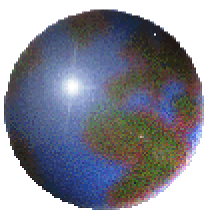
Algèbre linéaire



Chapitre 4

Valeurs propres et vecteurs propres

Master IASD

Tarik AMTOUT

tarik.amtout@gmail.com

Valeurs propres et vecteurs propres

Définition

Soit A une matrice $n \times n$ et λ un scalaire qu'on appelle **Valeur propre de** A s'il existe un vecteur non nul $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Le vecteur $\mathbf{x}$ est appelé un **vecteur propre** correspondant à λ.

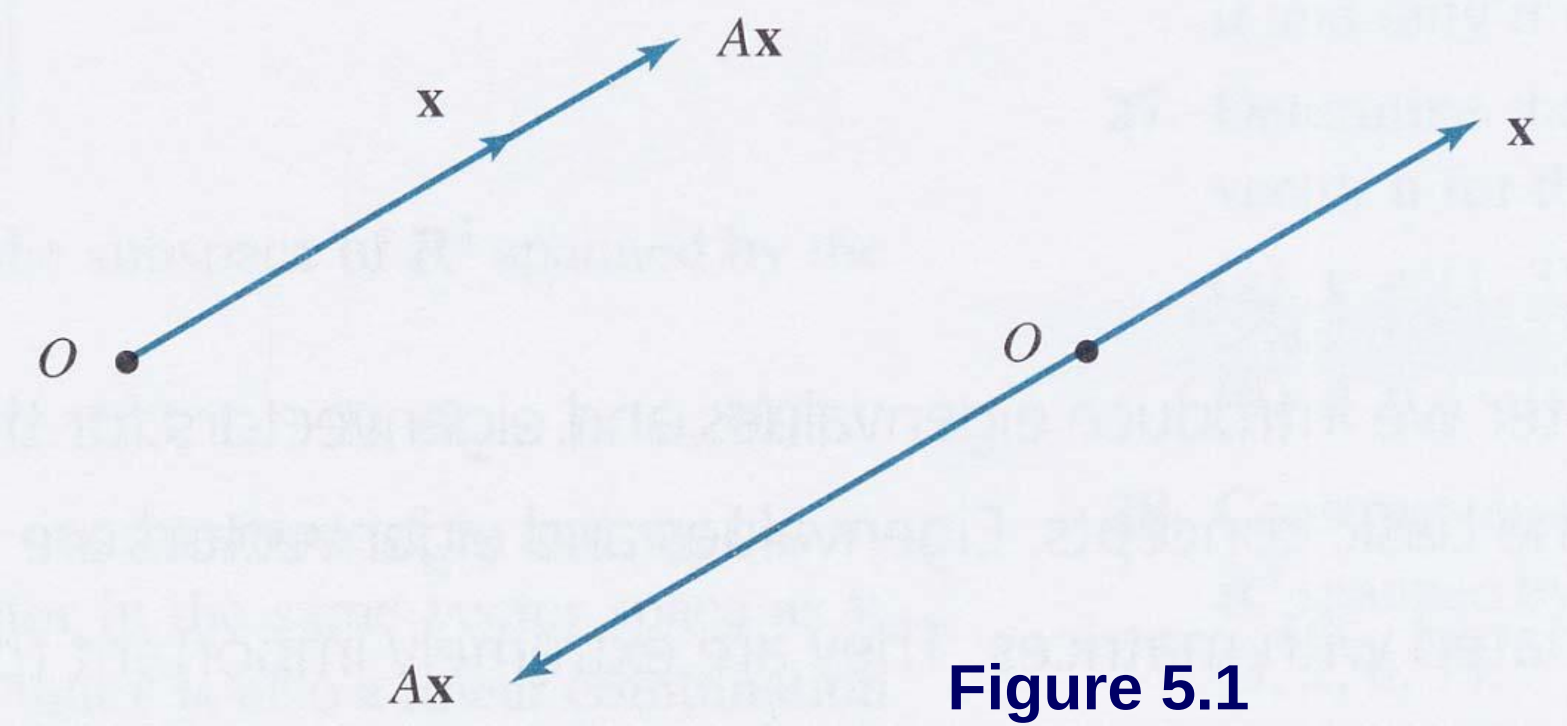


Figure 5.1

Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres

Soit A une matrice $n \times n$ *avec* λ une valeur propre et un vecteur propre associé $\mathbf{x}$. Ainsi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Cette équation peut s'écrire

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

C-à-d

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Résoudre l'équation $|A - \lambda I_n| = 0$ pour λ conduit à toutes les valeurs propres de A.

En développant le déterminant $|A - \lambda I_n|$, on obtient un polynôme selon λ. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de A.

L'équation $|A - \lambda I_n| = 0$ est appelée l'équation caractéristique de A.

Exemple 1

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution

Cherchons d'abord le polynôme caractéristique de A.

On a

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_2| = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Nous résolvons maintenant l'équation caractéristique de A.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ où } -1$$

Les valeurs propres de A sont 2 et –1.

Les vecteurs propres correspondants sont trouvés en utilisant ces valeurs de λ dans l'équation $(A - \lambda I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Il existe de nombreux vecteurs propres correspondant à chaque valeur propre.

- Pour $\lambda = 2$

Nous résolvons l'équation $(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour $\mathbf{x}$.

La matrice $(A - 2I_2)$ est obtenu en soustrayant 2 à partir des éléments diagonaux de A. On obtient

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Cela conduit au système d'équations

$$-6x_1 - 6x_2 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 = 0$$

Ainsi les vecteurs propres de A correspondant à $\lambda = 2$ sont des vecteurs non nuls de la forme

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Pour $\underline{\lambda = -1}$

  Nous résolvons l'équation $(A + 1I_2)x = 0$ pour x.

La matrice $(A + 1I_2)$ est obtenue en ajoutant 1 aux éléments diagonaux de A. On obtient

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Cela conduit au système d'équations

$$-3x_1 - 6x_2 = 0$$

$$3x_1 + 6x_2 = 0$$

Ainsi les vecteurs propres de A correspondant à $\lambda = -1$ sont des vecteurs non nuls de la forme

$$\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$