第一次模拟训练A题

1 符号变量

符号变量	含义
a_i	第 i 个年龄段的生育率
b_i	第 i 个年龄段的存活率
$\mathbf{x^{(k)}}$	第 t_k时刻种群数量分布向量
$\mathbf{x^{(0)}}$	初始种群数量分布向量
$x_i^{(k)}$	第 t_k时刻第 i个年龄组的数量
$\mathbf{L}''$	莱斯利雌雄总矩阵
$\mathbf{L}'$	莱斯利雌性或雄性矩阵
$\mathbf{L_r}$	考虑出售r比例小母牛后，莱斯利雌性矩阵
$\mathbf{y}_1$	选择矩阵，用于提取第一个元素
$\mathbf{y}_{12}$	选择矩阵，用于提取最后一个元素
$\mathbf{y}_{3,12}$	选择矩阵，用于提取第三个至最后一个元素
r	小母牛出售的比例
$w_{\text{小公牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小公牛所得金额
$w_{\text{小母牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻出售小母牛所得金额
$w_{\text{老母牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻出售老母牛所得金额
$w_{\text{大母牛}}^{(k)}$	第 t_k时刻大母牛所得金额
M	总贷款金额
m	每年还款额度
α	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
q_β	粮食的产量
q_γ	甜菜的产量
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间
$t_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛所需时间
$t_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛所需时间
t	总时间
c_β	种植粮食的成本
c_γ	种植甜菜的成本
$c_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛的成本
$c_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛的成本
c	总成本

2 独立参数

符号变量	含义
r	小母牛出售的比例
M	总贷款金额
α	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间

3 模型建立与求解

记t_k时刻种群中雌性(下文同)各年龄段数量分布向量

$$\mathbf{x^{(k)}} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

则初始时刻种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

当不出售第一个年龄组的小母牛，t_k时刻种群中第一个年龄组的种群数量等于t_{k-1}时刻各年龄组产下所有雌性幼体的总和

$$x_1^{(\,k\,)} = a_1 x_1^{(\,k-1\,)} + a_2 x_2^{(\,k-1\,)} + \cdots + a_n x_n^{(\,k-1\,)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

t_k时刻第$i+1$个年龄组中雌性奶牛的数量等于t_{k-1}时刻第i个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量，

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1\,, 2\,, \cdots, n-1$$

遍历上述$n-1$个存活条件，并在最初添加种群数量的繁殖条件公式，有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}\,, \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)}\,, \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)}\,, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}\,. \end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为 L'，即

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

当t_k时刻出售 r 比例的刚出生的小母牛，即出售小母牛的数量为 $(a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times r$，$(k \neq 0)$，由此更新第一个年龄段种群雌性数量的迭代公式如下

$$x_1^{(k)} = (a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times (1 - r)$$

此时，有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times (1-r)\,, \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)}\,, \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)}\,, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}\,. \end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为 $\mathbf{L_r}$ ，即

$$\mathbf{L_r} = \begin{bmatrix} a_1 \times (1-r) & a_2 \times (1-r) & \cdots & a_{n-1} \times (1-r) & a_n \times (1-r) \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

则t_k时刻种群数量分布向量递推公式为

$$\mathbf{x^{(k)}} = \mathbf{L_r} x^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

由上式得，

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{L_r}\mathbf{x}^{(0)}, \\ \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{L_r}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{L_r}^2\mathbf{x}^{(0)}, \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{L_r}\mathbf{x}^{(k-1)} = \mathbf{L_r}^k\mathbf{x}^{(0)}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{gathered}$$

本题初始种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}} = [10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10]^{\mathrm{T}}$$

种群数量分布的莱斯利雌雄总矩阵为

$$\mathbf{L}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

子代为雌雄的几率各一半，且不考虑出售第一个年龄段的雌性小母牛，种群数量分布的莱斯利雌性矩阵或莱斯利雄性矩阵为

$$
\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}
$$

考虑第一个年龄段的雌性出售比率为r，种群数量分布的莱斯利雌矩阵应更新为

$$
\mathbf{L_r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}
$$

其中，$b' = 0.55 \times (1 - r)$

3.1 小公牛

t_k时刻出售小公牛所得金额= t_k时刻出售小公牛数量 × 一只小公牛的价格

$$
w^{(k)}_{\text{小公牛}} = \mathbf{L}'\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{y}_1 \times 30
$$

其中

$$
\mathbf{y}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$\mathbf{L}'\mathbf{x}^{(k-1)}$）中取出第一个元素，即为待出售的小公牛的数量

$$
\sum_{k=1}^{5} w^{(k)}_{\text{小公牛}} = 30 \sum_{k=1}^{5} (\mathbf{L}'\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{y}_1)
$$

3.2 小母牛

$$
w^{(k)}_{\text{小母牛}} = \mathbf{L}'\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{y}_1 r \times 40
$$

其中

$$
\mathbf{y}_1 \times r = [r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]
$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第一个元素，即小母牛的数量,r为出售小母牛的比例则 $x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r$ 即为待出售小母牛的数量

$$
\sum_{k=1}^{5} w^{(k)}_{\text{小母牛}} = 40 \sum_{k=1}^{5} (\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{L}'\mathbf{y}_1)
$$

3.3 老母牛

$$w_{老母牛}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{L_r}\mathbf{y}_{12} \times 120$$

其中

$$\mathbf{y}_{12} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出最后一个元素，即待出售老母牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5} w_{老母牛}^{(k)} = 120\sum_{k=1}^{5}(\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{L_r}\mathbf{y}_{12})$$

3.4 大母牛

$$w_{大母牛}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{L_r}\mathbf{y}_{3,12} \times 370$$

其中

$$\mathbf{y}_{3,12} \times r = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第三至第十二个元素，即为能正常产奶的奶牛数量

$$c_{大母牛} = 370\sum_{k=0}^{5}(\mathbf{x}^{(k-1)}\mathbf{L_r}\mathbf{y}_{3,12})$$

3.5 贷款

设总贷款金额为M,贷款金额全部用于投资,此时，有

$$\sum_{i=1}^{12}\mathbf{x}^{(\ k\ )} \leq \frac{M}{200} + 130, k = 0, \ldots, 5$$

至于还款,要求等额还款,市面上流行的还款方式为等额本金还款及等额本息还款，但仅有后者可保证每年还款数额固定不变，故确定还款方式为等额本息还款
有，

$$每年应还额度 = \frac{贷款本金 \times 年利率 \times (1+年利率)^{还款年数}}{(1+年利率)^{还款年数} - 1}$$

则，每年还款额度 m 计算公式如下

$$m = \frac{M \times 0.15 \times (1+0.15)^{10}}{(1+0.15)^{10} - 1}$$

3.6 土地

设牧草，甜菜，粮食种植所需土地分别为 α英亩,β英亩,γ英亩
由题意知，每头小母牛需要$\frac{2}{3}$英亩的土地养活它，每头大母牛需要1英亩的土地养活它，然每头奶牛除了吃牧草以外，每年还需要0.6吨粮食和0.7吨甜菜. 即现有的200英亩土地分配β英亩,γ英亩分别种植甜菜和粮食外，剩余α英亩土地均布满牧草

3.6.1 分牧草α英亩

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2} x_i \times \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{12} x_i \times 1$$

3.6.2 分粮食β英亩

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$$
$$q_\beta = 1.1 \times \beta_1 + 0.9 \times \beta_2 + 0.8 \times \beta_3 + 0.6 \times \beta_4$$
$$l_\beta = q_\beta - 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$if \quad l_\beta > 0\,,\, then \quad w_\beta = l_\beta \times 75$$
$$if \quad l_\beta < 0\,,\, then \quad w_\beta = l_\beta \times 90$$
$$\beta_1 \leq 20$$
$$\beta_2 \leq 30$$
$$\beta_3 \leq 30$$
$$\beta_4 \leq 10$$

3.6.3 分甜菜γ英亩

$$q_\gamma = 1.5 \times \gamma$$
$$l_\gamma = q_\gamma - 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$
$$if \quad l_\gamma > 0\,,\, then \quad w_\gamma = l_\gamma \times 58$$
$$if \quad l_\gamma < 0\,,\, then \quad w_\gamma = l_\gamma \times 70$$

3.6.4 总土地大小限制

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 200$$

3.7 时间

$$t_{小母牛} = \sum_{i=1}^{2} x_i^k \times 10$$
$$t_{大母牛} = \sum_{i=3}^{12} x_i^k \times 42$$
$$t_\beta = \alpha \times 4$$
$$t_\gamma = \beta \times 14$$
$$t = t_{小母牛} + t_{大母牛} + t_\beta + t_\gamma$$
$$if \quad t \leq 5500\,,\, then \quad c_{工人} = 4000$$
$$if \quad t \geq 5500\,,\, then \quad c_{工人} = 4000 + (t - 5500) \times 1.2$$

3.8 资金

$$c_{小母牛} = 500 \times \sum_{i=1}^{2} x_i^{(k)}$$
$$c_{大母牛} = 100 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)}$$
$$c_\beta = \beta \times 15$$
$$c_\gamma = \gamma \times 10$$

4 优化目标

年成本（支出）：

$$c_{年} = c_\beta + c_\gamma + c_{小母牛} + c_{大母牛} + c_{工人} + m$$

年毛利（收入）：

$$w_{年} = w^{(k)}_{小公牛} + w^{(k)}_{小母牛} + w^{(k)}_{大母牛} + w^{(k)}_{老母牛} + w_\gamma + w_\beta$$

年利润（优化目标）：

$$E_{年} = w_{年} - c_{年}$$

5 限制条件

$$M <= 200 \times (45 + \sum_{i=1}^{2} x_1^5)$$

$$\sum_{i=3}^{12} x_i^5 >= 50$$

$$\sum_{i=3}^{12} x_i^5 <= 170$$