1 模型建立与求解

记t_k时刻种群数量分布向量

$$x^{(k)}=\left[x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right]^{\mathrm{T}},\quad k=0,1,2,\cdots$$

则初始时刻种群数量分布向量为

$$x^{(0)}=\left[x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

t_k时刻种群中第一个年龄组的数量等于t_{k-1}时刻各年龄组产下所有雌性幼体的总和

$$x_1^{(\,k)}=a_1x_1^{(\,k-1\,)}+a_2x_2^{(\,k-1\,)}+\cdots+a_nx_n^{(\,k-1\,)}\,,\quad k=0,1,2,\cdots$$

t_k时刻第$i+1$个年龄组中雌性奶牛的数量等于t_{k-1}时刻第i个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量

$$x_{i+1}^{(k)}=b_ix_i^{(k-1)}\,,\quad i=1\,,2\,,\cdots,n-1$$

遍历上述$n-1$个存活条件，并在最初添加繁殖条件，有

$$\begin{cases}x_1^{(k)}=a_1x_1^{(k-1)}+a_2x_2^{(k-1)}+\cdots+a_nx_n^{(k-1)}\,,\\x_2^{(k)}=b_1x_1^{(k-1)}\,,\\x_3^{(k)}=b_2x_2^{(k-1)}\,,\\\vdots\\x_n^{(k)}=b_{n-1}x_{n-1}^{(k-1)}\,.\end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为L，即

$$L=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\b_1&0&\cdots&0&0\\0&b_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&b_{n-1}&0\end{bmatrix}$$

则t_k时刻种群数量分布向量递推公式为

$$x^{(k)}=Lx^{(k-1)},\quad k=1,2,\cdots$$

由上式得，

$$\begin{gathered}x^{(1)}=Lx^{(0)},\\x^{(2)}=Lx^{(1)}=L^2x^{(0)},\\\vdots\\x^{(k)}=Lx^{(k-1)}=L^kx^{(0)},\quad k=1,2,\cdots\end{gathered}$$

本题初始种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}}=[10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10]^{\mathrm{T}}$$

子代雌雄个体总莱斯利矩阵为

$$
\mathbf{L}' = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\
0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0
\end{bmatrix}
$$

子代为雌性的几率为0.5,则雌性个体莱斯利矩阵为

$$
\mathbf{L} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\
0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0
\end{bmatrix}
$$

1.1 小公牛

t_k时刻出售小公牛所得金额 = t_k时刻出售小公牛数量 $\times$ 一只小公牛的价格

$$c^{(k)}_{\text{小公牛}} = x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times 30$$

其中

$$y_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第一个元素，即待出售小公牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5} c^{(k)}_{\text{小公牛}} = 30 \sum_{k=1}^{5} (x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r)$$

1.2 小母牛

$$c_{\text{小母牛}}^{(k)} = x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r \times 40$$

其中

$$y_1 \times r = [r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第一个元素，即小母牛的数量, r为出售小母牛的比例
则 $x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r$ 即为待出售小母牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5} c_{\text{小母牛}}^{(k)} = 40 \sum_{k=1}^{5} (x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r)$$

1.3 老母牛

$$c_{老母牛}^{(k)} = x^{(k-1)} \times L \times y_{12} \times 120$$

其中

$$y_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出最后一个元素，即待出售老母牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5} c_{老母牛}^{(k)} = 120 \sum_{k=1}^{5} (x^{(k-1)} \times L \times y_{12})$$

1.4 产奶牛

$$c_{产奶牛}^{(k)} = \sum_{i=3}^{12} x^{(k-1)} \times L \times y_{3,12} \times 370$$

其中

$$y_{3,12} \times r = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第三至第十二个元素，即为能正常产奶的奶牛数量

$$c_{产奶牛} = \sum_{k=0}^{5} \sum_{i=3}^{11} x_i^{(k-1)} \times L \times y_{3,12} \times 370$$

1.5 限制

$$\sum_{i=1}^{2} x_i \times \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{12} x_i \times 1 \leq 200$$

1.6 贷款

$$\sum_{i=1}^{12} x^k \leq \frac{M}{200} + 130, k = 0, \ldots, 5$$