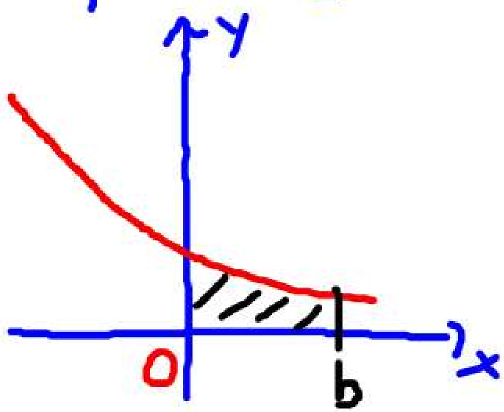
2.7 La integral impropia

Integrales impropias con límites infinitos

$f(x) = e^{-x}$



$$A = \int_0^b e^{-x}\,dx$$

$b \to \infty$

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$$

Integral impropia

Definición de integrales impropias con límites de integración infinitos.

1. Si f es continua en el intervalo $[a,\infty)$, entonces

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty,b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $(-\infty,\infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real.

En los dos primeros casos, la integral impropia converge si el límite existe y tiene valor finito; en caso contrario, la integral impropia diverge. En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

Ejemplos

De ser posible, encuentre $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\,dx.$

$$\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} x e^{-x^2} dx =$$

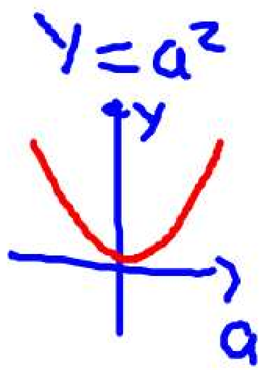
$$\begin{bmatrix} u = -x^2 & x = -1, & u = -1 \\ du = -2x\,dx & x = a, & u = -a^2 \end{bmatrix} =$$

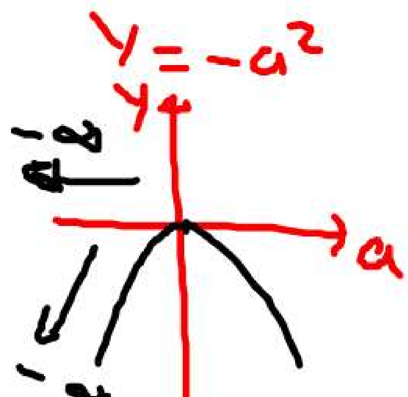
$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} \frac{-2}{-2} x e^{-x^2} dx =$$

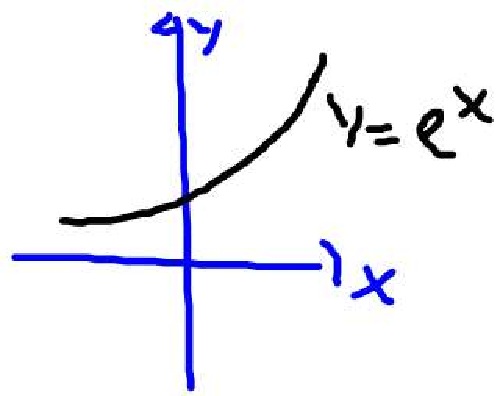
$$= \lim_{a \to -\infty} -\frac{1}{2} \int_{-a^2}^{-1} e^{u}\, du =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} -\frac{1}{2} e^{u} \Big]_{-a^2}^{-1} = \lim_{a \to -\infty} -\frac{1}{2} \Big(e^{-1} - \underbrace{e^{\overbrace{-a^2}^{\to -\infty}}}_{\to 0} \Big) =$$

$$= \underline{-\frac{1}{2} e^{-1}}$$







La integral impropia converge

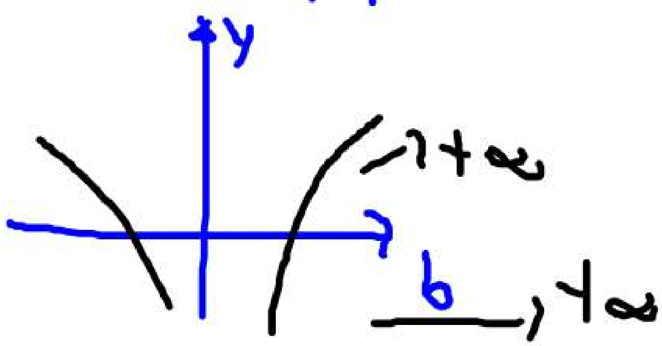
y su valor es $-\frac{1}{2}e^{-1}$.

Calcular, de ser posible $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \ln|x| \Big]_1^{b} =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \ln|b| - \overbrace{\ln|1|}^{=0} = +\infty$$

$y = \ln|b|$



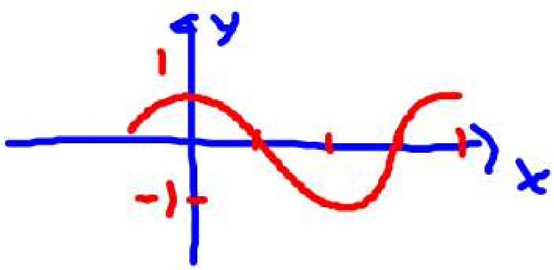
$\therefore$ La integral impropia diverge.

De ser posible, encuentre $\int_0^{\infty} senx dx$.

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\cos x \Big]_0^{b} = \lim_{b\to\infty} -\cos b + 1 = \nexists$$

$y = \cos b$



La integral impropia diverge.

Evalúe la integral, si es convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx =$$

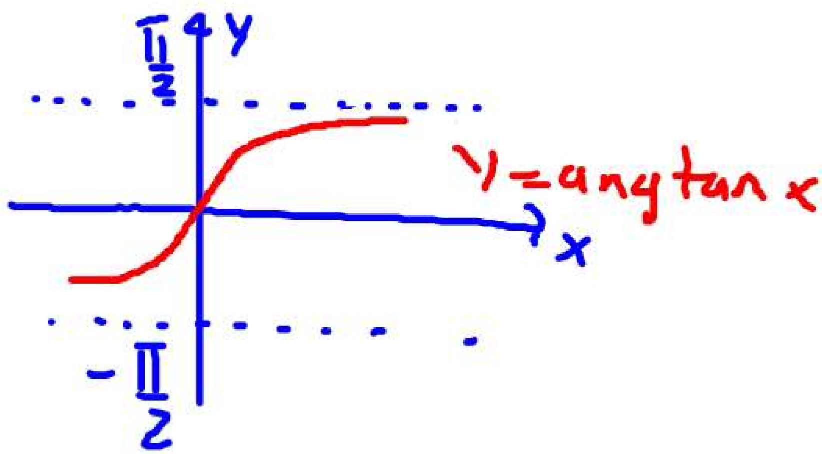
$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \operatorname{angtan} x \Big]_a^0 + \lim_{b \to \infty} \operatorname{angtan} x \Big]_0^b =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \overbrace{\operatorname{angtan}(0)}^{=0} - \operatorname{angtan}(a)$$

$$+ \lim_{b \to \infty} \operatorname{angtan}(b) - \overbrace{\operatorname{angtan}(0)}^{=0} =$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$



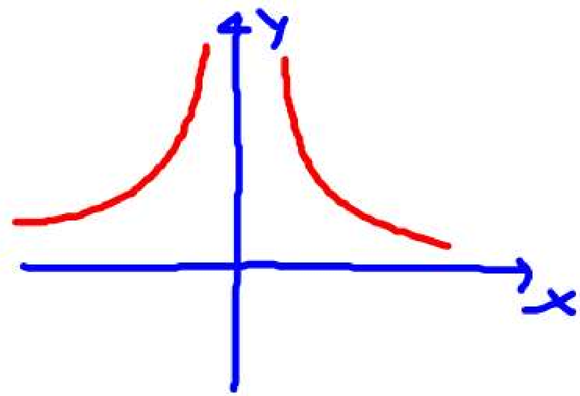
La integral impropia converge y su valor es π.

Integrales impropias con discontinuidades infinitas

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$x = 0,\ f \to \infty$



Definición de integrales impropias con discontinuidades infinitas.

1. Si f es continua en el intervalo $[a,b)$ y tiene una dicontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(a,b]$ y tiene una dicontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

3. Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ excepto en algún c en (a,b), en el que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

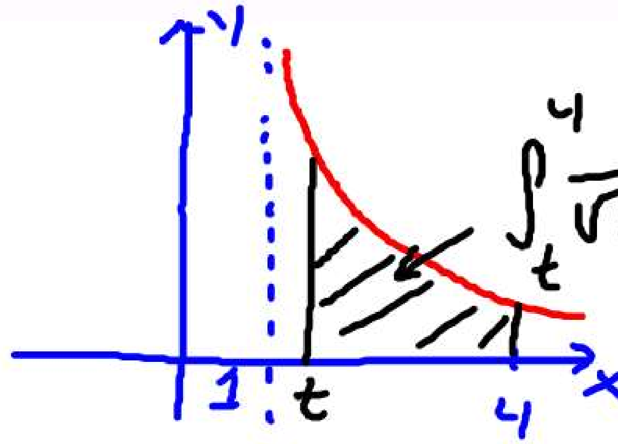
En los dos primeros casos, la integral impropia converge si el límite existe y tiene valor finito. De no ser así, la integral diverge.
En el tercer caso, la integral impropia de la izquierda diverge si cualquiera de las integrales impropias de la derecha diverge.

Ejemplo

Calcular, de ser posible, la integral $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$x = 1,\ f \to \infty$



$$\int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t \to 1^+} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x-1 \\ du = dx \end{array}\right.$$

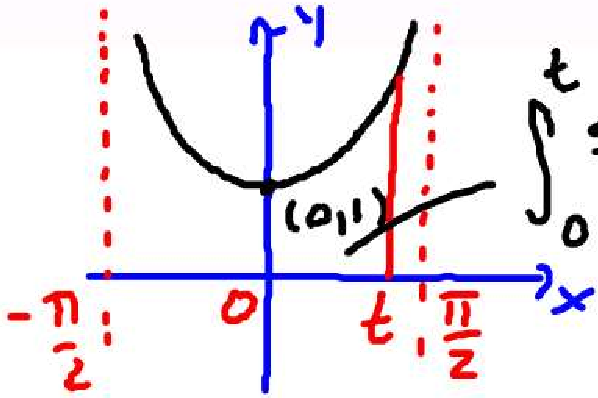
$$\left.\begin{array}{ll} x = 4, & u = 3 \\ x = t, & u = t-1 \end{array}\right] = \lim_{t \to 1^+} \int_{t-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du =$$

$$= \lim_{t \to 1^+} 2\sqrt{u}\,\Big]_{t-1}^{3} = \lim_{t \to 1^+} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-1}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

La integral impropia converge y su valor es $2\sqrt{3}$.

Calcular, de ser posible, la integral $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sec x dx$.



$$\int_0^t \sec x dx$$

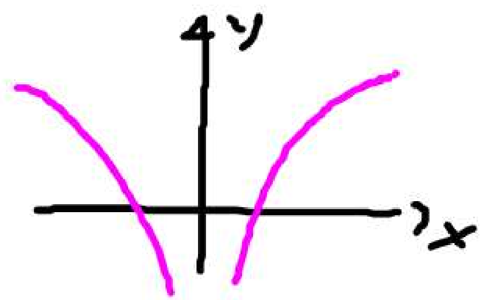
$$\int_0^{\pi/2} \sec x dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \sec x dx =$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x + \tan x| \Big]_0^t =$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \ln\left|\overset{\to +\infty}{\sec t} + \overset{\to +\infty}{\tan t}\right| - \ln\left|\overset{=1}{\sec(0)} + \overset{=0}{\tan(0)}\right| =$$

$$= +\infty$$

$y = \ln|x|$

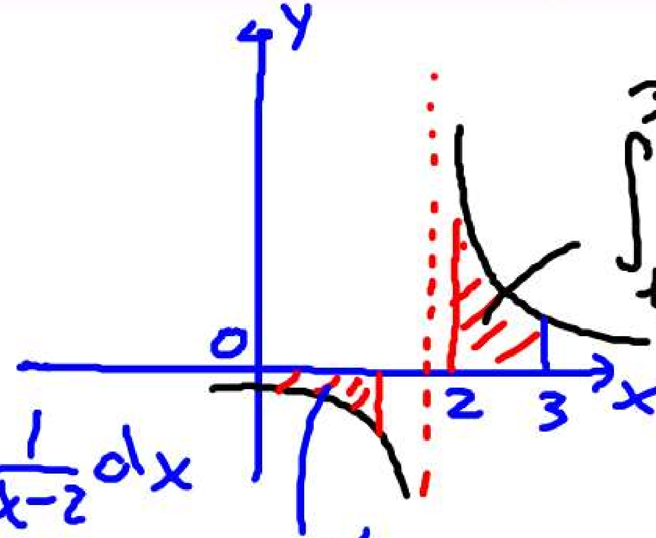


La integral impropia diverge.

Calcular, de ser posible, la integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx$.

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$x = 2, \quad f \to \infty$$



$$\int_t^3 \frac{1}{x-2}\,dx$$

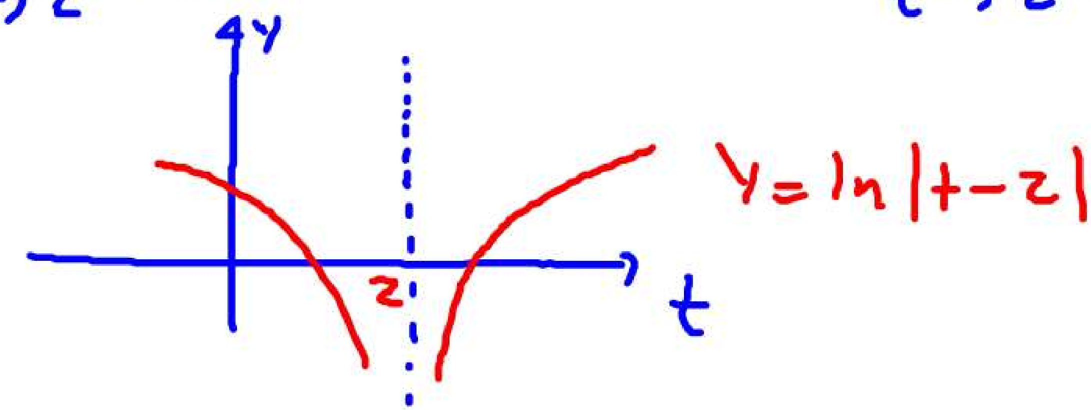
$$\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$\int_0^t \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{t \to 2^-} \int_0^t \frac{1}{x-2}\,dx + \lim_{t \to 2^+} \int_t^3 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \ln|x-2|\Big]_0^t + \lim_{t\to 2^+} \ln|x-2|\Big]_t^3 =$$

$$= \lim_{t\to 2^-} \overset{\to -\infty}{\cancel{\ln|t-2|}} - \ln|-2| + \lim_{t\to 2^+} \ln|1| - \overset{\to -\infty}{\cancel{\ln|t-2|}} =$$



La integral impropia diverge.