

第一次模拟训练A题

1 符号变量

符号变量	含义
a_i	第 i 个年龄段的生育率
b_i	第 i 个年龄段的存活率
$\mathbf{x}^{(k)}$	第 t_k 时刻种群数量分布向量
$\mathbf{x}^{(0)}$	初始种群数量分布向量
$x_i^{(k)}$	第 t_k 时刻第 i 个年龄组的数量
\mathbf{L}''	莱斯利雌雄总矩阵
\mathbf{L}'	莱斯利雌性或雄性矩阵
\mathbf{L}_r	考虑出售 r 比例小母牛后，莱斯利雌性矩阵
\mathbf{y}_1	选择矩阵，用于提取第一个元素
\mathbf{y}_{12}	选择矩阵，用于提取最后一个元素
$\mathbf{y}_{3,12}$	选择矩阵，用于提取第三个至最后一个元素
r	小母牛出售的比例
$w_{\text{小公牛}}^{(k)}$	第 t_k 时刻出售小公牛所得金额
$w_{\text{小母牛}}^{(k)}$	第 t_k 时刻出售小母牛所得金额
$w_{\text{老母牛}}^{(k)}$	第 t_k 时刻出售老母牛所得金额
$w_{\text{大母牛}}^{(k)}$	第 t_k 时刻大母牛所得金额
M	总贷款金额
m	每年还款额度
α	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
q_β	粮食的产量
q_γ	甜菜的产量
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间
$t_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛所需时间
$t_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛所需时间
t	总时间
c_β	种植粮食的成本
c_γ	种植甜菜的成本
$c_{\text{小母牛}}$	饲养小母牛的成本
$c_{\text{大母牛}}$	饲养大母牛的成本
c	总成本

2 独立参数

符号变量	含义
r	小母牛出售的比例
M	总贷款金额
α	牧草种植所需土地面积（英亩），也指牧草
β	粮食种植所需土地面积（英亩），也指粮食
γ	甜菜种植所需土地面积（英亩），也指甜菜
t_β	种植粮食所需时间
t_γ	种植甜菜所需时间

3 模型建立与求解

记 t_k 时刻种群中雌性(下文同)各年龄段数量分布向量

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{bmatrix}^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则初始时刻种群数量分布向量为

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \cdots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^T$$

当不出售第一个年龄组的小母牛， t_k 时刻种群中第一个年龄组的种群数量等于 t_{k-1} 时刻各年龄组产下所有雌性幼体的总和

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

t_k 时刻第 $i+1$ 个年龄组中雌性奶牛的数量等于 t_{k-1} 时刻第 i 个年龄组中存活下来的雌性奶牛的数量，

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

遍历上述 $n-1$ 个存活条件，并在最初添加种群数量的繁殖条件公式，有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}. \end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为 L' ，即

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

当 t_k 时刻出售 r 比例的刚出生的小母牛，即出售小母牛的数量为 $(a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times r$ ， $(k \neq 0)$ ，由此更新第一个年龄段种群雌性数量的迭代公式如下

$$x_1^{(k)} = (a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times (1 - r)$$

此时，有

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)}) \times (1-r), \\ x_2^{(k)} = b_1 x_1^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} = b_2 x_2^{(k-1)}, \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = b_{n-1} x_{n-1}^{(k-1)}. \end{cases}$$

记上述等式右端系数矩阵为 \mathbf{L}_r ，即

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} a_1 \times (1-r) & a_2 \times (1-r) & \cdots & a_{n-1} \times (1-r) & a_n \times (1-r) \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

则 t_k 时刻种群数量分布向量递推公式为

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{L}_r \mathbf{x}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

由上式得，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{L}_r \mathbf{x}^{(0)}, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{L}_r \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{L}_r^2 \mathbf{x}^{(0)}, \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{L}_r \mathbf{x}^{(k-1)} = \mathbf{L}_r^k \mathbf{x}^{(0)}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

本题初始种群数量分布向量为

$$\mathbf{x}^{(0)} = [10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10]^T$$

种群数量分布的莱斯利雌雄总矩阵为

$$\mathbf{L}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

子代为雌雄的几率各一半，且不考虑出售第一个年龄段的雌性小母牛，种群数量分布的莱斯利雌性矩阵或莱斯利雄性矩阵为

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 & 0.55 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑第一个年龄段的雌性出售比率为 r , 种群数量分布的莱斯利雌矩阵应更新为

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' & b' \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

其中, $b' = 0.55 \times (1 - r)$

3.1 小公牛

t_k 时刻出售小公牛所得金额 = t_k 时刻出售小公牛数量 \times 一只小公牛的价格

$$w_{\text{小公牛}}^{(k)} = \mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}_1 \times 30$$

其中

$$\mathbf{y}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量 ($\mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)}$) 中取出第一个元素, 即为待出售的小公牛的数量

$$\sum_{k=1}^5 w_{\text{小公牛}}^{(k)} = 30 \sum_{k=1}^5 (\mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}_1)$$

3.2 小母牛

$$w_{\text{小母牛}}^{(k)} = \mathbf{L}' \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{y}_1 r \times 40$$

其中

$$\mathbf{y}_1 \times r = [r \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量 ($\mathbf{x}^{(k-1)} \times \mathbf{L}$) 中取出第一个元素, 即小母牛的数量, r 为出售小母牛的比例
则 $\mathbf{x}^{(k-1)} \times \mathbf{L} \times \mathbf{y}_1 \times r$ 即为待出售小母牛的数量

$$\sum_{k=1}^5 w_{\text{小母牛}}^{(k)} = 40 \sum_{k=1}^5 (\mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L}' \mathbf{y}_1)$$

3.3 老母牛

$$w_{\text{老母牛}}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L}_r \mathbf{y}_{12} \times 120$$

其中

$$\mathbf{y}_{12} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量 $(\mathbf{x}^{(k-1)} \times L)$ 中取出最后一个元素, 即待出售老母牛的数量

$$\sum_{k=1}^5 w_{\text{老母牛}}^{(k)} = 120 \sum_{k=1}^5 (\mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L}_r \mathbf{y}_{12})$$

3.4 大母牛

$$w_{\text{大母牛}}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L}_r \mathbf{y}_{3,12} \times 370$$

其中

$$\mathbf{y}_{3,12} \times r = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

目的为从前面所得的种群数量分布向量 $(\mathbf{x}^{(k-1)} \times L)$ 中取出第三至第十二个元素, 即为能正常产奶的奶牛数量

$$c_{\text{大母牛}} = 370 \sum_{k=0}^5 (\mathbf{x}^{(k-1)} \mathbf{L}_r \mathbf{y}_{3,12})$$

3.5 贷款

设总贷款金额为 M , 贷款金额全部用于投资, 此时, 有

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^{(k)} \leq \frac{M}{200} + 130, \quad k = 0, \dots, 5$$
$$M \leq 200 \times (45 + \sum_{i=1}^2 x_1^{(5)})$$

至于还款, 要求等额还款, 市面上流行的还款方式为等额本金还款及等额本息还款, 但仅有后者可保证每年还款数额固定不变, 故确定还款方式为等额本息还款
有,

$$\text{每年应还额度} = \frac{\text{贷款本金} \times \text{年利率} \times (1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}}}{(1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}} - 1}$$

则, 每年还款额度 m 计算公式如下

$$m = \frac{M \times 0.15 \times (1 + 0.15)^{10}}{(1 + 0.15)^{10} - 1}$$

3.6 土地

设牧草, 甜菜, 粮食种植所需土地分别为 α 英亩, β 英亩, γ 英亩

由题意知, 每头小母牛需要 $\frac{2}{3}$ 英亩的土地养活它, 每头大母牛需要 1 英亩的土地养活它, 然每头奶牛除了吃牧草以外, 每年还需要 0.6 吨粮食和 0.7 吨甜菜. 即现有的 200 英亩土地分配 β 英亩, γ 英亩分别种植甜菜和粮食外, 剩余 α 英亩土地均布满牧草

3.6.1 分牧草 α 英亩

$$\alpha = \sum_{i=1}^2 x_i^{(k)} \times \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{12} x_i^{(k)} \times 1$$

3.6.2 分粮食 β 英亩

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \\ q_\beta &= 1.1 \times \beta_1 + 0.9 \times \beta_2 + 0.8 \times \beta_3 + 0.6 \times \beta_4 \\ l_\beta &= q_\beta - 0.6 \times \sum_{i=2}^{12} x_i^{(k)} \\ \text{if } l_\beta > 0, \text{ then } w_\beta &= l_\beta \times 75 \\ \text{if } l_\beta < 0, \text{ then } w_\beta &= l_\beta \times 90 \\ \beta_1 &\leq 20 \\ \beta_2 &\leq 30 \\ \beta_3 &\leq 30 \\ \beta_4 &\leq 10\end{aligned}$$

3.6.3 分甜菜 γ 英亩

$$\begin{aligned}q_\gamma &= 1.5 \times \gamma \\ l_\gamma &= q_\gamma - 0.7 \times \sum_{i=2}^{12} x_i^{(k)} \\ \text{if } l_\gamma > 0, \text{ then } w_\gamma &= l_\gamma \times 58 \\ \text{if } l_\gamma < 0, \text{ then } w_\gamma &= l_\gamma \times 70\end{aligned}$$

3.6.4 总土地大小限制

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 200$$

3.7 时间

$$\begin{aligned}t_{\text{小母牛}} &= \sum_{i=1}^2 x_i^{(k)} \times 10 \\ t_{\text{大母牛}} &= \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \times 42 \\ t_\beta &= \alpha \times 4 \\ t_\gamma &= \beta \times 14 \\ t &= t_{\text{小母牛}} + t_{\text{大母牛}} + t_\beta + t_\gamma \\ \text{if } t &\leq 5500, \text{ then } c_{\text{工人}} = 4000 \\ \text{if } t &\geq 5500, \text{ then } c_{\text{工人}} = 4000 + (t - 5500) \times 1.2\end{aligned}$$

3.8 资金

$$\begin{aligned}c_{\text{小母牛}} &= 500 \times \sum_{i=1}^2 x_i^{(k)} \\ c_{\text{大母牛}} &= 100 \times \sum_{i=3}^{12} x_i^{(k)} \\ c_\beta &= \beta \times 15 \\ c_\gamma &= \gamma \times 10\end{aligned}$$

4 优化目标

年成本（支出）：

$$c_{\text{年}} = c_{\beta} + c_{\gamma} + c_{\text{小母牛}} + c_{\text{大母牛}} + c_{\text{工人}} + m$$

年毛利（收入）：

$$w_{\text{年}} = w_{\text{小公牛}}^{(k)} + w_{\text{小母牛}}^{(k)} + w_{\text{大母牛}}^{(k)} + w_{\text{老母牛}}^{(k)} + w_{\gamma} + w_{\beta}$$

年利润（优化目标）：

$$E_{\text{年}} = w_{\text{年}} - c_{\text{年}}$$

5 限制条件

$$\sum_{i=3}^{12} x_i^{(5)} \geq 50$$

$$\sum_{i=3}^{12} x_i^{(5)} \leq 175$$