Ing. Francisco Barrera Del Rayo

4.

Espacios con Producto Interno

Producto Interno

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno en V es una función $V \times V$ en $\mathbb{C}$ que asigna a cada pareja ordenada $(\bar{u}, \bar{v})$ de vectores de V un escalar $(\bar{u}|\bar{v}) \in \mathbb{C}$, llamado el producto interno de $\bar{u}\ y\ \bar{v}$, que debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $(\overline{u}|\overline{v}) = \overline{(\overline{v}|\overline{u})}$ Conmutatividad
2. $(\overline{u}|\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u}|\overline{v}) + (\overline{u}|\overline{w})$ Distributividad
3. $(\alpha\overline{u}|\overline{v}) = \alpha(\overline{u}|\overline{v})$ Homogeneidad
4. $(\overline{u}|\overline{u}) > 0\ si\ \overline{u} \neq \overline{0}$ Positividad

Propiedades del producto Interno

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y sea $(\cdot\,|\,\cdot)$ un producto interno en V; entonces, $\forall\ \bar{u}, \bar{w}, \bar{v} \in$ V y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que:

1. $(\overline{u}|\alpha\overline{v}) = \overline{\alpha}(\overline{u}|\overline{v})$
2. $(\overline{u}|\overline{v} - \overline{w}) = (\overline{u}|\overline{v}) - (\overline{u}|\overline{w})$
3. $(\overline{0}|\overline{v}) = (\overline{v}|\overline{0}) = 0$
4. $(\overline{u}|\overline{u}) \in \mathbb{R}$
5. $(\overline{u}|\overline{u}) = 0$ si y sólo si $\overline{u} = \overline{0}$

Producto Interno usual para $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{R}^n$

Para $\mathbb{C}^n$

$$(\overline{x}|\overline{y})=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}$$

Para $\mathbb{R}^n$

$$(\overline{x}|\overline{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

Donde $\overline{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\overline{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ con elementos que pertenecen a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, respectivamente.

Norma

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y sea $(\cdot \mid \cdot)$ un producto interno en V. Se llama norma de $\overline{v} \in V$, y se representa como $\| \overline{v} \|$, al número real no negativo definido por:

$$\| \overline{v} \| = \sqrt{(\overline{v}|\overline{v})}$$

Propiedades:

1. $\| \overline{v} \| > 0$ con $\overline{v} \neq \overline{0}$
2. $\| \overline{v} \| = 0$ si y sólo si $\overline{v} = \overline{0}$
3. $\| \propto \overline{v} \| = | \propto | \, \| \overline{v} \|$
4. $\| \overline{v} + \overline{u} \| \leq \| \overline{v} \| + \| \overline{u} \|$

Vector unitario

Si un vector es multiplicado por el reciproco de su norma, el vector que se obtiene es un vector unitario.

$$\overline{u} = \frac{1}{\|\overline{w}\|}\ \overline{w} \qquad \text{con} \quad \overline{w} \neq \overline{0}$$

Donde $\| \ \overline{u}\ \| = 1$

Nota: Un vector unitario es aquel cuya norma es 1.

Distancia entre vectores

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$ $\in V$. Se llama distancia de $\overline{u}$ a $\overline{v}$, y se representa con $d(\overline{u},\overline{v})$, al número real no negativo definido por:

$$d(\overline{u},\overline{v}) = \parallel \overline{v} - \overline{u} \parallel$$

Propiedades:

1. $d(\overline{u},\overline{v}) \geq 0$
2. $d(\overline{u},\overline{v}) = 0$ *si y sólo si* $\overline{v} = \overline{u}$
3. $d(\overline{u},\overline{v}) = d(\overline{v},\overline{u})$
4. $d(\overline{u},\overline{v}) \leq d(\overline{u},\overline{w}) + d(\overline{w},\overline{v})$

Ángulo entre vectores

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno y sean $\overline{u}$ y $\overline{v} \in V$ dos vectores no nulos. El ángulo entre $\overline{u}$ y $\overline{v}$ esta dado por la expresión:

$$\cos\theta = \frac{(\overline{u}|\overline{v})}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} \qquad \text{donde} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Si el campo de definición de V es $\mathbb{C}$, entonces el ángulo entre $\overline{u}$ y $\overline{v}$ está dado por:

$$\cos\theta = \frac{R(\overline{u}|\overline{v})}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|}$$

Donde $R(\overline{u}|\overline{v})$ es la parte real de $(\overline{u}|\overline{v})$

Vectores ortogonales

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v} \in V$ son ortogonales si:

$$(\overline{u}|\overline{v}) = 0$$

De acuerdo con esta definición, es claro que el vector nulo es ortogonal a cualquier otro vector del espacio vectorial.

Conjuntos ortogonales y ortonormales

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $A = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\ , \overline{a}_3\ , \dots\ , \overline{a}_n\ \}$ un conjunto de vectores de V. Se dice que A es un conjunto ortogonal cuando:

$$\left(\overline{a}_i \middle| \overline{a}_j\right) = 0 \quad ; \quad \forall\ i \neq j$$

Si además $\|\ \overline{a}_i\ \| = \ 1$, entonces el conjunto A es un ortonormal.

Todo conjunto de vectores ortogonales no nulos, es linealmente independiente.

Coordenadas de un vector con respecto a una base ortogonal

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $B = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \dots, \overline{b}_n\}$ una base ortogonal de V.

Si $\overline{v} \in V$ y se tiene que:

$$\overline{v} = \propto_1 \overline{b}_1 + \propto_2 \overline{b}_2 + \cdots + \propto_i \overline{b}_i + \cdots + \propto_n \overline{b}_n$$

Entonces los escalares $\propto_i$ vienen dados por la expresión:

$$\propto_i = \frac{(\overline{v} \mid \overline{b}_i)}{(\overline{b}_i \mid \overline{b}_i)}$$

Coordenadas de un vector con respecto a una base ortonormal

Si los vectores de la base B fueran vectores unitarios, es decir, si B fuese una base ortonormal, entonces las coordenadas del vector $\overline{v}$ respecto a la base B vendrían dadas por:

$$\overline{v} = \propto_1 \overline{b}_1 + \propto_2 \overline{b}_2 + \cdots + \propto_i \overline{b}_i + \cdots + \propto_n \overline{b}_n$$

$$\propto_i = (\overline{v} | \overline{b}_i)$$

ya que $(\overline{b}_i | \overline{b}_i) = 1$

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidht

Sea $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$ una base cualquiera de un espacio vectorial, y sea $B_o = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \dots, \bar{w}_n\}$ una base ortogonal del mismo espacio vectorial, entonces sus elementos vienen dados por:

$$\bar{w}_1 = \bar{b}_1$$

$$\bar{w}_2 = \bar{b}_2 - \frac{(\bar{b}_2 | \bar{w}_1)}{(\bar{w}_1 | \bar{w}_1)} \bar{w}_1$$

$$\vdots$$

$$\bar{w}_i = \bar{b}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\bar{b}_i | \bar{w}_k)}{(\bar{w}_k | \bar{w}_k)} \bar{w}_k$$

Para $i = 1, 2, \dots, n$

Complemento ortogonal

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. Se dice que un vector $\bar{v} \in V$ es ortogonal a W si se cumple que:

$$(\bar{v}|\bar{u}) = 0 \quad ; \qquad \forall\ \bar{u} \in W$$

Al conjunto de todos los vectores de V ortogonales a W se le llama complemento ortogonal de W y se denota con $W^{\perp}$, esto es:

$$W^{\perp} = \{\bar{v} \in V \mid (\bar{v}|\bar{u}) = 0 \ ; \forall\ \bar{u} \in W\}$$

Teorema

$$dim\, V = dim\, W + dim\, W^{\perp}$$

Proyección de un vector sobre un subespacio

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. Cualquier vector $\bar{v} \in V$ puede expresarse en forma única como la suma de dos vectores, uno de W y otro de $W^{\perp}$, esto es:

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}'; \qquad \forall\ \bar{v} \in V,\ \bar{w} \in W,\ \bar{w}' \in W^{\perp}$$

La proyección de $\bar{v} \in V$ sobre el subespacio W viene dada por la expresión:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{v}|\bar{e}_i)\bar{e}_i$$

Donde $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una base ortonormal de W.

Teorema de proyección

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. La proyección de un vector $\bar{v} \in V$ sobre W es más próxima a $\bar{v}$ que cualquier otro vector de W. Esto es, si $\overline{w}$ es la proyección de $\bar{v}$ sobre W, entonces:

$$\| \overline{v} - \overline{w} \| \leq \| \overline{v} - \overline{t} \| \quad ; \forall \ \overline{t} \in W$$

El signo de igualdad se cumple, si y sólo si, $\overline{t} = \overline{w}$

Mínimos cuadrados

La solución de mínimos cuadrados $\overline{v}$ de un sistema incompatible:

$$A\overline{x}=\overline{y}$$

donde A es una matriz de orden $m{\times}n$, satisface la ecuación normal:

$$A^T A \, \overline{x} = A^T \overline{y}$$

y recíprocamente, cualquier solución de la ecuación normal es solución de mínimos cuadrados.

Mínimos cuadrados

Ya que la solución de mínimos cuadrados es una solución aproximada para un sistema incompatible, se puede obtener el vector error:

$$\bar{e} = (e_1 , e_2 , e_3 , e_4)$$

y para conocer el error, basta con calcular su norma:

$$\|\bar{e}\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2}$$