Convergencias absoluta y condicional.

Definición. Convergencia absoluta.

La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Ejemplos:

1) $\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3^n}$ – es absolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \sum_{n=1-1}^{\infty}\frac{2}{3^{n+1}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3^n 3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$r = \frac{1}{3} < 1$

convergente

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ - serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ - serie armónica

$p=1$

es divergente

La serie armónica alternante no es absolutamente convergente.

Definición. Convergencia condicional.

Una serie que es convergente, pero no absolutamente convergente, se denomina condicionalmente convergente.

Ejemplo: $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$ serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|$$ - es divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$ - no es absolutamente convergente

es condicionalmente convergente

Teorema. Criterio de convergencia absoluta.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

La convergencia absoluta implica convergencia.

Teorema. Criterio del cociente absoluto. (Series alternantes)

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no nulos y

suponga que $\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Entonces:

1. Cuando $\rho < 1$, la serie converge absolutamente (y por lo tanto converge)
2. Cuando $\rho > 1$, la serie diverge.
3. Cuando $\rho = 1$, el criterio falla.

Ejemplos:

1) Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$ converge absolutamente.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}\,3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}\,3^n}{n!}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)\,\cancel{3^n}\,3\,n!}{\cancel{3^n}(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}3\,\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}}=0<1$$

La serie converge absolutamente y por lo tanto converge.

2) Determine si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^n}}\right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)\,\frac{\cancel{2^n}(n+1)}{\cancel{2^n}\,2\,n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

La serie converge absolutamente y por lo tanto converge.

Teorema. Criterio de la raíz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no nulos.

1. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente.

2. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ó $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, la serie es divergente.

3. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, no se puede concluir nada acerca de la convergencia a partir de este criterio.

Ejemplos:

1) Averiguar si es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{2n}}{n^n}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{2n}}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} = 0 < 1$$

La serie es absolutamente convergente y por lo tanto converge.

2) Aplique el criterio de la raíz para determinar si la serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2+\frac{1}{n}}}{n^2} = 0 < 1$$

La serie es absolutamente convergente y por lo tanto converge.

1.6 Series de potencias.

Definición

A una serie que contenga potencias de exponente entero no negativo de una variable x

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

en donde los c_n son constantes que dependen de n, se le llama serie de potencias en x. Dicha serie es sólo un caso particular de la forma más general

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Radio e intervalo de convergencia.

Definición

Al conjunto de todos los números reales x para los cuales converge una serie de potencias, se le llama su intervalo de convergencia, se denota como I_c. Una serie de potencias en $x-a$ puede converger

i) en un intervalo finito centrado en a:

$$(a-r, a+r), [a-r, a+r), (a-r, a+r] \; o$$

$$[a-r, a+r], \text{ o bien}$$

ii) en un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$; o

iii) sólo en el punto $x = a$.

Definición

El radio de convergencia de una serie de potencias, denotado por r_c, es la mitad de la longitud del intervalo de convergencia.

En i), el radio de convergencia es r; es decir $r_c = r$. En ii), el radio de convergencia es infinito; es decir $r_c = \infty$; y en iii), el radio de convergencia es cero; es decir $r_c = 0$.

Ejemplos:

Hallar el intervalo de convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^{n+1}}{n!}.$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{2^n (x-3)^{n+1}}{n!}} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n!}\, \overset{\cancel{2^n}\, 2}{2^{n+1}} (x-3)^{n+2}}{\underset{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)!}}\, \cancel{2^n} (x-3)^{n+1}} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(x-3)}{n+1} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|2(x-3)|}{|n+1|}$$

$$\rho = |2(x-3)| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$|2||(x-3)|$

$$\rho = 2|x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\rho = 0 < 1$$

La serie converge para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

$I_c = (-\infty, \infty)$ $\qquad r_c = \infty$

Encontrar el intervalo y el radio de convergencia

de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(x+1)^n}{n!3^n}$.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{[2(n+1)]!\,(x+1)^{n+1}}{(n+1)!\,3^{n+1}}}{\frac{(2n)!\,(x+1)^n}{n!\,3^n}} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\overbrace{(2n+2)!}^{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}\,(x+1)^{n+1}\,\cancel{n!}\,\cancel{3^n}}{\cancel{(2n)!}\,(x+1)^n\,\underbrace{(n+1)!\,3^{n+1}}_{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{3^n}3}} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\overbrace{(2n+2)}^{2\cancel{(n+1)}}(2n+1)\,(x+1)}{\cancel{(n+1)}\,3} \right|$$

$$\wp = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(2n+1)(x+1)}{3} \right|$$

$$\wp = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{3}(x+1)(2n+1) \right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2}{3}(x+1)\right| |2n+1|$$

$$\wp = \left|\frac{2}{3}(x+1)\right| \lim_{n\to\infty} (2n+1)$$

$$\wp = \frac{2}{3}|x+1| \lim_{n\to\infty} (2n+1) = \begin{cases} \infty, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

La serie converge sólo en punto $x=-1$.

$r_c = 0$

Determinar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$\wp = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right|$$

$$\wp = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}\, n}{x^n (n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x\left(\frac{n}{n+1}\right) \right|$$

$$\wp = \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\wp = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x|$$

$$\wp = |x| < 1 \to -1 < x < 1$$

$$x = -1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{n} > 0$$

$$a_{n+1} < a_n \checkmark$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\cancel{n} < \cancel{n}+1$$

$$0 < 1 \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

La serie es convergente.

$x=1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie armónica

$p=1$ divergente

$I_c = [-1, 1)$

$r_c = 1$

1.7.1. Desarrollo de funciones en series de potencias.

Una serie de potencias define o representa una función f cuyo dominio es el intervalo de convergencia.

Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, una serie de potencias y sea I_c su intervalo de convergencia. Si la función $f : I_c \to \mathbb{R}$ se define tal que para cada $x \in I_c$,

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, entonces:

i) $f(x)$ es continua en I_c.

ii) $f(x)$ es derivable en I_c y además

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n (x-a)^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

iii) $f(x)$ es integrable en I_c y además

$$\int f(x)dx = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right]dx =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int c_n (x-a)^n\,dx\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

iv) Si $(c,d)\subset I_c$, se tiene que

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right] dx =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_c^d c_n (x-a)^n dx\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left.\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right]_c^d =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}\left[(d-a)^{n+1}-(c-a)^{n+1}\right]$$

1.7.2. Serie de Maclaurin, de Taylor y desarrollo de funciones trigonométricas.

Cuando una serie de potencias representa una función f en un intervalo $(a-r, a+r)$, $r>0$,

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$$

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, existe una relación entre los coeficientes c_n y las derivadas de f.

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$$

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\cdots+nc_n(x-a)^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2c_2+3\bullet 2c_3(x-a)+\cdots+n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}+\cdots$$

$$f'''(x)=3\bullet 2\bullet 1c_3+\cdots+n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}+\cdots$$

$$\vdots$$

Valuando en $x=a$

$$f(a)=c_0$$

$$f'(a)=c_1$$

$$f''(a)=2c_2$$

$$f'''(a)=3\bullet 2\bullet 1c_3$$

$$\vdots$$

Reescribiendo

$$f(a) = 0!c_0$$ $0! = 1$

$$f'(a) = 1!c_1$$

$$f''(a) = 2!c_2$$

$$f'''(a) = 3!c_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n!c_n \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \geq 0$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n},\forall x\in(a-r,a+r),$$

$$r>0$$

$$\text{Si}\;\; a=0,\; f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}$$

Definición. Series de Taylor y Maclaurin.

Si una función f tiene derivadas de todos los ordenes en $x = a$, se llama serie de Taylor de f (centrada) en a a la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Si $a = 0$ en la serie de Taylor, ésta se denomina serie de Maclaurin de $f(x)$; es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Ejemplos:

1) Obtener la representación en serie de Maclaurin

de $f(x)=\dfrac{1}{3}sen3x.$ (2EF 2004-2)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$f(x)=sen\,x$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=cos\,x$ $\qquad f'(0)=1$

$f''(x)=-sen\,x$ $\qquad f''(0)=0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \cos x$ $\qquad f^{V}(0) = 1$

$f^{VI}(x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad f^{VI}(0) = 0$

$f^{VII}(x) = -\cos x$ $\qquad f^{VII}(0) = -1$

$f^{VIII}(x) = \operatorname{sen} x$ $\qquad f^{VIII}(0) = 0$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 + \frac{-1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\operatorname{sen}(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (3x)^{2n+1}$$

$$\frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{3}$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{3^{2n}\cancel{3}}{\cancel{3}} x^{2n+1}$$

$$\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} 3^{2n} x^{2n+1}$$

serie de Maclaurin

2) Escriba la serie de Maclaurin de

$$h(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{(2EF 17/JUN/05)}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$h(x) = -(x-1)^{-2} \qquad h(0) = -1$$

$$h'(x) = 2(x-1)^{-3} \qquad h'(0) = -2$$

$$h''(x) = -3\cdot 2(x-1)^{-4} \qquad h''(0) = -3\cdot 2 = -3!$$

$$h'''(x) = 4\cdot 3\cdot 2\,(x-1)^{-5} \qquad h'''(0) = -4!$$

$$h^{iv}(x) = -5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\,(x-1)^{-6} \qquad h^{iv}(0) = -5!$$

$$h^{v}(x) = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\,(x-1)^{-7} \qquad h^{v}(0) = -6!$$

$$h^{vi}(x) = -7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\,(x-1)^{-8} \qquad h^{vi}(0) = -7!$$

$$\vdots$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{(n+1)}(n+1)!\,(x-1)^{-(n+2)}$$

$$h^{(n)}(0) = (-1)^{(n+1)}(n+1)!\,(-1)^{-(n+2)}$$

$$h^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{(n+1)}}{(-1)^{n+2}}(n+1)! = -(n+1)!$$

clase_03_Cálculo Integral_Profesor Manny_Ciudad Universitaria _CDMX(37págs.)

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\overset{(n+1)n!}{\cancel{(n+1)!}}}{\cancel{n!}} x^n$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)\, x^n$$

Serie de Maclaurin para $h(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$