# Algèbre linéaire

## *Chapitre 2*
## *Calcul matriciel*

**Master IASD**

Tarik AMTOUT
tarik.amtout@gmail.com

# 2.1 Addition, multiplication scalaire et multiplication de matrices

- $a_{ij}$: l'élément de la matrice A dans la i-ème ligne et la j-ième colonne.
  Pour une matrice carrée $n \times n$, la diagonale principale est:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Définition**

Deux matrices sont égales si elles sont de même taille et si leurs éléments correspondants sont égaux.

Ainsi $A = B$ si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\ i, j$.

# Addition de Matrices

**Définition**

Soient A et B des matrices de même taille.

Leur somme A + B est la matrice obtenue en additionnant les éléments correspondants de A et B.

La matrice A + B sera de la même taille que A et B.Si A et B ne sont pas de même taille, on ne peut pas les additionner, et on dit que la somme n'existe pas.

Si $C = A + B$, alors $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j.$

# Exemple 1

Soit $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ -3 & 1 & 8\end{bmatrix}$, et $C=\begin{bmatrix}-5 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}$.

Déterminer $A + B$ et $A + C$, si la somme existe

**Solution**

$$(1)\ A+B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 5 & -6\\ -3 & 1 & 8\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1+2 & 4+5 & 7-6\\ 0-3 & -2+1 & 3+8\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3 & 9 & 1\\ -3 & -1 & 11\end{bmatrix}.$$

(2) Car $A$ est une matrice de taille $2 \times 3$ et $C$ est une matrice $2 \times 2$, alors ne sont pas de même taille , $A + C$ n'existe pas .

# Multiplication par un scalaire

**Définition**

Soit A une matrice et c un scalaire. Le multiple scalaire de A par c, noté cA, est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de A par c. La matrice cA aura la même taille que A.

Si $B = cA$, alors $b_{ij} = ca_{ij}\ \forall i, j.$

## Exemple 2

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$

$$3A = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) & 3\times 4 \\ 3\times 7 & 3\times(-3) & 3\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 21 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarque que $A$ et $3A$ sont tous les deux $2 \times 3$ matrices.

# Soustraction

**Définition**

Nous définissons maintenant la soustraction de matrices de manière à la rendre compatible avec l'addition, la multiplication scalaire et la négative. Soit $A - B = A + (-1)B$

**Exemple 3**

On suppose $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-2 & 0-8 & -2-(-1) \\ 3-0 & 6-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -11 \end{bmatrix}.$$

# Mulitiplication des matrices

## Définition

Supposons que le nombre de colonnes d'une matrice A soit le même que le nombre de lignes d'une matrice B. Le produit AB existe alors.

Soit $A$ une matrice $m \times n$, $B$ une matrice $n \times k$,
Le produit matriciel ***C=AB*** a pour élément

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$C$ est une matrice $m \times k$.

Si le nombre de colonnes de A n’est pas égal au nombre de lignes B, on dit que le produit n’existe pas.

# Exemple 4

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, and $C = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Déterminer $AB$, $BA$, and $AC$ .

**Solution.**

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times5)+(3\times3) & (1\times0)+(3\times(-2)) & (1\times1)+(3\times6) \\ (2\times5)+(0\times3) & (2\times0)+(0\times(-2)) & (2\times1)+(0\times6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -6 & 19 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$BA$ et $AC$ n'existent pas. **Note.** En général, $AB \neq BA$.

# Exemple 5

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Déterminer $AB$.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+3 & 0+5 \\ -7+0 & 0+0 \\ 3-6 & 0-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 0 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$$

## Exemple 6

Soit $C = AB, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{-3 \quad 4} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -7 & 3 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} \\ 5 & 0 & \end{bmatrix}$ Déterminer $c_{23}$.

$$c_{23} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3 \times 2) + (4 \times 1) = -2$$

# Taille de produits

Si $A$ est une matrice de taille $m \times r$ et $B$ est une matrice de taille $r \times n$ alors $AB$ sera de taille $m \times n$

$$\begin{array}{ccc} A & B & = AB \\ m \times r & r \times n & m \times n \end{array}$$

## Exemple 7

Si $A$ *est de taille* $5 \times 6$ et $B$ de taille $6 \times 7$.

*Donc* $AB$ existe et $AB$ sera de taille $5 \times 7$.

# Matrices particulières

## Définition

Une matrice nulle est une matrice dans laquelle tous les éléments sont des zéros.

Une matrice diagonale est une matrice carrée dans laquelle tous les éléments qui ne sont pas sur la diagonale principale sont des zéros.

Une matrice identité est une matrice diagonale dans laquelle chaque élément diagonal vaut 1.

$$0_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Théorème

Soit une matrice $A$ de taille *et* $O_{mn}$ une matrice de nulle de taille $m \times n$. Soit $B$ une matrice carrée d'ordre $n$ . $O_n$ et $I_n$ respectivement la matrice nulle et la matrice identité d'ordre n. Donc

$$A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$$
$$BO_n = O_nB = O_n$$
$$BI_n = I_nB = B$$

## Example 8

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$A + O_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A$$

$$BO_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

$$BI_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

# 2.2 Propriétés algébriques des opérations matricielles

### *Théorème*

Soit A, B et C des matrices et a, b et c des scalaires. Supposons que la taille des matrices soit telle que les opérations puissent être effectuées.

**Propriétés de l'addition matricielle et de la multiplication scalaire**

1. $A + B = B + A$ *Commutativité de l'addition*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *Associativité de l'addition*
3. $A + O = O + A = A$ (*Où O est la matrice nulle*)
4. $c(A + B) = cA + cB$ *Distributivité de l'addition*
5. $(a + b)C = aC + bC$ *Distributivité de l'addition*
6. $(ab)C = a(bC)$

## *Théorème*

Soit A, B et C des matrices et a, b et c des scalaires. Supposons que la taille des matrices soit telle que les opérations puissent être effectuées.

**Properties of Matrix Multiplication**

1. $A(BC) = (AB)C$ — *Associativité de la multiplication*
2. $A(B + C) = AB + AC$ — *Distributivité de la multiplication*
3. $(A + B)C = AC + BC$ — *Distributivité de la multiplication*
4. $AI_n = I_nA = A$ — (*Où $I_n$ est la matrice identité*)
5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Note: $AB \neq BA$ in general. *Non commutative.*

En algèbre, nous savons que les lois suivantes s'appliquent.

- Si $ab = ac$ et $a \neq 0$ alors $b = c$.
- Si $pq = 0$ alors $p = 0$ ou $q = 0$.

Cependant, les résultats correspondants ne sont pas vrais pour les matrices.

- $AB = AC$ n'implique pas que $B = C$.
- $PQ = O$ n'implique pas que $P = O$ ou $Q = O$.

# Puissances de Matrices

## Définition

Si $A$ est une matrice carrée, alors

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{\text{k fois}}$$

## Théorème

Si A est une matrice carrée n x n et que r et s sont des entiers non négatifs, alors

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.
3. $A^0 = I_n$ (par définition)

# Exemple 12

Si $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ,alors $A^4$.

**Solution**

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Exemple 13** Simplifiez l'expression matricielle suivante.

$$A(A+2B)+3B(2A-B)-A^2+7B^2-5AB$$

**Solution**

$$\begin{aligned} &A(A+2B)+3B(2A-B)-A^2+7B^2-5AB \\ &=A^2+2AB+6BA-3B^2-A^2+7B^2-5AB \\ &=-\underline{3AB+6BA}+4B^2 \end{aligned}$$

On ne peut pas additionner le deux matrices !

# Systèmes d'équations linéaires

Un système de m équations linéaires à n variables comme suit

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Soit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ et } \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

On peut écrire le système d'équations sous forme matricielle

$$\boldsymbol{AX = B}$$

# Matrices idempotentes et nilpotentes

## Definition

(1) Une matrice carrée A est dite idempotente si $A^2=A$.
(2) Une matrice carrée A est dite nilpotente s'il existe un entier positif p tel que $A^p=0$. Le plus petit entier p tel que $A^p=0$ est appelé le degré de nilpotence de la matrice.

## Exemple 14

$$(1)\ A=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix},\ A^2=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{bmatrix}=A.$$

$$(2)\ B=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ B^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\ \text{Deg de nilpotence est: } 2$$

# Matrices symétriques

## Définition

La transposée d'une matrice A, notée $A^t$, est la matrice dont les colonnes sont les lignes de la matrice A donnée.

i.e., $A : m\times n \Rightarrow A^t : n\times m,\ (A^t)_{ij} = A_{ji}\ \ \forall i, j.$

### *Exemple 15*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\ \text{et}\ \ C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \qquad C^t = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

# Propriétés

Soit A et B des matrices et c un scalaire. Supposons que les tailles des matrices sont telles que les opérations peuvent être effectuées.

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(cA)^t = cA^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$
4. $(A^t)^t = A$

# Matrice symétrique

**Définition**

Une matrice symétrique est une matrice égale à sa transposée.

$$A = A^t, \quad \text{i.e.,} \quad a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j$$

***Exemple 16***

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 7 & 8 \\ -4 & 8 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

# 2.4 L'inverse d'une matrice

**Definition**

Soit A une matrice carrée d' ordre n. Si une matrice B peut être trouvée telle que $AB = BA = I_n$, alors A est dit inversible et B est appelé l'inverse de A. Si une telle matrice B n'existe pas, alors A n'a pas d'inverse. (On note $B = \mathbf{A^{-1}}$, et $A^{-k}=(A^{-1})^k$ )

***Exemple 19***

Prouver que l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ est $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

**Preuve**

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Ainsi $AB = BA = I_2$, prouvant que la matrice A a pour inverse B.

# Théorème

L'inverse d'une matrice inversible est unique.

# Élimination de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n

1. Mettre la matrice identité $I_n$ à A pour former la matrice $[A : I_n]$.

2. Calculer la forme échelonnée réduite de $[A : I_n]$.

Si la forme échelonnée réduite est du type $[I_n : B]$, alors $B$ est la matrice inverse.

Si la forme échelonnée réduite n'est pas du type $[I_n : B]$, alors $A$ n'est pas inversible.

# Exemple 20

Déterminer la matrice inverse de A $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

**Solution**

$$[A : I_3] = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\mathrm{R2}+(-2)\mathrm{R1} \\ \mathrm{R3}+\mathrm{R1}}}{\approx} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{(-1)\mathrm{R2}}{\approx} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\mathrm{R1}+\mathrm{R2} \\ \mathrm{R3}+(-2)\mathrm{R2}}}{\approx} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{\mathrm{R1}+\mathrm{R3} \\ \mathrm{R2}+(-1)\mathrm{R3}}}{\approx} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Alors $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

# Exemple 21

Déterminer la matrice inverse de A s'il existe

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Solution**

$$[A : I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{R2}+(-1)\text{R1} \\ \text{R3}+(-2)\text{R1}}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{R1}+(-1)\text{R2} \\ \text{R3}+3\text{R2}}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

# Propriétés de la matrice inverse

Soient A et B des matrices inversibles et c un scalaire non nul, Alors

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
5. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

# Théorème

Soit $AX = B$ un système de n équations linéaires à n variables.
Si $A^{-1}$ existe, la solution est unique et est donnée par $X = A^{-1}B$.

# Exemple 22

Résoudre le système suivant

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

## Solution

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Si la matrice des coefficients est inversible, l'unique solution est

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solution est $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1.$