Algèbre linéaire

Chapitre 2
Calcul matriciel

Master IASD

Tarik AMTOUT
tarik.amtout@gmail.com

2.1 Addition, multiplication scalaire et multiplication de matrices

- a_{ij}: l'élément de la matrice A dans la i-ème ligne et la j-ième colonne.

  Pour une matrice carrée $n\times n$, la diagonale principale est:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Définition

Deux matrices sont égales si elles sont de même taille et si leurs éléments correspondants sont égaux.

Ainsi $A = B$ si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\ i, j.$

Addition de Matrices

Définition

Soient A et B des matrices de même taille.

Leur somme A + B est la matrice obtenue en additionnant les éléments correspondants de A et B.

La matrice A + B sera de la même taille que A et B.Si A et B ne sont pas de même taille, on ne peut pas les additionner, et on dit que la somme n'existe pas.

Si $C = A + B,$ alors $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i,j.$

Exemple 1

Ch2_

Soit $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ -3 & 1 & 8\end{bmatrix}$, et $C=\begin{bmatrix}-5 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}$.

Déterminer $A + B$ et $A + C$, si la somme existe

Solution

$$\text{(1) } A+B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ -3 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+2 & 4+5 & 7-6\\ 0-3 & -2+1 & 3+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 9 & 1\\ -3 & -1 & 11\end{bmatrix}.$$

(2) Car A est une matrice de taille 2×3 et C est une matrice 2×2, alors ne sont pas de même taille , $A + C$ n'existe pas .

Multiplication par un scalaire

Définition

Soit A une matrice et c un scalaire. Le multiple scalaire de A par c, noté cA, est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de A par c. La matrice cA aura la même taille que A.

Si $B = cA$, alors $b_{ij} = ca_{ij} \ \forall i, j.$

Exemple 2

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$

$$3A = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) & 3\times 4 \\ 3\times 7 & 3\times(-3) & 3\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 21 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarque que A et $3A$ sont tous les deux 2×3 matrices.

Soustraction

Définition

Nous définissons maintenant la soustraction de matrices de manière à la rendre compatible avec l'addition, la multiplication scalaire et la négative. Soit $A - B = A + (-1)B$

Exemple 3

On suppose $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-2 & 0-8 & -2-(-1) \\ 3-0 & 6-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -11 \end{bmatrix}.$$

Mulitiplication des matrices

Définition

Supposons que le nombre de colonnes d'une matrice A soit le même que le nombre de lignes d'une matrice B. Le produit AB existe alors.

Soit A une matrice $m \times n$, B une matrice $n \times k$,
Le produit matriciel ***C=AB*** a pour élément

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

C est une matrice $m \times k$.

Si le nombre de colonnes de A n’est pas égal au nombre de lignes B, on dit que le produit n’existe pas.

Exemple 4

Let $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}$, and $C=\begin{bmatrix}6 & -2 & 5\end{bmatrix}$.

Déterminer AB, BA, and AC .

Solution.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1\times5)+(3\times3) & (1\times0)+(3\times(-2)) & (1\times1)+(3\times6)\\ (2\times5)+(0\times3) & (2\times0)+(0\times(-2)) & (2\times1)+(0\times6)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & -6 & 19\\ 10 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

BA et AC n'existent pas. **Note.** En général, $AB \neq BA$.

Exemple 5

Soit $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Déterminer AB.

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2+3 & 0+5 \\ -7+0 & 0+0 \\ 3-6 & 0-10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 0 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$$

Exemple 6

Soit $C = AB, A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Déterminer c_{23}.

$$c_{23}=\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=(-3\times 2)+(4\times 1)=-2$$

Taille de produits

Ch2_

Si A est une matrice de taille $m \times r$ et B est une matrice de taille $r \times n$ alors AB sera de taille $m \times n$

$$\begin{array}{ccc} A & B & = AB \\ m \times r & r \times n & m \times n \end{array}$$

Exemple 7

Si A *est de taille* 5×6 et B de taille 6×7.

Donc AB existe et AB sera de taille 5×7.

Matrices particulières

Définition

Une matrice nulle est une matrice dans laquelle tous les éléments sont des zéros.

Une matrice diagonale est une matrice carrée dans laquelle tous les éléments qui ne sont pas sur la diagonale principale sont des zéros.

Une matrice identité est une matrice diagonale dans laquelle chaque élément diagonal vaut 1.

$$0_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Théorème

Soit une matrice A de taille *et* O_{mn} une matrice de nulle de taille $m \times n$. Soit B une matrice carrée d'ordre n . O_n et I_n respectivement la matrice nulle et la matrice identité d'ordre n. Donc

$$A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$$

$$BO_n = O_nB = O_n$$

$$BI_n = I_nB = B$$

Example 8

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$A + O_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A$$

$$BO_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

$$BI_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

2.2 Propriétés algébriques des opérations matricielles

Théorème

Soit A, B et C des matrices et a, b et c des scalaires. Supposons que la taille des matrices soit telle que les opérations puissent être effectuées.

Propriétés de l'addition matricielle et de la multiplication scalaire

1. $A + B = B + A$ *Commutativité de l'addition*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *Associativité de l'addition*
3. $A + O = O + A = A$ (*Où O est la matrice nulle*)
4. $c(A + B) = cA + cB$ *Distributivité de l'addition*
5. $(a + b)C = aC + bC$ *Distributivité de l'addition*
6. $(ab)C = a(bC)$

Théorème

Soit A, B et C des matrices et a, b et c des scalaires. Supposons que la taille des matrices soit telle que les opérations puissent être effectuées.

Properties of Matrix Multiplication

1. $A(BC) = (AB)C$ *Associativité de la multiplication*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *Distributivité de la multiplication*
3. $(A + B)C = AC + BC$ *Distributivité de la multiplication*
4. $AI_n = I_nA = A$ (*Où* I_n *est la matrice identité*)
5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Note: $AB \neq BA$ in general. *Non commutative.*

En algèbre, nous savons que les lois suivantes s'appliquent.

- Si $ab = ac$ et $a \neq 0$ alors $b = c$.
- Si $pq = 0$ alors $p = 0$ ou $q = 0$.

Cependant, les résultats correspondants ne sont pas vrais pour les matrices.

- $AB = AC$ n’implique pas que $B = C$.
- $PQ = O$ n’implique pas que $P = O$ or $Q = O$.

Puissances de Matrices

Définition

Si A est une matrice carrée, alors

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{\text{k fois}}$$

Théorème

Si A est une matrice carrée n x n et que r et s sont des entiers non négatifs, alors

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.
3. $A^0 = I_n$ (par définition)

Exemple 12

Si $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ,alors A^4.

Solution

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exemple 13 Simplifiez l'expression matricielle suivante.

$$A(A+2B)+3B(2A-B)-A^2+7B^2-5AB$$

Solution

$$\begin{aligned} &A(A+2B)+3B(2A-B)-A^2+7B^2-5AB \\ &=A^2+2AB+6BA-3B^2-A^2+7B^2-5AB \\ &=-\underline{3AB+6BA}+4B^2 \end{aligned}$$

On ne peut pas additionner le deux matrices !

Systèmes d'équations linéaires

Un système de m équations linéaires à n variables comme suit

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Soit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ et } \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

On peut écrire le système d'équations sous forme matricielle

AX = B

Matrices idempotentes et nilpotentes

Definition

(1) Une matrice carrée A est dite idempotente si $A^2 = A$.

(2) Une matrice carrée A est dite nilpotente
s’il existe un entier positif p tel que $A^p = 0$.
Le plus petit entier p tel que
$A^p = 0$ est appelé le degré de nilpotence de la matrice.

Exemple 14

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = A.$$

$$(2)\ B = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deg de nilpotence est: 2