TEMA 3 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Fórmulas básicas de integración

1. $\int du = u + C$

2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

3. $\int \dfrac{1}{u} du = \ln|u| + C$

4. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$

5. $\int \dfrac{1}{u^2} du = -\dfrac{1}{u} + C$

6. $\int e^u du = e^u + C$

7. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

8. $\int senu\ du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u du = senu + C$

10. $\int \tan u du = \ln|\sec u| + C$

$$11.\ \int \cot u du = \ln|senu| + C$$

$$12.\ \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$13.\ \int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$

$$14.\ \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$15.\ \int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$16.\ \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$17.\ \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$18.\ \int senhu\, du = \cosh u + C$$

$$19.\ \int \cosh u du = senhu + C$$

$$20.\ \int \tanh u du = \ln(\cosh u) + C$$

$$21.\ \int \coth u du = \ln|senhu| + C$$

$$22.\ \int \sec hudu = ang\tan(senhu) + C$$

$$23.\ \int \sec h^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$24.\ \int \sec hu \tanh u du = -\sec hu + C$$

$$25.\ \int \operatorname{csch} u du = \ln\left|\tanh\frac{u}{2}\right| + C$$

$$26.\ \int \csc h^2 udu = -\coth u + C$$

$$27.\ \int \csc hu \coth u du = -\csc hu + C$$

$$28.\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = angsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$29.\ \int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a} ang\tan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$30.\ \int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{1}{a} ang\sec\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

3.1 Integración por partes.

Teorema

Si u y v son funciones de x con derivadas continuas $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Aplicaciones del método de integración por partes

Se aplica en la integración de diferenciales que contienen:

a) productos
b) logaritmos
c) funciones trigonométricas inversas

Estrategia para integrar por partes

a) Intente tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.

b) Intente tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u y como dv el factor restante del integrando.

Notas:

1) dx es siempre parte de dv.

2) debe ser posible integrar dv.

Ejemplo:

$$1)\ \int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ \int dv = \int e^x dx & v = e^x \end{array}\right] =$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= xe^x - \int e^x dx = \underline{xe^x - e^x + c}$$

Ejemplo:

$$2)\ \int \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x}\, dx \\ \int dv = \int dx & v = x \end{array} \right] =$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x\ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$$= \underline{x\ln x - x + c}$$

Ejemplo:

$$3)\ \int angsenx\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = angsenx & du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right]$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x\,angsenx - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\,angsenx + \frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{z}}}dx \qquad \int\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c$$

$$dz = -2x\,dx$$

$$= x\,angsenx + \sqrt{1-x^2} + c$$

Fórmulas de reducción

Algunas integrales de las tablas tienen la forma $\int f(x)dx = g(x) + \int h(x)dx$. Tales fórmulas de integración se llaman fórmulas de reducción, ya que reducen una integral dada a la suma de una función y otra integral más sencilla.

Ejemplo:

Demuestre la fórmula de reducción

$$\int sen^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x\, sen^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}x dx$$

en donde $n \geq 2$ es un entero. $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int sen^n x dx = \int sen^{n-1}x\, sen x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = sen^{n-1}x & du = (n-1)\, sen^{n-2}x \cos x dx \\ dv = sen x dx & v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= -\cos x\, sen^{n-1}x + \int (n-1)\, sen^{n-2}x\, \cancel{\cos^2}^{\,1-sen^2x} x dx =$$

$$= -\cos x \, \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

$$-(n-1)\int \operatorname{sen}^{n} x \, dx$$

$$\underbrace{\int \operatorname{sen}^{n} x \, dx}_{I} = -\cos x \, \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

$$-(n-1)\underbrace{\int \operatorname{sen}^{n} x \, dx}_{I}$$

$$I + (n-1)I = -\cos x \, \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

$$nI = -\cos x \, \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

$$\int sen^n x dx = -\frac{1}{n} sen^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2} x dx$$

$$\int sen^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x\, sen^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2}xdx$$

Ejemplo: $\int sen^3 x dx$ $n=3$

$$\int sen^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x\, sen^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int sen^{n-2} x dx$$

$$\int sen^3 x dx = -\frac{1}{3}\cos x\, sen^2 x + \frac{2}{3}\int sen\, x\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos x\, sen^2 x - \frac{2}{3}\cos x + c$$

Método tabular (Integración tabular)

$$\int f(x)g(x)dx = \begin{bmatrix} u = f(x) & du = f'(x)dx \\ dv = g(x)dx & v = \int g(x)dx \end{bmatrix}$$

$f(x)$ puede derivarse repetidamente hasta convertirla en cero.

$g(x)$ puede integrarse repetidamente sin dificultad.

El método funciona bien si

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = e^{ax}, \; sen ax, \; \cos ax$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

$$P_n''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x) = a_n n!$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(3x^2)' = 3 \cdot 2 \cdot x$$

$$(3 \cdot 2x)' = 3!$$

$$\int P_n(x) e^{ax} dx = ?$$

$u = f(x)$		$v' = g(x)$
y sus derivadas		y sus integrales
$P_n(x)$		e^{ax}
	$+$	
$P_n'(x)$		$\dfrac{1}{a}e^{ax}$
	$-$	
$P_n''(x)$		$\dfrac{1}{a^2}e^{ax}$
$\vdots$		$\vdots$
$a_n n! = P_n^{(n)}(x)$		$\dfrac{1}{a^n}e^{ax}$
	$(-1)^n$	
0		$\dfrac{1}{a^{n+1}}e^{ax}$

$$\int P_n(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}P_n(x) - \frac{1}{a^2}e^{ax}P_n'(x) +$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} e^{ax} a_n n! + C$$

Ejemplo:

$$\int \left(x^2+3x+4\right)e^x dx =$$

$$\begin{array}{ll} x^2+3x+4 & e^x \\ 2x+3 & e^x \\ 2 & e^x \\ 0 & e^x \end{array}$$

$+$

$-$

$+$

$$\int (x^2+3x+4)e^x dx = (x^2+3x+4)e^x-(2x+3)e^x+2e^x+C$$

$$=(x^2+x+3)e^x+C$$