# 4.3 Conceptos de límite y continuidad para funciones escalares de variable vectorial de dos variables independientes.

## Definición

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto $S$ de $\mathbb{R}^n$. Sea $\overline{x}_0$ un punto de S o un punto frontera de $S$. Se dice que el límite de $f$ cuando $\overline{x}$ tiende a $\overline{x}_0$ es $L$, lo cual se denota como $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = L$

si, y sólo si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $\overline{x} \in S$ que satisfaga

$$0<\left\|\overline{x}-\overline{x}_0\right\|<\delta, \quad \text{tenemos} \quad \left|f\left(\overline{x}\right)-L\right|<\varepsilon.$$

$$n=2,\ f:S\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \iff \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$$

$\cdot\ni\cdot$ $\forall (x,y)\in S$ que satisfaga

$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

se tiene $|f(x,y)-L|<\varepsilon$

## Ejemplo:

Probar $\lim_{(x,y)\to(0,4)} x^2+y^2=16$

$(x_0, y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,4)} x^2+y^2=16 \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$$

$\ni \ \forall (x,y)\in S$ que satisfaga

$$0<(x-0)^2+(y-4)^2<\delta^2$$

se tiene que $|x^2+y^2-16|<\varepsilon$

$$\underline{\delta(\varepsilon)=?}$$

$$|x^2+y^2-16| < \varepsilon$$

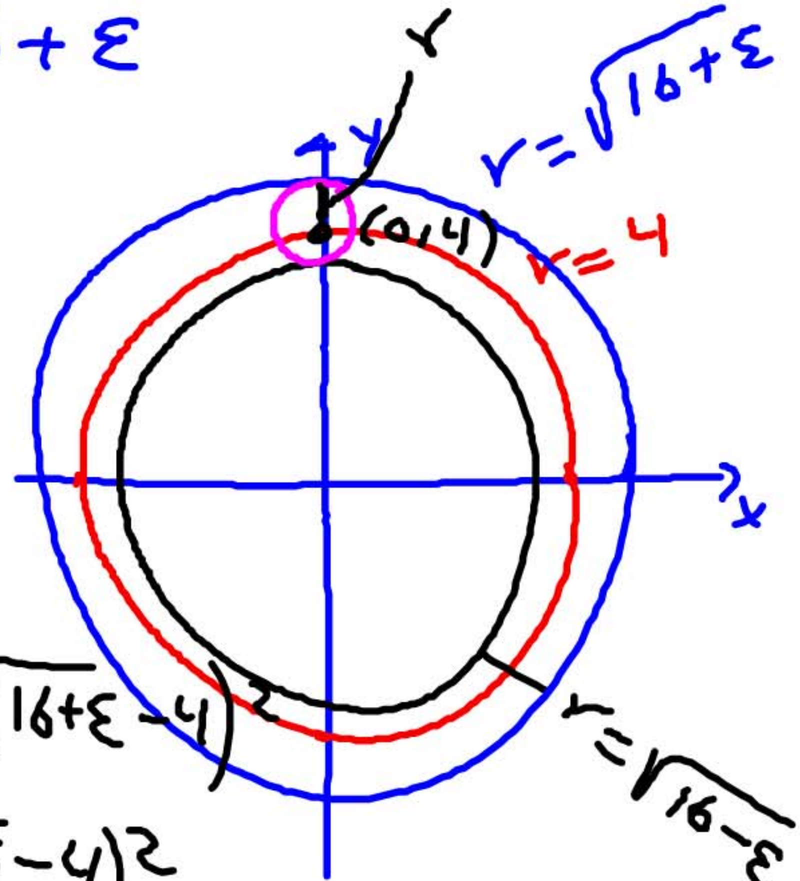
$$-\varepsilon < x^2+y^2-16 < \varepsilon$$

$$16-\varepsilon < x^2+y^2 < 16+\varepsilon$$

$$x^2+y^2=16$$

$$x^2+y^2=16-\varepsilon$$

$$x^2+y^2=16+\varepsilon$$




$$0 < (x-0)^2+(y-4)^2 < \left(\sqrt{16+\varepsilon}-4\right)^2$$

$$0 < x^2+(y-4)^2 < \left(\sqrt{16+\varepsilon}-4\right)^2$$

$\delta = \sqrt{16+\varepsilon} - 4$ $\quad\quad$ $\varepsilon > 0$

$\varepsilon = 0.01$

## Ejemplo:

Probar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$\cdot \ni \cdot$ $\forall (x,y) \in S$ que satisfaga

$$0 < (x-0)^2 + (y-0)^2 < \delta^2$$

se tiene $* \left| \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$

$$\delta(\varepsilon) = ?$$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{\cancel{x^2} y}{\cancel{x^2}}\right| \leq |y| \rightarrow \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq |y|$$

$$\frac{1}{2+1} < \frac{1}{2}$$

$$y^2 \leq x^2+y^2 < \delta^2$$

$$\sqrt{y^2} < \sqrt{\delta^2} \rightarrow |y| < \delta$$

$$* \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| < \delta$$

$$\delta = \varepsilon$$

Ejemplo:

Probar $\lim_{(x,y)\to(1,3)} 2x+3y=11.$

$\lim_{(x,y)\to(1,3)} 2x+3y=11 \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$

$\ni \cdot\ \forall (x,y)\in S$ que satisfaga

$$0<(x-1)^2+(y-3)^2<\delta^2$$

se tiene $\ast\ |2x+3y-11|<\varepsilon$

$$\delta(\varepsilon)=?$$

$$|2x+3y-11| = |2x-2+3y-9| =$$

$$= |2(x-1)+3(y-3)| \leq 2|x-1|+3|y-3| < 5\delta$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Desigualdad del triángulo

$$|a| = |2(x-1)| = 2|x-1|$$

$$|b| = |3(y-3)| = 3|y-3|$$

$$(x-1)^2 \leq (x-1)^2+(y-3)^2 < \delta^2$$

$$\sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{\delta^2} \rightarrow |x-1| < \delta$$

$$(y-3)^2 \leq (x-1)^2+(y-3)^2 < \delta^2$$

$$|y-3| < \delta$$

$$\begin{array}{r} 2|x-1| < 2\delta \\ + \quad 3|y-3| < 3\delta \\ \hline 2|x-1| + 3|y-3| < 5\delta \end{array}$$

$$* \quad |2x+3y-11| < 5\delta$$

$$\varepsilon = 5\delta$$

$$\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$$

## Continuidad.

### Definición. Continuidad en un punto.

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto S de $\mathbb{R}^n$ y sea $\overline{x}_0$ en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $f$ es continua en $\overline{x}_0$ si

$$\boxed{\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f\left(\overline{x}\right) = f\left(\overline{x}_0\right)}$$

Si la función $f$ no es continua en $\overline{x}_0$, se dice que es discontinua en ese punto.

$$n = 2, \quad f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}}_{\text{Debe existir}} f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{Debe estar definida}}$$

deben ser iguales

La función es continua en $(x_0, y_0)$

# Ejemplo:

Determine si la función $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ es continua en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

$f(0,0)$ = no está definida

$\therefore$ la función no es continua en $(0,0)$

## Definición. Continuidad en un conjunto abierto.

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto $S$ de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $f$ es continua en S (o simplemente $f$ es continua) si lo es para todos y cada uno de los puntos $(x, y) \in S$.

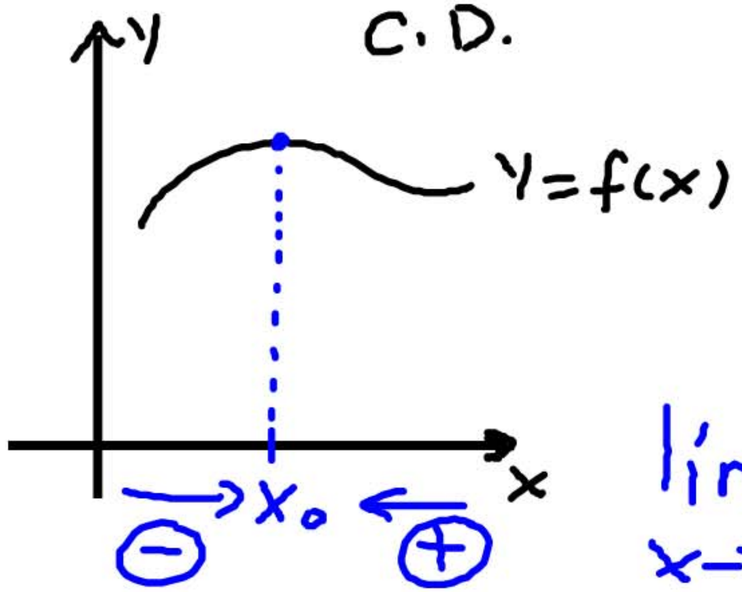
## Ejemplo:

Determine el conjunto en el cual es continua la función $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Continua en: $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

# Existencia y cálculo de límites.

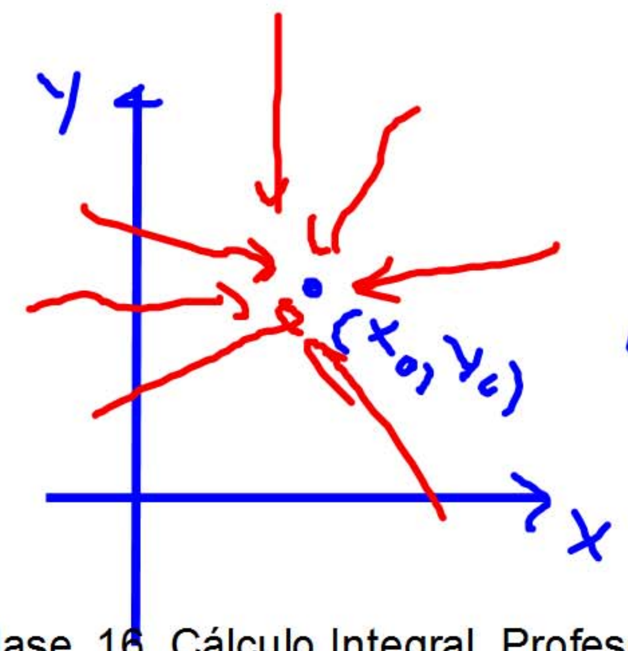
C.D.




$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

$\Uparrow$ existe

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$



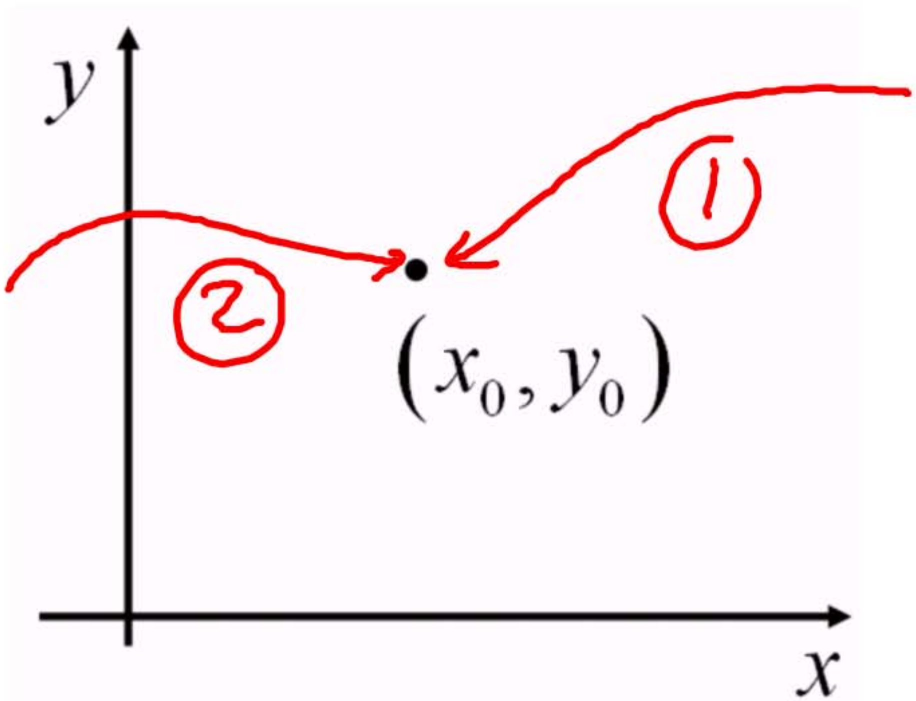

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y)$$

## Teorema.

Sea $z = f(x, y)$ una función escalar definida en un dominio $S$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que el límite de $f(x, y)$, cuando $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$, exista, es que el valor del límite asociado a las distintas formas de aproximarse al punto $(x_0, y_0)$ dentro del dominio $S$ sea siempre el mismo.

# Prueba de las dos trayectorias para la no existencia de un límite.

$$\left. \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y) \right|_{\substack{\text{A través} \\ \text{de } 1}} \neq \left. \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lím} f(x,y) \right|_{\substack{\text{A lo largo} \\ \text{de } 2}}$$



## Ejemplo:

Determine si existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

### A lo largo de $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left. \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right|_{y=mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 m x}{x^2+m^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0$$

Si tal límite existe, este debe ser cero.

# A través de $y = mx^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|_{y=mx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx^2}{x^2+m^2x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{1+m^2x^2} = 0$$

Si tal límite existe, este debe ser cero.

## Ejemplo:

Determine, si existe el límite $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

## A través de $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right|_{y=mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^4+m^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

Si tal límite existe, este debe ser cero.

# A lo largo de $y = mx^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right|_{y=mx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot mx^2}{x^4+m^2x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} m=0, \quad y=0, \quad L=0 \\ m=1, \quad y=x^2, \quad L=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \text{El límite no existe.}$$

## Límites iterados o sucesivos.

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y $(x_0, y_0) \in S$. Los límites iterados o sucesivos se definen como los límites

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) \text{ y } \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right), (x,y) \in S$$

Su igualdad no garantiza la existencia del límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ pero es condición necesaria para la existencia del límite doble que los límites iterados sean iguales.

Si los límites iterados son distintos el límite doble no existe.

# Ejemplo:

Determine, si existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{\substack{y\to 0\\ x=\text{const}}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{0}{x^2}}_{=0}\Big) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\text{const}}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\underbrace{\frac{0}{y^2}}_{=0}\Big) = 0$$

Si tal límite existe, este debe ser cero.

## Ejemplo:

Determine, si existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{\substack{y\to 0\\ x=\text{const}}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\overbrace{\left(\frac{0}{x^4}\right)}^{=0} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\text{const}}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\overbrace{\left(\frac{0}{y^2}\right)}^{=0} = 0$$

Si tal límite existe, este debe ser cero.

El límite no existe (ver trayectorias)

# Cálculo de límites.

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{0}{\sqrt{4}} = 0$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\overset{=0}{x^2-2xy+y^2}}{\underset{\overset{\|}{0}}{x-y}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x-y} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} x-y = 0$$

$$3)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5-\sqrt{25-xy}}{xy} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5-\sqrt{25-xy}}{xy} \cdot \frac{5+\sqrt{25-xy}}{5+\sqrt{25-xy}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{25}-\cancel{25}+\cancel{xy}}{\cancel{xy}\left(5+\sqrt{25-xy}\right)} = \frac{1}{10}$$