4.9.1. Concepto de gradiente. Operador nabla.

Definición

El gradiente de una función f (o derivada de f) con n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (denotado indistintamente con $gradf$, $\dfrac{df}{d\overline{x}}$ ó ∇f) está dado por

$$gradf = \frac{df}{d\overline{x}} = \nabla f\left(\overline{x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overline{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\overline{e}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\overline{e}_n$$

En donde los vectores $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del espacio $\mathbb{R}^n$, respectivamente, y $\overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right)$.

Para $n = 3$, $grad f = \nabla f = \frac{df}{d\bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

$f(x, y, z)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) f$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$ es el operador de Hamilton llamado "nabla".

Ejemplos:

Obtenga el gradiente para las funciones

1) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad \nabla f\big|_{(1,1)}$

2) $f(x,y,z)=3^x \cosh y \ln z$

1) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad \nabla f\big|_{(1,1)}$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

$$\nabla f = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$$

$$\nabla f\big|_{(1,1)} = 2(1)\hat{i} + 2(1)\hat{j}$$

$$\underline{\nabla f(1,1) = 2\hat{i} + 2\hat{j}}$$

$$2)\ f(x,y,z) = 3^x \cosh y \ln z$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f = \left(3^x \ln 3 \cosh y \ln z\right)\hat{i} + \left(3^x \operatorname{senh} y \ln z\right)\hat{j}$$

$$+ \left(\frac{3^x \cosh y}{z}\right)\hat{k}$$

Propiedades del gradiente

Suponga que f y g son funciones diferenciables de dos variables, entonces

1) $\nabla(cf) = c\nabla f$

2) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

3) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

4) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

4.9.2. Definición de derivada direccional

Definición

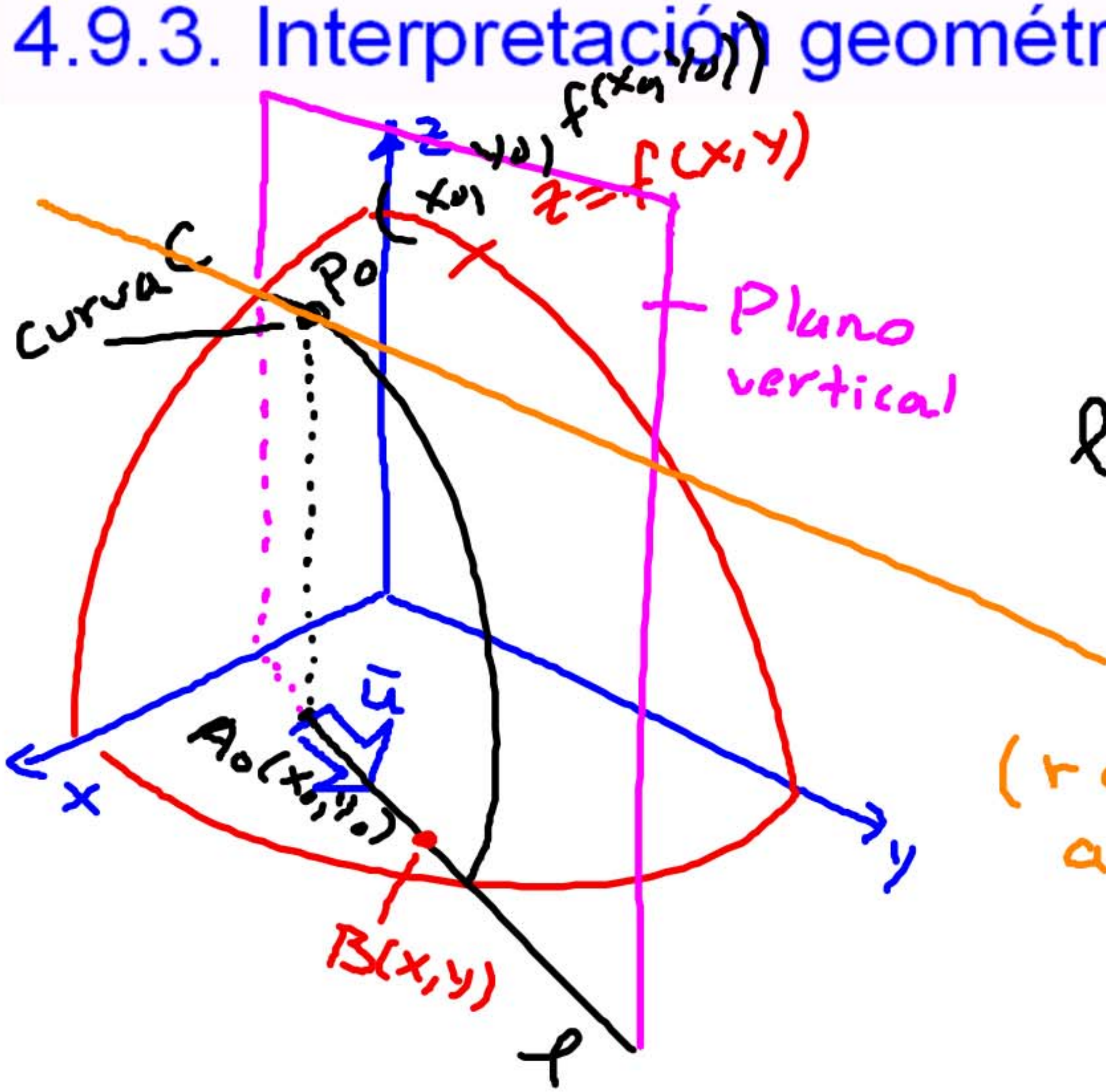
La derivada direccional de $z = f(x, y)$ en $A_0(x_0, y_0)$ en la dirección del vector unitario $\overline{u} = \cos\theta\hat{i} + sen\theta\,\hat{j}$ es el número

$\|\overline{u}\| = 1$

$$\left(\frac{df}{ds}(x_0, y_0)\right)_{\overline{u}} = \underset{s\to 0}{lím}\ \frac{f(x_0 + s\cos\theta, y_0 + s\,sen\theta) - f(x_0, y_0)}{s}$$

siempre que el límite exista.

4.9.3. Interpretación geométrica y aplicaciones.

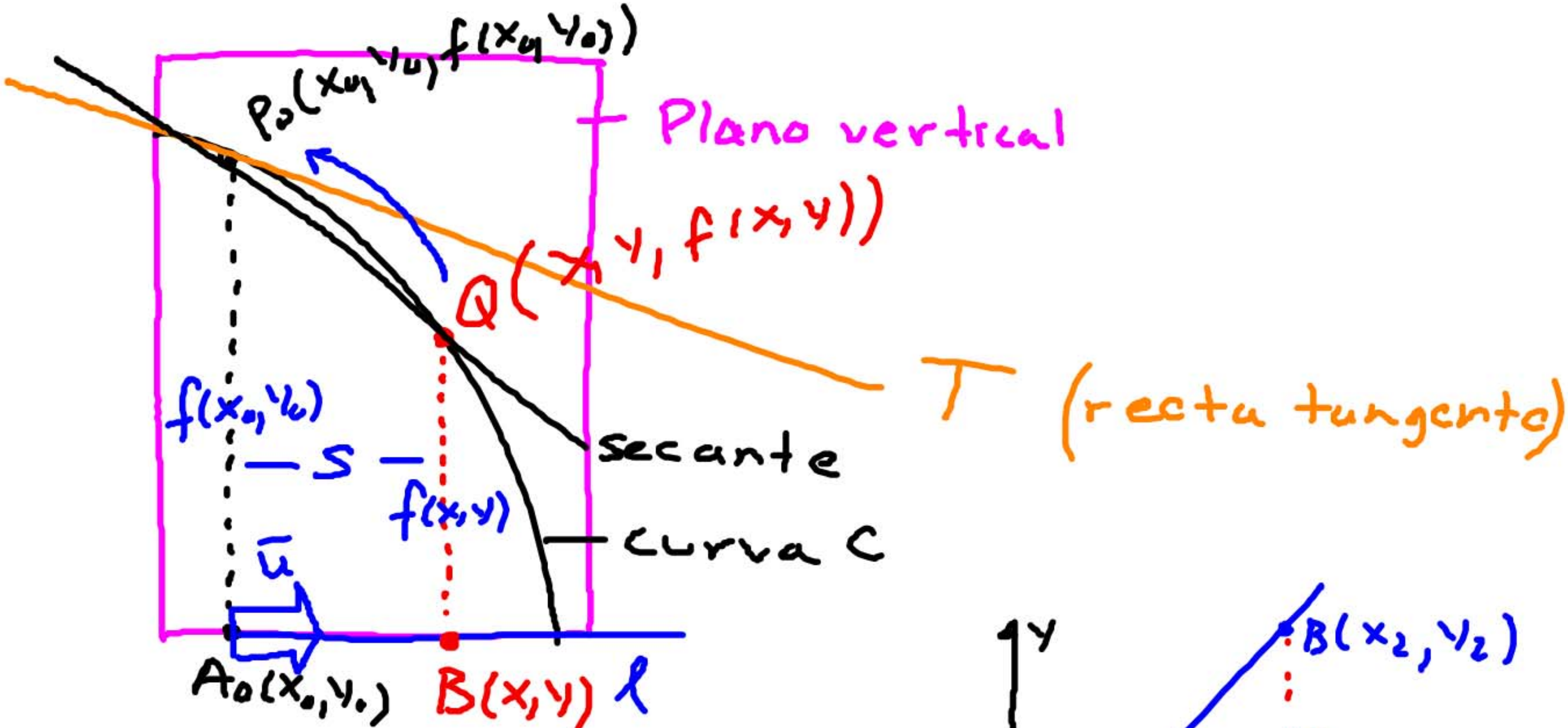


Semirrecta

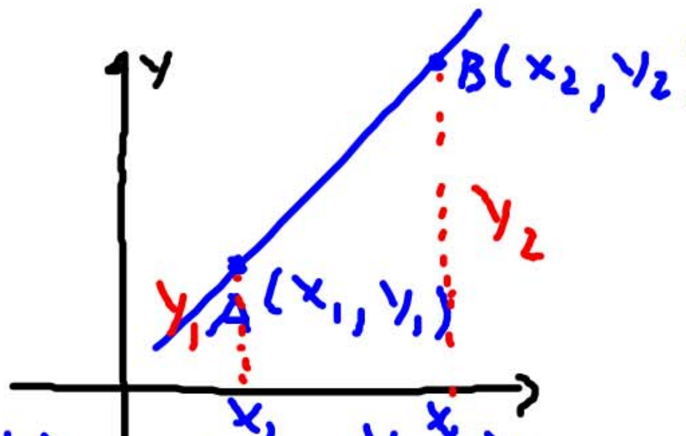
$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + s\cos\theta \\ y = y_0 + s\,\text{sen}\,\theta \end{cases},$$

$$s \geq 0$$

T
(recta tangente a C en P_0)



$$m_{sec\,P_0Q} = ?$$



$$m_{sec\,P_0Q} = \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0)}{s}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$d_{A_0B} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{(\cancel{x_0}+s\cos\theta-\cancel{x_0})^2+(\cancel{y_0}+s\,\mathrm{sen}\,\theta-\cancel{y_0})^2}$$

$$= \sqrt{s^2} = |s| = s$$

$$s \geq 0$$

$$m_{\sec P_0 Q} = \frac{f(x_0+s\cos\theta,\, y_0+s\,\mathrm{sen}\,\theta)-f(x_0,y_0)}{s}$$

$$\lim_{Q\to P_0} m_{\sec P_0 Q} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+s\cos\theta,\, y_0+s\,\mathrm{sen}\,\theta)-f(x_0,y_0)}{s}$$

$$= \left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},\, P_0}$$

$\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0}$ — la pendiente de la recta tangente a C en el punto P_0 en la dirección del vector unitario $\bar{u}$.

Teorema

Si las derivadas parciales de $f(x,y)$ se definen en (x_0, y_0), entonces la derivada direccional de f en la dirección de $\bar{u} = \cos\theta \hat{i} + sen\theta \hat{j}$ está dada por $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \bar{u}$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u}} = \nabla f \bullet \bar{u}, \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\bar{u} = \cos\theta\,\hat{i} + sen\theta\,\hat{j}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \bullet (\cos\theta, sen\theta)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} sen\theta$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} sen\theta$$

$$\text{Si } \theta = 0 \qquad \bar{u} = \hat{i} \quad , \qquad \left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

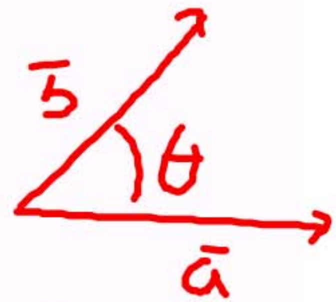
$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \bar{u} = \hat{j} \qquad \left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{j}} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

¿En qué dirección crece la función más rápidamente?

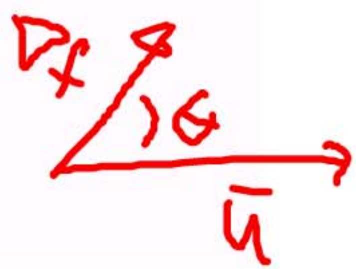
¿En qué dirección es mayor $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0}$?

De algebra vectorial: $\overline{a}\bullet\overline{b}=\left\|\overline{a}\right\|\left\|\overline{b}\right\|\cos\theta$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0}=\nabla f\left(x_0,y_0\right)\bullet\overline{u}$$



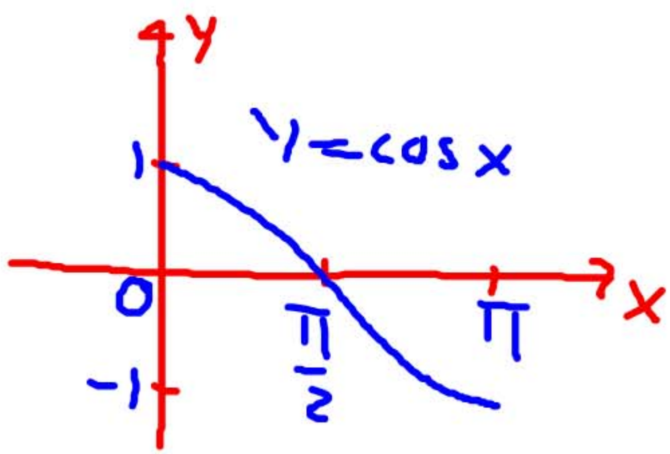
$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\overline{u},P_0}=\left\|\nabla f\left(x_0,y_0\right)\right\|\left\|\overline{u}\right\|\cos\theta$$



$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| \left\|\bar{u}\right\| \cos\theta$$

$$\left\|\bar{u}\right\| = 1$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| \cos\theta, \quad \underline{0 \le \theta \le \pi}$$



$$\text{Si } \theta = 0, \quad \left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| \cos(0)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|$$

El valor máximo

$$\nabla f\left(x_0, y_0\right) \parallel \bar{u}$$

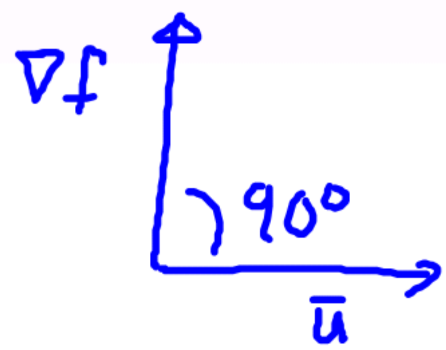
$$\xrightarrow{\nabla f}$$

$$\xrightarrow[\bar{u}]{}$$

$$\text{Si} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

f - constante

$$\nabla f\left(x_0, y_0\right) \perp \bar{u}$$

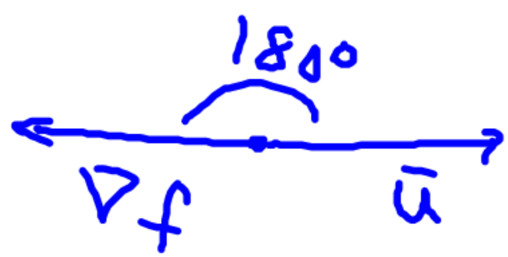


Si $\theta = \pi$, $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| \cos(\pi)$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = -\left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|$$

El valor mínimo

El $\nabla f\left(x_0, y_0\right)$ y $\bar{u}$ tienen direcciones opuestas.



Teorema

Sea f diferenciable en el punto (x, y).

1. Si $\nabla f(x,y) = \overline{0}$, entonces $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\overline{u}} = 0$ para $\forall\, \overline{u}$.

2. La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x,y)$. El valor máximo de

En la dirección del gradiente.

$\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\overline{u}}$ es $\left\|\nabla f(x,y)\right\|$.

3. La dirección de mínimo crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x,y)$. El valor mínimo de $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u}}$ es $-\left\|\nabla f(x,y)\right\|$.

En la dirección opuesta del gradiente

4. Cualquier dirección normal al gradiente, es una dirección de cero cambio de f.

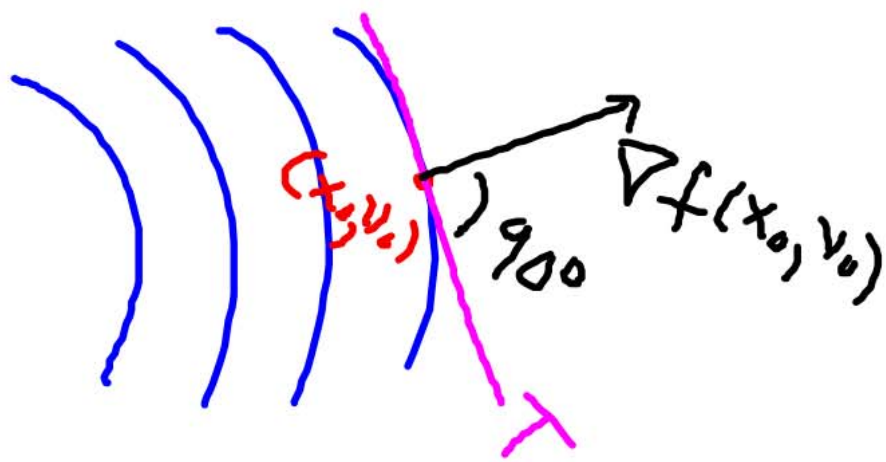
Interpretación geométrica del gradiente.

Teorema. El gradiente es normal a las curvas de nivel.

Si f es diferenciable en $\left(x_0, y_0\right)$ y $\nabla f\left(x_0, y_0\right) \neq \overline{0}$, entonces el gradiente $\nabla f\left(x_0, y_0\right)$ es normal a la curva de nivel que pasa por $\left(x_0, y_0\right)$.

$f(x,y)=k$

Curvas de nivel



La ecuación de la recta tangente a la curva de nivel en el punto $\left(x_0, y_0\right)$ está dada por

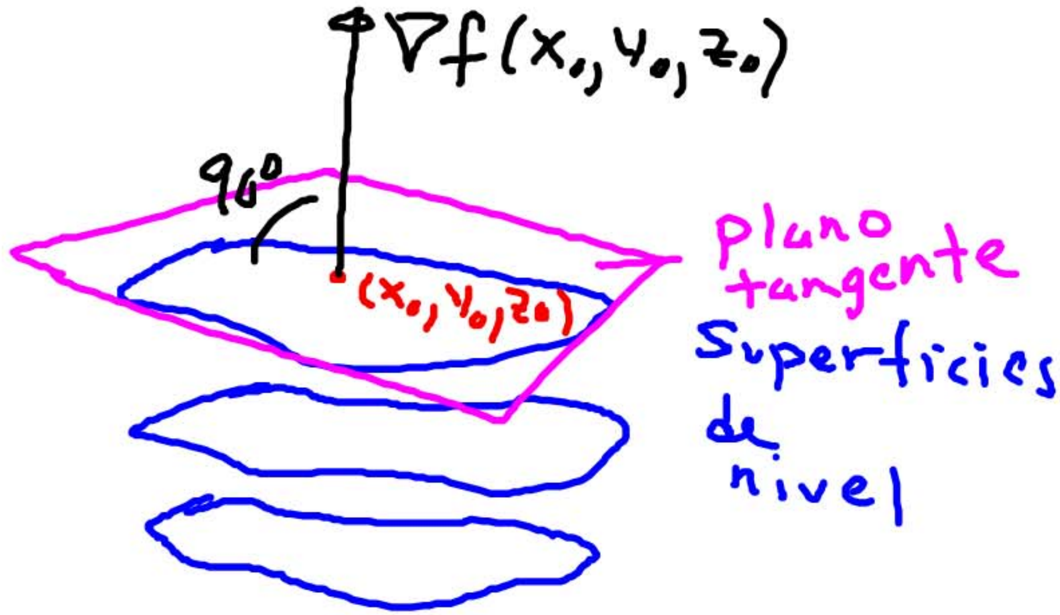
$$\nabla f\left(x_0, y_0\right) \bullet \left(x - x_0, y - y_0\right) = 0.$$

Teorema. El gradiente es normal a las superficies de nivel.

Si f es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \overline{0}$, entonces el gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0).

$f(x,y,z)=K$

Superficies de nivel



Ejemplos:

Calcule la derivada direccional de la función

$$f(x,y)=\sqrt{2}\,x^2 seny \text{ en el punto } P_0\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$$

y en la dirección del vector que forma un ángulo de $60°$ con la dirección positiva del eje "x".

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0}=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\bar{u}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u}, P_0} = \nabla f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \bar{u}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

$$\nabla f = 2\sqrt{2}\, x \operatorname{sen} y\, \hat{i} + \sqrt{2}\, x^2 \cos y\, \hat{j}$$

$$\nabla f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}(1) \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\, \hat{i} + \sqrt{2}(1)^2 \cos\frac{\pi}{4}\, \hat{j}$$

$$\nabla f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{i} + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\hat{j}$$

$$\nabla f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = 2\hat{i} + \hat{j}$$

$$\bar{u} = \cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\bar{u} = \cos 60^\circ\,\hat{i} + \operatorname{sen} 60^\circ\,\hat{j}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\,\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{j}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = (2,1)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo:

Encuentre la derivada direccional de

$$f(x,y,z) = 3^x + senhy + \ln z$$

en el punto $\overset{P_0}{(0,0,1)}$ y en la dirección del vector

$\overline{a} = (3,4,5)$.

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \bar{u}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \nabla f(0,0,1) \cdot \bar{u}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f = 3^x \ln 3\ \hat{i} + \cosh y\ \hat{j} + \frac{1}{z}\hat{k}$$

$$\nabla f(0,0,1) = \ln 3\ \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\bar{a} = (3, 4, 5)$$

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = (\ln 3, 1, 1)\cdot\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \frac{3\ln 3}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\ln 3 + 9}{5\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P_0} = \frac{3\ln 3 + 9}{5\sqrt{2}}$$

FIN DEL CURSO