Serie desplegable (o “telescópica”)

Se dice que una serie es desplegable o "telescópica" cuando se considera la forma en la que el término general de la sucesión de sumas parciales se despliega o extiende hasta quedar con dos términos

$$(b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_4}) + \cdots + (\cancel{b_n} - b_{n+1})$$

La suma parcial n-ésima de esta serie es:

$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

Su suma S,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \; b_1 - b_{n+1} = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Ejemplo:

Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$A = \frac{2}{1} = 2$, $B = \frac{2}{-1} = -2$

$n = 0$, $n+1 = -1$

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots$$

$$S_1 = \frac{2}{1} - \frac{2}{2}$$

$$S_2 = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

$$S_3 = \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right)$$

$$\vdots$$

$$S_n = \left(\frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{2}} - \cancel{\frac{2}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{2}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+1}\right)$$

$$S_n = 2 - \frac{2}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{n+1} = 2$$

$\underline{S = 2}$ La serie es convergente.

Teorema. Límite del término general de una serie convergente.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Nota:

El converso del teorema no es válido en general.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no necesariamente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

Teorema. Criterio del término general para la divergencia.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$

$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$

La serie es divergente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

no se puede sacar conclusiones sobre la convergencia de la serie.

Teorema. Propiedades de las series

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ y c es un número real, las series siguientes convergen a las sumas indicadas.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$

2. $\sum_{n-1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

Nota:

Debido al resultado anterior se tiene que si

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

es divergente.

1.3 Serie geométrica y serie p.

Serie geométrica

Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ se denomina serie geométrica. A r se le llama razón de la serie.

Teorema

Si $-1 < r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. Si $r \leq -1$ ó $1 \leq r$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ es divergente.

Ejemplos:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\,\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ $\quad a=3$, $r=\frac{1}{2}$, $-1<r<1$

La serie es convergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$$

2) $\displaystyle\sum_{n-0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ $\quad a=1$, $r=\frac{3}{2}$

La serie es divergente.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \sum_{n=1-1}^{\infty-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$a = \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}$

$-1 < r < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n}$

La serie es convergente.

$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Definición. p-series.

Una serie de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$

se conoce como una p-serie, donde p es una constante positiva.

Para $p = 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ se conoce como la serie armónica.

Una serie armónica general es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$$

Teorema. Convergencia de p-series.

La p-serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$

1. converge si $p > 1$, y 2. diverge $0 < p \leq 1$.

Ejemplos:

Determine si convergen las series:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $p=1$ La serie armónica es divergente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $p=2$ La serie es convergente.

1.4.1 Series de términos positivos

Para las series con términos positivos

(o al menos no negativos) $a_k \geq 0 \quad \forall k.$

Característica principal:

Su sucesión de sumas parciales es no decreciente

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) + a_{n+1} \geq \sum_{k=0}^{n} a_k = S_n,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$\therefore \quad \underline{S_{n+1} \geq S_n}$

$$S_{n+1} = \overbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n} + a_{n+1}$$

Teorema. Criterio de la suma acotada.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas por arriba.

Ejemplo:

Muestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

	$n!$	2^{n-1}
$n=1$	$1!$	$= 1$
$n=2$	$2!$	$= 2$
$n=3$	$3!$	$> 2\cdot 2$
$n=4$	$4!$	$> 2\cdot 2\cdot 2$

$$n! \geq 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1-1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

$a=1$

$r=\frac{1}{2}$

$-1<r<1$

convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$S_1 = \frac{1}{1!}$$

$$S_2 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$$

$$S_3 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_1 = \frac{1}{1}$$

$$S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

$S_n < 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

La suma parcial está acotada superiormente por ello la serie es convergente.

1.4.2. Criterios de comparación y del cociente o de D'Alembert.

Teorema. Criterio de comparación directa (ordinaria).

Suponga que $0 < a_n \leq b_n$ para todo n

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, también $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

En lenguaje coloquial

1. Si la "mayor" converge, la "menor" converge necesariamente.
2. Si la "menor" diverge, la "mayor" diverge necesariamente.

Ejemplos:

Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

$$\frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n}$$

converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1-1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad a = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \qquad r = \frac{1}{3}$$

La serie es convergente.

Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2-4}$.

es divergente

$$\frac{n}{5n^2-4} > \frac{\cancel{n}}{5n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{5n}$$

$$\frac{1}{5n} < \frac{n}{5n^2-4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n} = \frac{1}{5} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{serie armónica}}$$

es divergente.

Teorema. Criterio del límite.

Supóngase que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, son series con términos positivos y que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

1. Si L es una constante positiva, entonces ambas series son convergentes o ambas son divergentes.

2. Si $L = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge también.

3. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos:

Serie dada	Serie para comparar (serie de prueba)
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-4n+5}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ p-serie
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-10}{4n^5+n^3}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ *

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\cancel{2}}}{n^{\cancel{5}\,3}}$$ *

Ejemplos:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ ← es convergente

(serie de prueba)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$ ← p-serie

$p = \frac{3}{2} > 1$ convergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

ambas convergen

ó ambas divergen

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{4n^3+1}$ ← es divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n}\,2^n}{n^{\cancel{3}\,2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$ ← es divergente

función exponencial

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n2^n}{4n^3+1}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cancel{2^n}}{(4n^3+1)\cancel{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{4} > 0$$ ambas series divergen

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ — es divergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie de prueba)
serie armónica
$p=1$ es divergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

Teorema. Criterio de D'Alembert
(Criterio del cociente)

Sean $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$ una serie infinita de términos positivos. Consideremos dos términos generales consecutivos a_n y a_{n+1}, y formemos la razón de un término cualquiera al anterior, o razón de D'Alembert:

$$\text{Razón de D'Alembert} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Hallemos ahora el límite de esta razón de D'Alembert cuando n tiende a infinito.

Sea este límite $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Entonces:

1. Cuando $\rho < 1$, la serie es convergente.
2. Cuando $\rho > 1$, la serie es divergente.
3. Cuando $\rho = 1$, el criterio falla.

Ejemplos:

Verifique la convergencia o divergencia de las series

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\,2^{n+1}}{(n+1)!\,\cancel{2^n}}$$

$\cancel{2^n} \cdot 2$

$(n+1)\cancel{n!}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

La serie es convergente.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{20}}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{20}}}{\frac{2^n}{n^{20}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\, 2\, n^{20}}{\cancel{2^n}(n+1)^{20}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{20} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{1+\cancel{\frac{1}{n}}_{\to 0}}\right)^{20} = 2 > 1$$

La serie es divergente.

1.5.1. Series de signos alternados.

Definición

Si $a_n > 0$ para todos los números enteros positivos n, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n} a_n + \cdots (2)$$

se denominan series alternantes.

Ejemplos:

serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}=-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}+\cdots$$

1.5.2. Criterio de Leibniz.

Teorema. Criterio de Leibniz.

Criterio de las series alternantes.

Suponga que se tiene la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\left[\text{ó }\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n\right],$$ donde $a_n > 0$ y

$a_{n+1} < a_n$ para todos los números enteros positivos n. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ entonces la serie alternante es convergente.

Ejemplos:

1) Demuestre que la siguiente serie alternante es convergente: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$

serie armónica alternante

$a_n = \frac{1}{n} > 0$

$a_{n+1} < a_n$ ✓

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

$\cancel{n} < \cancel{n}+1$

$0 < 1$ ✓

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

La serie es convergente.

2) Determine si la serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

$$a_n = \frac{n+2}{n(n+1)} > 0$$

$$a_{n+1} < a_n \checkmark$$

$$\frac{(n+1)+2}{(n+1)[(n+1)+1]} < \frac{n+2}{n(n+1)}$$

$$\frac{n+3}{(\cancel{n+1})(n+2)} < \frac{n+2}{n(\cancel{n+1})}$$

$$\cancel{n^2}+3n < \cancel{n^2}+4n+4$$

$$0 < n+4 \checkmark$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 0$$

La serie alternante es convergente.