总莱斯利矩阵
$\mathbf{L}$	雌性个体莱斯利矩阵
$x_i^{(k)}$	第 t_k时刻第 i个年龄组的数量
$w_{小公牛}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小公牛所得金额
$\mathbf{y}_1$	选择矩阵，用于提取第一个元素
$\mathbf{y}_{12}$	选择矩阵，用于提取最后一个元素
$\mathbf{y}_{3,12}$	选择矩阵，用于提取第三个至最后一个元素
r	小母牛出售的比例
$w_{小母牛}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小母牛所得金额
$w_{老母牛}^{(k)}$	第 t_k时刻出售老母牛所得金额
$w_{大母牛}^{(k)}$	第 t_k时刻大母牛所得金额
M	总贷款金额
m	每年还款额度
α	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
q_β	粮食的产量
q_γ	甜菜的产量
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间
$t_{小母牛}$	饲养小母牛所需时间
$t_{大母牛}$	饲养大母牛所需时间
t	总时间
$c_{小母牛}$	饲养小母牛的成本
$c_{大母牛}$	饲养大母牛的成本
c_β	种植粮食的成本
c_γ	种植甜菜的成本
c	总成本

2　模型建立与求解

记t_k时刻种群数量分布向量

$$\mathbf{x^{(k)}} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

则初始时刻种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

t_k时刻种群中第一个年龄组的数量等于t_{k-1}时刻各年龄组产下所有雌性幼体的总和

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

t_k时刻第$i+1$个年龄组中雌性奶牛的数量等于t_{k-1}时刻第i个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

遍历上述$n-1$个存活条件，并在最初添加繁殖条件，有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}. \end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为L，即

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

则t_k时刻种群数量分布向量递推公式为

$$\mathbf{x^{(k)}} = \mathbf{L} x^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

由上式得，

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(0)}, \\ \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{L}^2\mathbf{x}^{(0)}, \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k-1)} = \mathbf{L}^k\mathbf{x}^{(0)}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{gathered}$$

本题初始种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}} = [10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10]^{\mathrm{T}}$$

子代雌雄个体总莱斯利矩阵为

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

子代为雌性的几率为0.5,则雌性个体莱斯利矩阵为

$$
\mathbf{L}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55\\
0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0
\end{bmatrix}
$$

2.1 小公牛

t_k时刻出售小公牛所得金额 = t_k时刻出售小公牛数量 $\times$ 一只小公牛的价格

$$w^{(k)}_{\text{小公牛}}=\mathbf{x}^{(k-1)}L\mathbf{y}_1\times 30$$

其中

$$y_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)}\times L$）中取出第一个元素，即为待出售的小公牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5}w^{(k)}_{\text{小公牛}}=30\sum_{k=1}^{5}(\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{L}\mathbf{y}_1\times r)$$

2.2 小母牛

$$w^{(k)}_{\text{小母牛}}=\mathbf{x}^{(k-1)}L\mathbf{y}_1\times 40$$

其中

$$y_1\times r=\begin{bmatrix}r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)}\times L$）中取出第一个元素，即小母牛的数量,r为出售小母牛的比例
则 $x^{(k-1)}\times L\times y_1\times r$ 即为待出售小母牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5}w^{(k)}_{\text{小母牛}}=40\sum_{k=1}^{5}(\mathbf{x}^{(k-1)}L\mathbf{y}_1\times r)$$

2.3 老母牛

$$w^{(k)}_{\text{老母牛}}=\mathbf{x}^{(k-1)}L\mathbf{y}_{12}\times 120$$

其中

$$y_{12}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)}\times L$）中取出最后一个元素，即待出售老母牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5}w^{(k)}_{\text{老母牛}}=120\sum_{k=1}^{5}(\mathbf{x}^{(k-1)}L\mathbf{y}_{12})$$

2.4 大母牛

$$w_{大母牛}^{(k)}=\mathbf{x}^{(k-1)}L\mathbf{y}_{3,12}\times 370$$

其中

$$y_{3,12}\times r=[0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)}\times L$）中取出第三至第十二个元素，即为能正常产奶的奶牛数量

$$c_{大母牛}=370\sum_{k=0}^{5}\mathbf{x}^{(k-1)}L\mathbf{y}_{3,12}$$

2.5 贷款

设总贷款金额为M,贷款金额全部用于投资,此时，有

$$\sum_{i=1}^{12}x^{(\ k\ )}\leq\frac{M}{200}+130,k=0,\ldots,5$$

至于还款,要求等额还款,市面上流行的还款方式为等额本金还款及等额本息还款，但仅有后者可保证每年还款数额固定不变，故确定还款方式为等额本息还款
有，

$$每年应还额度=\frac{贷款本金\times 年利率\times(1+年利率)^{还款年数}}{(1+年利率)^{还款年数}-1}$$

则，每年还款额度 m 计算公式如下

$$m=\frac{M\times 0.15\times(1+0.15)^{10}}{(1+0.15)^{10}-1}$$

2.6 饲料

设牧草，甜菜，粮食种植所需土地分别为 α英亩, β英亩, γ英亩
由题意知，每头小母牛需要$\frac{2}{3}$英亩的土地养活它，每头大母牛需要1英亩的土地养活它，然每头奶牛除了吃牧草以外，每年还需要0.6吨粮食和0.7吨甜菜. 即现有的200英亩土地分配β英亩, γ英亩分别种植甜菜和粮食外，剩余α英亩土地均布满牧草

2.6.1 对牧草(α)

$$\alpha=\sum_{i=1}^{2}x_i\times\frac{2}{3}+\sum_{i=2}^{12}x_i\times 1$$

2.6.2 对粮食(β)

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$$
$$q_\beta = 1.1 \times \beta_1 + 0.9 \times \beta_2 + 0.8 \times \beta_3 + 0.6 \times \beta_4$$
$$if \quad q_\beta \geq 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (q_\beta - 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i) \times 75$$
$$if \quad q_\beta \leq 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i - \mathrm{q}_{\text{粮食}}) \times 90$$
$$\beta_1 \leq 20$$
$$\beta_2 \leq 30$$
$$\beta_3 \leq 30$$
$$\beta_4 \leq 10$$

2.6.3 对甜菜(γ)

$$q_\gamma = 1.5 \times \gamma$$
$$if \quad q_\gamma \geq 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (q_\gamma - 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i) \times 58$$
$$if \quad q_\gamma \leq 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$then \quad (0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i - q_\gamma) \times 70$$

2.6.4 对整体

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 200$$

2.7 时间

$$t_{\text{小母牛}} = \sum_{i=1}^{2} x_i^k \times 10$$
$$t_{\text{大母牛}} = \sum_{i=3}^{12} x_i^k \times 42$$
$$t_\beta = \alpha \times 4$$
$$t_\gamma = \beta \times 14$$
$$t = t_{\text{小母牛}} + t_{\text{大母牛}} + t_\beta + t_\gamma$$
$$if \quad t \leq 5500$$
$$then \quad c = 4000$$
$$if \quad t \geq 5500$$
$$then \quad c = 4000 + (t - 5500) \times 1.2$$

2.8 资金

$$
\begin{gathered}
c_{\text{小母牛}} = 500 \times \sum_{i=1}^{2} x_i^{(k)} \\
c_{\text{大母牛}} = 100 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \\
c_\beta = \beta \times 15 \\
c_\gamma = \gamma \times 10
\end{gathered}
$$