Algèbre linéaire

Chapitre 1
Systèmes d'équations linéaires

Master IASD

Tarik AMTOUT
tarik.amtout@gmail.com

1.1 Matrices et systèmes d'équations linéaires

Définition

- Une équation $x+3y=9$ s'appelle **une équation linéaire** **(à deux variables ou inconnues).**
- Le graphique de cette équation est une ligne droite dans le plan xy.
- Un couple de valeurs de x et y qui satisfont l'équation est appelée une solution.

Définition

Une équation linéaire à n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ a la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b$

où les coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ et b sont des nombres réels.

Solutions pour le système d'équations linéaires

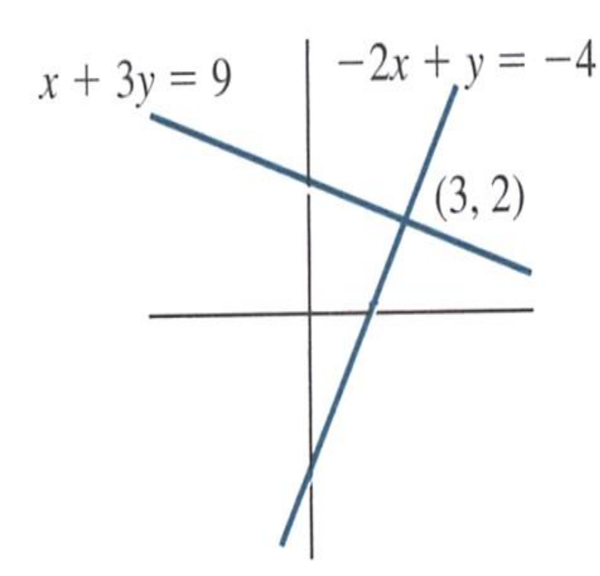


Figure 1.1

Solution unique

$x + 3y = 9$

$-2x + y = -4$

Les droites se croisent à (3, 2)

<u>Solution unique</u>:

$x = 3, y = 2.$

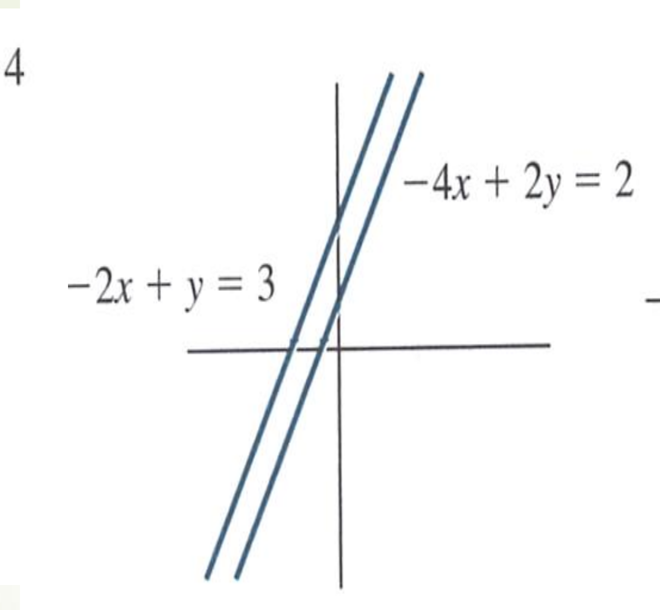


Figure 1.2

Pas de solution

$-2x + y = 3$

$-4x + 2y = 2$

Les droites sont parallèles

Aucun point d'intersection.

Aucune solution.

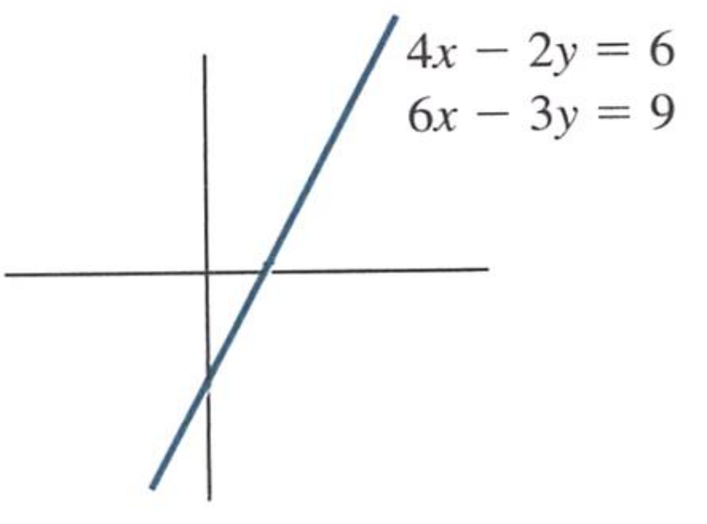


Figure 1.3

Infinitées de solutions

$4x - 2y = 6$

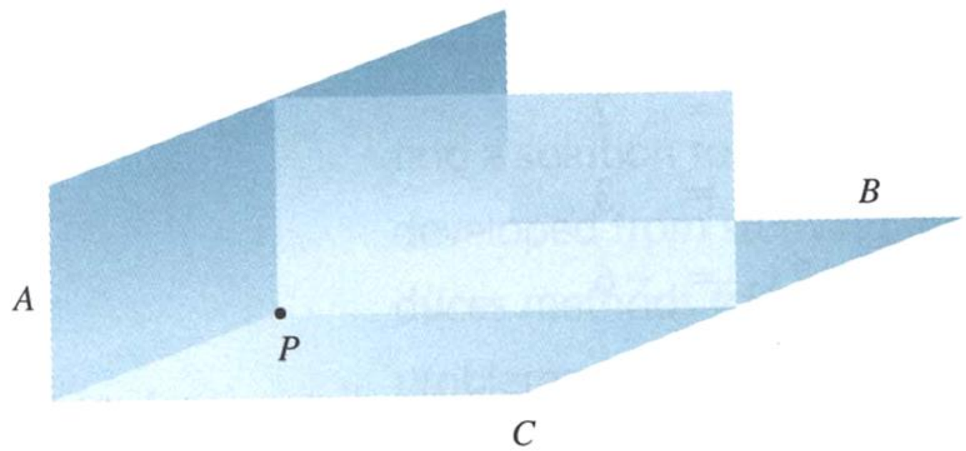
$6x - 3y = 9$

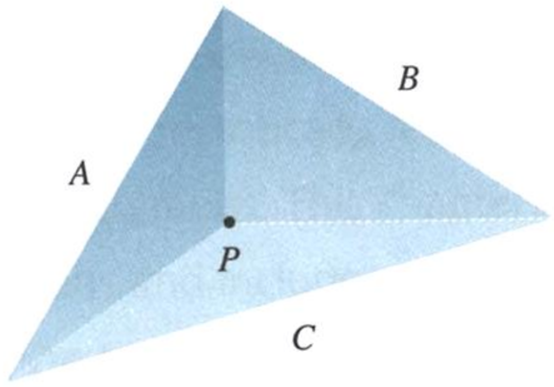
Les deux équations ont la même droite. Tout point de la droite est une solution.

Une équation linéaire à trois variables correspond à un plan dans un espace tridimensionnel.

※ Systèmes de trois équations linéaires à trois variables :

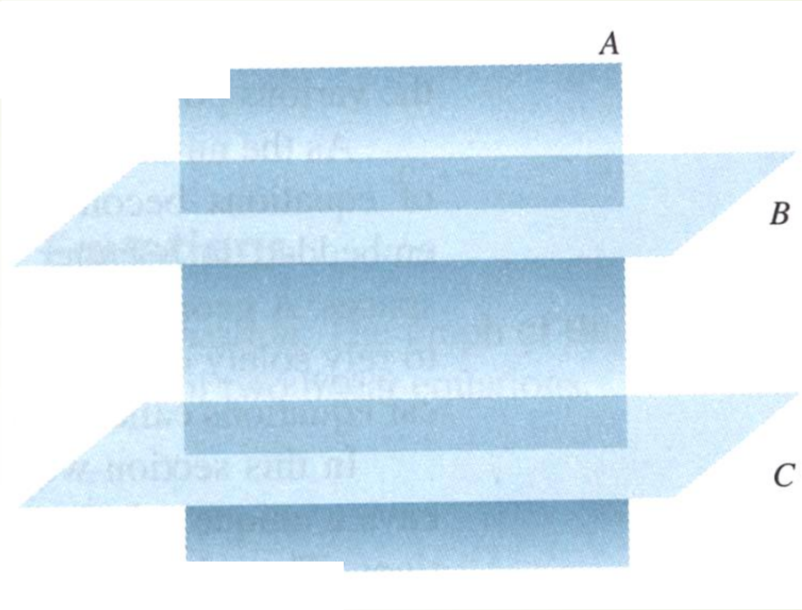
- *Solution Unique*



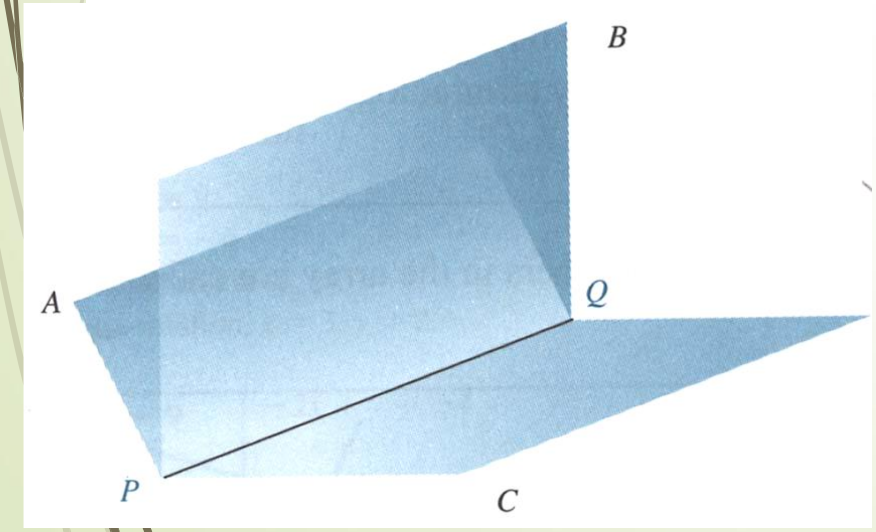


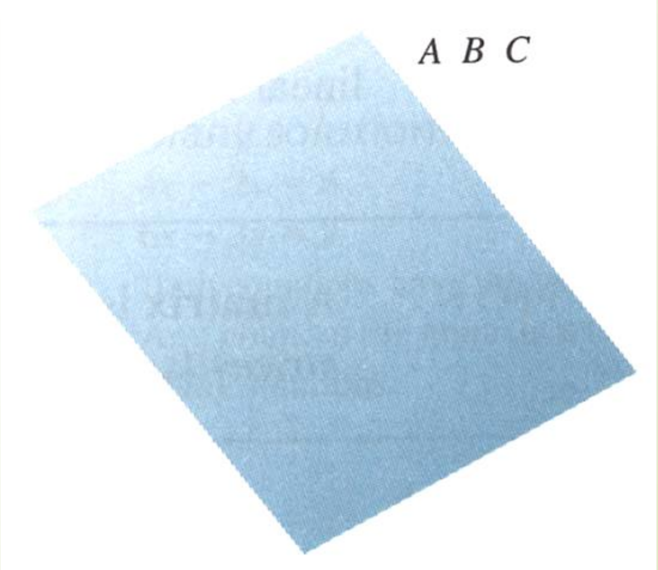
***

⌖ Pas de solutions



⌖ infinitée de solutions





Une solution à un système de trois équations linéaires sera constituée de points situés sur les trois plans.

Voici un exemple de système de trois équations linéaires :

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 &= 3 \\ x_1 - \ \ x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Comment résoudre un système d'équations linéaires ? Pour cela, nous introduisons une méthode appelée élimination de Gauss-Jordan. (Section 1.2)

Définition

- Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres.
- Les nombres du tableau sont appelés les éléments de la matrice.

Matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 5 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 5 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Ligne et colonne

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 7 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}7 & 5 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2\\ 7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-4\\ -1\end{bmatrix}$

Matrice extraite

$$A=\begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\ 2 & 3 & 0\\ 5 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$P=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ $Q=\begin{bmatrix}7\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$ $R=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$

Taille

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -9 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2x3 3x3 1x4 3x1

Position

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad a_{13} = -4, \; a_{21} = 7$$

Le coefficient a_{ij} est dans la i ème ligne , j ième colonne

Matrices identité

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Relations entre système d'équations linéaires et matrices

⌖matrice de coefficients et matrice augmentée

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + \quad x_3 &= 3 \\ x_1 - \quad x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Matrice de coefficient Matrice augmentée

Opérations élémentaires sur lignes des matrices

- **Transformation élémentaire**

1. Échangez deux équations.
2. Multipliez les deux côtés d'une équation par une constante non nulle.
3. Ajoutez un multiple d'une équation à une autre équation.

- **Opération élémentaire sur les lignes**

1. Échangez deux lignes d'une matrice.
2. Multiplier les éléments d'une ligne par une constante non nulle.
3. Ajoutez un multiple des éléments d'une ligne aux éléments correspondants d'une autre ligne.

Exemple 1

***_13

Résoudre le système d'équation linéaire suivant.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$\approx$ Ligne équivalente

Solution

Méthode d'équation

Système initial :

Eq2+(–2)Eq1

Eq3+(–1)Eq1

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ -2x_2 - 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Méthode matricielle analogue

Matrice augmentée:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$\approx$

R2+(–2)R1

R3+(–1)R1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

Eq1+(–1)Eq2

Eq3+(2)Eq2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ -2x_2 - 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

(–1/5)Eq3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ -5x_3 &= -10 \end{aligned}$$

$\approx$

R1+(–1)R2

R3+(2)R2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

Eq1+(–2)Eq3

Eq2+Eq3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\approx$

(–1/5)R3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\approx$

R1+(–2)R3

R2+R3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La solution est

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2.$

La solution est

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2.$

Exemple 2

Résoudre le système d'équation linéaire suivant.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 12\\
2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 18\\
-x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -8
\end{aligned}
$$

Solution

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12\\ 2 & -1 & 5 & 18\\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{bmatrix}
\underset{\substack{R2+(-2)R1\\ R3+R1}}{\approx}
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12\\ 0 & 3 & -3 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\left(\frac{1}{3}\right)R2}{\approx}
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}
\underset{\substack{R1+(2)R2\\ R3+(-1)R2}}{\approx}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\left(\frac{1}{2}\right)R3}{\approx}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\underset{\substack{R1+(-2)R3\\ R2+R3}}{\approx}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{solution}\begin{cases} x_1 = 2\\ x_2 = 1.\\ x_3 = 3 \end{cases}
$$

Exemple 3

Résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 &= 44 \\ 3x_1 + 6x_2 - \ \ 8x_3 &= 32 \\ -2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= -7 \end{aligned}$$

Solution

$$\begin{bmatrix} \boxed{4 \quad 8 \quad -12 \quad 44} \\ 3 \quad 6 \quad -8 \quad 32 \\ -2 \quad -1 \quad 0 \quad -7 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{4}\right)R1}{\approx} \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -3 \quad 11} \\ 3 \quad 6 \quad -8 \quad 32 \\ -2 \quad -1 \quad 0 \quad -7 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-3)R1 \\ R3+2R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{3 \quad -6 \quad 15} \end{bmatrix}$$

$$\underset{R2 \leftrightarrow R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & \boxed{3 \quad -6 \quad 15} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{3}\right)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & \boxed{1 \quad -2 \quad 5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{R1+(-2)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1 \quad -1} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+(-1)R3 \\ R2+2R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La solution est $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1.$

Conclusion

***_17

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 &= 44 \\ 3x_1 + 6x_2 - \ \ 8x_3 &= 32 \\ -2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= -7 \end{aligned}$$

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

A B

Utilisez les opérations sur les lignes pour $[A: \ B]$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \approx \cdots \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{i.e., } [A:B] \approx \cdots \approx [I_n : X]$$

Def. $[I_n : X]$ est appelée la forme d'échelon réduite de $[A : B]$.

Note. 1 . Si A est la matrice de coefficients d'un système de n équations à n variables qui a une solution unique, alors A est une ligne équivalente à I_n ($A \approx I_n$).

2. Si $A \approx I_n$, alors le système a une solution unique.

Exemple 4

Résoudre les trois systèmes d'équations linéaires suivants, qui ont tous la même matrice de coefficients.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= b_2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Pour $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+R2 \\ R3+(-1)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-1)R3 \\ R2+2R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les solutions aux trois systèmes sont $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$

1.2 Élimination de Gauss-Jordan

Définition

Une matrice est sous forme échelonnée réduite si

1. Toutes les lignes composées entièrement de zéros sont regroupées au bas de la matrice.
2. Le premier élément non nul de chaque autre ligne est 1. Cet élément est appelé un 1 initial.
3. Le premier 1 de chaque ligne après le premier est positionné à droite du premier 1 de la ligne précédente.
4. Tous les autres éléments d'une colonne contenant un 1 en tête sont nuls.

Exemples de forme échelonnée réduite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(✓) (✗) (✓) (✗)

- opérations élémentaires sur les lignes, forme échelonnée réduite
- La forme échelonnée réduite d'une matrice est unique.

1.2 Élimination de Gauss-Jordan

- Système d'équations linéaires
  $\Rightarrow$ matrice augmentée
  $\Rightarrow$ forme échelonnée réduite
  $\Rightarrow$ solution

Example 1

Utilisez la méthode d'élimination de Gauss-Jordan pour trouver la forme échelonnée réduite de la matrice suivante.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Solution

pivot (mettre à 1)

$$\underset{R1 \leftrightarrow R2}{\approx} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{3}\right)R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R3+(-4)R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{2}\right)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

pivot

$$\underset{\substack{R1+R2 \\ R3+(-2)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-2)R3 \\ R2+R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

La matrice est la forme échelonnée réduite de la matrice donnée.

Exemple 2

Résoudre, si possible, le système d'équations

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Solution

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{3}\right)R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+(-3)R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+R2 \\ R3+2R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -3x_3 + 4 \\ x_2 &= -2x_3 + 1 \end{aligned}$$

La solution générale du système est

$$\begin{aligned} x_1 &= -3r + 4 \\ x_2 &= -2r + 1 \\ x_3 &= r \end{aligned}$$

, Où r est un paramètre réel

Exemple 3

Résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 10x_4 &= 58 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -14 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 6x_4 &= 44 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Infinités de solution.

Solution

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 12 & -10 & 58 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\ 2 & -4 & 9 & -6 & 44 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{2}\right)R1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\ 2 & -4 & 9 & -6 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R2+R1 \\ R3+(-2)R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -14 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{3}\right)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R1+(-6)R2 \\ R3+3R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-1)R3 \\ R2+R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -2 \\ x_3 &= 6 \\ x_4 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2r - 2 \\ x_2 = r \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Pour certain r

Exemple 4

Résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R2\leftrightarrow R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\left(\frac{1}{2}\right)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R1+(-3)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+5R3 \\ R2+(-2)R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + x_3 + 3 \\ x_4 &= -1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2r + s + 3 \\ x_2 &= r,\ x_3 = s,\ x_4 = -1, \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Pour certain r et s

Exemple 5

Cet exemple illustre un système qui n'a pas de solution. Essayons de résoudre le système

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+(-2)R1 \\ R3+(-1)R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{R2\leftrightarrow R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\left(\frac{1}{3}\right)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+R2 \\ R4+(-2)R2}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-1)R3 \\ R2+R3 \\ R4+(-4)R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\left(\frac{1}{13}\right)R4}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{0x_1+0x_2+0x_3=1}$$

Le système n'a pas de solution.

Système homogène d'équations linéaires

Définition

Un système d'équations linéaires est dit homogène si tous les termes constants sont des zéros.

Exemple:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Remarque : $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ est une solution.

Théorème 1.1

Un système d'équations linéaires homogènes à n variables a toujours la solution $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. …, $x_n = 0$. Cette solution est appelée la solution triviale.

Système homogène d'équations linéaires

Note. Solution non triviale

Exemple: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

Le système a d'autres solutions non triviales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \approx \cdots \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = -3r,\ \ x_2 = 4r,\ \ x_3 = r$$

Théorème 1.2

Un système d'équations linéaires homogènes comportant plus de variables que d'équations possède de nombreuses solutions.

1.3 Méthode d’élimination de Gauss

Définition

Une matrice est sous forme échelonnée si

1. Toutes les lignes composées entièrement de zéros sont regroupées au bas de la matrice.
2. Le premier élément non nul de chaque ligne est 1. Cet élément est appelé le pivot.
3. Le pivot de chaque ligne après le premier est positionné à droite du premier 1 de la ligne précédente.
4. (Cela implique que tous les éléments en dessous d’un pivot sont nuls.)

Exemple 6

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Solution

En commençant par la matrice augmentée, créez des zéros sous le pivot dans la première colonne.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R2+R1 \\ R3+(-2)R1}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

A ce stade, nous créons un zéro uniquement en dessous du pivot.

$$\underset{R3+(-2)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}R3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous sommes arrivés à la forme échelonnée. Forme échelonnée

Le système d'équation correspondant est

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1$$
$$x_3 + 3x_4 = 1$$
$$x_4 = 2$$

On a

$$x_3 + 3(2) = 1$$
$$x_3 = -5$$

Subsitituons $x_4 = 2$ et $x_3 = -5$ dans la première équation,

$$x_1 + 2x_2 + 3(-5) + 2(2) = -1$$
$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 = -2x_2 + 10$$

Soit $x_2 = r$.

Le système propose de nombreuses solutions. Les solutions sont

$$x_1 = -2r + 10,\ \ x_2 = r,\ \ x_3 = -5,\ \ x_4 = 2$$

Exemple 7

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant la méthode de Gauss, en effectuant une rétro-substitution à l'aide de matrices.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\
-x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Solution

On arrive à la forme échelonnée comme dans l'exemple précédent.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & 4 \end{bmatrix} \approx \cdots \approx \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{Forme échelonnée}}
$$

Cela marque la fin de l’élimination directe des variables des équations. Nous commençons maintenant la substitution arrière en utilisant des matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R1+(-2)R3 \\ R2+(-3)R3}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R1+(-3)R2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est la forme échelonnée réduite de la matrice augmentée originale. Le système d'équations correspondant est

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ x_3 &= -5 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Soit $x_2 = r$. On obtient la même solution que précédemment,

$$x_1 = -2r + 10,\ \ x_2 = r,\ \ x_3 = -5,\ \ x_4 = 2$$