Algèbre linéaire

Chapitre 4

Valeurs propres et vecteurs propres

Master IASD

Tarik AMTOUT

tarik.amtout@gmail.com

Valeurs propres et vecteurs propres

Définition

Soit A une matrice $n \times n$ et λ un scalaire qu'on appelle **Valeur propre de** A s'il existe un vecteur non nul $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Le vecteur $\mathbf{x}$ est appelé un **vecteur propre** correspondant à λ.

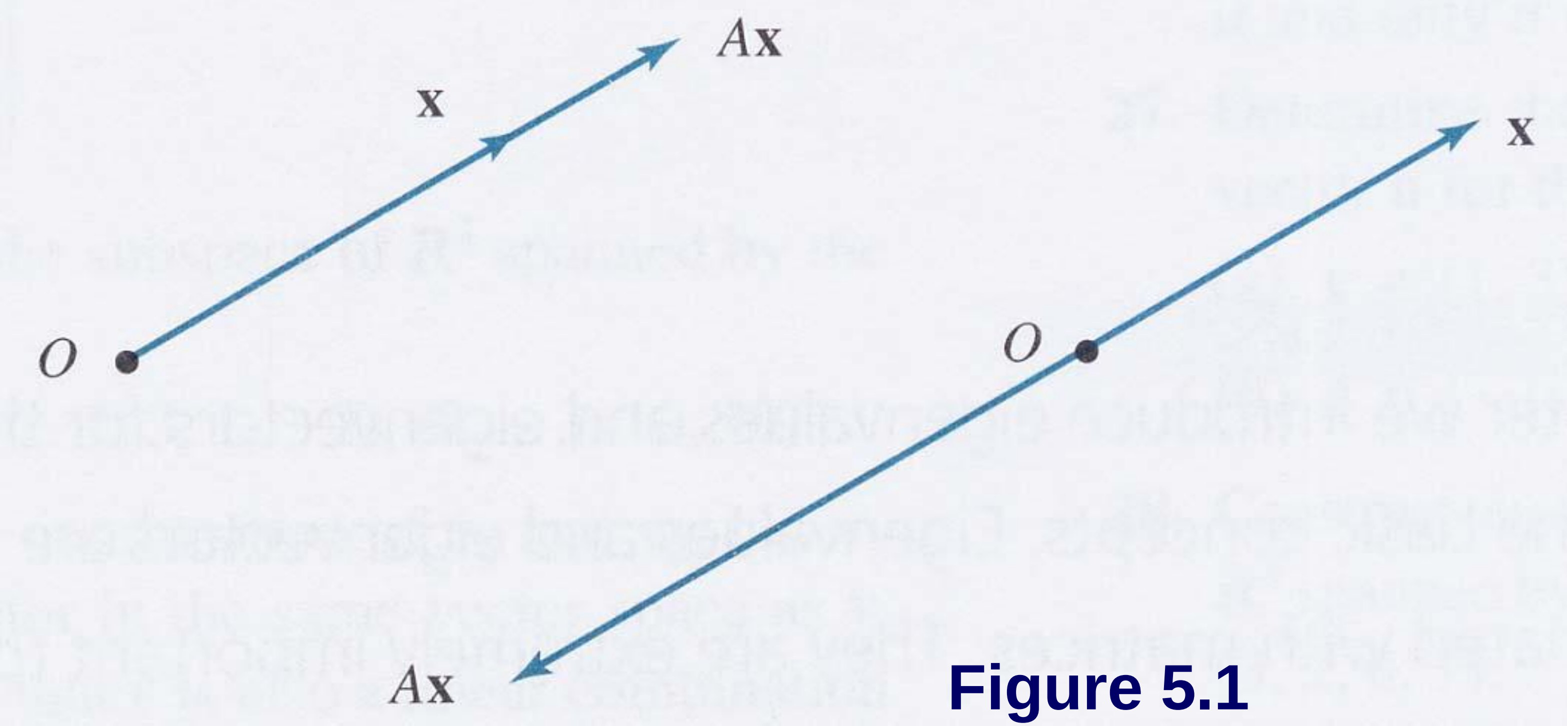


Figure 5.1

Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres

Soit A une matrice $n \times n$ *avec* λ une valeur propre et un vecteur propre associé $\mathbf{x}$. Ainsi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Cette équation peut s'écrire

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

C-à-d

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Résoudre l'équation $|A - \lambda I_n| = 0$ pour λ conduit à toutes les valeurs propres de A.

En développant le déterminant $|A - \lambda I_n|$, on obtient un polynôme selon λ. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de A.

L'équation $|A - \lambda I_n| = 0$ est appelée l'équation caractéristique de A.

Exemple 1

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution

Cherchons d'abord le polynôme caractéristique de A.

On a

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_2| = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Nous résolvons maintenant l'équation caractéristique de A.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ où } -1$$

Les valeurs propres de A sont 2 et –1.

Les vecteurs propres correspondants sont trouvés en utilisant ces valeurs de λ dans l'équation $(A - \lambda I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Il existe de nombreux vecteurs propres correspondant à chaque valeur propre.

- Pour $\underline{\lambda = 2}$

Nous résolvons l'équation $(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour $\mathbf{x}$.

La matrice $(A - 2I_2)$ est obtenu en soustrayant 2 à partir des éléments diagonaux de A. On obtient

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Cela conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} -6x_1 - 6x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi les vecteurs propres de A correspondant à $\lambda = 2$ sont des vecteurs non nuls de la forme

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Pour $\underline{\lambda = -1}$

  Nous résolvons l'équation $(A + 1I_2)x = 0$ pour x.

La matrice $(A + 1I_2)$ est obtenue en ajoutant 1 aux éléments diagonaux de A. On obtient

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Cela conduit au système d'équations

$$-3x_1 - 6x_2 = 0$$

$$3x_1 + 6x_2 = 0$$

Ainsi les vecteurs propres de A correspondant à $\lambda = -1$ sont des vecteurs non nuls de la forme

$$\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Théorème

Soit A une matrice de taille nxn et λ une valeur propre de *A*. L'ensemble de tous les vecteurs propres correspondant à λ, avec le vecteur nul, est un sous-espace de $\boldsymbol{R}^n$. Ce sous-espace est appelé espace propre de λ.

Diagonalisation des matrices

Définition

Soient A et B des matrices carrées de même taille. *B est dit semblable à A s'il existe une matrice inversible C telle que* $B = C^{-1}AC$. La transformation de la matrice A en matrice B de cette manière est appelée **transformation de similarité**.

Théorème

Des matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Définition

Une matrice carrée A est dite diagonalisable s'il existe une matrice C telle que $D = C^{-1}AC$ est une matrice diagonale.

Théorème

Soit A une matrice nxn.

1. Si la matrice A a n vecteurs propres linéairement indépendants, il est diagonalisable. La matrice C dont les colonnes sont constituées de n vecteurs propres linéairement indépendants peut être utilisée dans une transformation de similarité $C^{-1}AC$ pour donner une matrice diagonale D. Les éléments diagonaux de D seront les valeurs propres de A.
2. Si A est diagonalisable, alors il a n vecteurs propres linéairement indépendants

Note

Si A est semblable à une matrice diagonale D sous la transformation $C^{-1}AC$, alors on peut montrer que $A^k = CD^kC^{-1}$. Ce résultat peut être utilisé pour calculer A^k.

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

Théorème

Soit A une matrice symétrique de taille nxn.

(a) Toutes les valeurs propres de A sont des nombres réels.

(b) La dimension d'un espace propre de A est la multiplicité des valeurs propres comme racine de l'équation caractéristique.

(c) La matrice A a n vecteurs propres linéairement indépendants.

Vecteurs orthonormés et projections

Définition

Un ensemble de vecteurs dans un espace vectoriel V est appelé un ensemble orthogonal si chaque paire de vecteurs de l’ensemble est orthogonale. L’ensemble est dit orthonormé s’il est orthogonal et si chaque vecteur est un vecteur unitaire.

Exemple 1

Montrer que l'ensemble $\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$ est un ensemble orthonormé.

Solution

(1) orthogonalité: $(1,0,0)\cdot\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=0;$

$$(1,0,0)\cdot\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=0;$$

$$\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\cdot\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=0;$$

(2) vecteur unitaire :

$$\|(1,0,0)\|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$$

$$\left\|\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right\|=\sqrt{0^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=1$$

$$\left\|\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)\right\|=\sqrt{0^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=1$$

L’ensemble est donc un ensemble orthonormé.

Théorème

Un ensemble orthogonal de vecteurs non nuls dans un espace vectoriel est linéairement indépendant.

Définition

- Une base qui est un ensemble orthogonal est dite une base orthogonale.
- Une base qui est un ensemble orthonormé est dite une base orthonormée.

Bases canoniques

- $\mathbf{R}^2$: $\{(1, 0), (0, 1)\}$
- $\mathbf{R}^3$: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- $\mathbf{R}^n$: $\{(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1)\}$

bases orthonormées

Théorème

Soit $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ être une base orthonormée pour un espace vectoriel V. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur de V. $\mathbf{v}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs de base comme suit :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$$

Exemple 2

Les vecteurs suivants $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, and $\mathbf{u}_3$ forment une base orthonormée pour $\mathbf{R}^3$. Exprimer le vecteur $\mathbf{v} = (7, -5, 10)$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \mathbf{u}_3 = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Solution

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = (7, -5, 10) \cdot (1, 0, 0) = 7$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = (7, -5, 10) \cdot \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_3 = (7, -5, 10) \cdot \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -10$$

Ainsi

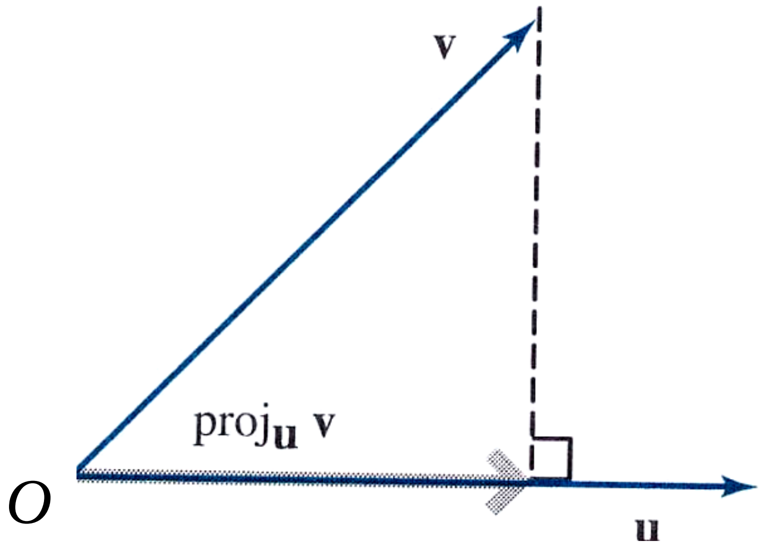
$$\mathbf{v} = 7\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2 - 10\mathbf{u}_3$$

Projection d'un vecteur sur un autre vecteur

Définition

La projection d'un vecteur $\mathbf{v}$ sur un vecteur non nul $\mathbf{u}$ dans $\mathbf{R}^n$ est notée $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ et est définie par

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}$$



Exemple 3

Déterminer la projection du vecteur **v** = (6, 7) sur le vecteur **u** = (1, 4).

Solution

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = (6, 7)\cdot(1, 4) = 6 + 28 = 34$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = (1, 4)\cdot(1, 4) = 1 + 16 = 17$$

Ainsi

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{34}{17}(1, 4) = (2, 8)$$

La projection de **v** sur **u** est (2, 8).

Théorème

Le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ une base d'un espace vectoriel V. L'ensemble des vecteurs $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ défini ainsi est orthogonal. Pour obtenir une base orthonormée pour V, on normalize chacun des vecteurs $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

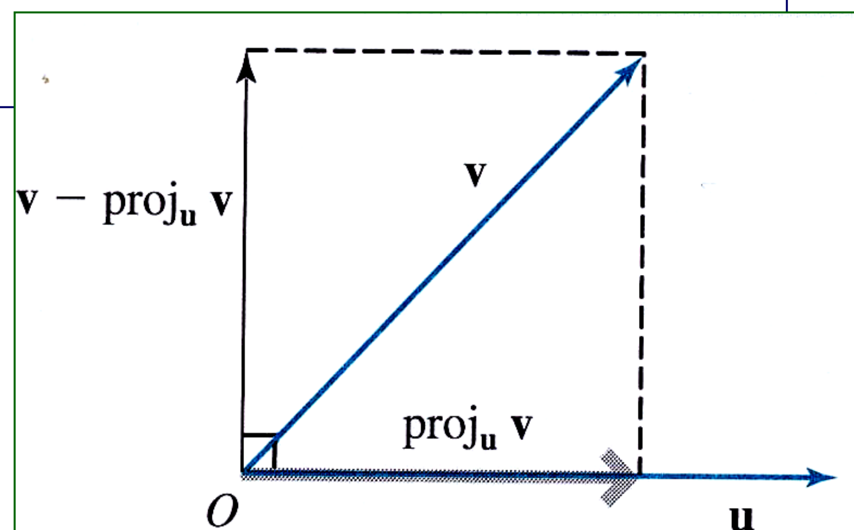
$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_n - \cdots - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_{n-1}}\mathbf{v}_n$$



Exemple

L'ensemble {(1, 2, 0, 3), (4, 0, 5, 8), (8, 1, 5, 6)} est linéairement indépendant dans $\mathbf{R}^4$. Les vecteurs constituent la base d'un sous-espace tridimensionnel V de $\mathbf{R}^4$. Construire une base orthonormée pour *V*.

Solution

Soit $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 5, 8)$, $\mathbf{v}_3 = (8, 1, 5, 6)\}$.
Utilisez le processus de Gram-Schmidt pour construire un ensemble orthogonal à partir de ces vecteurs. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

Soit $$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 3)$$

Soit $$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_2)}{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 = (2, -4, 5, 2)$$

Soit $$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3$$

$$= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)}{(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_2 = (4, 1, 0, -2)$$

L'ensemble$\{(1, 2, 0, 3), (2, -4, 5, 2), (4, 1, 0, -2)\}$ est une base orthogonale pour *V*.

Normalisez-les pour obtenir une base orthonormée :

$$\|(1, 2, 0, 3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|(2, -4, 5, 2)\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2 + 2^2} = 7$$

$$\|(4, 1, 0, -2)\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$\Rightarrow$ Une base orthonormée pour *V* est donnée par

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, 0, \frac{3}{\sqrt{14}}\right), \left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{21}}\right)\right\}$$