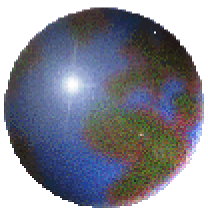
Algèbre linéaire



Chapitre 3
Déterminant

Master IASD

Tarik AMTOUT
tarik.amtout@gmail.com

Déterminants

Définition

Le déterminant d'une matrice 2 x 2 A est noté |A| et est donné par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

La notation det(A) est également utilisée pour le déterminant de A.

Exemple 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (2\times 1) - (4\times(-3)) = 2 + 12 = 14$$

Définition

Soit A une matrice carrée.

Le mineur de l'élément a_{ij} se note par M_{ij} et est le déterminant de la matrice qui reste après la suppression de la ligne i et de la colonne j de A.

Le cofacteur de a_{ij} se note par C_{ij} donné par

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Exemple 2

Déterminer les mineurs et cofacteurs des éléments a_{11} et a_{32} de la matrice A suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3

Évaluez le déterminant de la matrice A suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= 1(-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= [(0\times 1)-(1\times 2)] - 2[(3\times 1)-(1\times 4)] - [(3\times 2)-(0\times 4)] \\
&= -2+2-6 \\
&= -6
\end{aligned}$$

Théorème

Le déterminant d'une matrice carrée est la somme des produits des éléments d'une ligne ou d'une colonne et de leurs cofacteurs.

Développement selon ième ligne : $|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

Développement selon jème colonne : $|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$

Exemple 4

Trouvez le déterminant de la matrice suivante en utilisant la deuxième l

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} \\ &= -3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3[(2\times 1) - (-1\times 2)] + 0[(1\times 1) - (-1\times 4)] - 1[(1\times 2) - (2\times 4)] \\ &= -12 + 0 + 6 = -6 \end{aligned}$$

Exemple 5

Évaluez le déterminant de la matrice 4 □ 4 suivante.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solution

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43} \\ &= 0(C_{13}) + 0(C_{23}) + 3(C_{33}) + 0(C_{43}) \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3(2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6(3-2) = 6 \end{aligned}$$

3.2 Propriétés des déterminants

Théorème

Soit A une matrice n x n et c un scalaire non nul.

(a) Si $A \underset{cRk}{\approx} B$ alors $|B| = c|A|$.

(b) Si $A \underset{Ri \leftrightarrow Rj}{\approx} B$ alors $|B| = -|A|$.

(c) Si $A \underset{Ri + cRj}{\approx} B$ alors $|B| = |A|$.

Exemple 1

Evaluer le determinant suivant $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix}$.

Solution

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix} \underset{C2+2C3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -21$$

Exemple 2

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}, \text{ et } |A| = 12$$

Évaluez les déterminants des matrices suivantes.

$$\text{(a) } B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ -2 & -12 & 10 \end{bmatrix} \text{(b) } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{(c) } B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Solution

(a) $A \underset{3C2}{\approx} B_1$ Ainsi $|B_1| = 3|A| = 36$.

(b) $A \underset{R2 \leftrightarrow R3}{\approx} B_2$ Ainsi $|B_2| = -|A| = -12$.

(c) $A \underset{R3+2R1}{\approx} B_3$ Ainsi $|B_3| = |A| = 12$.

Définition

Une matrice carrée A est dite singulière si $|A|=0$.

A n'est pas singulier si $|A|\neq 0$.

Théorème

Soit A une matrice carrée. A est singulière si

(a) tous les éléments d'une ligne (colonne) sont nuls.

(b) deux lignes (colonnes) sont égales.

(c) deux lignes (colonnes) sont proportionnelles. (c'est-à-dire $R_i = cR_j$)

Exemple 3

Montrer que les matrices suivantes sont singulières.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Solution

(a) Tous les éléments de la colonne 2 de A sont nuls. Ainsi $|A| = 0$.

(b) Les rangées 2 et 3 sont proportionnelles. Ainsi $|B| = 0$.

Théorème

Soient A et B des matrices n x n et c un scalaire non nul.

a) $|cA| = c^n|A|$.

b) $|AB| = |A||B|$.

c) $|A^t| = |A|$.

d) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

3.3 Évaluation numérique d'un déterminant

Définition

•Une matrice carrée est appelée matrice triangulaire supérieure si tous les éléments situés en dessous de la diagonale principale sont nuls.

•On parle de matrice triangulaire inférieure si tous les éléments au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Trian-sup Trian-inf

Théorème

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

Exemple 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

Le déterminant de A est

$$|A| = 2 \times 3 \times (-5) = -30.$$

Exemple

Calculer le determinant suivant
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Solution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ R2+(-2)R1 \\ R3+(-1)R1 \\ R4+R1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} = \\ R4+2R3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times (-2) \times 6 = 12$$

Exemple

Calculer le determinant suivant $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix}$

Solution

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ R2+R1 \\ R3+(-2)R1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R2 \leftrightarrow R3}{=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 1 \times 2 \times (-1) = 2$$

3.3 Déterminants, matrice inverse et systèmes d'équations linéaires

Définition

Soit A une matrice $n \times n$ et C_{ij} matrice de cofacteurs de a_{ij}.

La transposée de la matrice de cofacteurs est appelée la matrice **adjointe de** A on la note par adj(A).

Exemple 1

Donner la matrice des cofacteurs et la matrice adjointe de la matrice A suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution Les cofacteurs de A sont les suivants.

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 14 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -9 \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

La matrice des cofacteurs de A est

$$\begin{bmatrix} 14 & 3 & -1 \\ -9 & 7 & 6 \\ -12 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

L'adjoint de A est

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 14 & -9 & -12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Théorème

Soit A une matrice carrée avec $|A| \neq 0$. *A est inversible*

Son inverse est:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

Exemple 2

Utilisez la formule de l'inverse d'une matrice pour calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution

$|A|$ = 25, donc l'inverse de A existe. Nous avons trouvé adj(A) dans l'exemple 1

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 14 & -9 & -12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 14 & -9 & -12 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{25} & -\frac{9}{25} & -\frac{12}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{7}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{25} & \frac{6}{25} & \frac{8}{25} \end{bmatrix}$$

Théorème

Soit $AX = B$ un système de n équations linéaires à n variables.

(1) Si $|A| \neq 0$, il existe une solution unique.

(2) If $|A| = 0$, il peut y avoir une infinitée ou pas de solutions.

Exemple 3

Déterminer si le système d'équations suivant a ou non une solution unique.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= \ \ 2 \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 7x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 &= \ \ 9 \end{aligned}$$

Solution

Puisque

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Le système n’a donc pas de solution unique.

Méthode de Cramer

Soit $AX = B$ être un système de n équations linéaires à n variables tel que $|A| \neq 0$. Le système a une solution unique donnée par

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ième colonne par B.

Exemple 4

Résoudre le système d'équations suivant en utilisant la méthode de Cramer.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Solution

La matrice de coefficients A et la matrice de colonnes de constantes B sont

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Le determinant de A est $|A| = -3 \neq 0$. Ainsi, on applique la méthode. On a

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

On a $|A_1| = -3, |A_2| = 6, |A_3| = -9$

La règle de Cramer donne

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1,\ \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{6}{-3} = -2,\ \ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

La seule solution est $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3.$