3.

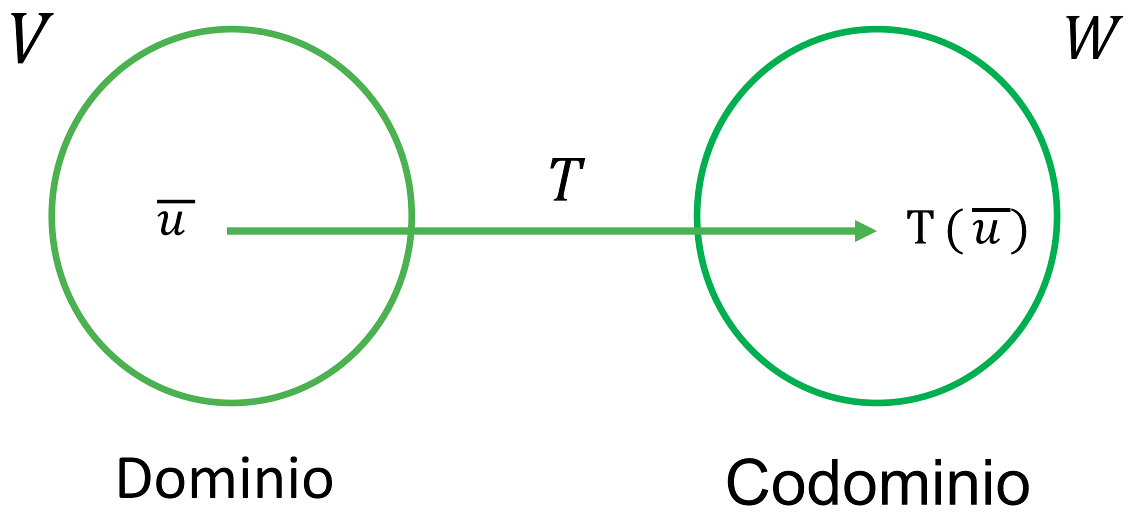
Ing. Francisco Barrera Del Rayo

Transformaciones Lineales

Transformación

Sean V y W dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo k. La función $\mathrm{T}: V \to W$ es la regla de correspondencia que asigna a cada vector $\overline{u} \in V$, uno y sólo un vector de W, al que llamaremos imagen de $\overline{u}$ y representaremos como $\mathrm{T}(\overline{u})$. A este tipo de funciones se le conoce como transformaciones.

Esquemáticamente se tiene:



Transformaciones Lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo k. Una transformación $\mathrm{T}: V \rightarrow W$ es lineal si, se cumple:

1. Superposición:

$$T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v}) \; ; \qquad \forall \; \overline{u}, \overline{v} \in V$$

2. Homogeneidad:

$$T(\propto \overline{u}) = \propto T(\overline{u}) \; ; \qquad \forall \; \overline{u} \in V \quad y \quad \forall \propto \in K$$

Dominio, Codominio

Sea la transformación lineal $T: U \rightarrow V$

Dominio: Es el conjunto de U de vectores sobre los cuales actúa la transformación.

Codominio: Es el conjunto de vectores de V donde se encuentran las imágenes de los vectores del dominio.

Recorrido y Núcleo

Sea la transformación lineal $T: U \rightarrow V$

Recorrido: Es el conjunto formado por las imágenes de los vectores del dominio y lo representamos como $T(U)$, esto es:

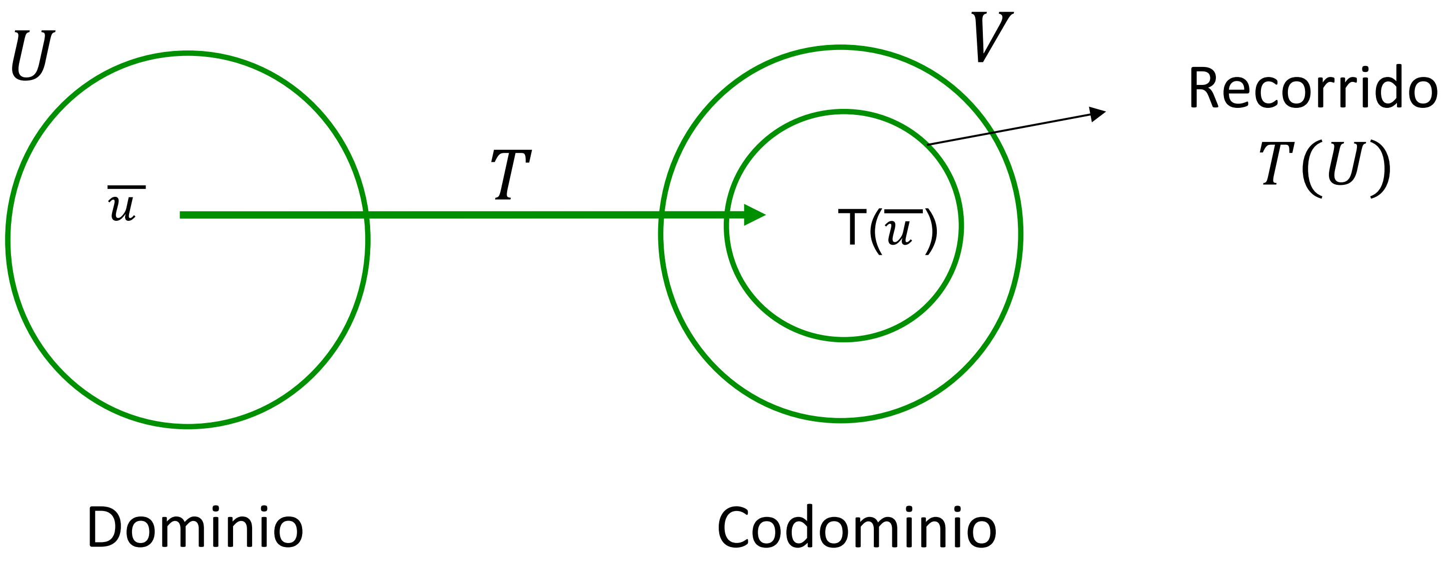
$$T(U) = \{ \overline{v} \mid \overline{v} = T(\overline{u}) \text{ , } donde \ \overline{u} \in U \}$$

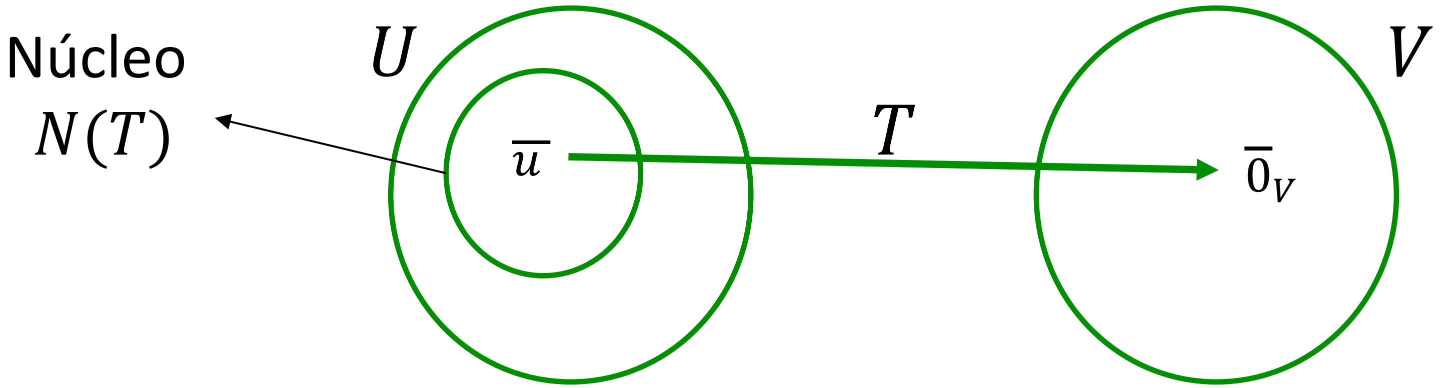
Núcleo: Es el conjunto de vectores del dominio cuya imagen es el vector cero de V. Lo representamos como $N(T)$ esto es:

$$N(T) = \{ \overline{u} \mid \overline{u} \in U \text{ , donde } T(\overline{u}) = \overline{0}_V \}$$

Dominio, Codominio, Recorrido y Núcleo

$T: U \rightarrow V$





Teoremas

Si $T\colon V \rightarrow W$ es una transformacion lineal, entonces:

1. $T\left(\bar{0}_V\right) = \bar{0}_W$
2. $T(V)$ es un subespacio de W
3. $N(T)$ es un subespacio de V
4. Si $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto

   $G = \{T(\bar{b}_1), T(\bar{b}_2), T(\bar{b}_3), \dots, T(\bar{b}_n)\}$ es generador del recorrido de T.

5. Si V es un espacio de dimensión finita, entonces se cumple que:

$$Dim\, V = Dim\, T(V) + Dim\, N(T)$$

Matriz asociada

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m, respectivamente, y sean $A = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_n\}$ y $B = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \ldots, \overline{b}_m\}$ bases de dichos espacios.

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces existe una matriz única $M_B^A(T)$, de orden $m{\times}n$, talque:

$$M_B^A(T)\ (\overline{v})_A = [\,\mathrm{T}(\overline{v})\,]_B \quad ; \forall\ \overline{v} \in V$$

Las n columnas de la matriz $M_B^A(T)$, llamada matriz asociada de T, son los vectores de coordenadas en la base B, de las imágenes de los vectores de la base A, esto es:

$$M_B^A(T) = [\,[T(\overline{v}_1)]_B \quad [T(\overline{v}_2)]_B \ \ldots \ [T(\overline{v}_n)]_B\,]$$

Matriz asociada

La matriz asociada nos permite calcular la imagen de un vector cualquiera $\overline{v}$ del dominio, mediante el siguiente procedimiento:

1) Determinar las coordenadas del vector $\overline{v}$ en la base A del dominio
2) Multiplicar la matriz $M_B^A(T)$ por el vector $(\overline{v})_A$
3) Obtener el vector $T(\overline{v})$ a partir de sus coordenadas en la base B del codominio

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\overline{v} \arrow[r, "\text{Aplicando la Regla}"] \arrow[d, dashed, "1", "\text{Cálculo del Vector de coordenadas}"'] & T(\overline{v}) \\
(\overline{v})_A \arrow[r, dashed, "2", "\text{Multiplicar por } M_B^A(T)"'] & {[T(\overline{v})]_B} \arrow[u, dashed, "3"', "\text{Con los vectores de la base } B \text{ y los escalares de } [T(\overline{v})]_B\text{, obtener } T(\overline{v})"]
\end{tikzcd}
$$

Matriz asociada

Teorema

En una transformación lineal $T: U \rightarrow V$, la dimensión del recorrido es igual al rango de la matriz asociada a dicha transformación.

$$R(M_B^A(T)) = Dim\, T(U)$$

Álgebra de transformaciones lineales

Dadas dos transformaciones lineales cuyo dominio y codominio es el mismo:

$$T : V \rightarrow W \qquad \text{y} \qquad R : V \rightarrow W$$

Adición

La suma de T y R es una transformación de V en W, que se define como:

$$(T + R)(\overline{v}) = \mathrm{T}(\overline{v}) + R(\overline{v}) \ ; \qquad \forall \ \overline{v} \in V$$

$$M(T + R) = M(T) + M(R)$$

Multiplicación por un escalar

El producto de un escalar $\forall \propto \in K$ por la transformación T es una transformación de V en W, que se define como:

$$(\propto T)(\overline{v}) = \propto T(\overline{v}) ; \qquad \forall \ \overline{v} \in V$$

$$M(\propto T) = \propto M(T)$$

Álgebra de transformaciones lineales

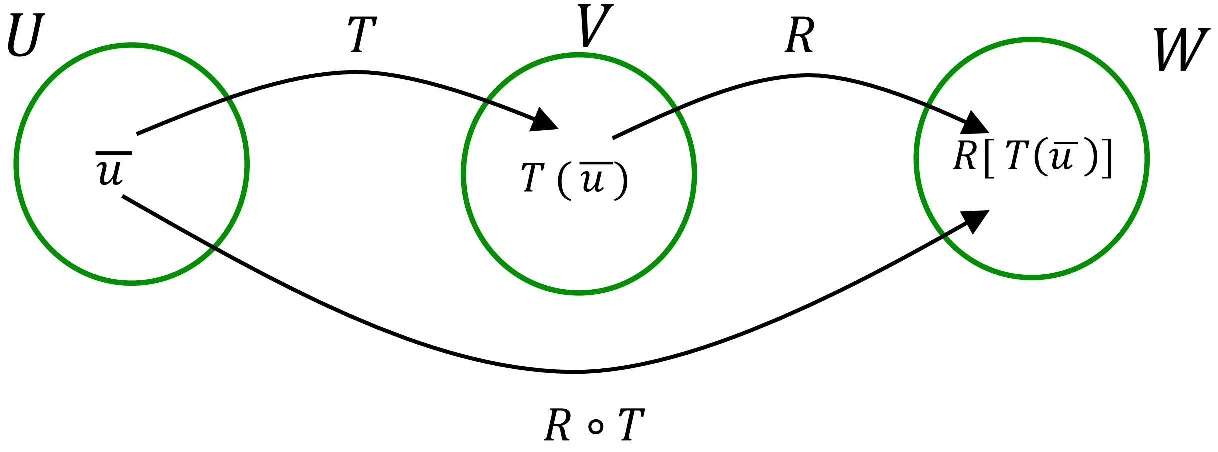
Dadas dos transformaciones lineales:

$$T : U \rightarrow V \text{ y } R : V \rightarrow W$$

Composición

Se define la transformación $S : U \rightarrow W$ como el resultado de la composición entre las transformaciones T y R, de la siguiente forma:

$$S(\overline{u}) = (R \circ T)(\overline{u}) = R[T(\overline{u})]$$



Álgebra de transformaciones lineales

Para que la operación composición pueda realizarse, debe existir intersección entre el recorrido de T y el dominio de R.

Teorema

Si $T : U \rightarrow V$ y $R : V \rightarrow W$ son transformaciones lineales y A, B, C son bases de U, V, W respectivamente, entonces:

$$M_C^A\,(R \circ T) = M_C^B\,(R)\,M_B^A\,(T)$$

Dado que el producto de matrices en general no es conmutativo, entonces se puede inferir que la operación composición, en general no es conmutativa, esto es:

$$M_C^A\,(R \circ T) \neq M_C^A\,(\mathrm{T} \circ \mathrm{R}) \qquad\qquad (R \circ T) \neq (T \circ R)$$

Álgebra de transformaciones lineales

Sean T, R y S tres transformaciones lineales y sean $\propto, \beta \in K$, se tiene que:

1. $T + R = R + T$
2. $(T + R) + S = T + (R + S)$
3. $\propto (\beta T) = (\propto \beta)T$
4. $(\propto + \beta)T = \propto T + \beta T$
5. $\propto (T + R) = \propto T + \propto R$
6. $(R \circ T) \circ S = R \circ (T \circ S)$
7. $\propto (R \circ T) = (\propto R) \circ T = R \circ (\propto T)$
8. $S \circ (R + T) = (S \circ R) + (S \circ T)$

Transformaciones lineales Inyectivas y Suprayectivas

Sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal

Transformación inyectiva

Una transformación lineal es inyectiva, si y sólo si, el núcleo de dicha transformación es de dimensión cero.

$$Dim\, N(T) = 0$$

Transformación suprayectiva

Una transformación lineal es suprayectiva, si y sólo si, la dimensión del recorrido es igual a la dimensión del codominio, o bien, si la dimensión del núcleo es igual a cero, entonces la transformación será suprayectiva, si la dimensión del dominio es igual a la dimensión del codominio.

1. $Dim\, T(U) = Dim\, V$
2. $Dim\, N(T) = 0 \quad y \quad Dim\, U = Dim\, V$

Transformaciones lineales Biyectivas

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal

Transformación biyectiva

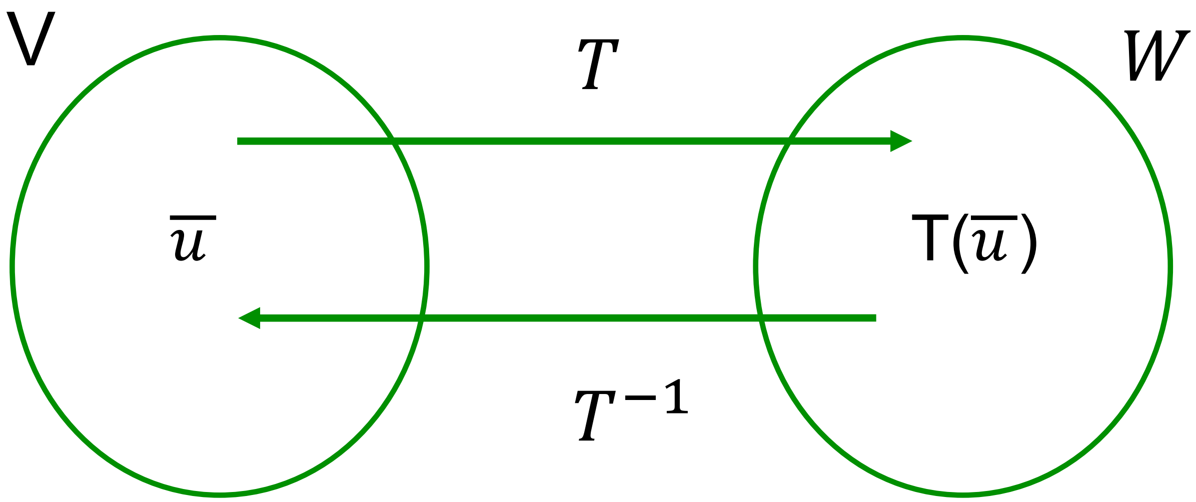
Una transformación lineal es biyectiva, si y sólo si, es inyectiva y suprayectiva, es decir, si la dimensión del núcleo es igual a cero y la dimensión del recorrido es igual a la del codominio

1. $Dim\, N(T) = 0$
2. $Dim\, T(U) = Dim\, V$

Inversa de una transformación lineal

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Existe una transformación inversa $T^{-1}: W \rightarrow V$, si y sólo si, la transformación T es biyectiva, o bien si $M(T)$ es no singular, esto es, si la inversa de $M(T)$ existe.

$$[M(T)]^{-1} = M(T^{-1})$$



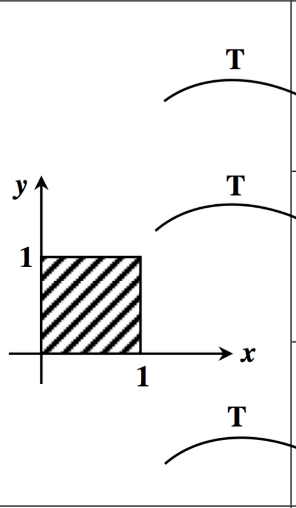
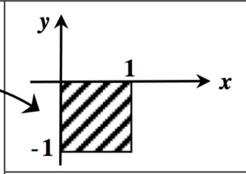
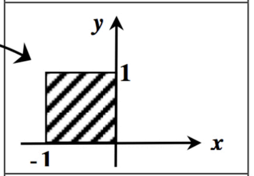
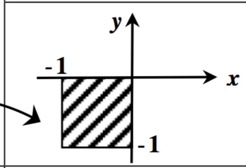
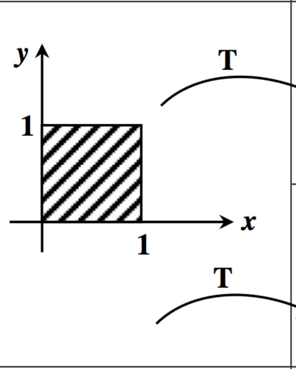
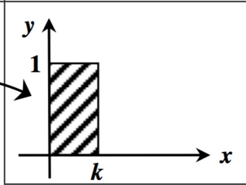
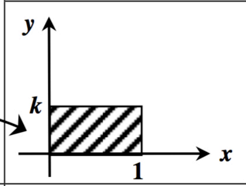
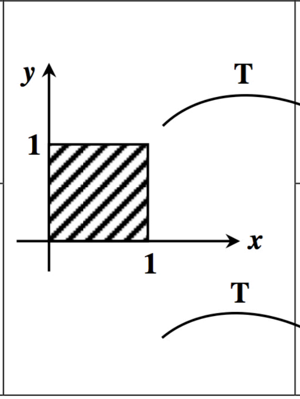
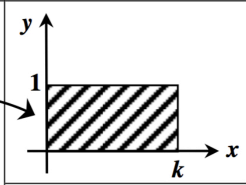
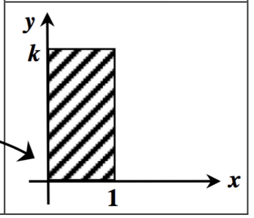
Inversa de una transformación lineal

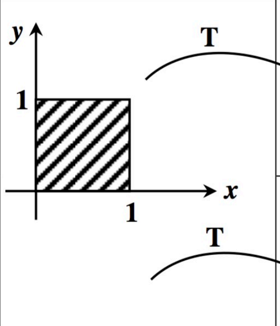
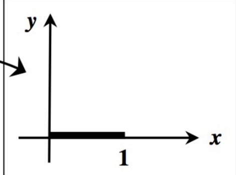
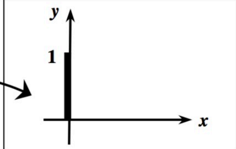
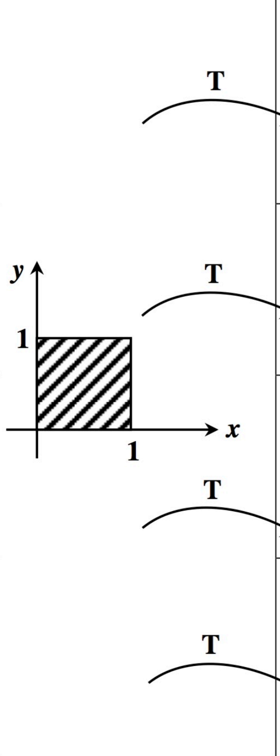
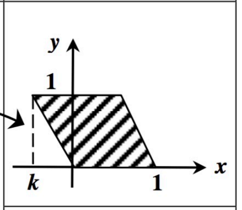
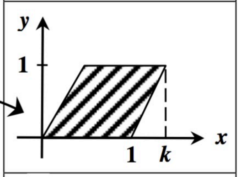
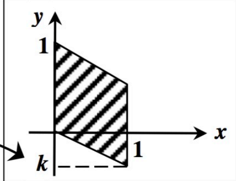
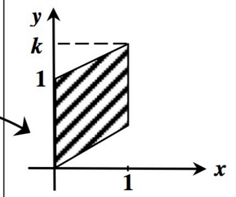
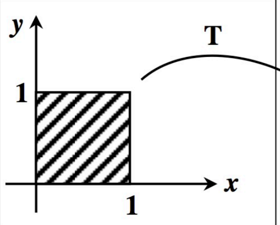
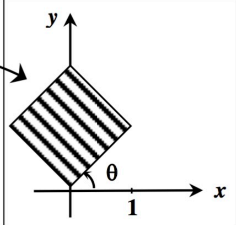
Algunas propiedades de la transformación inversa son:

1. T^{-1} es única
2. $(T^{-1})^{-1} = T$
3. $(T \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ T^{-1}$
4. $(\propto T)^{-1} = \propto^{-1} T^{-1}$; si $\propto \neq 0$
5. $T^{-1} \circ T = I_V$
6. $T \circ T^{-1} = I_w$

Donde I_V y I_w son transformaciones identidad de V y W, respectivamente.

Efectos geométricos de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Transformación	Matriz de transformación	Efecto geométrico: Dominio	Efecto geométrico: Codominio
Reflexión	Sobre el eje x $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$		
	Sobre el eje y $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	Con respecto al origen $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$		
Contracción	Horizontal $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$		
	Vertical $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $0 < k < 1$		
Expansión	Horizontal $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $k > 1$		
	Vertical $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $k > 1$		

Transformación	Matriz de transformación	Efecto geométrico: Dominio	Efecto geométrico: Codominio
Proyección	Sobre el eje x $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$		
	Sobre el eje y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
Deformación o Deslizamiento	A lo largo del eje x con $k < 0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje x con $k > 0$ $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje y con $k < 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$		
	A lo largo del eje y con $k > 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$		
Rotación	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$		

Valores y vectores característicos

A las transformaciones lineales que van de un espacio vectorial al mismo espacio vectorial, esto es $T\colon V \to V$, se les conoce como operadores lineales.

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita definido sobre un campo K y sea $T\colon V \to V$ un operador lineal para el cual:

$$T(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \qquad ; \quad \forall\, \bar{v} \in V \quad con \quad \bar{v} \neq \bar{0}$$
$$\forall\, \lambda \in K$$

- Al escalar λ se le llama valor característico de T
- Al vector $\bar{v}$ diferente de $\bar{0}$ se le conoce como vector característico de T correspondiente al valor λ

Espacios característicos

Al conjunto formado por todos los vectores característicos asociados a un valor característico λ, al cual se le agrega el vector cero, se le llama espacio característico y se representa como E(λ).

Propiedades de los valores y vectores propios

- Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
- Si $\overline{v}$ es un vector propio asociado a un valor propio λ, entonces $\propto \overline{v}$ es también un vector propio asociado a λ, $\propto \in K$ con $\propto \neq 0$
- Si $\overline{v}$ y $\overline{u}$ son dos vectores propios asociados a un valor propio λ, y $\overline{v} \neq -\overline{u}$ entonces $\overline{v} + \overline{u}$ es un vector propio asociado a λ.

Ing. Francisco Barrera Del Rayo

Polinomio característico y ecuación característica

Para obtener dichos elementos, se tiene:

$$T(\overline{v}) = \lambda\overline{v} \quad ....(1)$$

Considerando que:

$$M(T) = A$$

Entonces podemos plantear que:

$$T(\overline{v}) = A\overline{v} \quad ....(2)$$

De (1) y (2) se puede plantear:

$A\overline{v} = \lambda I\overline{v}$ Donde I es la matriz identidad

De donde se tiene:

$$A\overline{v} - \lambda I\overline{v} = \overline{0}$$

$$(A - \lambda I)\overline{v} = \overline{0}$$

- Al $Det(A - \lambda I)$ se le conoce como polinomio característico
- Al $Det(A - \lambda I) = 0$ se le conoce como ecuación característica

Matrices similares

Se tiene que dos matrices A y B de orden $n \times n$ son similares, si existe una matriz no singular C, tal que:

$$B = C^{-1}AC$$

Teorema: dos matrices representan al mismo operador lineal, si y sólo si, son similares.

Propiedades:

1. SI A y B son matrices similares, entonces $Det(A) = Det(B)$

2. Dos matrices similares tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores característicos

Diagonalización

Teorema

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T: V \to V$ es un operador lineal, entonces existe una matriz diagonal asociada a T, cuando se puede definir una base de V formada por vectores característicos de T. La matriz asociada a T referida a esta base, es una matriz diagonal que llamaremos D cuyos elementos d_{ii} son los valores característicos de T.

Ejemplo:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Diagonalización

Sea A una matriz de orden $n \times n$ asociada a un operador lineal T.

La matriz A será similar a una matriz diagonal D, si y sólo si, existe un conjunto linealmente independiente formado por n vectores característicos de T. Para este caso, existe una matriz no singular P, para la cual se cumple que $D = P^{-1}AP$, donde P tiene como columnas a los n vectores característicos de T correspondientes a los valores característicos d_{ii} que definen a la matriz diagonal D.

$$D = P^{-1}AP$$

$P \rightarrow$ Matriz Diagonalizadora
$D \rightarrow$ Matriz diagonal
$A \rightarrow$ Matriz asociada al operador

Diagonalización

Una operador es diagonalizable cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- Que los valores propios sean distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.
- La suma de las dimensiones de los espacios propios es igual a la del dominio.
- Si se puede formar una base del dominio con vectores propios.

Valores y vectores característicos

Para cada valor de λ, la expresión (A - $\lambda I)\overline{v}$= $\overline{0}$ es un sistema homogéneo indeterminado, cuyas soluciones no nulas son los vectores de coordenadas, en la base B, de los vectores característicos buscados, donde B es la base utilizada para obtener la matriz asociada a la transformación M_B^B (T) $= A$