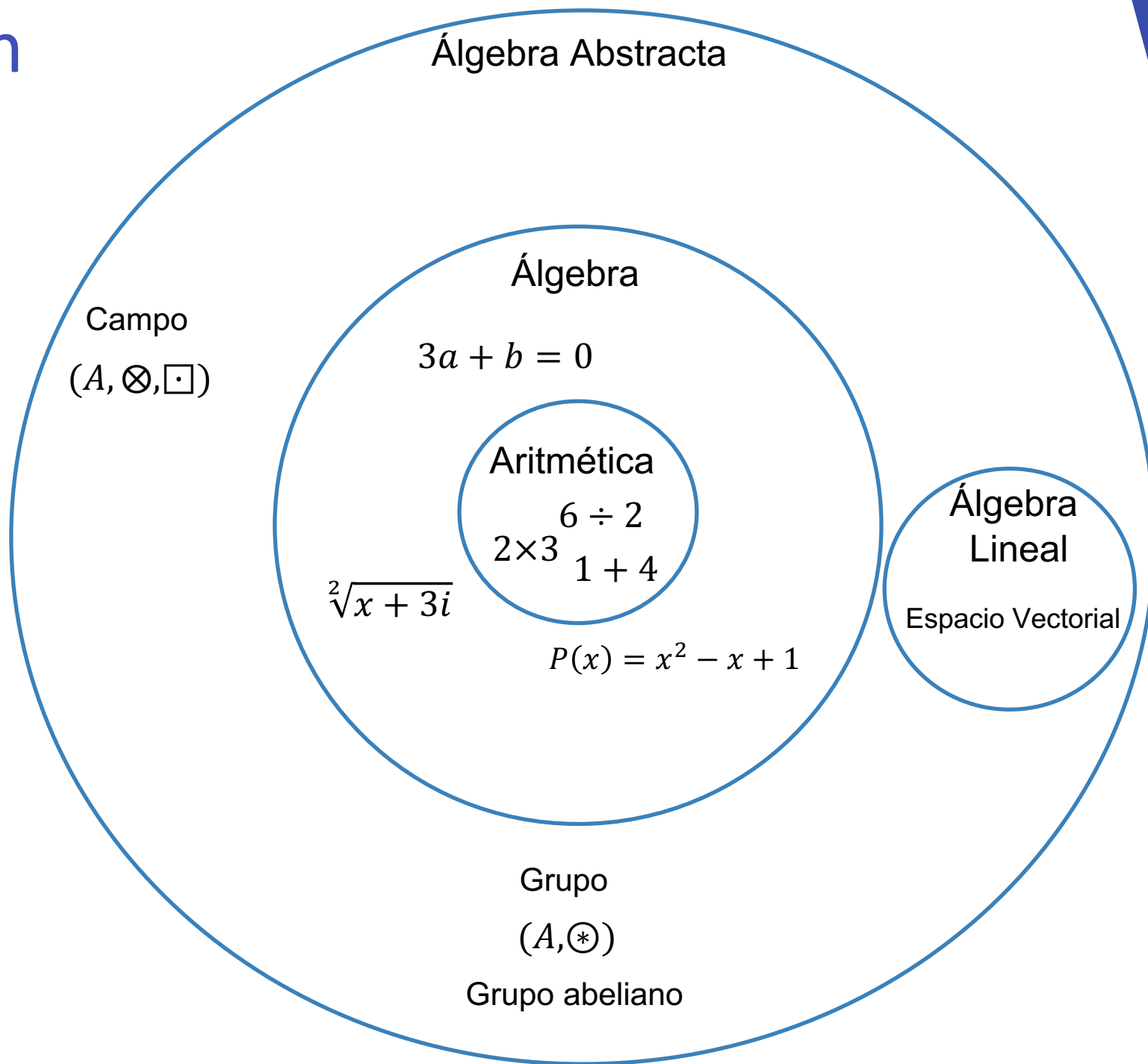


1.

# Grupos y Campos

# Evolución del Álgebra Lineal



# Operación binaria

Una operación binaria definida en un conjunto no vacío  $A$ , es una regla o criterio que asigna a cada par ordenado de elementos de  $A$ , un único elemento llamado resultado, que puede o no pertenecer al mismo conjunto  $A$ .

Como ejemplo tenemos:

$*$  ,  $\square$  ,  $\#$  ,  $@$  , etc.

# Estructura algebraica

Cuando en un conjunto se definen una o varias operaciones binarias, se dice entonces que el conjunto y sus operaciones forman un “**Sistema algebraico**” que, dependiendo de las propiedades que cumplan dichas operaciones, este sistema tiene cierta “**Estructura algebraica**”.

Como ejemplo tenemos:

$(A, *)$ ,  $(B, *, \square)$ ,  $(H, @, \#)$ , etc.

# Estructura de grupo

Sea  $A$  un conjunto no vacío y sea  $*$  una operación binaria definida en  $A$ . Se dice que el sistema algebraico  $(A,*)$  tiene estructura de grupo si se cumplen los siguientes axiomas:

$$\forall a, b, c \in A$$

1.  $(a * b) \in A$

Cerradura

2.  $(a * b) * c = a * (b * c)$

Asociatividad

3.  $\exists e \in A \mid a * e = e * a = a$

Elemento idéntico


4.  $\exists i \in A \mid a * i = i * a = e$

Elementos inversos

# Estructura de grupo abeliano

Un sistema  $(A, *)$  tiene estructura de grupo abeliano si se cumplen los siguientes axiomas:

$$\forall a, b, c \in A$$

- |  |  |   |                    |
|--|--|---|--------------------|
| <b>G</b><br><b>r</b><br><b>u</b><br><b>p</b><br><b>o</b> |  | 1. $(a * b) \in A$                          | Cerradura          |
|  |  | 2. $(a * b) * c = a * (b * c)$              | Asociatividad      |
|  |  | 3. $\exists e \in A \mid a * e = e * a = a$ | Elemento idéntico  |
|  |  | 4. $\exists i \in A \mid a * i = i * a = e$ | Elementos inversos |
|  |  |   | 5. $a * b = b * a$ |

# Propiedades de los grupos

Sea  $(A,*)$  un grupo.

1. Cancelación:  $\forall a, b, c \in A$

$$\text{Si } a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$\text{Si } b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

2. El elemento identico de un grupo es único.

3. El elemento inverso de cada elemento de A es único.

4. Si  $a^{-1}$  es el inverso de  $a$ , entonces  $(a^{-1})^{-1} = a$

5.  $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \cdots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

6. Si  $a, b \in A$ , entonces cada una de las ecuaciones:

$$a * x = b$$

$$y * a = b$$

Tiene solución única, donde  $x, y \in A$ .

# Estructura de campo

Sea  $A$  un conjunto de por lo menos dos elementos y sean  $*$  y  $\square$  dos operaciones binarias definidas en  $A$ . El sistema  $(A, *, \square)$  tiene estructura de campo si se cumple que:

1.  $(A, *)$  es un grupo abeliano, donde el elemento idéntico lo representamos con  $e$  y recibe el nombre de “cero” del campo.
2.  $(A, \square)$  cumple con los 5 axiomas de grupo abeliano, donde deben existir inversos para todos los elementos del conjunto excepto para el cero del campo. Al elemento idéntico de la segunda operación se le conoce como la “unidad” del campo.
3. La operación  $\square$  es distributiva sobre  $*$ .