3.3 Integración por descomposición en fracciones racionales

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{función racional}} dx \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{array}{l} \leftarrow \text{polinomio} \\ \leftarrow \text{polinomio} \end{array}$$

Grado de P $<$ grado de Q – función racional propia

Grado de P $\geq$ grado de Q – función racional impropia

$f(x)$ – impropia $\Rightarrow$ DIVIDIR

$$f(x) = \text{POLINOMIO} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

función racional propia

$$\int f(x)\,dx=\int\left[\text{POLINOMIO}+\frac{R(x)}{Q(x)}\right]dx=$$

$$=\int \text{POLINOMIO}\,dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

función
racional
propia

Teorema

Toda función polinómica $Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ puede escribirse como un producto, cada uno de cuyos factores es lineal de la forma $(ax+b)$, o es cuadrático de la forma (ax^2+bx+c), donde $b^2 - 4ac < 0$.

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx, \quad \text{Grado de } R(x) < \text{Grado de } Q(x)$$

$$Q(x) = x^2(x-2)(x-3)^2(x^2+4)(x^2+9)^2(x^2+2x+8)(x^2+3x+5)^2$$

grado de $Q = 17$

$x^2 \to x \cdot x = (x+0)(x+0)$ factor lineal repetido

$x-2$ — factor lineal

$(x-3)^2 = (x-3)(x-3)$ factor lineal repetido

x^2+4 $\quad b^2-4ac = 0^2-4(1)(4) = -16 < 0$

ax^2+bx+c $\quad$ factor cuadrático

$x^2+4=0 \to x = \pm 2i$

$(x^2+9)^2$

x^2+9 , $b^2-4ac = 0^2-4(1)(9) = -36 < 0$

factor cuadrático repetido

x^2+2x+8 , $b^2-4ac = 4-4(1)(8) = -28 < 0$

factor cuadrático

$(x^2+3x+5)^2$

x^2+3x+5 , $b^2-4ac = 9-4(1)(5) < 0$

factor cuadrático repetido

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{x^2(x-2)(x-3)^2(x^2+4)(x^2+9)^2(x^2+2x+8)(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}+\frac{D}{(x-3)}+\frac{E}{(x-3)^2}+\frac{Fx+G}{(x^2+4)}+$$

$$\frac{Hx+I}{(x^2+9)}+\frac{Jx+K}{(x^2+9)^2}+\frac{Lx+M}{(x^2+2x+8)}+\frac{Nx+O}{(x^2+3x+5)}+$$

$$\frac{Sx+T}{(x^2+3x+5)^2}$$

Procedimiento para descomponer en fracciones racionales

Para descomponer una función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones parciales, procedase como sigue.

Paso 1. Si $f(x)$ es impropia divida $P(x)$ entre $Q(x)$ para obtener $f(x)=polinomio+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Paso 2. Factorice $Q(x)$ en un producto de factores lineales o cuadráticos irreductibles con coeficientes reales. Por un teorema del álgebra, esto siempre es posible (en teoría).

Paso 3. Para cada factor de la forma $(ax+b)^k$, descomponga en los términos

$$\frac{1}{(ax+b)^k}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{k}}}{(ax+b)^k}$$

Paso 4. Por cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^m$, es de esperarse que la descomposición tenga los términos

$$\frac{1}{(ax^2+bx+c)^m}=\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Paso 5. Haga $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ igual a la suma de todos los términos encontrados en los pasos 3 y 4. El número de constantes por determinar debe ser igual al grado del denominador $Q(x)$.

Paso 6. Multiplique ambos miembros de la ecuación encontrada en el paso 5 por $Q(x)$ y despeje las constantes desconocidas. Esto puede hacerse mediante cualquiera de dos métodos: (1) iguale los coeficientes de los términos semejantes y (2) asigne valores convenientes a la variable x.

EJEMPLOS:

Ejemplo 1. Factores lineales distintos

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4}\,dx =$$

función racional impropia

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 6 \\ \hline x^2 - 4 & x^4 - 10x^2 + 3x + 1 \\ & -x^4 + 4x^2 \\ \hline & \quad -6x^2 + 3x + 1 \\ & \quad 6x^2 - 24 \\ \hline & \quad 3x - 23 \end{array}$$

$$= \int \left[x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4} \right] dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6x + \int \frac{3x-23}{x^2-4}\,dx$$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

$$\int \frac{3x-23}{(x-2)(x+2)}\,dx$$

a) Primer método: igualdad de polinomios

$$\int \frac{3x-23}{(x-2)(x+2)}\,dx$$

$$\left[\frac{3x-23}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\right](x-2)(x+2)$$

$$3x-23 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$3x-23 = (A+B)x + (2A-2B)$$

$$A+B=3 \quad , 2A-2B=-23$$

$$B=3-A \qquad 2A-2(3-A)=-23$$

$$4A=-17 \qquad \underline{A=-\frac{17}{4}}$$

$$B = 3 - \left(-\frac{17}{4}\right) = \frac{12}{4} + \frac{17}{4} = \frac{29}{4}$$

$$B = \frac{29}{4}$$

$$\int \frac{3x-23}{(x-2)(x+2)}\,dx = \int \left[\frac{-\frac{17}{4}}{x-2} + \frac{\frac{29}{4}}{x+2}\right] dx =$$

$$= -\frac{17}{4}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{29}{4}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\frac{17}{4}\ln|x-2| + \frac{29}{4}\ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{x^4-10x^2+3x+1}{x^2-4}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6x - \frac{17}{4}\ln|x-2| + \frac{29}{4}\ln|x+2| + C$$

b) Segundo método: asignación de valores convenientes

$$\left[\frac{3x-23}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\right](x-2)(x+2)$$

$$3x-23 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$x=-2, \quad -29 = -4B \rightarrow B = \frac{29}{4}$$

$$x=2, \quad -17 = 4A \rightarrow A = -\frac{17}{4}$$

c) Tercer método: Método de eliminación de Heaviside para factores lineales distintos

$$\left[\frac{3x-23}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\right](x-2)$$

$$\frac{3x-23}{x+2} = A + \frac{B(x-2)}{x+2}$$

$$x=2, \quad -\frac{17}{4} = A$$

$$\frac{3x-23}{\underbrace{(x-2)}_{=2}\underbrace{(x+2)}_{=-2}} = \frac{A^{=-\frac{17}{4}}}{x-2} + \frac{B^{=-\frac{29}{-4}=\frac{29}{4}}}{x+2}$$

Ejemplo 2. Factores lineales repetidos

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^3}\,dx$$

$$\left[\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}\right](x+1)^3$$

$$x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$$

$$x=-1,\quad \underline{-2=C}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x-1 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C\right]$$

$$1 = 2A(x+1) + B$$

$$x=-1,\quad \underline{B=1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\,1 = 2A(x+1) + B\,\right]$$

$$0 = 2A \quad , \quad \underline{A = 0}$$

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^3}\,dx = \int\left[\frac{0}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-2}{(x+1)^3}\right]dx =$$

$$= \int \frac{1}{(\underbrace{x+1}_{u})^2}\,dx - 2\int \frac{1}{(\underbrace{x+1}_{u})^3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + C$$

Ejemplo 3. Factores distintos y otros repetidos

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx$$

$$\left[\frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\right](x+3)(x-1)^2$$

$$3x^2-8x+13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$$

$x=1$, $3-8+13=4C$, $\underline{C=2}$

$x=-3$, $27+24+13=16A$, $\underline{A=4}$

$x=0$, $13=A-3B+3C$

$13=4-3B+6$, $\underline{B=-1}$

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx = \int\left[\frac{4}{x+3}+\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right]dx =$$

$$= 4\int\frac{1}{x+3}dx - \int\frac{1}{x-1}dx + 2\int\frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= 4\ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

Ejemplo 4. Un factor cuadrático distinto

$$\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)\left(x^2+1\right)}dx$$

$$\left[\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{4x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right](4x+1)(x^2+1)$$

$$6x^2-3x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(4x+1)$$

$$x=-\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{8}+\frac{3}{4}+1=\frac{17}{16}A$$

$$\frac{3+6+8}{8}=\frac{17}{16}A$$

$$\frac{17}{8}=\frac{17}{16}A \rightarrow \underline{A=2}$$

$$x=0,\quad 1=\underset{\substack{\parallel\\ 2}}{A}+C,\quad \underline{C=-1}$$

$$x=1,\quad 4=2\underset{\substack{\parallel\\ 2}}{A}+5B+5\underset{\substack{\parallel\\ -1}}{C},\quad \underline{B=1}$$

$$\int\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx=\int\left[\frac{2}{4x+1}+\frac{x-1}{x^2+1}\right]dx=$$

$$=\frac{2}{4}\int\frac{4}{\underset{u}{4x+1}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|4x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\text{angtan}\,x+C$$

Ejemplo 5. Un factor cuadrático repetido

$$\int \frac{x^3-3}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$\left[\frac{x^3-3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\right](x^2+1)^2$$

$$x^3-3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$$

$$x^3-3 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D$$

$$A=1, \quad B=0, \quad A+C=0, \quad \overset{=0}{B}+D=-3$$

$$\underline{C=-1} \qquad D=-3$$

$$\int \frac{x^3-3}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int \left[\frac{x}{x^2+1} + \frac{-x-3}{(x^2+1)^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\underbrace{x^2+1}_{u}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(\underbrace{x^2+1}_{u})^2}dx - 3\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} - 3\left(\frac{1}{2}\operatorname{angtan}x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{3}{2}\operatorname{angtan}x - \frac{3x}{2(x^2+1)} + C =$$

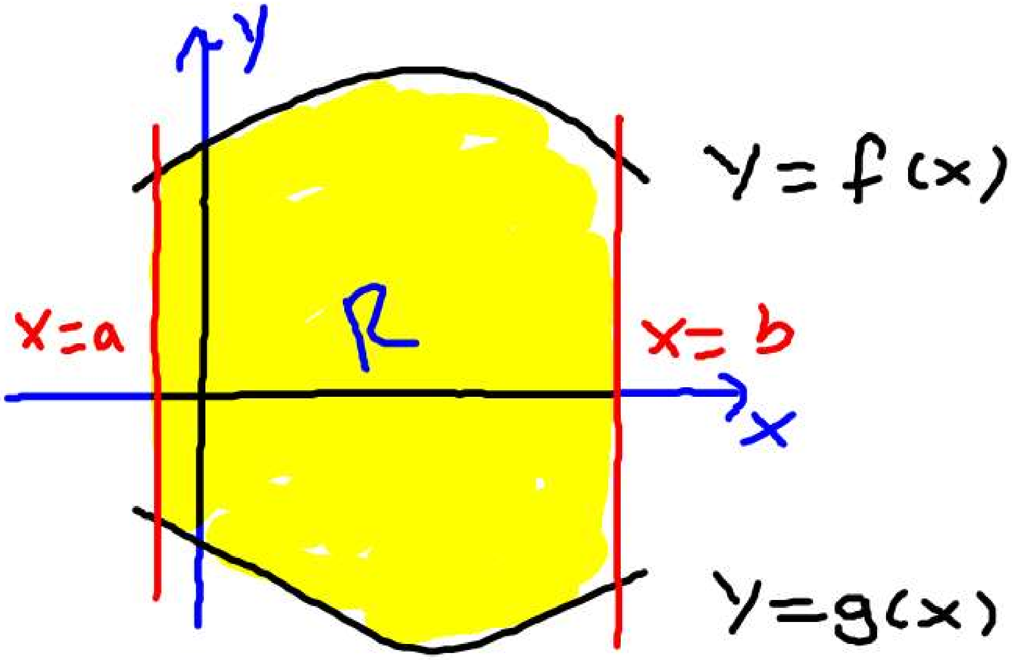
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{3}{2}\operatorname{angtan}x + \frac{1-3x}{2(x^2+1)} + C$$

3.4 Aplicaciones de la integral definida al cálculo de: áreas en coordenadas cartesianas, longitud de arco en coordenadas cartesianas y polares, y volúmenes de sólidos de revolución.

Teorema

El área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$; $y = g(x)$ y las rectas $x = a,\ x = b$ donde f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a,b]$, es:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$



$f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [a, b]$

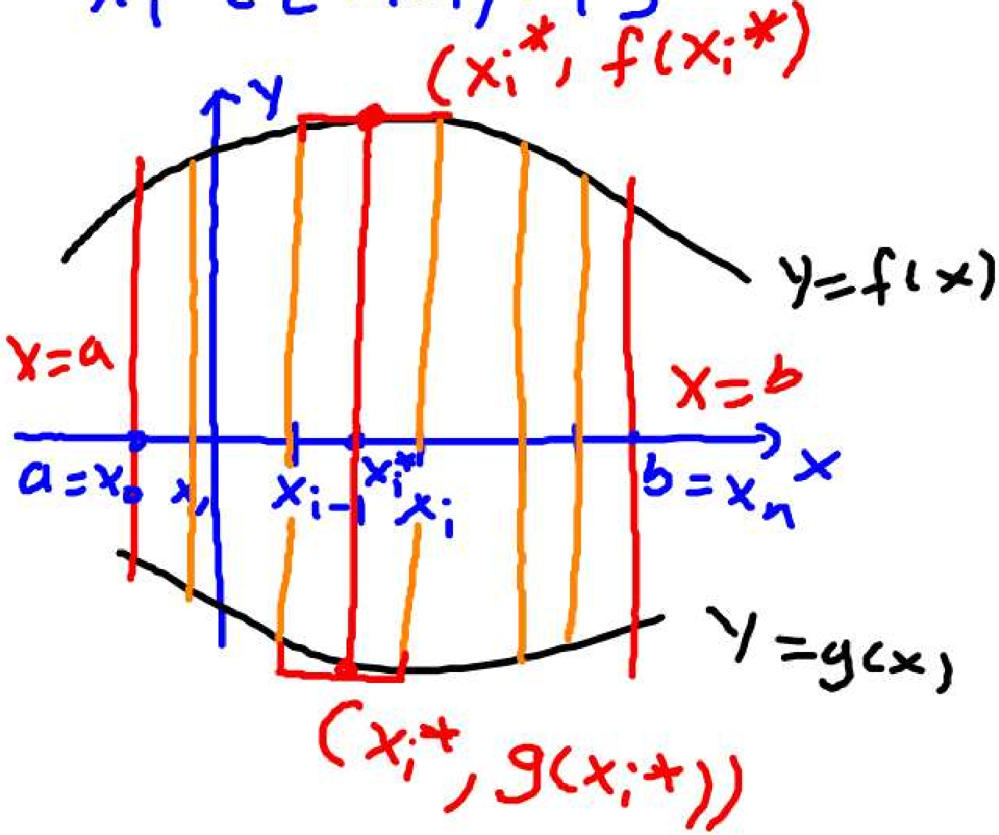
$A_R = ?$

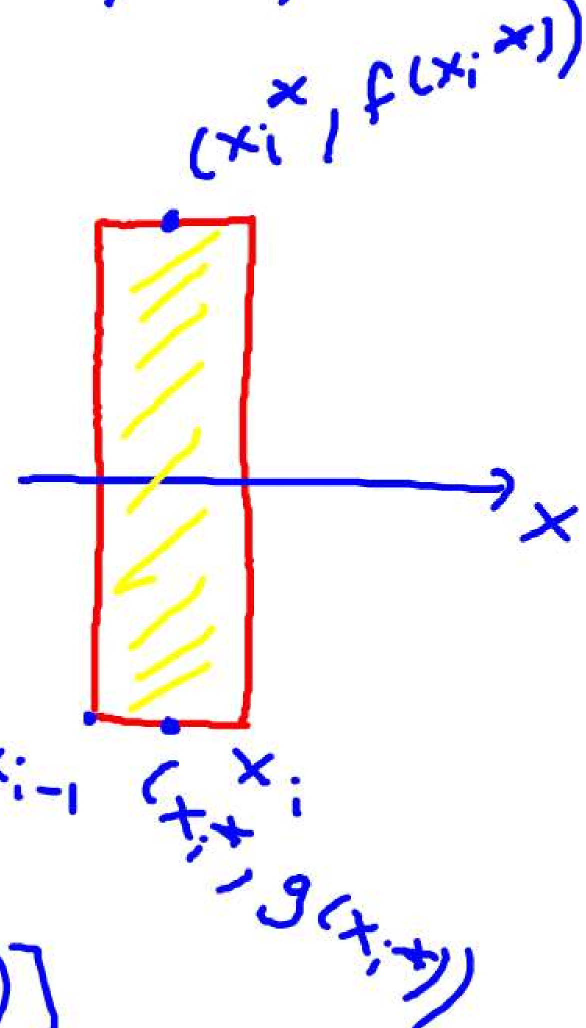
$[a, b]$ partición arbitraria

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i] \qquad \|P\| = \text{máx}\{\Delta x_i\}$$





$$A_i = (x_i - x_{i-1})\left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right]$$

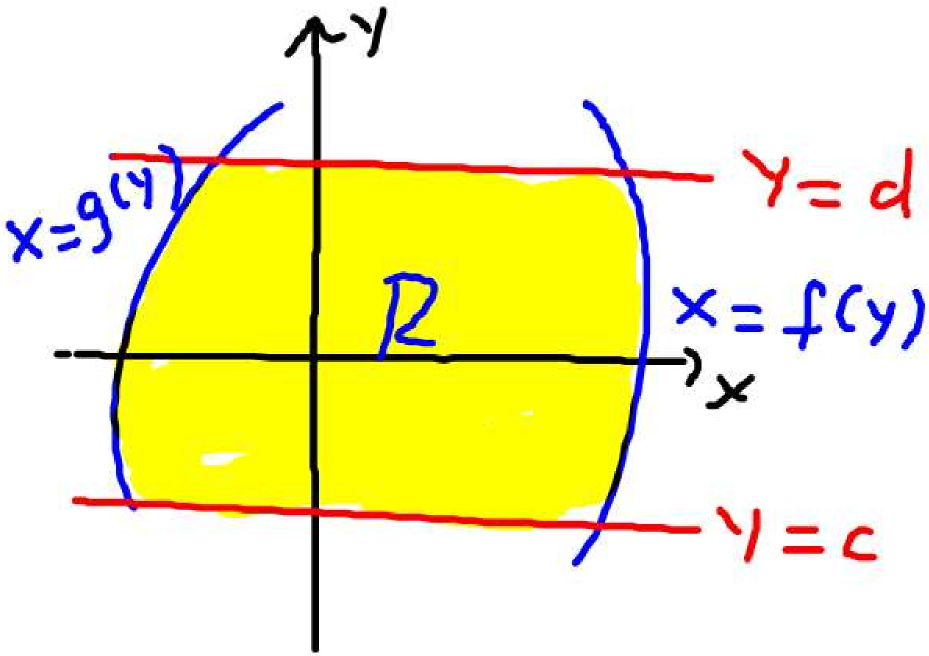
$$A_i = \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right]\Delta x_i$$

$$A_{aprox.} = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x_i$$

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x_i$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$



$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

$$f(y) \geq g(y) \quad \forall y \in [c,d]$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región limitada por las curvas dadas por $4y^2 - 2x = 0$, $4y^2 + 4x - 12 = 0$.

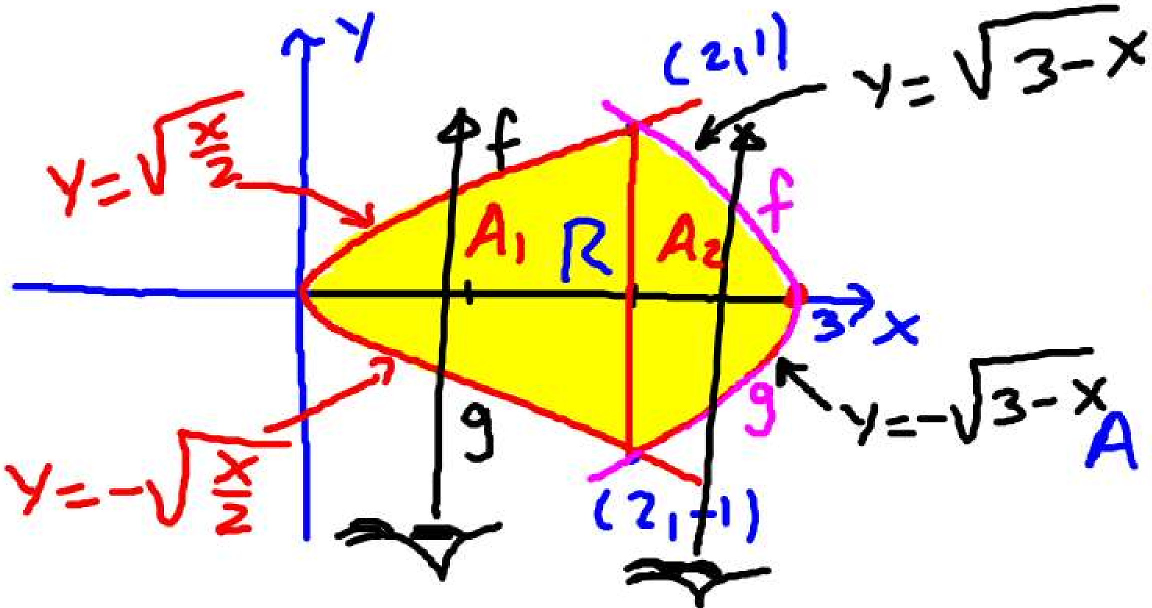
$y^2 = \frac{1}{2}x \quad , \quad y^2 = 3 - x \quad \rightarrow y^2 = -(x-3)$

Puntos de intersección

$\frac{1}{2}x = 3 - x$

$\frac{3}{2}x = 3 \rightarrow \underline{x = 2} \qquad y^2 = \frac{1}{2}(2) = 1 \rightarrow y = \pm 1$

$\begin{cases} (2, 1) \\ (2, -1) \end{cases}$



$$A_R = ?$$

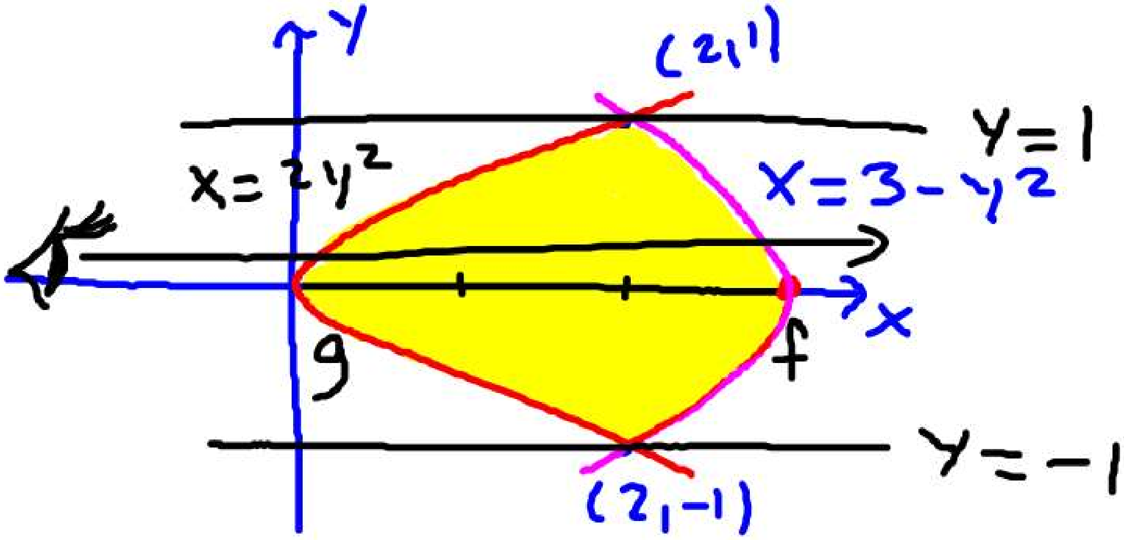
$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

$$f(x)\geq g(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

$$A_R = A_1 + A_2$$

$$A_1=\int_0^2 \left[\sqrt{\frac{x}{2}}-\left(-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right]dx$$

$$A_2=\int_2^3 \left[\sqrt{3-x}-\left(-\sqrt{3-x}\right)\right]dx$$



$$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy$$

$f(y) \geq g(y)$
$\forall y \in [c,d]$

$$A=\int_{-1}^{1} [3-y^2-2y^2]\,dy = 2\int_0^1 (3-3y^2)\,dy =$$

$$= 2(3y-y^3)\Big]_0^1 = 2(2)=4$$

$A=4$ unidades de área