UNIVERSITE HASSAN-II CASABLANCA
Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la première année de la filière d'ingénieur de Génie Mathématique et Informatique

Épreuve d'analyse Durée 1 heure 30 mn

Exercice

1. Étudier la convergence de la série numérique de terme générale
$$\frac{\ln(n!)}{n^3}.$$

2. Soit f une fonction définie par
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$
Étudier la continuité et la dérivabilité de f et f' sur son domaine de défintion que l'on déterminera .

Problème

Le but de ce problème et le calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ à l'aide de connaissances générales en mathématiques.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente. (On pourra utiliser la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} t^2e^{-t^2} = 0$)
2. Soit t un réel. Calculer la limite de la suite de terme général
$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n.$$
3. Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$f_n(t) = \begin{cases} e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \leq \sqrt{n} \\ 0, & \text{si } t > \sqrt{n}. \end{cases}$$

(a) Etudier les variations de f_n pour $n \geq 2$.

(b) Montrer que f_n représente un maximum pour une valeur $\alpha_n$que l'on **ne** demande **pas** de calculer.

(on pourra étudier la fonction auxiliaire $g_n = t^2 + (n-1)\ln\big(1 - \dfrac{t^2}{n}\big)$.

(c) Montrer que

$$f_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^2}{n}\Big(1 - \frac{\alpha_n^2}{n}\Big)^{n-1}.$$

4. On admet que $f_n(\alpha_n) \sim \dfrac{2e^{-2}}{n-1}$ $(n \to +\infty)$. Déduire de la question précédente que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(t)dt = 0$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{t^2}{n}\Big)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

5. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$

(a) Montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ $\Big($utiliser $\cos^{(n)} t \sin^2 t = -\dfrac{1}{n+1}\big(\cos^{(n+1)} t\big)' \sin t\Big)$.

(b) En déduire que
$I_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)...3.1}{2n(2n-2)...2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \dfrac{2n(2n-2)...2}{(2n+1)(2n-1)...3.1}$.

(c) On rappelle que $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
Montrer que

$$\Big(I_{2n+1}\Big)^2 = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}.\frac{\pi}{2(2n+1)}$$

et calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sqrt{n} I_{2n+1}\Big)^2.$$

6. Montrer que $\sqrt{n} I_{2n+1} = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{t^2}{n}\Big)^n dt$.

7. En déduire en fin la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

<u>Fin de l'énoncé</u>