TEMA 1

SUCESIONES Y SERIES

1.1.1 Definición de sucesión.

Definición

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Notaciones:

Funcional: $f(n)$

Usual: $\{a_n\}$

Ejemplos:

1) $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$

$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$

2) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots$

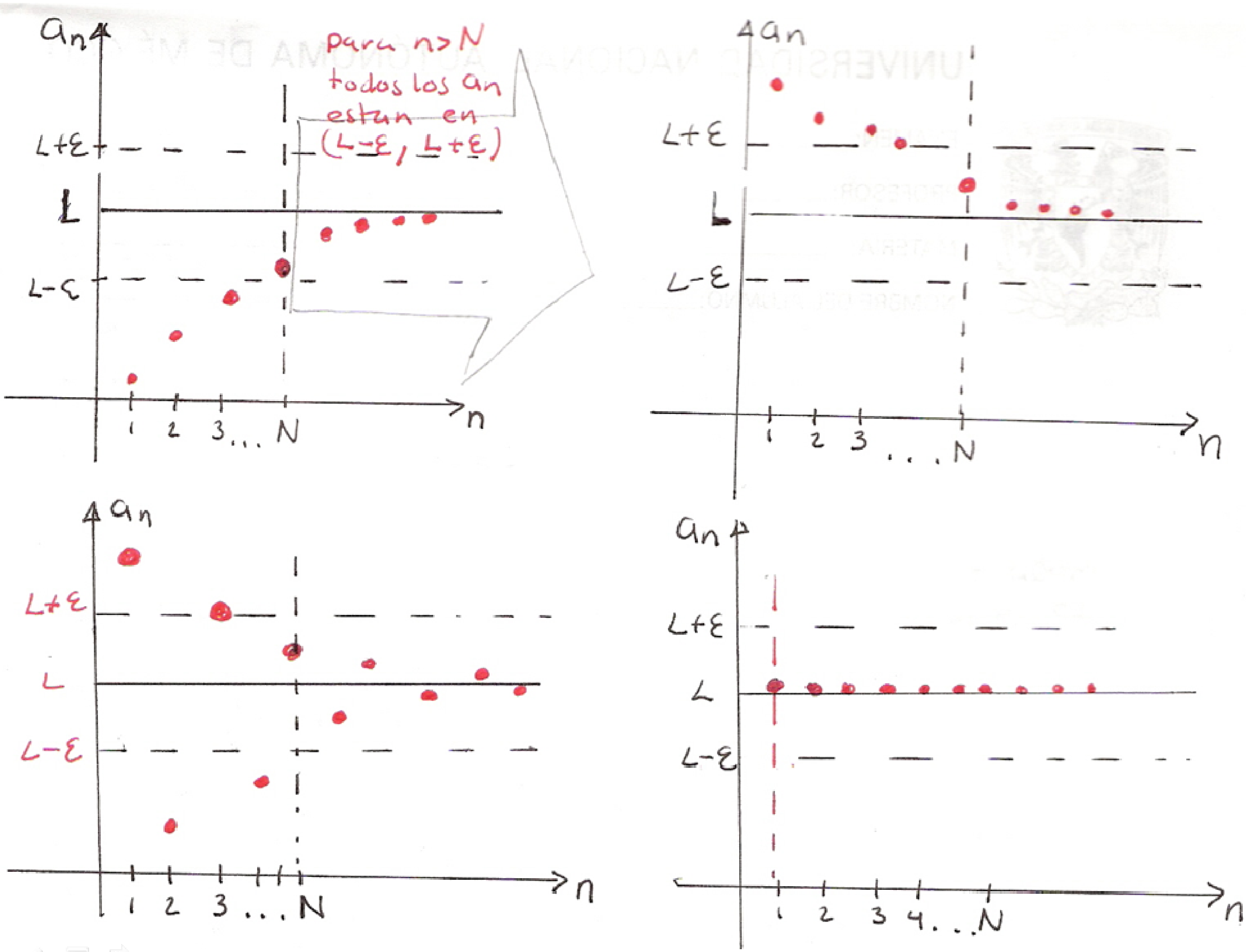
3) $\left\{ n^2 + n \right\}$ $2, 6, 12, \ldots, (n^2+n), \ldots$

4) $\left\{ (-1)^n \right\}$ $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

1.1.2. Límite y convergencia de una sucesión.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ converge al número L, y se denota $\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, a_n = L$ si para todo $\varepsilon > 0,$ existe un $N > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > N.$


a_n
para $n > N$
todos los a_n
estan en
$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
1 2 3 ... N
n

Ejemplos:

1) $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{100}{102}, \dots$

$, \frac{1000}{1002}, \dots, \frac{10000}{10002}, \dots$

La sucesión converge a 1.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

2) Demostrar que $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ converge a cero.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists N>0$$
$$\ni |a_n - L| < \varepsilon \ \forall n>N.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists N>0$$
$$\ni \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \ \forall n>N$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \to \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \to \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 < (\varepsilon)^2$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon^2 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$n > N$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon^2} \qquad \varepsilon = 0.01 = 10^{-2}$$

$$N = 10000$$

Nota:

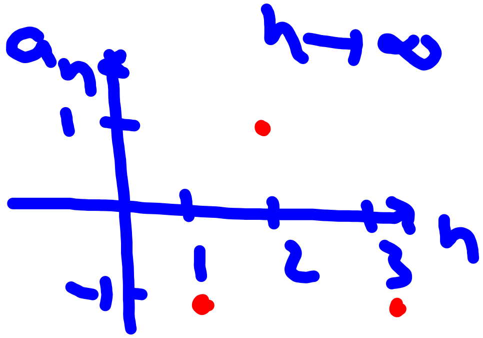
En la práctica para determinar si una sucesión converge se busca: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Ejemplos:

Determine si las sucesiones convergen

1) $\{n^2+n\}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} n^2+n=\infty$ $\qquad$ diverge

2) $\{(-1)^n\}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ $\qquad$ diverge



Definición. Sucesión constante

Una sucesión de constantes $c, c, c, \ldots$ se escribe $\{c\}$ y converge a c.

Ejemplo:

$\{\pi\}$ $\pi, \pi, \pi, \ldots$

La sucesión converge a π.

Teorema. Propiedades de sucesiones.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, entonces

a) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = kL_1$, para k constante

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 L_2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ para k constante.

Ejemplos:

Determine si convergen las siguientes sucesiones

1) $\left\{5\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} 5\frac{1}{\sqrt{n}} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 5\cdot 0 = 0$$

La sucesión converge a cero.

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

La sucesión converge a cero.

Teorema. Teorema del encaje o del emparedado para sucesiones.

Si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

y existe un entero N tal que $a_n \le c_n \le b_n$ para todo $n > N$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Ejemplo:

Encuentre el límite de la sucesión $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}\right\}$.

$$\frac{1}{n}\left(-1 \le \operatorname{sen} n \le 1\right)$$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$$

La sucesión converge a cero.

Teorema

i) Para $|r|<1$ la sucesión $\{r^n\}$ converge a cero.

ii) Para $|r|>1$ la sucesión $\{r^n\}$ diverge.

Ejemplos:

Determine si convergen o divergen.

1) $\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right\}$ $\quad r=\frac{3}{2}>1$ La sucesión diverge.

2) $\left\{e^{-n}\right\}$ $\quad e^{-n}=(e^{-1})^n=\left(\frac{1}{e}\right)^n$

$r=\frac{1}{e}<1$ La sucesión converge a cero.

3) $\left\{ \dfrac{2-3e^{-n}}{6+4e^{\ n}} \right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-3e^{-n}}{6+4e^{-n}} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2-3e^{-n}}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} 6+4e^{-n}} =$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2 - 3\lim_{n\to\infty} e^{-n}}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} 6 + 4\lim_{n\to\infty} e^{-n}} = \frac{2-3\cdot 0}{6+4\cdot 0} = \frac{1}{3}$$

La sucesión converge a $\frac{1}{3}$.

4) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$|r| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

La sucesión converge a cero.

Teorema. Teorema de valor absoluto.

Dada la sucesión $\{a_n\}$, si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Ejemplo:

Determine si converge o diverge la sucesión

$$\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

La sucesión converge a cero.

Teorema

Para cualquier número racional positivo r, la sucesión $\left\{\frac{1}{n^r}\right\}$ converge a cero.

Ejemplo:

$$\left\{10+\frac{4}{n^{3/2}}\right\} \qquad \lim_{n\to\infty} 10+\frac{4}{n^{3/2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 10 + 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}} = 10+4\cdot 0 =$$

$$= 10 \qquad r=\frac{3}{2}$$

La sucesión converge a 10.

1.1.3. Sucesiones monótonas y acotadas.

Definición

Se dice que una sucesión es monótona cuando es

i) creciente: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$, o bien

ii) decreciente: $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$, o bien

iii) no decreciente: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$, o bien

iv) no creciente: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$

Ejemplos:

1) $4, 6, 8, 10,$ creciente

2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ decreciente

3) $5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \ldots$ no creciente

monóto-nas

4) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ no es monótona

Ejemplo:

Demuestre que $\left\{ \dfrac{n}{e^n} \right\}$ es una sucesión decreciente.

$a_n > a_{n+1}$

$\dfrac{n}{e^n} > \dfrac{n+1}{e^{n+1}}$

$n e^{n+1} > (n+1)e^n$

$n \cancel{e^n} e > (n+1)\cancel{e^n}$

$ne > n+1$

$ne - n > 1$

$n(e-1) > 1$ ✓ , $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\therefore$ La sucesión es decreciente.

Ejemplos:

Para las siguientes sucesiones, determine cuál es monótona.

$$\left\{3+(-1)^n\right\}$$

$2, 4, 2, 4, \ldots$

no es monótona

$$\left\{\frac{2n}{1+n}\right\}$$

$1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots$

$a_n < a_{n+1}$

$$\frac{2n}{1+n} < \frac{2(n+1)}{1+(n+1)}$$

$$\frac{2n}{1+n} < \frac{2n+2}{n+2}$$

$$2n^2+4n < (2n+2)(n+1)$$

$$\cancel{2n^2}+\cancel{4n} < \cancel{2n^2}+\cancel{4n}+2$$

$$0 < 2 \checkmark$$

La sucesión es creciente

$\therefore$ es monótona.

Definición. Sucesiones acotadas

1) Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n. El número M es una cota superior de la sucesión.

2) Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente si existe un número real N tal que $N \leq a_n$ para todo n. El número N es una cota inferior de la sucesión.

3) Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada, si es acotada superiormente e inferiormente.

$N \leq a_n \leq M$

Ejemplo:

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$N \leq a_n$

$N = \frac{1}{2}$ cota inferior máxima

$N = 0, -1$

$a_n \leq M$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

$M = 1$ cota superior mínima

$M = 2, 3$

$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ - sucesión acotada.

Teorema

Toda sucesión monótona acotada es convergente.

Ejemplos:

1) $\left\{ \dfrac{2n+1}{n+1} \right\}$

$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots$

$N \leq a_n$ $\quad$ $\underline{N = \frac{3}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

$\underline{M = 2}$

$\therefore$ La sucesión es acotada.

$a_n \leq M$

$$\frac{3}{2} \leq \frac{2n+1}{n+1} \leq 2$$

$$a_n < a_{n+1}$$

$$\frac{2n+1}{n+1} < \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1}$$

$$\frac{2n+1}{n+1} < \frac{2n+3}{n+2}$$

$$(2n+1)(n+2) < (2n+3)(n+1)$$

$$\cancel{2n^2} + 5\cancel{n} + 2 < \cancel{2n^2} + \cancel{5n} + 3$$

$2 < 3$ ✓ La sucesión es creciente $\therefore$ monótona.

$\therefore$ La sucesión es convergente.

2) $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$ $\quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots$

La sucesión es acotada.

$$a_n < a_{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

$$n(n+2) < (n+1)^2$$

$$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$$

$$0 < 1 \quad \checkmark$$

$\therefore$ La sucesión es convergente.

La sucesión es creciente $\therefore$ monótona.

1.2.1. Definición de serie.

Definición

Una serie (serie infinita) es una expresión de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n-ésimo} \\ \text{término}}}{a_n} + \cdots$$

1.2.2. Convergencia de una serie. Propiedades y condiciones para la convergencia.

Sea $\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots}_{\text{serie}}$ y

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}\right\} \text{Sumas parciales}$$

S_n – n-ésima suma parcial

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ sucesión de sumas parciales.

Definición

Se dice que una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si converge la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$; esto es,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

El número S es la suma de la serie. Si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, se dice entonces que la serie es divergente.

Ejemplo:

Determine si converge la serie.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1+2$$

$$S_3 = 1+2+3$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n$$ ← n-ésima suma parcial

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
+\ S_n &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1
\end{aligned}
$$

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ términos}}$$

$$2S_n = n(n+1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

$\therefore$ La serie es divergente.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ ← n-ésima suma parcial

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$\left(S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots + \frac{1}{2^n} \right)\left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{8}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{2^n}}$$

$$+ \quad -\frac{1}{2} S_n = -\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{8}} - \frac{1}{16} - \cdots - \cancel{\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$2\left(\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$$

$$\underline{S = 1}$$

$\therefore$ La serie converge.