

# 第一次模拟训练A题

## 1 符号变量

符号变量	含义
$a_i$	第 $i$ 个年龄段的生育率
$b_i$	第 $i$ 个年龄段的存活率
$\mathbf{x}^{(k)}$	第 $t_k$ 时刻种群数量分布向量
$\mathbf{x}^{(0)}$	初始种群数量分布向量
$x_i^{(k)}$	第 $t_k$ 时刻第 $i$ 个年龄组的数量
$\mathbf{L}'$	子代雌雄个体总莱斯利矩阵
$\mathbf{L}$	雌性个体莱斯利矩阵
$\mathbf{y}_1$	选择矩阵，用于提取第一个元素
$\mathbf{y}_{12}$	选择矩阵，用于提取最后一个元素
$\mathbf{y}_{3,12}$	选择矩阵，用于提取第三个至最后一个元素
$r$	小母牛出售的比例
$w_{\text{小公牛}}^{(k)}$	第 $t_k$ 时刻出售小公牛所得金额
$w_{\text{小母牛}}^{(k)}$	第 $t_k$ 时刻出售小母牛所得金额
$w_{\text{老母牛}}^{(k)}$	第 $t_k$ 时刻出售老母牛所得金额
$w_{\text{大母牛}}^{(k)}$	第 $t_k$ 时刻大母牛所得金额
$M$	总贷款金额
$m$	每年还款额度
$\alpha$	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
$\beta$	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
$\gamma$	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
$q_\beta$	粮食的产量
$q_\gamma$	甜菜的产量
$t_\beta$	种植粮食所需时间
$t_\gamma$	种植甜菜所需时间
$t_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛所需时间
$t_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛所需时间
$t$	总时间
$c_\beta$	种植粮食的成本
$c_\gamma$	种植甜菜的成本
$c_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛的成本
$c_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛的成本
$c$	总成本

## 2 独立参数

符号变量	含义
$r$	小母牛出售的比例
$M$	总贷款金额
$\alpha$	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
$\beta$	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
$\gamma$	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
$t_\beta$	种植粮食所需时间
$t_\gamma$	种植甜菜所需时间

## 3 模型建立与求解

记 $t_k$ 时刻种群中雌性(下文同)各年龄段数量分布向量

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{bmatrix}^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则初始时刻种群数量分布向量为

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^T$$

当不出售第一个年龄段小母牛， $t_k$ 时刻种群中第一个年龄组的数量等于 $t_{k-1}$ 时刻各年龄组产下所有雌性幼体的总和

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

当 $t_k$ 时刻出售 $r$ 比例的刚出生的小母牛，即出售小母牛的数量为 $(a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times r$ ， $(k \neq 0)$ ，由此更新第一个年龄段种群雌性数量的迭代公式如下

$$x_1^{(k)} = (a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times (1 - r)$$

$t_k$ 时刻第 $i + 1$ 个年龄组中雌性奶牛的数量等于 $t_{k-1}$ 时刻第 $i$ 个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量，

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

遍历上述 $n - 1$ 个存活条件，并在最初添加种群数量的繁殖条件公式，有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times (1 - r), \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}. \end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为 $\mathbf{L}$ ，即

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_1 \times (1 - r) & a_2 \times (1 - r) & \cdots & a_{n-1} \times (1 - r) & a_n \times (1 - r) \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

即，

$$\mathbf{L} = (1-r) \times \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

则 $t_k$ 时刻种群数量分布向量递推公式为

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

由上式得,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{L}\mathbf{x}^{(0)}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{L}\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{L}^2\mathbf{x}^{(0)}, \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k-1)} = \mathbf{L}^k\mathbf{x}^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

本题初始种群数量分布向量为

$$\mathbf{x}^{(0)} = [10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10]^T$$

种群数量分布莱斯利雌雄总矩阵为

$$\mathbf{L}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

子代为雌/雄的几率各一半,则种群数量分布莱斯利雌/雄矩阵为

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑第一个年龄段的雌性出售比率为 $r$ , 种群数量分布莱斯利雌矩阵应更新为

$$\mathbf{L} = (1 - r) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.1 小公牛

$t_k$ 时刻出售小公牛所得金额 =  $t_k$ 时刻出售小公牛数量  $\times$  一只小公牛的价格

$$w_{\text{小公牛}}^{(k)} = \mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}_1 \times 30$$

其中

$$\mathbf{y}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量 ( $\mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)}$ ) 中取出第一个元素, 即为待出售的小公牛的数量

$$\sum_{k=1}^5 w_{\text{小公牛}}^{(k)} = 30 \sum_{k=1}^5 (\mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}_1)$$

### 3.2 小母牛

$$w_{\text{小母牛}}^{(k)} = \mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}_1 r \times 40$$

其中

$$\mathbf{y}_1 \times r = [r \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量 ( $\mathbf{x}^{(k-1)} \times L$ ) 中取出第一个元素, 即小母牛的数量,  $r$  为出售小母牛的比例  
则  $\mathbf{x}^{(k-1)} \times L \times \mathbf{y}_1 \times r$  即为待出售小母牛的数量

$$\sum_{k=1}^5 w_{\text{小母牛}}^{(k)} = 40 \sum_{k=1}^5 (\mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L}' \mathbf{y}_1 r)$$

### 3.3 老母牛

$$w_{\text{老母牛}}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L} \mathbf{y}_{12} \times 120$$

其中

$$\mathbf{y}_{12} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量 ( $\mathbf{x}^{(k-1)} \times L$ ) 中取出最后一个元素, 即待出售老母牛的数量

$$\sum_{k=1}^5 w_{\text{老母牛}}^{(k)} = 120 \sum_{k=1}^5 (\mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L} \mathbf{y}_{12})$$

### 3.4 大母牛

$$w_{\text{大母牛}}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L} \mathbf{y}_{3,12} \times 370$$

其中

$$\mathbf{y}_{3,12} \times r = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量  $(\mathbf{x}^{(k-1)} \times L)$  中取出第三至第十二个元素,即为能正常产奶的奶牛数量

$$c_{\text{大母牛}} = 370 \sum_{k=0}^5 \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L} \mathbf{y}_{3,12}$$

### 3.5 贷款

设总贷款金额为 $M$ ,贷款金额全部用于投资,此时,有

$$\sum_{i=1}^{12} \mathbf{x}^{(k)} \leq \frac{M}{200} + 130, k = 0, \dots, 5$$

至于还款,要求等额还款,市面上流行的还款方式为等额本金还款及等额本息还款,但仅有后者可保证每年还款数额固定不变,故确定还款方式为等额本息还款有,

$$\text{每年应还额度} = \frac{\text{贷款本金} \times \text{年利率} \times (1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}}}{(1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}} - 1}$$

则,每年还款额度 $m$ 计算公式如下

$$m = \frac{M \times 0.15 \times (1 + 0.15)^{10}}{(1 + 0.15)^{10} - 1}$$

### 3.6 饲料

设牧草,甜菜,粮食种植所需土地分别为 $\alpha$ 英亩, $\beta$ 英亩, $\gamma$ 英亩

由题意知,每头小母牛需要 $\frac{2}{3}$ 英亩的土地养活它,每头大母牛需要1英亩的土地养活它,然每头奶牛除了吃牧草以外,每年还需要0.6吨粮食和0.7吨甜菜.即现有的200英亩土地分配 $\beta$ 英亩, $\gamma$ 英亩分别种植甜菜和粮食外,剩余 $\alpha$ 英亩土地均布满牧草

#### 3.6.1 对牧草( $\alpha$ )

$$\alpha = \sum_{i=1}^2 x_i \times \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{12} x_i \times 1$$

#### 3.6.2 对粮食( $\beta$ )

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \\ q_\beta &= 1.1 \times \beta_1 + 0.9 \times \beta_2 + 0.8 \times \beta_3 + 0.6 \times \beta_4 \end{aligned}$$

$$l_\beta = q_\beta - 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i$$

$$\text{if } l_\beta > 0, \text{ then } w_\beta = l_\beta \times 75$$

$$\text{if } l_\beta < 0, \text{ then } w_\beta = l_\beta \times 90$$

$$\beta_1 \leq 20$$

$$\beta_2 \leq 30$$

$$\beta_3 \leq 30$$

$$\beta_4 \leq 10$$

### 3.6.3 对甜菜( $\gamma$ )

$$\begin{aligned}q_{\gamma} &= 1.5 \times \gamma \\l_{\gamma} &= q_{\gamma} - 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i \\if \quad l_{\gamma} > 0, \text{ then} \quad w_{\gamma} &= l_{\gamma} \times 58 \\if \quad l_{\gamma} < 0, \text{ then} \quad w_{\gamma} &= l_{\gamma} \times 70\end{aligned}$$

### 3.6.4 对整体

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 200$$

## 3.7 时间

$$\begin{aligned}t_{\text{小母牛}} &= \sum_{i=1}^2 x_i^k \times 10 \\t_{\text{大母牛}} &= \sum_{i=3}^{12} x_i^k \times 42 \\t_{\beta} &= \alpha \times 4 \\t_{\gamma} &= \beta \times 14 \\t &= t_{\text{小母牛}} + t_{\text{大母牛}} + t_{\beta} + t_{\gamma} \\if \quad t \leq 5500, \text{ then} \quad c_{\text{工人}} &= 4000 \\if \quad t \geq 5500, \text{ then} \quad c_{\text{工人}} &= 4000 + (t - 5500) \times 1.2\end{aligned}$$

## 3.8 资金

$$\begin{aligned}c_{\text{小母牛}} &= 500 \times \sum_{i=1}^2 x_i^{(k)} \\c_{\text{大母牛}} &= 100 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \\c_{\beta} &= \beta \times 15 \\c_{\gamma} &= \gamma \times 10\end{aligned}$$

## 4 优化目标

年成本（支出）：

$$c_{\text{年}} = c_{\beta} + c_{\gamma} + c_{\text{小母牛}} + c_{\text{大母牛}} + c_{\text{工人}} + m$$

年毛利（收入）：

$$w_{\text{年}} = w_{\text{小公牛}}^{(k)} + w_{\text{小母牛}}^{(k)} + w_{\text{大母牛}}^{(k)} + w_{\text{老母牛}}^{(k)} + w_{\gamma} + w_{\beta}$$

年利润（优化目标）：

$$E_{\text{年}} = w_{\text{年}} - c_{\text{年}}$$

## 5 限制条件

$$M \leq 200 \times (45 + \sum_{i=1}^2 x_1^5)$$

$$\sum_{i=3}^{12} x_i^5 \geq 50$$

$$\sum_{i=3}^{12} x_i^5 \leq 170$$