

2.

Espacio Vectorial

Espacio vectorial

Se requiere de:

1. Un conjunto V cuyos elementos llamaremos “vectores”
2. Un campo K cuyos elementos llamaremos “escalares”
3. Dos operaciones:
 - a) Adición de vectores $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 ; \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$
 - b) Multiplicación de un vector por un escalar $\alpha \bar{u} ; \forall \bar{u} \in V \text{ y } \forall \alpha \in K$

Definición:

Sea V un conjunto no vacío y sea K un campo, donde se definen las operaciones de adición de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si se satisfacen los siguientes 10 axiomas:

Axiomas de espacio vectorial

$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in K$

- 1.** $(\bar{u} + \bar{v}) \in V$
- 2.** $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$
- 3.** $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
- 4.** $\exists \bar{0} \in V \mid \bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$
- 5.** $\exists (-\bar{u}) \in V \mid \bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$
- 6.** $(\alpha \bar{u}) \in V$
- 7.** $\alpha (\bar{u} + \bar{v}) = \alpha \bar{u} + \alpha \bar{v}$
- 8.** $(\alpha + \beta) \bar{u} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{u}$
- 9.** $\alpha (\beta \bar{u}) = (\alpha \beta) \bar{u}$
- 10.** $\exists \alpha \in K \mid \forall \bar{u} \in V ; \alpha \bar{u} = \bar{u}$

Otros ejemplos

- ▶ Espacio nulo $E=\{\bar{0}\}$
- ▶ $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ Son un espacio vectorial sobre \mathbb{R}
- ▶ $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots, \mathbb{C}^n$ Son un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y \mathbb{R}

Subespacio vectorial

Sea W un subconjunto de un espacio vectorial V . Si W es a su vez un espacio vectorial con respecto a las operaciones de adición y multiplicación definidas en V , se dice entonces que W es un subespacio de V .

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K . Si W es un subconjunto no vacío de V , entonces W será un subespacio de V , si y sólo si, se cumplen las condiciones siguientes:

1. $\forall \bar{u}, \bar{v} \in W, \quad (\bar{u} + \bar{v}) \in W$
2. $\forall \bar{u} \in W \text{ y } \forall \alpha \in K, \quad (\alpha \bar{v}) \in W$

Otros ejemplos

Si $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R}

Entonces

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un subespacio de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Combinación lineal

Un vector \bar{w} es una combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n$ si puede ser expresado en la forma:

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ son escalares.

Entonces decimos que \bar{w} se obtuvo a partir de una combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n$.

Dependencia lineal

Sea el conjunto de vectores: $V = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n \}$.

Se dice que V es linealmente independiente si la ecuación:

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

sólo se satisface cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$

En caso contrario, es decir, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ no todos nulos, para los cuales se satisface dicha ecuación, entonces se dice que el conjunto V es linealmente dependiente.

Dependencia lineal

- ▶ Todo conjunto de vectores que contiene al vector cero, es linealmente dependiente.
- ▶ Todo subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independiente, es también linealmente independiente.

Conjunto generador

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K , y sea

$$G = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n \}$$

un subconjunto de vectores de V . Se dice que G es generador del espacio vectorial V , si para todo vector $\bar{x} \in V$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ tales que:

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n$$

Base

Se define como base de un espacio vectorial W , a cualquier subconjunto B de vectores de W , tal que:

1. Los elementos de B son linealmente independientes.
2. Cualquier vector de W puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de B .

Base canónica para \mathbb{R}^n

El concepto de base canónica lo aplicaremos solamente a los espacios \mathbb{R}^n .

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$$

Entonces la base canónica es el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{ (1,0, \dots, 0), (0,1, \dots, 0), \dots, (0,0, \dots, 1) \}$$

Para $\mathbb{R}^2 \quad B = \{ (1,0), (0,1) \}$

Para $\mathbb{R}^3 \quad B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

Dimensión

La dimensión de un espacio vectorial V , se define como la cantidad de elementos de cualquiera de sus bases y se denota como:

Dim V

Para el caso del espacio vectorial nulo $E=\{\overline{0}\}$ su dimensión es cero.

Teorema:

Si V es un espacio vectorial de dimensión n , cualquier conjunto linealmente independiente formado por n vectores de V es una base de dicho espacio.

Isomorfismo

Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita, definidos sobre un campo K .

Se dice que la función $f: U \rightarrow V$ es un isomorfismo de U a V , si f es biyectiva y además cumple con las condiciones siguientes:

1. $f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \quad ; \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in U$
2. $f(\alpha \bar{v}) = \alpha f(\bar{v}) \quad ; \quad \forall \bar{u} \in U \text{ y } \forall \alpha \in K$

Los espacios vectoriales isomorfos sólo difieren en la naturaleza de sus elementos, sus propiedades algebraicas son idénticas.

Teoremas de Isomorfismo

- ▶ Si V es un espacio vectorial real de dimensión n , entonces V es isomorfo a \mathbb{R}^n .
- ▶ Todo espacio vectorial V es isomorfo a sí mismo.
- ▶ Si un espacio vectorial V es isomorfo a otro espacio W , entonces W es isomorfo a V .
- ▶ Si un espacio vectorial U es isomorfo a un espacio V y V es a su vez isomorfo a un espacio W , entonces U es isomorfo a W .
- ▶ Dos espacios vectoriales de igual dimensión son isomorfos.

Vector de coordenadas

Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V y sea \bar{v} un vector cualquiera de V , tal que:

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ se les llama coordenadas de \bar{v} en la base B y al arreglo:

$$(\bar{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

se le llama vector de coordenadas de \bar{v} en la base B .

Matriz de transición

Sea $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ y $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$ dos bases de un espacio vectorial V . La matriz de transición M_B^A tiene por columnas los vectores de coordenadas de los elementos de la base A con respecto a la base B , esto es:

$$M_B^A = [(\bar{a}_1)_B \ (\bar{a}_2)_B \ (\bar{a}_3)_B \ \dots \ (\bar{a}_n)_B]$$

Esta matriz M_B^A conocida también como matriz de cambio de base, es tal que, si conocemos $(\bar{v})_A$ donde $\bar{v} \in V$ y deseamos obtener el vector de coordenadas de \bar{v} en la base B , esto es $(\bar{v})_B$, entonces es suficiente con efectuar el producto:

$$M_B^A \ (\bar{v})_A = (\bar{v})_B$$

Toda matriz de transición tiene inversa, esto es: $(M_B^A)^{-1} = M_A^B$

Espacio renglón y espacio columna

Dada una matriz A de orden $m \times n$, se tiene que tanto sus renglones como sus columnas pueden definir espacios vectoriales, los llamados “espacios renglón” y “espacios columna”. Estos espacios vectoriales se forman a través de todas las combinaciones lineales de los renglones o las columnas de la matriz, considerándolos como vectores de \mathbb{R}^n .

Para obtener una base y la dimensión de este tipo de espacios vectoriales, es suficiente con llevar a la matriz dada a su forma escalonada y los renglones distintos de cero, constituyen una base del espacio vectorial.

La notación usual para estos espacios vectoriales es:

Sea A una matriz de orden $m \times n$.

$L(A_R) \rightarrow$ espacio renglón

$L(A_C) \rightarrow$ espacio columna

Espacio renglón y espacio columna

A pesar de que los espacios renglón y columna generalmente son espacios distintos, la relación que existe entre ellos, es que su dimensión siempre es igual, cuando son generados a partir de la misma matriz, esto es:

$$\text{Dim } L(A_R) = \text{Dim } L(A_C)$$

Rango de una matriz

Se define como rango de una matriz A, y se denota como $R(A)$, al número de renglones distintos de cero una vez terminado el escalonamiento en dicha matriz.

$$R(A) = \text{Dim } L(A_R) = \text{Dim } L(A_C)$$

Espacio vectorial de funciones

El análisis que se hará de las funciones será desde el punto de vista algebraico y éste se limitará al caso de las funciones reales de variable real. Este tipo de funciones constituyen un espacio vectorial para las operaciones de adición y multiplicación por un escalar:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in R$$

Este espacio tiene un especial interés por tratarse de un espacio de dimensión infinita..

Wronskiano

Sea un conjunto de funciones reales de variable real $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$, donde cada una de ellas admite por lo menos $n-1$ derivadas en el intervalo (a, b) . Se define como Wronskiano al determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \dots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

Se tiene que las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ son linealmente independientes, si existe al menos un valor $x_0 \in (a, b)$, para el cual el $W(x_0) \neq 0$.

En caso de que el $W(x)=0$, entonces el criterio no decide y se tiene que recurrir a la ecuación de dependencia lineal.