Ing. Francisco Barrera Del Rayo

5.

Operadores Lineales en Espacios con Producto Interno

Adjunto de un operador

En un espacio vectorial V con producto interno, cada operador lineal T tiene un operador llamado su adjunto que también es lineal y se representa con T^*.

Definición

Sea V un espacio de dimensión finita y $T: V \to V$ un operador lineal, se dice que $T^*: V \to V$ es el operador adjunto de T, si se cumple que:

$$(T(\bar{u})|\bar{v}) = (\bar{u}|T^*\bar{v})) \qquad ;\forall\ \bar{u},\bar{v} \in V$$

Esta definición está basada en el producto interno, es decir, el operador T tiene tantos adjuntos como productos internos se consideren, pero para cada producto interno el adjunto es único.

Propiedades del operador adjunto

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, con producto interno. Si S y T son operadores lineales en V y $\alpha \in K$, entonces:

1. $(T^*)^* = T$
2. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}\, T^*$ donde $\bar{\alpha}$ es el conjugado a α
3. $(S + T)^* = S^* + T^*$
4. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
5. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

Propiedades del operador adjunto

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea B una base ortonormal de V, si $T\colon V \to V$ es un operador lineal; entonces:

$$M_B^B(T^*) = [M_B^B(T)]^*$$

Donde el * del lado derecho de la igualdad representa la conjugada-transpuesta de la matriz.

Operador normal

Sea V un espacio con producto interno y sea $T: V \to V$ un operador lineal. Se dice que T es normal si se cumple que:

$$T \circ T^* = T^* \circ T$$

$$M_B^B(T^*)M_B^B(T) = M_B^B(T)M_B^B(T^*)$$

Nota: B es una base ortonormal

Debido a que para cada producto interno el adjunto es diferente, un operador puede ser normal respecto a un producto interno y no serlo respecto a otro.

Propiedades del operador normal

Sea V un espacio con producto interno sobre los complejos y sea $T: V \to V$ un operador normal. ∀ $\bar{u}$ ∈ V se tiene que:

1. $\| T(\bar{u}) \| = \| T^*(\bar{u}) \|$

2. T siempre es diagonalizable

3. Si $T(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$ entonces $T^*(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$

4. Si $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son vectores propios de T correspondientes a valores propios distintos, entonces los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son ortogonales, es decir, $(\bar{u}_1 \mid \bar{u}_2) = 0$

Clasificación de operadores normales

Sea T un operador normal y sea $H = M_B^B(T)$ una matriz asociada al operador T referida a una base B ortonormal.

Algunos casos particulares de los operadores normales reciben nombres especiales como lo muestra la siguiente tabla:

Nombre	Campo	Matricial	Definición	λ
O. Hermitiano	$\mathbb{C}$	$H = H^*$	$(T(\bar{u}) \mid \bar{v}) = (\bar{u} \mid T(\bar{v}))$	$\lambda \in \mathbb{R}$
O. Simétrico	$\mathbb{R}$	$H = H^T$		
O. Antihermitiano	$\mathbb{C}$	$H = -H^*$	$(T(\bar{u}) \mid \bar{v}) = -(\bar{u} \mid T(\bar{v}))$	$\lambda \in \mathbb{I}$
O. Antisimétrico	$\mathbb{R}$	$H = -H^T$		
O. Unitario	$\mathbb{C}$	$H H^* = I$	$(T(\bar{u}) \mid T(\bar{v})) = (\bar{u} \mid \bar{v})$	$\lvert\lambda\rvert = 1$
O. Ortogonal	$\mathbb{R}$	$H H^T = I$		

Teorema Espectral

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y con producto interno, y sea T: $V \rightarrow V$ un operador normal:

Si λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots \lambda_n$ son los diferentes valores característicos de T, $E(\lambda_i)$ es el espacio característico correspondiente a λ_i y P_i es el operador de proyección ortogonal sobre E(λ_i) , entonces:

1. $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \ldots + \lambda_n P_n$
2. $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = I$ $\qquad I$ = Operador identidad
3. $P_i \circ P_j = 0$, para toda $i \neq j$ $\qquad 0$ = Operador nulo

Formas cuádricas

Una de las múltiples aplicaciones que tienen los valores y vectores característicos, es la que nos permite simplificar el estudio de las cónicas y superficies, cuando éstas tienen ejes oblicuos.

La ecuación general de segundo grado en $\mathbb{R}^2$.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

La podemos representar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\bar{x}^T}\underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{k}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + f = 0$$

$$\bar{x}^T \quad A \quad \bar{x} + \quad k \quad \bar{x} + f = 0$$

Formas cuádricas

Se tiene la ecuación:

$$\bar{x}^T A\bar{x} + k\bar{x} + f = 0 \qquad (1)$$

Considerando el cambio de variable:

$$\bar{x}=\mathrm{P}x' \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathrm{P}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Donde x', y' son los ejes del nuevo sistema de referencia ya rotado. P es la matriz diagonalizadora de la matriz A, formada por vectores característicos unitarios, que debe tener $Det(P) = 1$ para tener un sistema derecho. (si no, basta con intercambiar dos columnas).

La matriz P es una matriz de cambio de base, de la base canónica $\{i\ ,j\}$ a una base formada por vectores que coincidan o sean paralelos a los ejes de la cónica girada.

Formas cuádricas

Sustituyendo (2) en (1):

$$(Px')^T A(Px') + k(Px') + \mathrm{f} = 0$$

Desarrollando:

$$x'^T\ P^T A\ P\ \ x' + kP\ x' + \mathrm{f} = 0$$

Asociando:

$$x'^T(\ P^T A\ P\ )x' +\ kP\ x' + \mathrm{f} = 0$$

Sustituyendo: $\mathrm{D} = (\ P^T A\ P\ )$

$$x'^T D\ x' +\ kP\ x' + \mathrm{f} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$