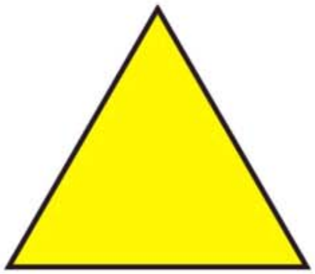
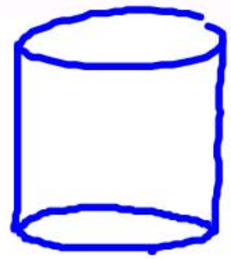
TEMA 4 DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES.

4.1 Definición de funciones escalares de variable vectorial. Región de definición.



$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = A(b, h)$



$V = \pi r^2 h$

$V = v(r, h)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = V(r, h)$

semiesfera

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

cilindro $V = V(r, h)$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$

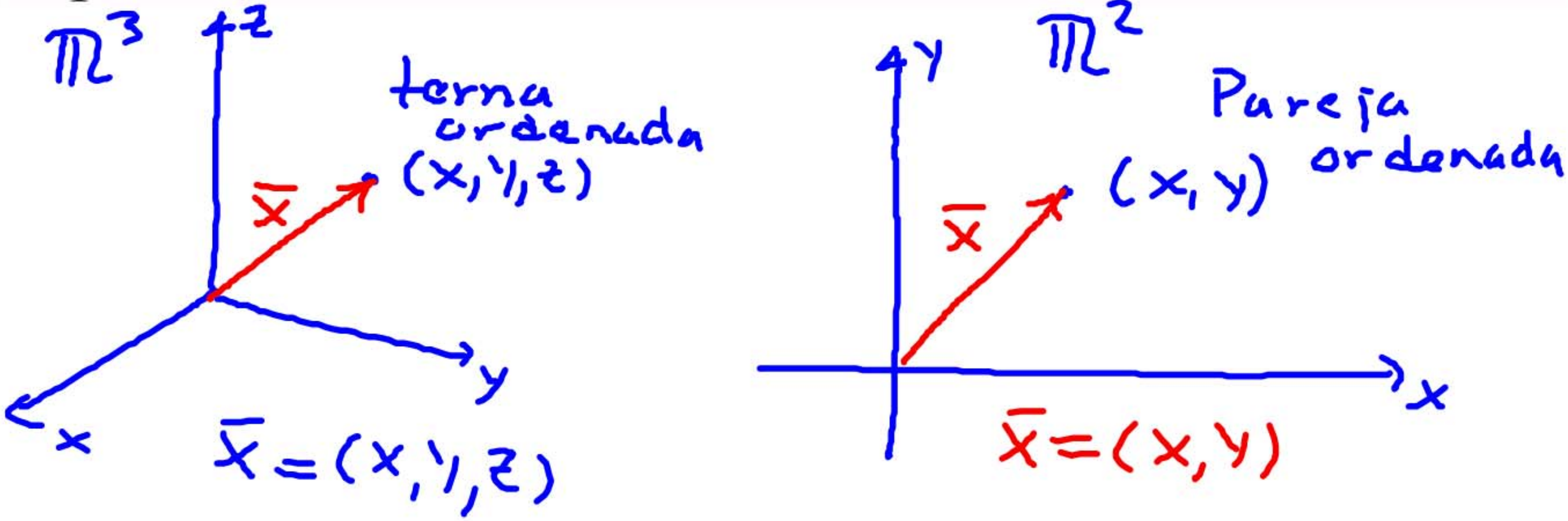
$$A = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$A = 3\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A = A(r, h)$$

Definición. Espacio numérico n-dimensional

El conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales se denomina espacio numérico n-dimensional y se denota por $\mathbb{R}^n$. Cada n-ada ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama punto del espacio numérico n-dimensional.

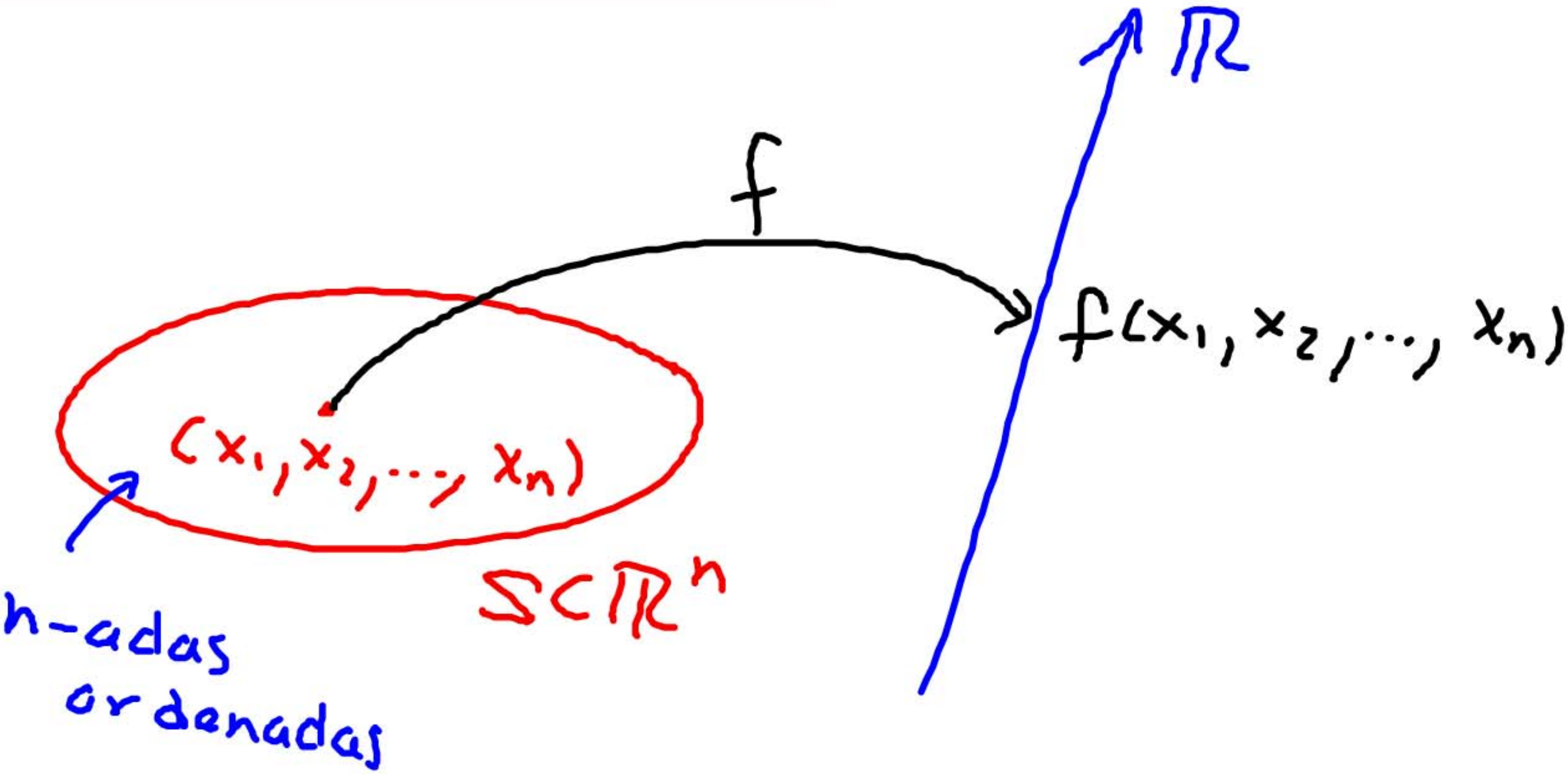


Definición. Función real o escalar de variable vectorial.

Sea S un conjunto de n-adas ordenadas de números reales, $S \subset \mathbb{R}^n$. Si a cada n-ada ordenada $\overline{x}$ en S le corresponde un único número real $f(\overline{x})$, se dice que f es una función escalar de variable vectorial. El conjunto S es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores $f(\overline{x})$ es el recorrido de f.

Notación: $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Esquemáticamente



Ejemplo:

$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

Dominio de la función.

$9-x^2-y^2 \geq 0$

$-\left(-x^2-y^2 \geq -9\right)$

$x^2+y^2 \leq 9$

Ecuación auxiliar:

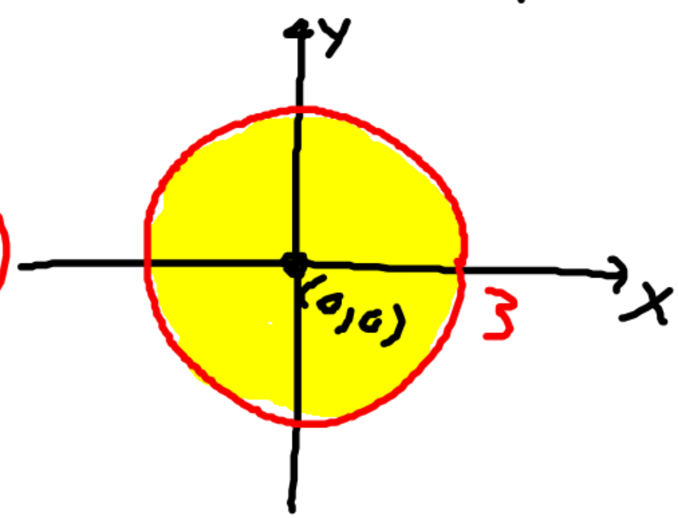
$x^2+y^2=9$

P.P. (punto de prueba)

$(0,0)$

$0^2+0^2 \leq 9$

$0 \leq 9$ ✓



S- dominio de la función

$$S = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9 \; ; \; x, y \in \mathbb{R} \}$$

Recorrido de la función.

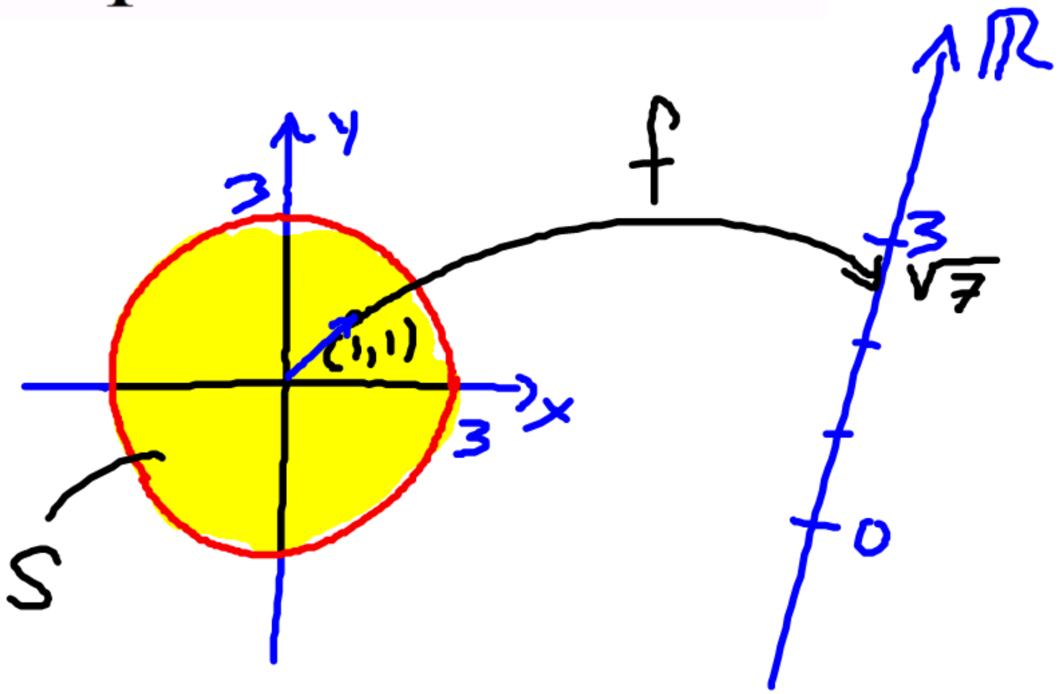
$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$f(x,y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$$

$$f(0,0) = 3 \qquad R = [0, 3]$$

$$f(3,0) = 0 \quad f(0,3) = 0$$

Esquemáticamente



$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

función escalar de variable vectorial

$$f(\underbrace{1,1}_{\text{vector}})=\underbrace{\sqrt{7}}_{\text{escalar}}$$

Gráfica de la función.

C.D. $y=f(x)$

C.I. $z=f(x,y)$

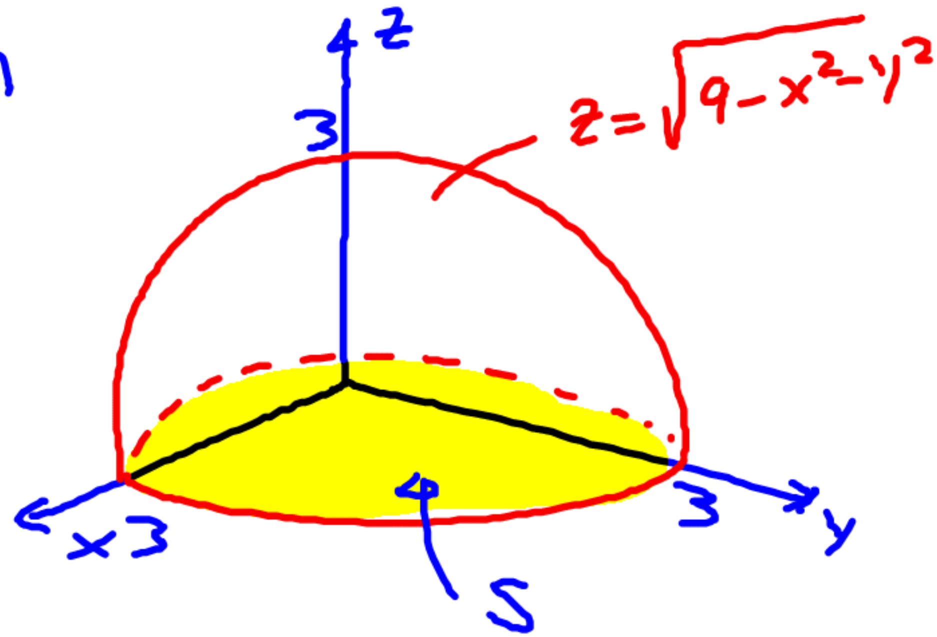
$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$(z)^2=\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)^2$$

$$z^2=9-x^2-y^2$$

$$x^2+y^2+z^2=9$$

$$z=\pm\sqrt{9-x^2-y^2}$$

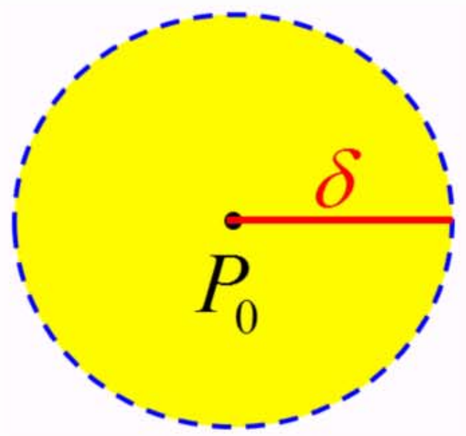


Concepto de región.

Definición

Se llama vecindad o entorno del punto $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ al conjunto de puntos que se encuentran en el interior de una circunferencia de radio δ y cuyo centro es (x_0, y_0). Esto es, a todos los puntos (x, y) que satisfagan la desigualdad $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$

a δ se le llama radio de la vecindad.



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

Vecindad o entorno de P_0

$\delta = 0.01$

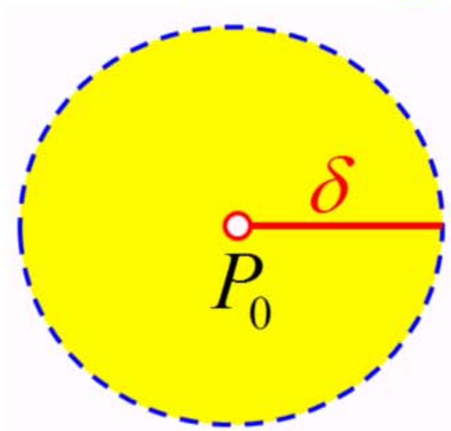
$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

$x = x_0$

$y = y_0$

$$0 \leq 0 < \delta$$

P_0 - no pertenece a su vecindad



Entorno reducido de P_0

ó

vecindad agujereada de P_0

Notación: $\|\bar{x}-\bar{x}_0\|<\delta$ — vecindad de P_0

$\bar{x}=(x,y)$

$\bar{x}_0=(x_0,y_0)$

$\bar{x}-\bar{x}_0=(x-x_0,y-y_0)$

$\|\bar{x}-\bar{x}_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$

$0<\|\bar{x}-\bar{x}_0\|<\delta$ entorno reducido o vecindad agujereada de P_0

Definición

Al conjunto de puntos $\overline{x}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$ que satifacen la desigualdad $\left\|\overline{x}-\overline{x}_0\right\|<\delta$ se le denomina vecindad o entorno del punto $\overline{x}_0=\left(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}\right)\in\mathbb{R}^n$.

$$(x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2+\cdots+(x_n-x_{0n})^2<\delta^2$$

Definición

Sean P un punto y S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

1) P es un punto interior de S si todos los puntos de al menos una de sus vecindades, están contenidos en S.

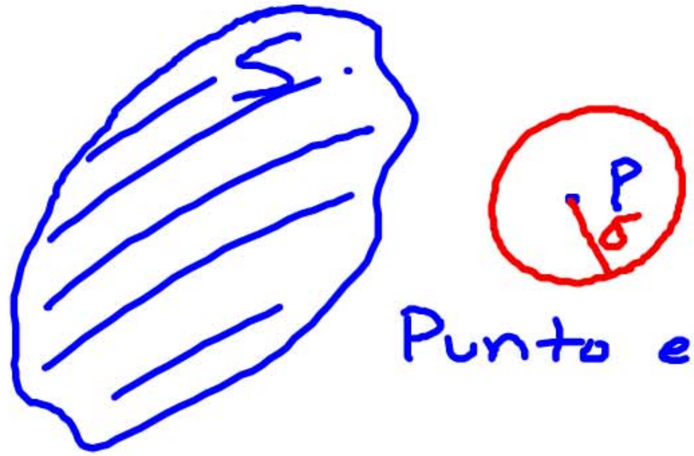
2) P es un punto exterior de S si todos los puntos de al menos una de sus vecindades, no pertenecen a S.

3) P es un punto frontera de S si en cualquiera de sus vecindades existen puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S.

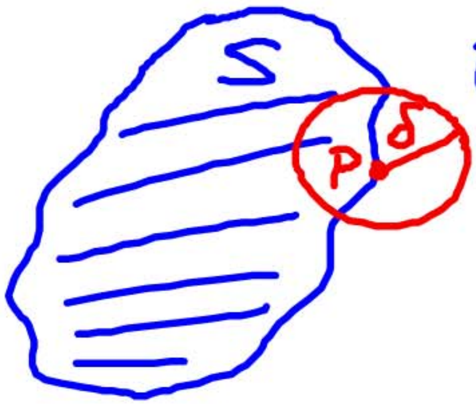
4) P es un punto singular de S si todos los puntos de al menos una de sus vecindades, están contenidos en S con excepción del mismo punto.

En $\mathbb{R}^2$

Punto interior



Punto exterior



Punto frontera

Punto singular

Definición

Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

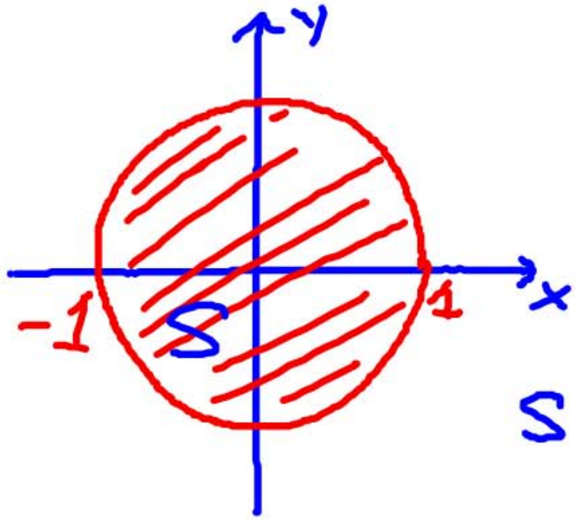
1) S es cerrado si contiene puntos interiores y contiene a todos sus puntos frontera.

2) S es abierto si contiene puntos interiores y no contiene puntos frontera.

3) S es semiabierto o semicerrado si contiene puntos interiores y algunos puntos frontera.

Ejemplos:

1) $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1;\, x,y\in\mathbb{R}\}$

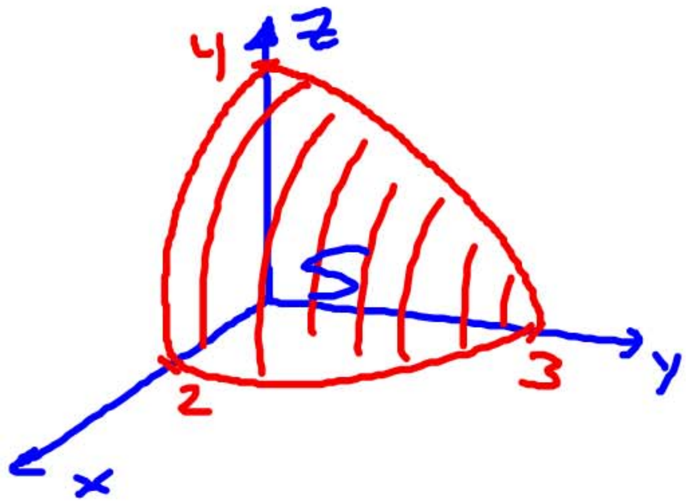


$x^2+y^2=1$ ← Puntos frontera

S es cerrado

$$S=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0; x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$x=0 \quad y=0 \quad z=0$

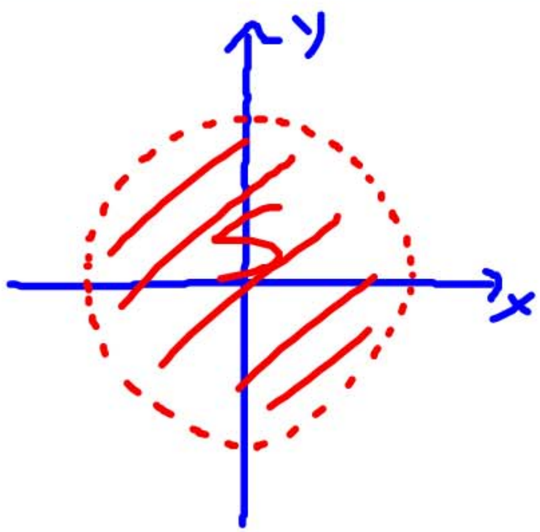


$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

Elipsoide

S es cerrado.

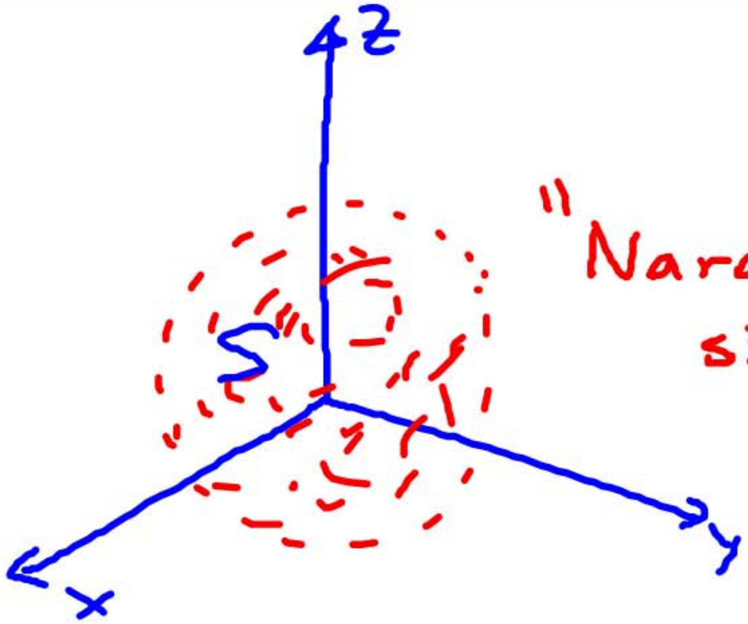
2) $S=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2<1;\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$



S es abierto

No hay puntos frontera

$$S=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2<1;\,x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$



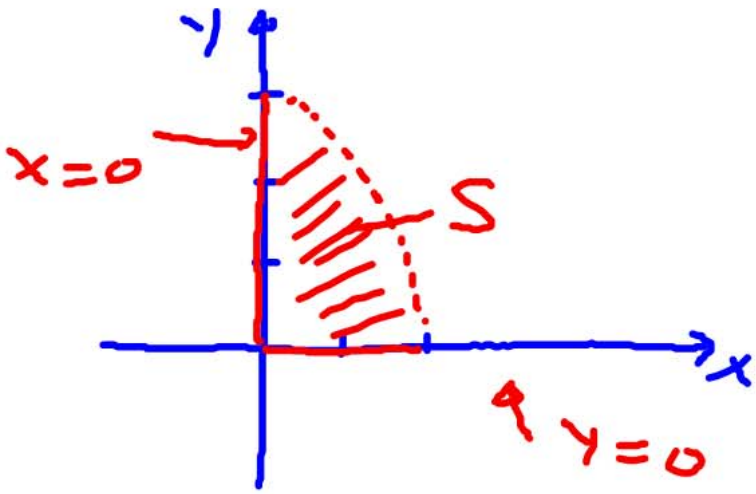
"Naranja
sin cascara"

S – abierto

No hay puntos frontera: $x^2+y^2+z^2=1$

$$3)\ S=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1;\ x\geq 0,\ y\geq 0;\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

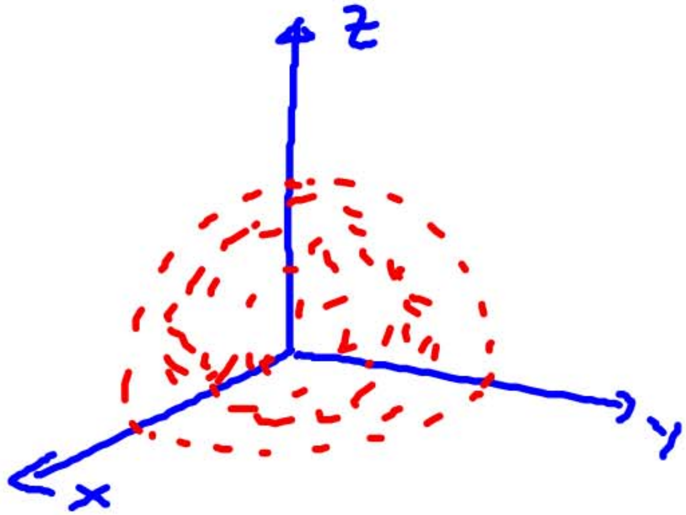
$x=0$ $y=0$



S es semiabierto o semicerrado

$$S=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2<4; x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$

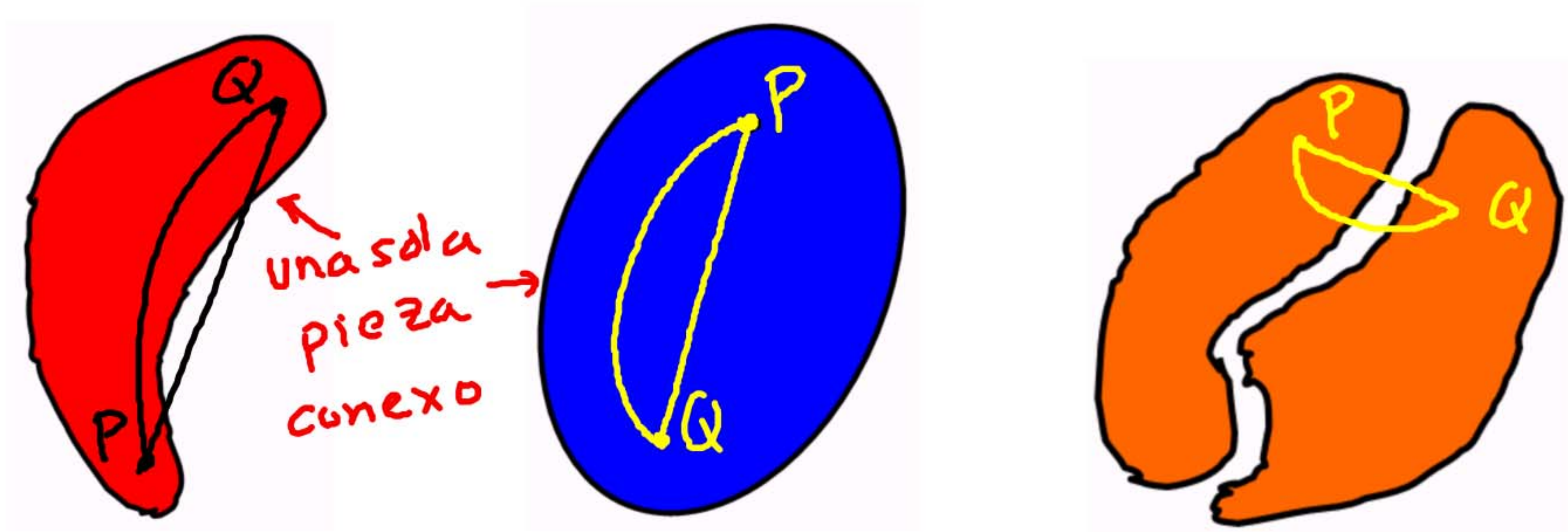
$x=0$, $y=0$, $z=0$



S es semiabierto o semicerrado.

Definición

Sean P y Q dos puntos arbitrarios de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$. Si P y Q pueden ser unidos mediante un segmento de curva cuyos puntos pertenecen a S, se dice entonces que S es un conjunto conexo. Si además, dicho segmento es parte de una recta, entonces S se denomina convexo.



conexo ✓

no es convexo

conexo ✓

convexo ✓

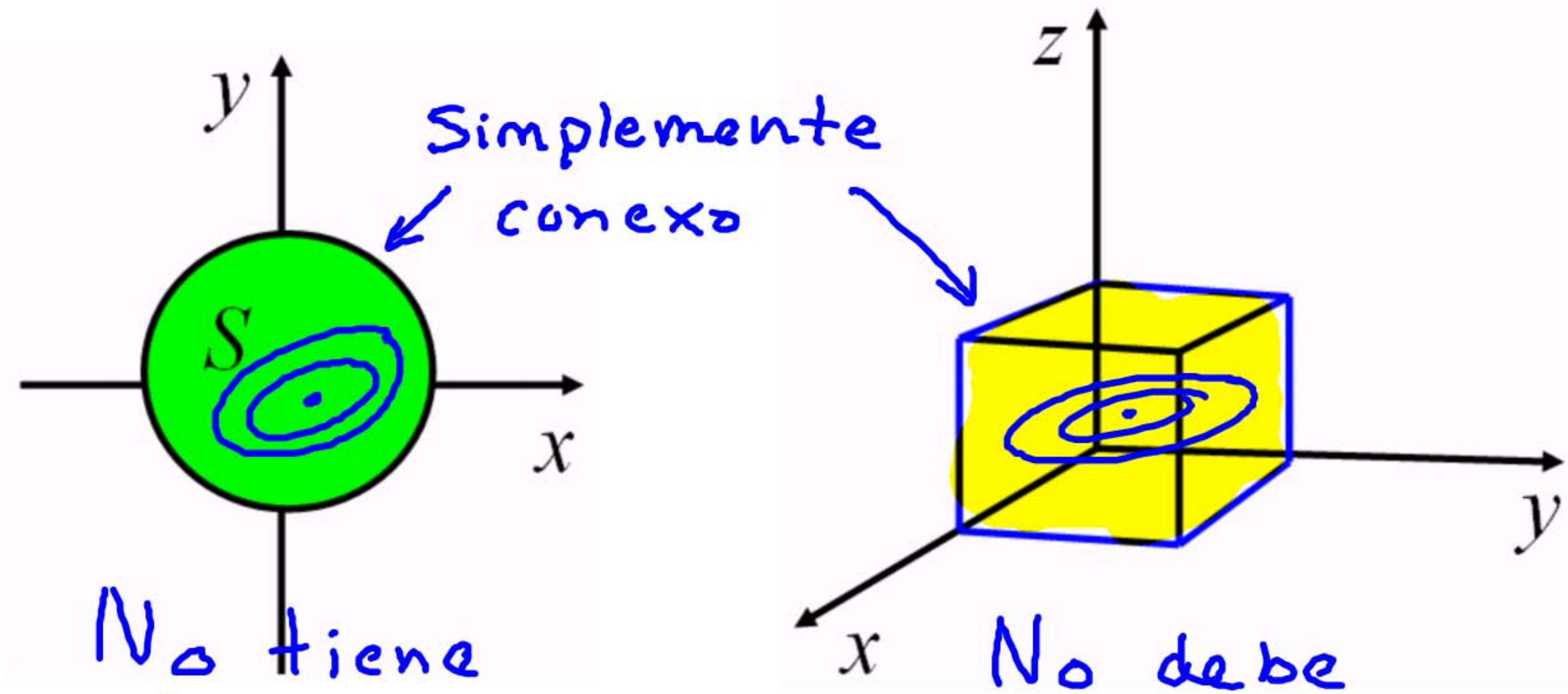
no es conexo.

no es convexo.

Definición

Un conjunto S en el plano o en el espacio es simplemente conexo si toda curva cerrada allí se puede reducir continuamente hasta convertirla en un punto contenido en S.

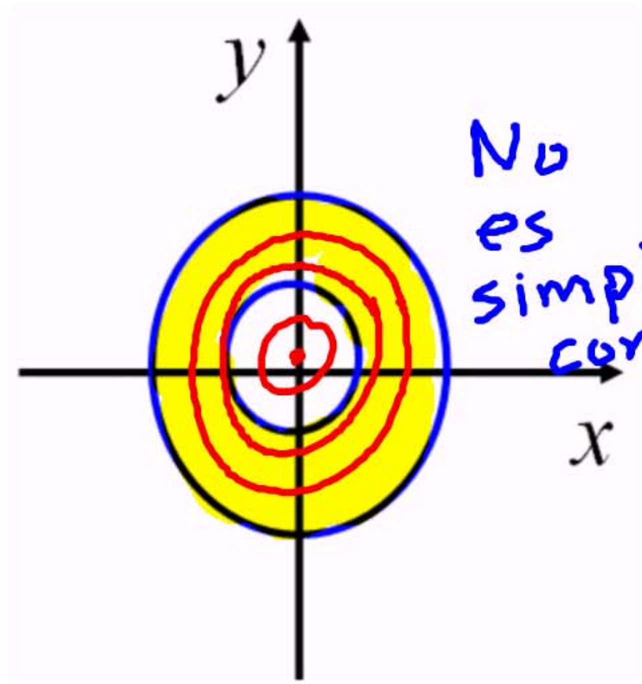
Ejemplos:



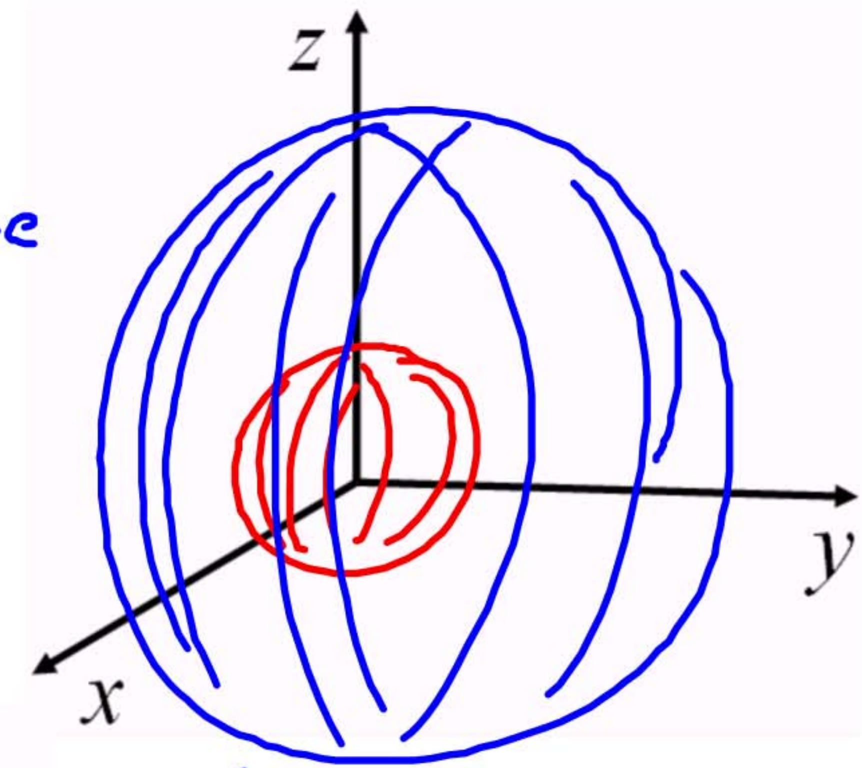
Simplemente conexo

No tiene hoyos

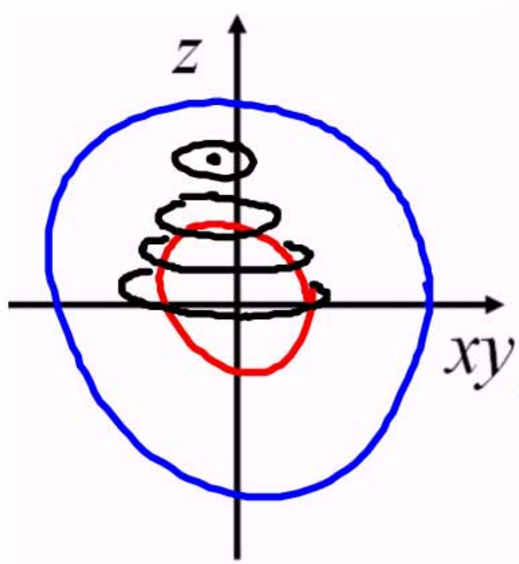
No debe tener túneles.



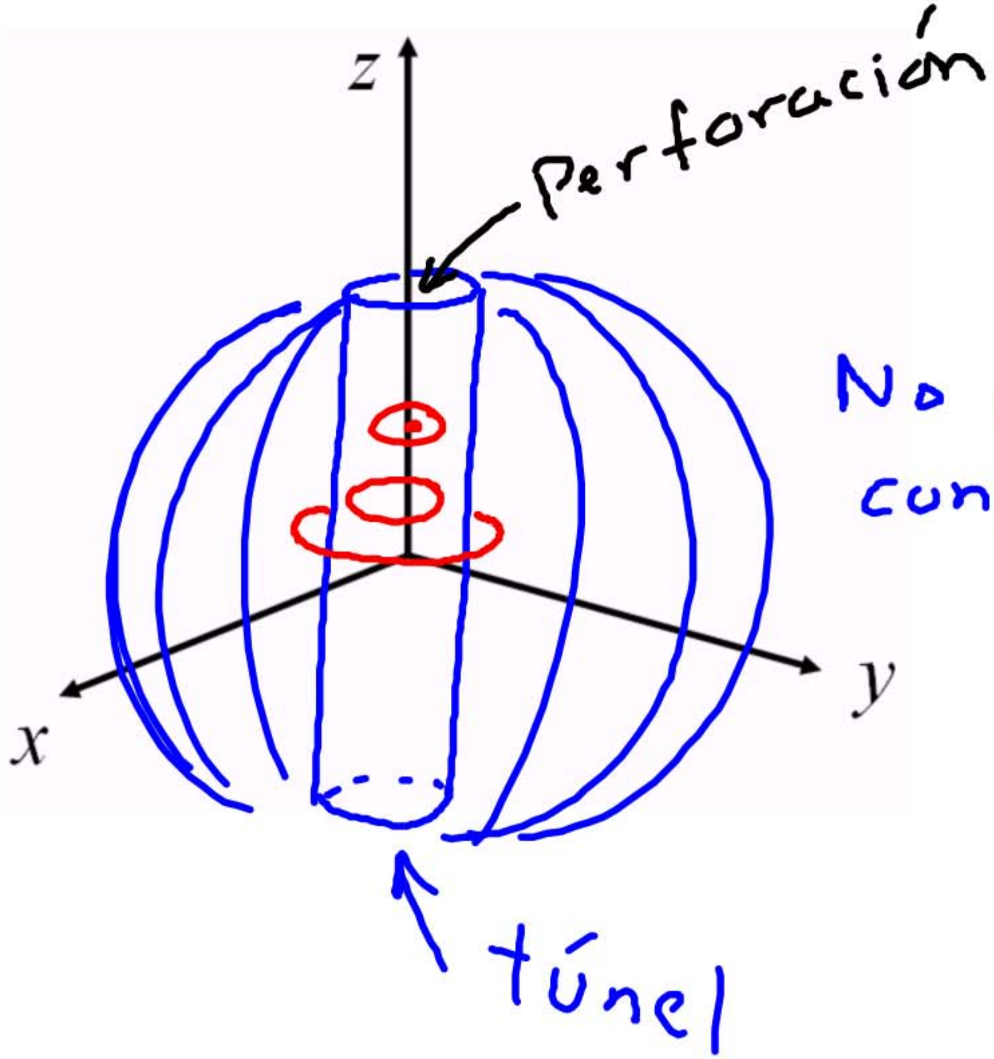
No es simplemente conexo



∅ "Durazno sin hueso"



simplemente conexo



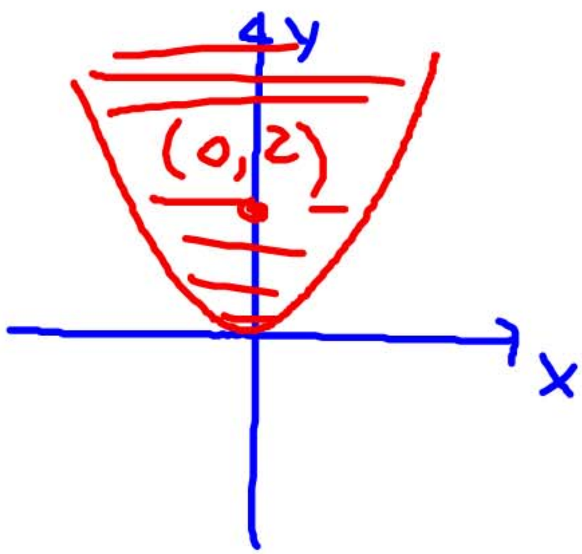
No es simplemente conexo.

Definición

Una región es un conjunto conexo de puntos que puede ser cerrado, abierto o semicerrado.

Ejemplo:

$$R=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\geq x^2;\ x^2+y^2\leq 4;\,x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

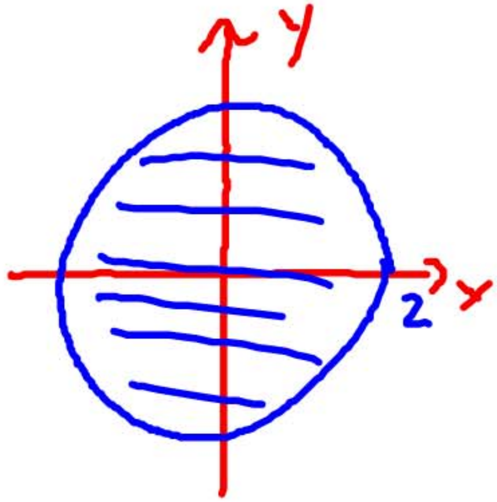


$y = x^2$ (E.A.)

$y \geq x^2$

P.P.: $(0,2)$

$2 \geq 0^2$ ✓

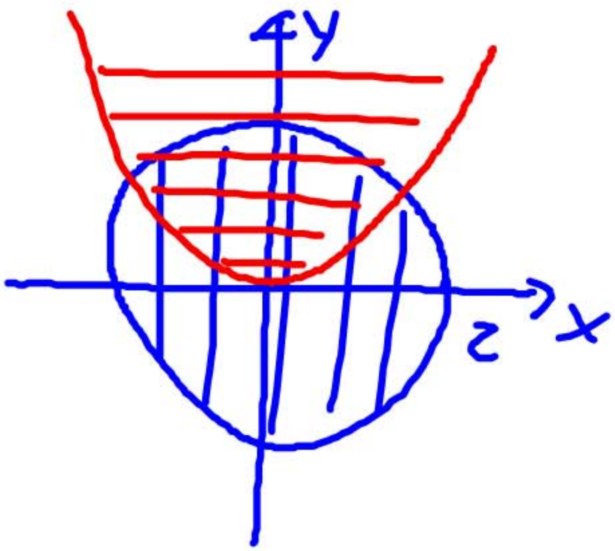


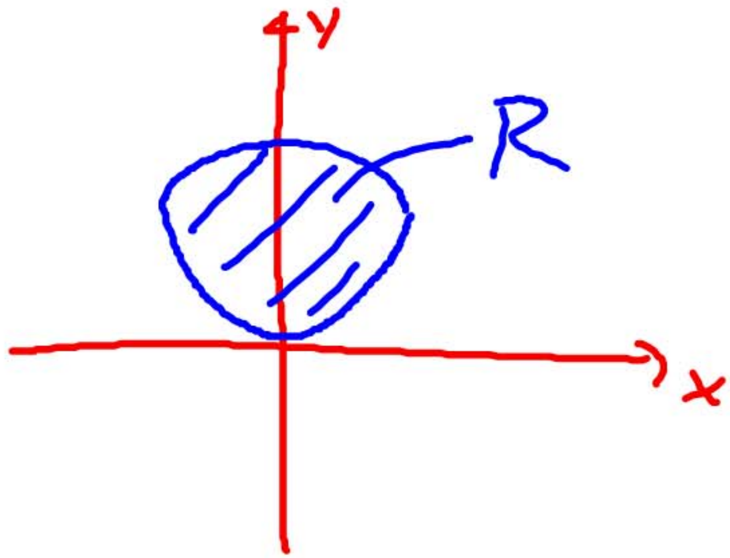
$x^2+y^2=4$ E. A.

$x^2+y^2\le 4$

P. P. : $(0,0)$

$0 \le 4$ ✓





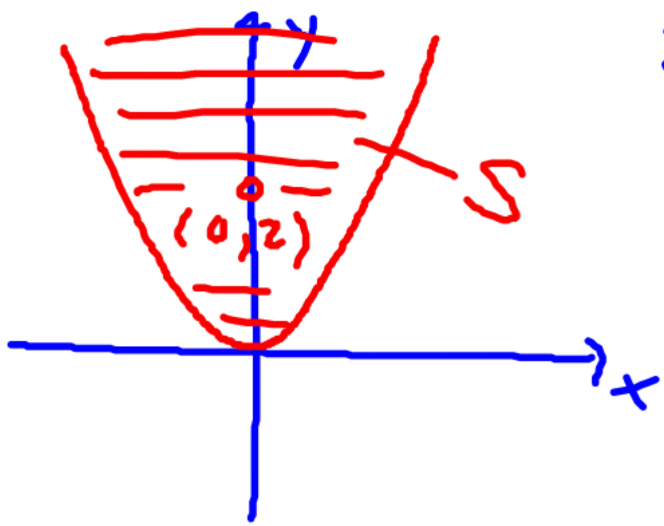
Conceptos de dominio y recorrido y la representación gráfica de éstos.

Ejemplos: 1) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$

$y-x^2 \geq 0$

$y \geq x^2$

S-dominio



$S=\{(x,y) \mid y \geq x^2 ;\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$R=[0,\infty)$

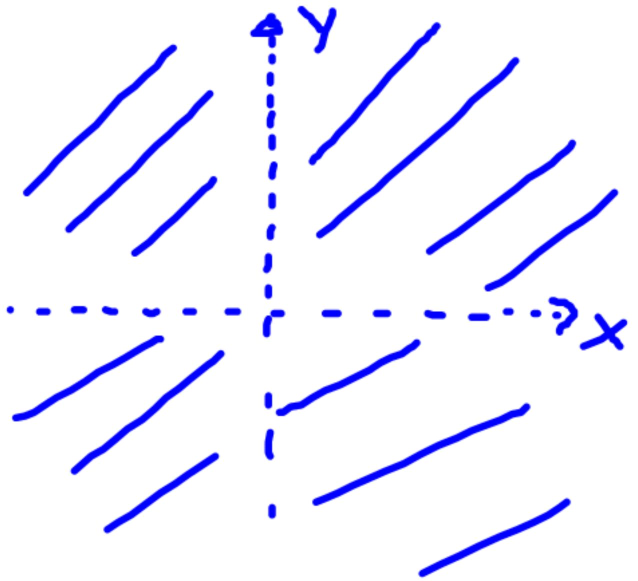
2) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$

$f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$xy \neq 0$

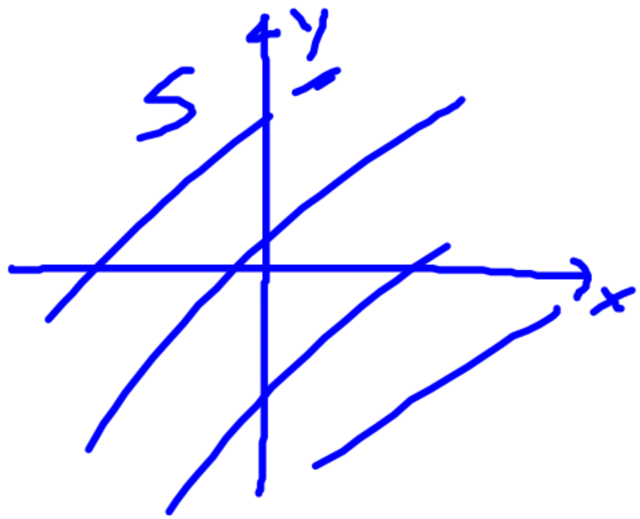
$x \neq 0 \;,\; y \neq 0$

$S = \{(x,y) \mid x \neq 0, y \neq 0; x, y \in \mathbb{R}\}$



$R = \mathbb{R} - \{0\}$

3) $f(x,y) = senxy$

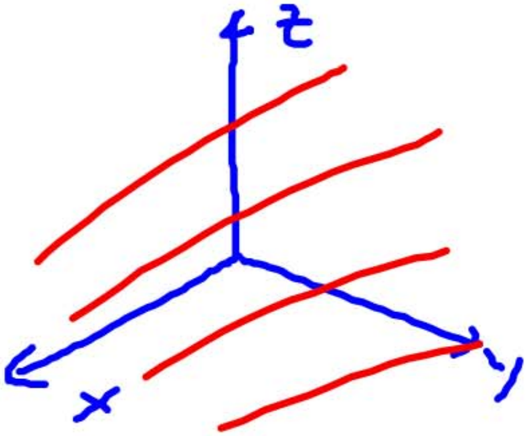


$S = \mathbb{R}^2$

$R = [-1, 1]$

4) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$f: S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



$S = \mathbb{R}^3$

$R = [0, \infty)$

5) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

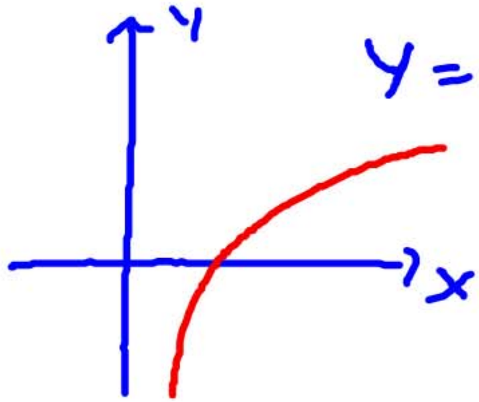
$f: S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$S = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

$R = \mathbb{R}^+$

6) $f(x,y,z) = xy\ln z$

$f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



$y = \ln x$

$x > 0$

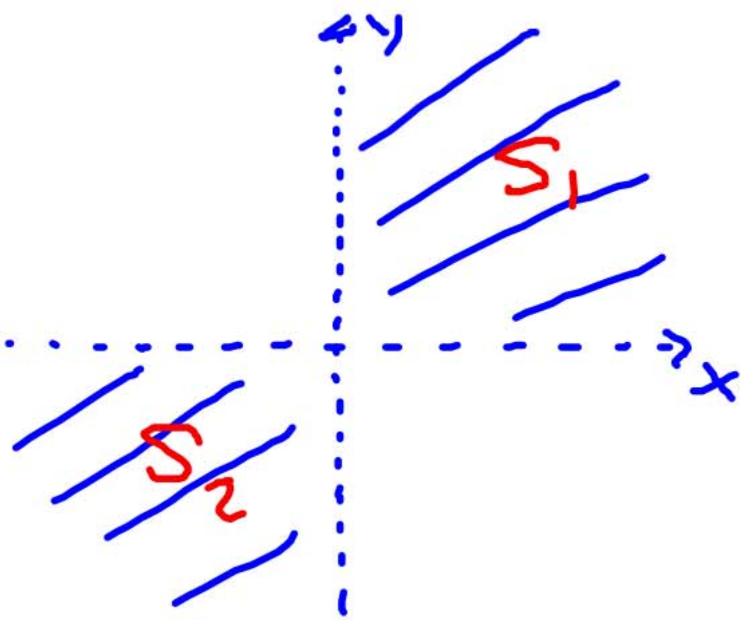
$S = \{(x,y,z) \mid z > 0 ;\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$R = \mathbb{R}$

$$7)\ f(x,y)=\ln(xy)$$

$xy > 0$

$x>0,\ y>0\ ;\ \ x<0,\ y<0$



$S = S_1 \cup S_2$

$S_1=\{(x,y)\mid x>0, y>0;\ x,y\in\mathbb{R}\}$

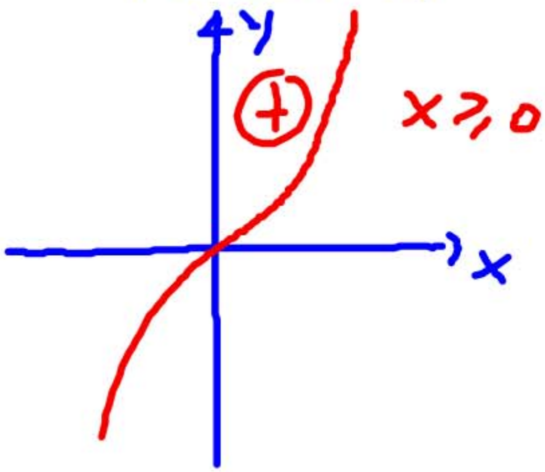
$S_2=\{(x,y)\mid x<0, y<0;\ x,y\in\mathbb{R}\}$

$R=\mathbb{R}$

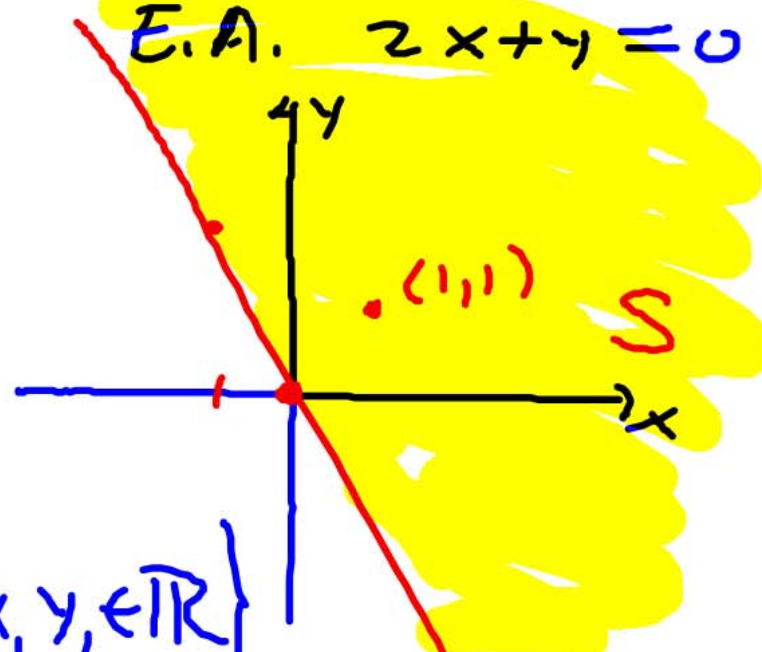
$$8)\quad f(x,y)=\sqrt{senh(2x+y)}$$

$senh(2x+y) \geq 0 \rightarrow 2x+y \geq 0$

$y = senh\, x$



E.A. $2x+y=0$



$2(1)+1 \geq 0$ ✓

$S=\{(x,y)\mid 2x+y\geq 0;\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$R=[0,\infty)$