第一次模拟

1　模型建立与求解

记t_k时刻种群数量分布向量

$$x^{(k)}=\left[x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right]^{\mathrm{T}},\quad k=0,1,2,\cdots$$

则初始时刻种群数量分布向量为

$$x^{(0)}=\left[x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right]^{\mathrm{T}}$$

t_k时刻种群中第一个年龄组的数量等于t_{k-1}时刻各年龄组产下所有雌性幼体的总和

$$x_1^{(\,k)}=a_1x_1^{(\,k-1\,)}+a_2x_2^{(\,k-1\,)}+\cdots+a_nx_n^{(\,k-1\,)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

t_k时刻第$i+1$个年龄组中雌性奶牛的数量等于t_{k-1}时刻第i个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量

$$x_{i+1}^{(k)}=b_ix_i^{(k-1)},\quad i=1\,,2\,,\cdots,n-1$$

遍历上述$n-1$个存活条件，并在最初添加繁殖条件，有

$$\begin{cases}x_1^{(k)}=a_1x_1^{(k-1)}+a_2x_2^{(k-1)}+\cdots+a_nx_n^{(k-1)}\,,\\ x_2^{(k)}=b_1x_1^{(k-1)}\,,\\ x_3^{(k)}=b_2x_2^{(k-1)}\,,\\ \vdots\\ x_n^{(k)}=b_{n-1}x_{n-1}^{(k-1)}\,.\end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为L，即

$$L=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\ b_1&0&\cdots&0&0\\ 0&b_2&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&b_{n-1}&0\end{bmatrix}$$

则t_k时刻种群数量分布向量递推公式为

$$x^{(k)}=Lx^{(k-1)},\quad k=1,2,\cdots$$

由上式得，

$$\begin{gathered}x^{(1)}=Lx^{(0)},\\ x^{(2)}=Lx^{(1)}=L^2x^{(0)},\\ \vdots\\ x^{(k)}=Lx^{(k-1)}=L^kx^{(0)},\quad k=1,2,\cdots\end{gathered}$$

本题初始种群数量分布向量为

$$\mathbf{x^{(0)}}=[10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10\quad 10]^{\mathrm{T}}$$

子代雌雄个体总莱斯利矩阵为

$$
\mathbf{L}' = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\
0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0
\end{bmatrix}
$$

子代为雌性的几率为0.5,则雌性个体莱斯利矩阵为

$$
\mathbf{L} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\
0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0
\end{bmatrix}
$$

1.1 小公牛

t_k时刻出售小公牛所得金额 = t_k时刻出售小公牛数量 $\times$ 一只小公牛的价格

$$c_{\text{小公牛}}^{(k)} = x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times 30$$

其中

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第一个元素，即待出售小公牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5} c_{\text{小公牛}}^{(k)} = 30 \sum_{k=1}^{5} (x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r)$$

1.2 小母牛

$$c_{\text{小母牛}}^{(k)} = x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r \times 40$$

其中

$$y_1 \times r = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第一个元素，即小母牛的数量, r为出售小母牛的比例则 $x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r$ 即为待出售小母牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5} c_{\text{小母牛}}^{(k)} = 40 \sum_{k=1}^{5} (x^{(k-1)} \times L \times y_1 \times r)$$

1.3 老母牛

$$c_{老母牛}^{(k)} = x^{(k-1)} \times L \times y_{12} \times 120$$

其中

$$y_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出最后一个元素，即待出售老母牛的数量

$$\sum_{k=1}^{5} c_{老母牛}^{(k)} = 120 \sum_{k=1}^{5} (x^{(k-1)} \times L \times y_{12})$$

1.4 产奶牛

$$c_{产奶牛}^{(k)} = \sum_{i=3}^{12} x^{(k-1)} \times L \times y_{3,12} \times 370$$

其中

$$y_{3,12} \times r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量（$x^{(k-1)} \times L$）中取出第三至第十二个元素，即为能正常产奶的奶牛数量

$$c_{产奶牛} = \sum_{k=0}^{5} \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k-1)} \times L \times y_{3,12} \times 370$$

1.5 贷款

设总贷款金额为M,贷款金额全部用于投资,此时，有

$$\sum_{i=1}^{12} x^k \leq \frac{M}{200} + 130, k = 0, \ldots, 5$$

至于还款,要求等额还款,市面上流行的还款方式为等额本金还款及等额本息还款，但仅有后者可保证每年还款数额固定不变，故确定还款方式为等额本息还款

有，

$$\text{每年应还额度} = \frac{\text{贷款本金} \times \text{年利率} \times (1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}}}{(1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}} - 1}$$

则，每年还款额度 d 计算公式如下

$$d = \frac{M \times 0.15 \times (1 + 0.15)^{10}}{(1 + 0.15)^{10} - 1}$$

1.6 饲料

设牧草，甜菜，粮食种植所需土地分别为 α英亩,β英亩,γ英亩
由题意知，每头小母牛需要$\frac{2}{3}$英亩的土地养活它，每头大母牛需要1英亩的土地养活它，然每头奶牛除了吃牧草以外，每年还需要0.6吨粮食和0.7吨甜菜. 即现有的200英亩土地分配β英亩,γ英亩分别种植甜菜和粮食外，剩余α英亩土地均布满牧草

1.6.1 对牧草(α)

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2} x_i \times \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{12} x_i \times 1$$

1.6.2 对粮食(β)

$$\begin{gathered}
\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \\
\mathrm{procut}_{\text{粮食}} = 1.1 \times \beta_1 + 0.9 \times \beta_2 + 0.8 \times \beta_3 + 0.6 \times \beta_4 \\
if \quad \mathrm{procut}_{\text{粮食}} \geq 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i \\
then \quad (\mathrm{procut}_{\text{粮食}} - 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i) \times 75 \\
if \quad \mathrm{procut}_{\text{粮食}} \leq 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i \\
then \quad (0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i - \mathrm{procut}_{\text{粮食}}) \times 90 \\
\beta_1 \leq 20 \\
\beta_2 \leq 30 \\
\beta_3 \leq 30 \\
\beta_4 \leq 10
\end{gathered}$$

1.6.3 对甜菜(γ)

$$\begin{gathered}
\mathrm{procut}_{\text{甜菜}} = 1.5 \times \gamma \\
if \quad \mathrm{procut}_{\text{甜菜}} \geq 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i \\
then \quad (\mathrm{procut}_{\text{甜菜}} - 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i) \times 58 \\
if \quad \mathrm{procut}_{\text{甜菜}} \leq 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i \\
then \quad (0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i - \mathrm{procut}_{\text{甜菜}}) \times 70
\end{gathered}$$

1.6.4 对整体

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 200$$

1.7 时间

$$t_{\text{饲养小母牛}} = \sum_{i=1}^{2} x_i^k \times 10$$
$$t_{\text{饲养大母牛}} = \sum_{i=3}^{12} x_i^k \times 42$$
$$t_\beta = \alpha \times 4$$
$$t_\gamma = \beta \times 14$$
$$t = t_{\text{饲养小母牛}} + t_{\text{饲养大母牛}} + t_\beta + t_\gamma$$
$$if \quad t \leq 5500$$
$$then \quad cost = 4000$$
$$if \quad t \geq 5500$$
$$then \quad cost = 4000 + (t - 5500) \times 1.2$$

1.8 资金

$$cost_{\text{饲养小母牛}} = 500 \times \sum_{i=1}^{2} x_i^{(k)}$$

$$cost_{\text{饲养大母牛}} = 100 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)}$$

$$cost_\beta = \beta \times 15$$

$$cost_\gamma = \gamma \times 10$$