Chapitre sur les

Systèmes d’équations algébriques

Plan du chapitre:

- Étude des systèmes dit linéaires (élimination de Gauss, factorisation LU, Cholesky)
- Généralisation de la méthode de Newton pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires.

Pour les systèmes linéaires, nous allons uniquement étudier les **méthodes dites directes**, i.e donnant la solution en un nombre fini et prédéterminé d'opérations.

Des **méthodes itératives**, nécessitant en théorie un nombre infinie d'opérations, existent également pour résoudre ces systèmes.

Pour les systèmes d'équations non-linéaires, l'utilisation de méthodes itératives devient obligatoire.

De manière générale, un système de m **équations linéaires** à n inconnues, est un système pouvant être écrit sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{3}$$

où $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_n}$ sont **les inconnues** et les $\boldsymbol{a_{ij}}$ **les coefficients** du système.

Le système (3), où $m = n$, s'écrit sous la forme matricielle $Ax = b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b}$$

En pratique, la matrice A et le second membre b seront connus, il s'agira de déterminer le vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Pour le cours, **on aura toujours $n = m$**, donc autant d'inconnues que d'équations.

On étudiera donc les systèmes où la matrice A est carrée.

Rappelons quelles conditions garantissent l'existence d'une solution au système.

Rappel

Les propositions équivalentes suivantes garantissent l'existence d'une solution au système matriciel $Ax = b$ (avec A matrice carrée)

- La matrice A est inversible, c-à-d A^{-1} existe ($AA^{-1} = A^{-1}A = I$),
- Le déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$ est non nul,
- La matrice A est de rang maximal (nombre d'inconnues=nombre d'équations),
- Le système $Ax = 0$ admet seulement la solution nulle.

Dans ce chapitre, on traitera uniquement le cas où l'une des propositions précédente est vérifiée. On considérera donc toujours le cas où A est inversible (non singulière), on écrira $x = A^{-1}b$.

✓ En pratique, on ne calculera jamais explicitement A^{-1}. Calculer l'inverse d'une matrice n'est pas numériquement efficace ! On va plutôt travailler sur le système linéaire de départ afin de déterminer x.

Comment résoudre de **manière systématique** un système linéaire ?

Regardons d'abord un cas particulier de matrices, les matrices diagonales.

Définition (Matrice diagonale)

La matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite **diagonale**, si ses entrées sont nulles en dehors de sa diagonale (i.e. si $i \neq j$ alors $a_{ij} = 0$).
Une telle matrice est donc de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On a alors, $\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times ... \times a_{nn} = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$

Dans ce cas, la résolution du système $Ax = b$ est immédiate,

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \;\; i = 1, \cdots, n$$

Définition (Matrice triangulaire)

La matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite **triangulaire inférieure** si tous les a_{ij} sont nuls pour $i < j$. Une matrice triangulaire inférieure est donc de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n_1\,2} & a_{n-1\,3} & \dots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,3} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Une matrice est dite **triangulaire supérieure** si tous les a_{ij} sont nuls pour $j < i$ (transposée d'une matrice triangulaire inférieure). Dans les deux cas, $\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times ... \times a_{nn} = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$

La résolution du système $Ax = b$ avec A triangulaire inférieure ou supérieure est également aisée. On effectue une **descente triangulaire** ou **remontée triangulaire**, selon le cas.

• A triangulaire inférieure → descente triangulaire

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k\right)}{a_{ii}}, \; i = 2, 3, \cdots, n. \tag{4}$$

• A triangulaire supérieure → remontée triangulaire

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \quad x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k\right)}{a_{ii}}, \; i = n-1, n-2, \cdots, 2, 1. \tag{5}$$

Attention !

Les formules (4) et (5) sont valides si les a_{ii} sont tous non nuls. Dans le cas contraire, cela signifie que $\det(A) = 0$ est donc que la matrice n'est pas inversible. Le système $Ax = b$ n'admet alors pas de solution unique.

Les méthodes de descentes et remontées triangulaires sont très génériques, mais nécessitent que A soit triangulaire.

L'idée va donc être de transformer une matrice carrée quelconque en matrice triangulaire.

! **Élimination de Gauss**

L'élimination de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A.

But: Introduire des zéros sous la diagonale de la matrice A afin de la rendre triangulaire supérieure.

On note l_i la ligne i de la matrice A. Les trois opérations élémentaires sont les suivantes :

- $(l_i \leftarrow \lambda l_i)$: remplacer la ligne i par un multiple d'elle-même,
- $(l_i \leftrightarrow l_j)$: intervertir la ligne i et j,
- $(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$: remplacer la ligne i par la ligne i plus un multiple de la ligne j.

Chacune de ces opérations revient à multiplier la matrice A par une matrice inversible W.

Remarque(s)

En multipliant par une telle matrice inversible W, la solution du système de départ n'est pas modifiée

$$WAx = Wb \iff W^{-1}WAx = W^{-1}Wb \iff Ax = b$$

- $(l_i \leftarrow \lambda l_i)$: W est une matrice ressemblant à la matrice identité, sauf pour le coefficient W_{ii} qui vaut λ,
- $(l_i \leftrightarrow l_j)$: W est une matrice où la ligne i et la ligne j de la matrice identité sont permutées,
- $(l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j)$: W est une matrice ressemblant à la matrice identité, sauf pour le coefficient W_{ij} qui vaut λ.

En pratique, dans l'élimination de Gauss, on ne multiplie pas par les matrices W, on fait plutôt les opérations élémentaires sur la matrice dite augmentée, *i.e* la matrice que l'on obtient en ajoutant le membre de droite b à la matrice A, c'est-à-dire:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Les opérations élémentaires sont faites **à la fois sur la matrice A et le second membre b.**

Une fois la matrice A rendu triangulaire supérieure, il ne reste plus qu'à effectuer une remontée triangulaire afin d'obtenir la solution x.

Avantage : permet de traiter des matrices quelconques,

Inconvénient : **si l'on change le second membre b, on doit tout recommencer !**

Dans l'élimination de Gauss, on effectue les opérations directement sur A et b, les matrices des opérations élémentaires ne sont pas conservées.

$\rightarrow$ On «jette» de l'information en effectuant l'élimination de Gauss !

La solution va être de conserver ces matrices.

Soit $T = W_N W_{N-1} \cdots W_1$ la matrice représentant la suite d'opérations élémentaires rendant la matrice A triangulaire supérieure. Cette matrice ne dépend pas de b et l'on a

$$TAx = Tb$$

Posons $U = TA$, U est la matrice triangulaire supérieure, et

$$T^{-1}Ux = T^{-1}Tb = b$$

Autrement dit, $T^{-1}U = A$, et posons

$$L = T^{-1} = (W_N W_{N-1} \cdots W_1)^{-1} = W_1^{-1} W_2^{-1} \cdots W_N^{-1}$$

L est la matrice triangulaire inférieure qui a permis d'éliminer les termes non nuls sous la diagonale de la matrice A dans l'élimination de Gauss.

On a donc la décomposition $A = LU$, cependant **cette décomposition n'est pas unique**. Elle le sera en ajoutant des contraintes supplémentaires sur L ou U.

Théorème (Décomposition LU)

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, telle que les sous matrices d'ordre $1 \leq k \leq n$ (sous matrices principales):

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

soient inversibles ($\det(A^k) \neq 0,\ 1 \leq k \leq n$). Alors il existe une matrice triangulaire supérieure U («Upper»), et une matrice triangulaire inférieure L («Lower»), telle que

$$A = LU$$

Si l'on fixe la diagonale de L (ou de U) avec des 1, la décomposition est unique.

On a donc le choix dans la matrice où l'on place les 1 sur la diagonale. La factorisation LU sera différente suivant que l'on place les 1 sur la diagonale de L ou la diagonale de U.

En quoi cela nous aide-t-il à résoudre $Ax = b$?

$$Ax = b \iff LUx = b$$

Posons $Ux = y$. **La résolution de $Ax = b$ se fait alors en deux étapes :**

1. Résoudre, par une descente, $Ly = b \quad (\to \ y)$
2. Résoudre, par une remontée, $Ux = y \quad (\to \ x)$

C'est la **méthode de résolution par décomposition LU**.

- Si l'on change le second membre b, on peut réutiliser la factorisation LU de la matrice A. Il suffira à nouveau d'effectuer une descente puis une remontée pour trouver x,
- L'hypothèse $\det(A^k) \neq 0$ permet de s'assurer qu'il n'y aura pas de pivots nuls pendant la décomposition,
- Lorsque les 1 sont sur la diagonale de L ($L_{ii} = 1$), il s'agit de la **décomposition de Doolittle** (ce que fait Matlab par défaut). Lorsque les 1 sont sur la diagonale de U ($U_{ii} = 1$), il s'agit de la **décomposition de Crout**.

Théorème (Décomposition $PA = LU$)

Soit A une matrice inversible. Il existe P une matrice produit de matrice de permutations, L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure telles que:

$$PA = LU, \text{ avec } |\det(P)| = 1$$

En pratique:

- Une permutation de ligne est toujours faite avant de faire les opérations pour annuler les termes de la colonne.
- Même lorsque les permutations de lignes ne sont pas «nécessaire», il est courant d'en réaliser afin que le pivot (l_{ii} ou u_{jj}) soit de valeur absolue la plus grande possible.

Voyons comment déterminer de façon automatique les matrices L et U, pour en tirer un algorithme implémentable.

Algorithme de décomposition LU (Crout): Supposons connues les $j-1$ premières colonnes de L et les $j-1$ premières lignes de U, on veut calculer la ligne j de U et la colonne j de L

- Calcul du pivot:

$$l_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{kj}$$

- Calcul de la colonne j de L pour $j+1 \leq i \leq n$:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}$$

- Calcul de la ligne j de U pour $j+1 \leq i \leq n$:

$$u_{ji} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki} \right)$$

Je vous **déconseille fortement** de retenir ces formules !

Il suffit d'écrire ce que l'on «veut». Exemple sur une matrice 4×4 et la décomposition de Crout.

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

1. Première colonne de L : (lignes de L) $\times$ (première colonne de U)

$$l_{11} = a_{11}, \quad l_{21} = a_{21}, \quad l_{31} = a_{31}, \quad l_{41} = a_{41}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}$$

2. Première ligne de U : (première ligne de L) × (colonnes de U)

$$l_{11}u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}/l_{11}, \quad u_{13} = a_{13}/l_{11}, \quad u_{14} = a_{14}/l_{11},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Deuxième colonne de L : (lignes de L) × deuxième colonne de U

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}, \quad l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12}, \quad l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}$$

4. Deuxième ligne de U : (deuxième ligne de L) $\times$ (colonnes de U)

$$u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13})/l_{22}, \quad u_{24} = (a_{24} - l_{21}u_{14})/l_{22}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Troisième colonne de L : (lignes de L) $\times$ troisième colonne de U

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}, \quad l_{43} = a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}$$

6. Troisième ligne de U : (troisième ligne de L) $\times$ (quatrième colonne de U)

$$u_{34} = (a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24})/l_{33}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Quatrième colonne de L : (lignes de L) $\times$ (quatrième colonne de U)

$$l_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34}.$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}$$

Pour limiter l'espace mémoire utilisé, la décomposition LU peut être stockée dans la matrice A (la matrice A est détruite au cours de l'opération)[9].

Définition (LU compacte)

La matrice LU compacte est la matrice:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

La décomposition LU permet de calculer facilement le déterminant de A, pour la décomposition de Crout, on aura:

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$

Et pour Doolittle,

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

✓ Même si la matrice A est une matrice creuse, *i.e* une matrice comportant de nombreux zéros, il n'y a aucune raison que la matrice compacte résultant de la factorisation LU soit également creuse.

Définition (Matrice à diagonale strictement dominante)

Une matrice A est à **diagonale strictement dominante** par lignes si:

$$\forall i, \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

ou par colonnes si:

$$\forall j, \ |a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^{n} |a_{ij}|$$

Théorème

Si A est à diagonale strictement dominante par colonne ou par ligne:

- A est inversible.
- L'élimination de Gauss et la décomposition LU se font sans permuter de lignes

Conclusion factorisation LU:

- Si $\det(A) = 0$, le système n'a pas de solution unique,
- Peu efficace pour n grand,
- Si tous les déterminants des sous-matrices principales A^k de A **sont non nuls, alors la décomposition n'exige pas de permutations**. De même si A est à diagonale strictement dominante,
- Si on a seulement A inversible ($\det(A) \neq 0$) alors on a l'existence d'une décomposition de la forme $PA = LU$, avec P une matrice de permutation.
- En pratique, on stocke la factorisation directement dans la matrice A. Attention, il est possible que la factorisation LU prenne plus de place en mémoire que la matrice A elle-même !

Voyons à présent la décomposition pour un type particulier de matrice.

Définition (Matrice Symétrique Définie Positive (SDP))

Soit A une matrice symétrique ($A = A^t$). A est dite définie positive si

$$Ax \cdot x = x^t Ax > 0, \ \ \forall x \neq 0$$

Théorème (Factorisation de Cholesky)

Soit A une **matrice symétrique**, les propositions suivantes sont équivalentes:

- A est définie positive,
- Les déterminants de toutes les sous matrices principales A^k de A sont **strictement positifs**,
- (les valeurs propres de A sont réelles et strictement positives),
- Il existe une factorisation dite de **Cholesky** de A : $\boldsymbol{A = LL^t}$, L étant une matrice triangulaire inférieure dont les termes sur la diagonale (l_{ii}) sont strictement positifs.

En pratique, on cherche donc une matrice L, triangulaire inférieure telle que

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Comme pour LU, on se sert directement de la matrice A pour déterminer les coefficients de L.

Quelques considérations sur la factorisation de Cholesky:

- Si $A = LL^t$, alors $\det(A) = \det(L)\det(L^t) = \det(L)^2 = (\Pi_{i=1}^{n} l_{ii})^2$
- La condition $l_{ii} > 0$ dans le théorème précédent, sert à assurer l'unicité de la factorisation,
- On ne construit et ne stocke qu'une matrice triangulaire inférieure L,
- La résolution de $Ax = b$ se fait toujours en deux étapes, comme pour LU. Seule l'étape de décomposition coûte moins cher.

Attention !

Il faut bien faire attention à vérifier les hypothèses du théorème avant d'effectuer la décomposition de Cholesky, c-à-d vérifier que A est symétrique et définie positive.

Avant de se lancer dans les calculs pour voir si une matrice est «Choleskysable», peut-on éliminer d'office certaines matrices ?

Supposons que A est «Choleskysable», alors A est symétrique et $A = LL^t$

$$\Rightarrow a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}^2 > 0$$

Autrement dit, si la matrice A possède au moins un coefficient négatif sur sa diagonale, alors la décomposition de Cholesky ne sera pas applicable.

Proposition

Soit A une matrice **symétrique** et a **diagonale strictement dominante**, dont les **termes diagonaux sont strictement positifs**, alors A admet une factorisation de Cholesky.

Attention !

Si la matrice A ne vérifie pas les conditions de la proposition, on ne peut rien conclure. Ce sont des conditions suffisantes mais pas nécessaires.

Comment mesurer la distance entre deux vecteurs ?

Définition (Norme vectorielle)

Une norme est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe $\|x\|$ telle que:

- $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Des exemples de normes:

- Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
- Norme 2 : $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
- Norme infinie : $\|x\|_\infty = \max_k |x_k| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

Comment mesurer la distance entre deux matrices ?

Définition (Norme matricielle)

Une norme matricielle est une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à $A \in M_n(\mathbb{R})$ associe $\|A\|$ telle que:

- $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Définition (Norme matricielle induite ou subordonnée)

Pour une norme vectorielle donnée $\|\cdot\|_i$, la norme matricielle induite est définie par:

$$\|A\|_i = \sup_{\|x\|_i \neq 0} \frac{\|Ax\|_i}{\|x\|_i} = \sup_{\|x\|_i = 1} \|Ax\|_i$$

Exemples de normes matricielles usuelles:

- La norme matricielle induite par la norme 1 (max sur la somme, en valeurs absolues, par colonne):

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \{|a_{1j}| + |a_{2j}| + \cdots + |a_{nj}|\}$$

- La norme matricielle induite par la norme infinie (max sur la somme, en valeurs absolues, par ligne):

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}|\}$$

✓ On a $\|A\|_1 = \|A^t\|_\infty$, et donc si A symétrique $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$

- Norme de Frobenius (norme induite par aucune norme):

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$