Université Abdelmalek Assaadi Année 2022-2023
Faculté des Sciences et Techniques Master IASD
Module M111
Tanger

Série n°3

Exercice 1.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le spectre de chacune des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

2. Pour chacune des matrices de l'exercice 1, calculer les sous-espaces propres et donner une base de chaque sous-espace propre.

Exercice 3.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (z, -2x + y + 2z, -2x + 3z).$$

1. *i)* Calculer le polynôme caractéristique de f.
ii) En déduire les valeurs propres de f et leur ordre de multiplicité.
2. Pour chacune des valeurs propres de f, déterminer le sous-espace propre associé et sa dimension.
3. *i)* L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Justifier la réponse.
ii) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.
iii) Construire une matrice P telle que :
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}.Mat_{\mathcal{B}_0}(f).P,$$
où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

Soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a+b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix},$$
où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *i)* Calculer le polynôme caractéristique de $f_{a,b}$.
ii) En déduire le spectre de $f_{a,b}$.

2. $i)$ Pour chaque valeur propre de $f_{a,b}$ d'ordre de multiplicité ≥ 2, déterminer le sous-espace propre associé.

$ii)$ En déduire que $f_{a,b}$ est diagonalisable.

Exercice 5.

Soient $\mathbb{R}_2[x]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré ≤ 2 et $h_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], h_{a,b}(f) = (2f_1 + a)f - (f_2 + b)f',$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $f_i : x \longrightarrow x^i$, $i = 1, 2$.

1. Donner la matrice de $h_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B} = (1, f_1, f_2)$.
2. Déterminer les valeurs propres de $h_{a,b}$ suivants les valeurs de a et b.
3. Etudier la diagonalisabilité et la trigonalisabilité de $h_{a,b}$ suivant les valeurs de a et b.
4. On suppose que $b = 0$. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ telle que

$$Mat_{\mathcal{B}}(h_{a,b}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$