2.1.2 Concepto de integral definida.

Definición. Integral definida

Si f es una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, sea P una partición de $[a,b]$ cuyos puntos de partición son $x_0, x_1, \cdots, x_n$, en donde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Se eligen puntos x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$ y se define $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_i\}$.

Entonces, la integral definida de f de a a b es

límite superior

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

límite inferior

si existe ese límite. Si lo hay, entonces se dice f es integrable en el intervalo $[a,b]$.

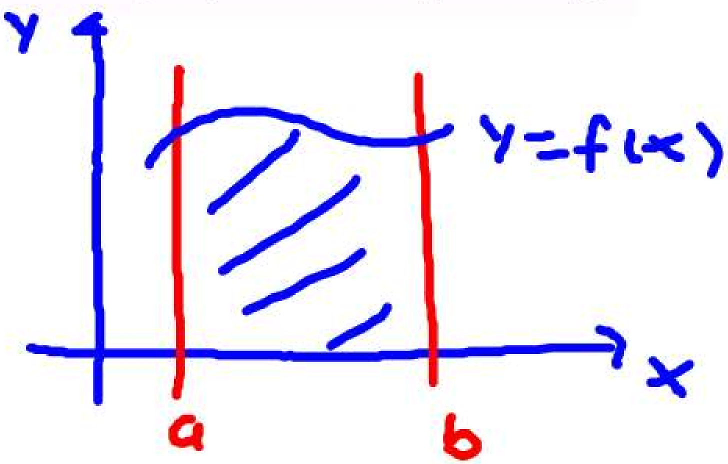
clase_05_Cálculo Integral_Profesor Manny_26feb18_sem.18-2(31págs.)

2.1.3 Interpretación geométrica y propiedades.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$$

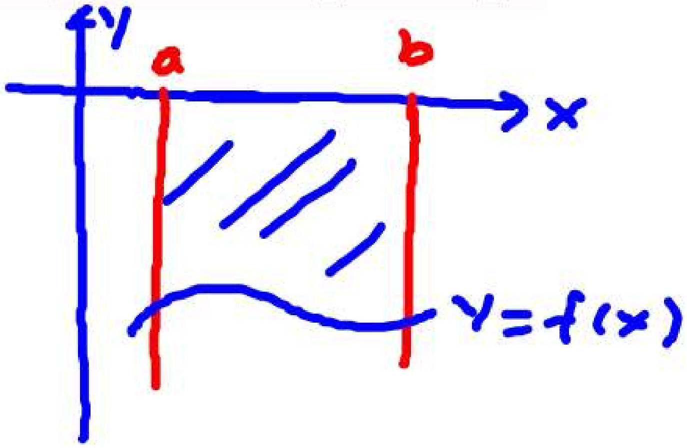
Casos

$1.\ f(x) > 0, [a,b];$



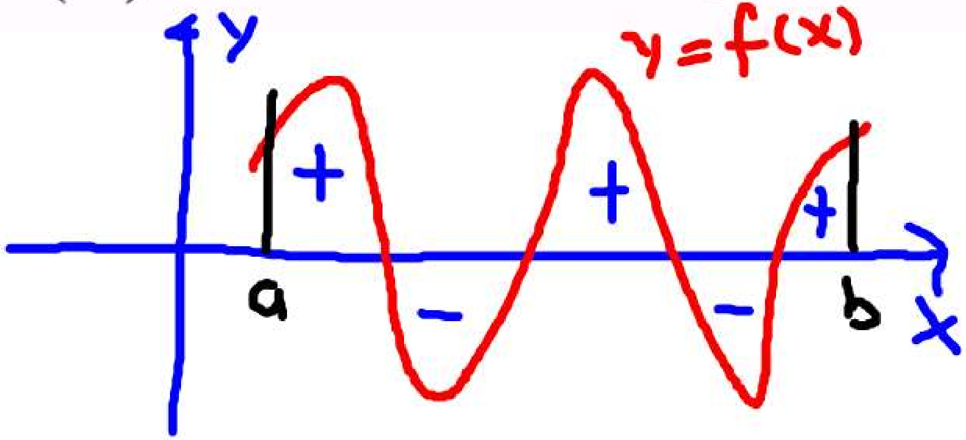
$\int_a^b f(x)dx =$ área bajo la curva

2. $f(x) < 0, [a,b];$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{área sobre la curva (negativa)}$$

3. $f(x)$ cambia de signo en $[a,b];$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Suma algebraica de áreas}$$

Propiedades de la integral

Suponemos que existen todas las integrales siguientes, entonces:

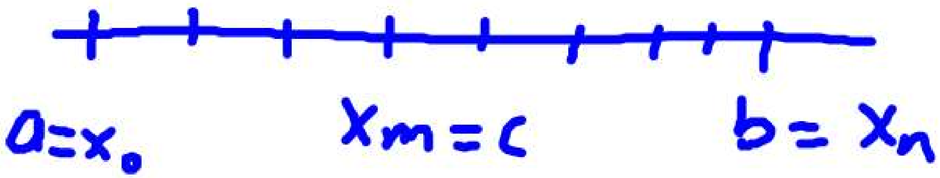
1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, c es cualquier constante

2. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, en donde c es cualquier constante

3. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, $(a<c<b)$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i^*)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i^*)\Delta x_i + \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=m}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

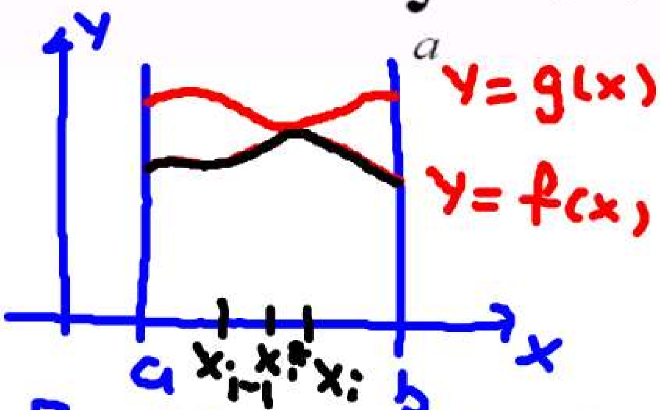
Propiedades de comparación

Teorema

Si f y g son integrables en el intervalo $[a,b]$

y si $\underline{f(x) \le g(x)}$ $\forall x$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$



$f(x_i^*) \le g(x_i^*)$

$f(x_i^*)\Delta x_i \le g(x_i^*)\Delta x_i$

$[a,b]$ - partición arbitraria

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \leq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

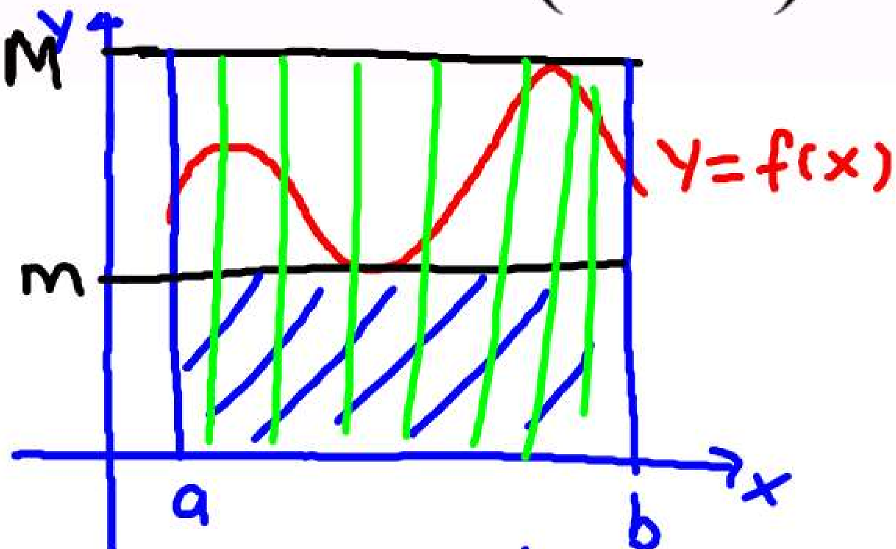
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema. Propiedad de acotamiento

Si f es integrable en $[a,b]$ y si

$m \le f(x) \le M$ para toda x de $[a,b]$,

entonces $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$



$\int_a^b f(x)dx =$ área bajo la curva

$\boxed{} \le \int_a^b f(x)dx \le \boxed{}$

$(b-a)m \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)M$

Teorema

Supongamos que existen las integrales siguientes, y que $a \leq b$,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$-|2| \leq 2 \leq |2| \qquad -|-5| \leq -5 \leq |-5|$$

$$-2 \leq 2 \leq 2 \qquad -5 \leq -5 \leq 5$$

$$u \in \mathbb{R}\,,\ -|u| \leq u \leq |u|$$

$$f(x) \in \mathbb{R}\,,\ -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$|z| \leq a \iff -a \leq z \leq a$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Definición

Si $a > b$ y $\int_b^a f(x)\,dx$ existe, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ejemplo:

Determine $\int_3^0 x^2\,dx$, si $\int_0^3 x^2\,dx = 9$

$$\int_3^0 x^2 dx = -\int_0^3 x^2 dx = \underline{-9}$$

Definición

Si $f(a)$ existe, entonces $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Ejemplo:

$$\int_1^1 x^2 dx = 0$$

Definición

Sea f integrable sobre $[a,b]$, se define la función F sobre $[a,b]$ como

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$ — integral con límite superior variable

f - integrable

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$ - existe

Propiedad:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$a<c<b$

Ejemplo:

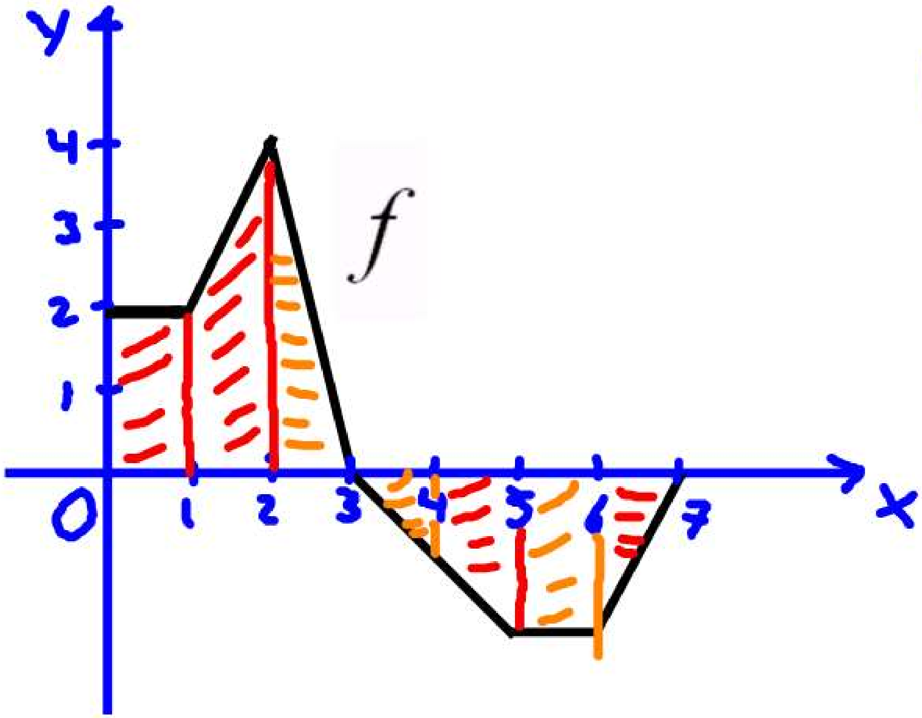
Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica aparece a continuación

a) Evalúe $F(0), F(1), F(2), F(3), F(6)$

b) ¿En qué intervalos es creciente F?

c) ¿En dónde F tiene un valor máximo?

d) Trace una gráfica aproximada de F.



$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 2$

x	$F(x)$
0	0
1	2
2	5
3	7
4	6.5
5	5
6	3
7	2

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\,dt=5$$

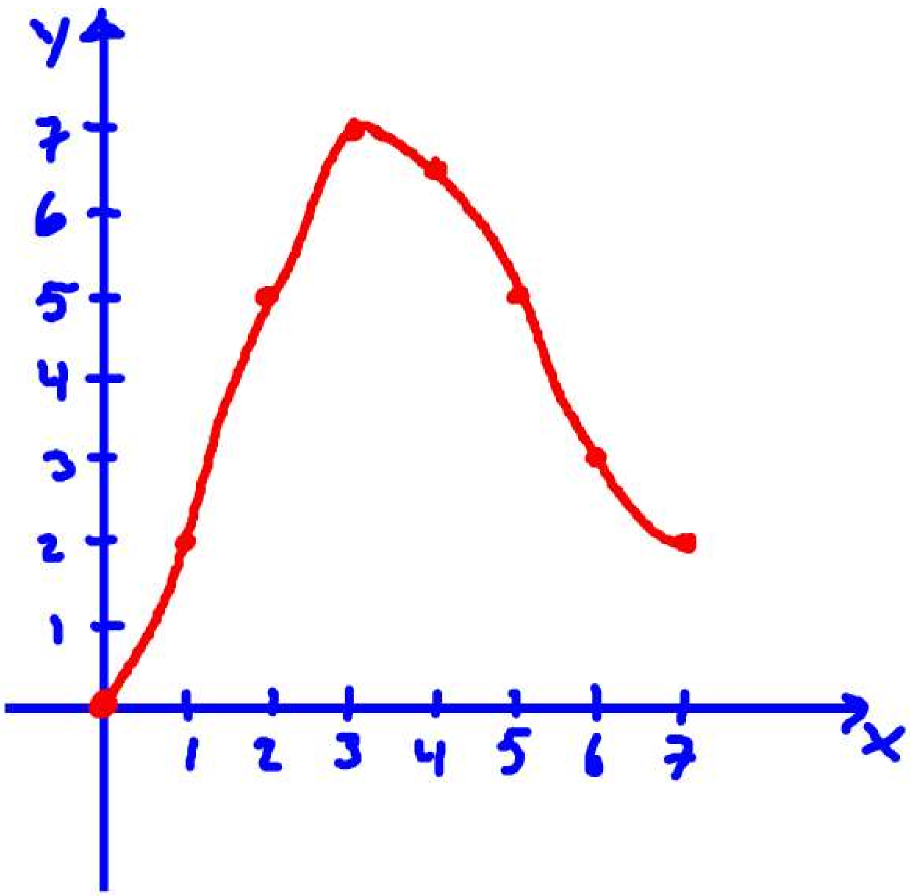
$$F(3)=\int_0^3 f(t)\,dt=7$$

$$F(4)=\int_0^4 f(t)\,dt=6.5$$

$$F(5)=\int_0^5 f(t)\,dt=5$$

$$F(6)=\int_0^6 f(t)\,dt=3$$

$$F(7)=\int_0^7 f(t)\,dt=2$$



Máx. $x = 3$

Creciente: $[0, 3]$

Teorema

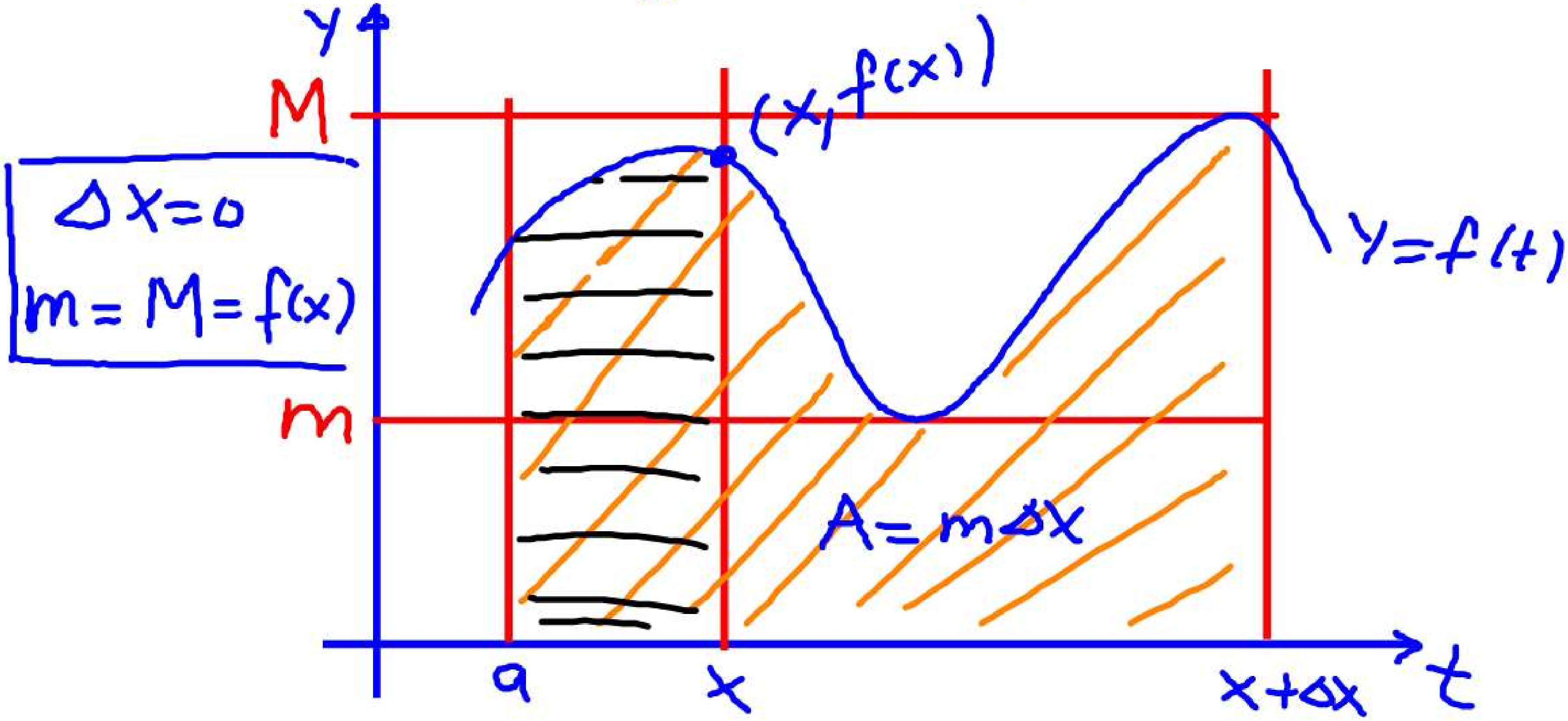
Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea x un punto (variable) de (a,b). Entonces,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt \quad , \quad \underline{\Delta x > 0}$$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt$$



$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Propiedad de acotamiento

$$m\Delta x \le \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \le M\Delta x$$

$$m\Delta x \le F(x+\Delta x) - F(x) \le M\Delta x$$

$$m \le \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \le M$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} m \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x \to 0} M$$

$$f(x) \le \frac{d}{dx} F(x) \le f(x)$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

Ejemplos:

$$1.\ \frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^2\,dt\right] = x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

$$2.\ \frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}}$$

$$3.\ \frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \tan t \sec^2 t\,dt\right] = -\frac{d}{dx}\left[\int_4^x \tan t \sec^2 t\,dt\right] =$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \quad = -\tan x \sec^2 x$$

$$4.\ \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\overset{u}{x^2}} \sqrt{3t-2}\,dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_0^u \sqrt{3t-2}\,dt\right]\frac{du}{dx} =$$

Regla de cadena

$$= \sqrt{3u-2}\ \frac{du}{dx} = \sqrt{3x^2-2}\,(2x) =$$

$$= 2x\sqrt{3x^2-2}$$

Condición de integrabilidad

Teorema. Teorema de integrabilidad.

Si f está acotada en $[a,b]$ y si es continua en ese intervalo, con excepción de un número finito de puntos, entonces f es integrable en $[a,b]$. En particular, si f es continua en todo el intervalo $[a,b]$, es integrable sobre $[a,b]$.

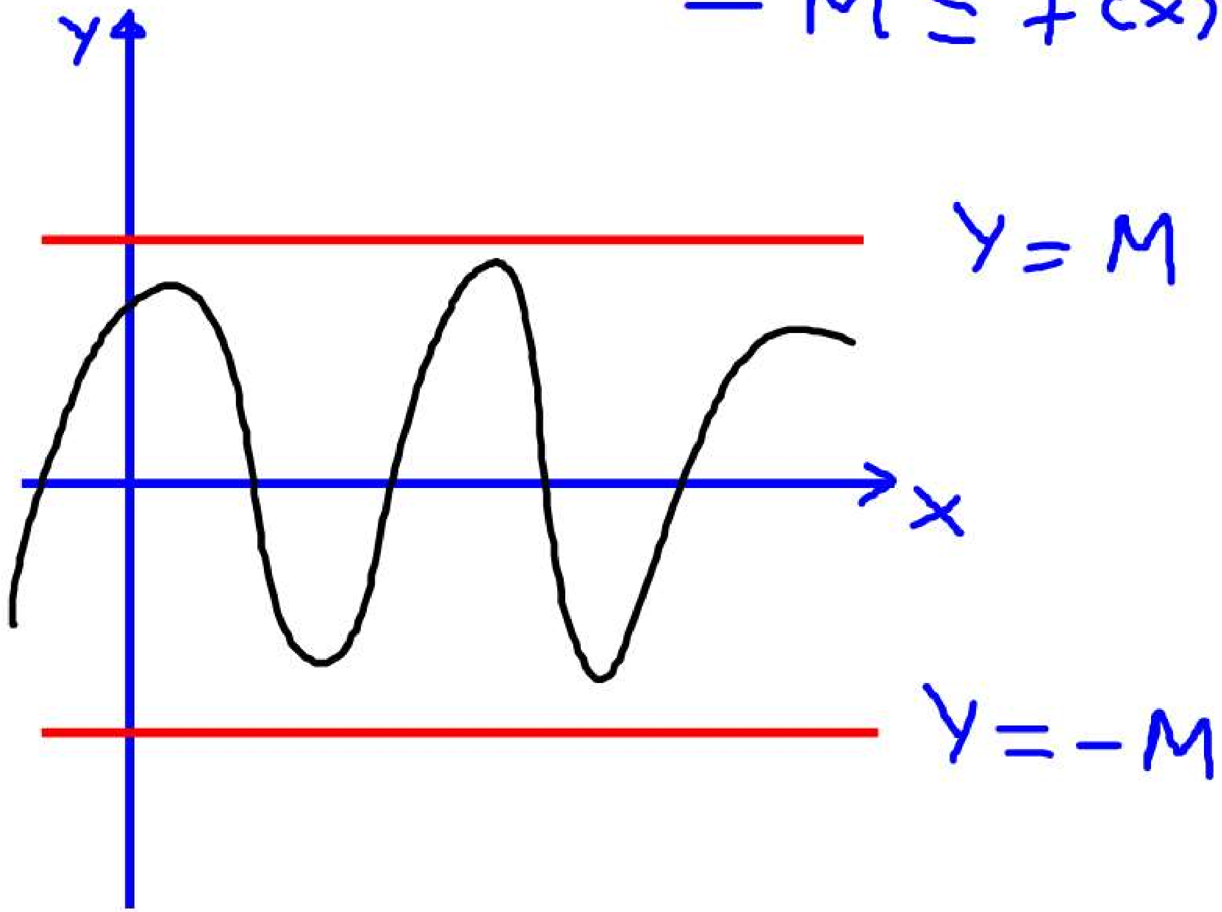
Ejemplos:

Son integrables las siguientes funciones

1) Las funciones polinomiales
2) Las funciones seno y coseno
3) Las funciones racionales, una vez que el intervalo $[a,b]$ no contenga puntos en los que el denominador sea cero.

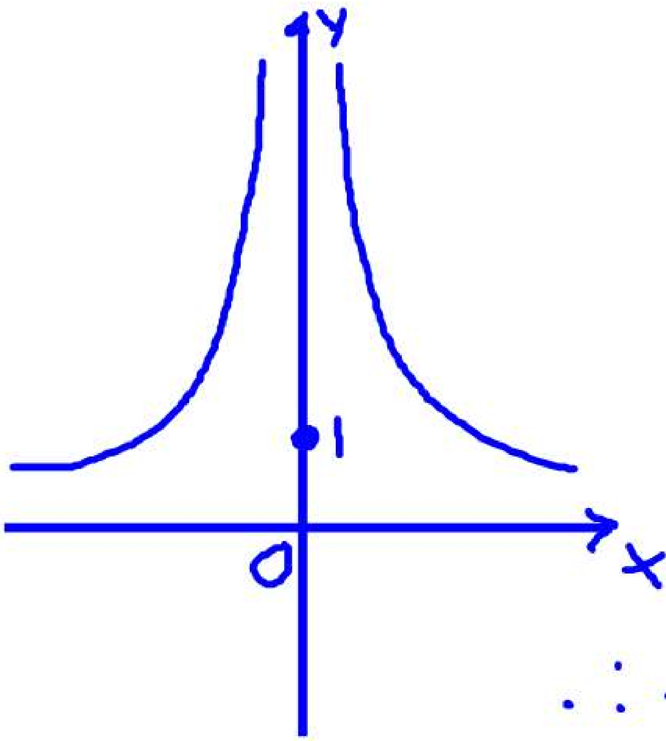
Función acotada- significa que debe existir una constante M tal que $\left|f(x)\right| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

$-M \leq f(x) \leq M$



Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}\quad ,[-2,2]$$



$|f(x)|\leq M$

f no es acotada

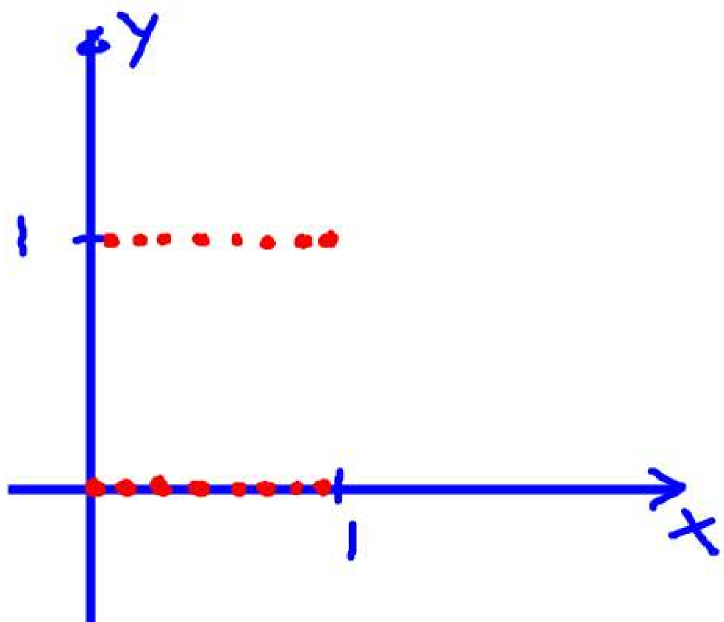
$\nexists M$

Tiene un punto de discontinuidad

$\therefore$ f no es integrable

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x \text{ } es \text{ } racional \\ 0 & si \text{ } x \text{ } es \text{ } irracional\end{cases},[0,1]$$



f tiene una infinidad de puntos de discontinuidad

$|f(x)| \leq M$

$M=2$

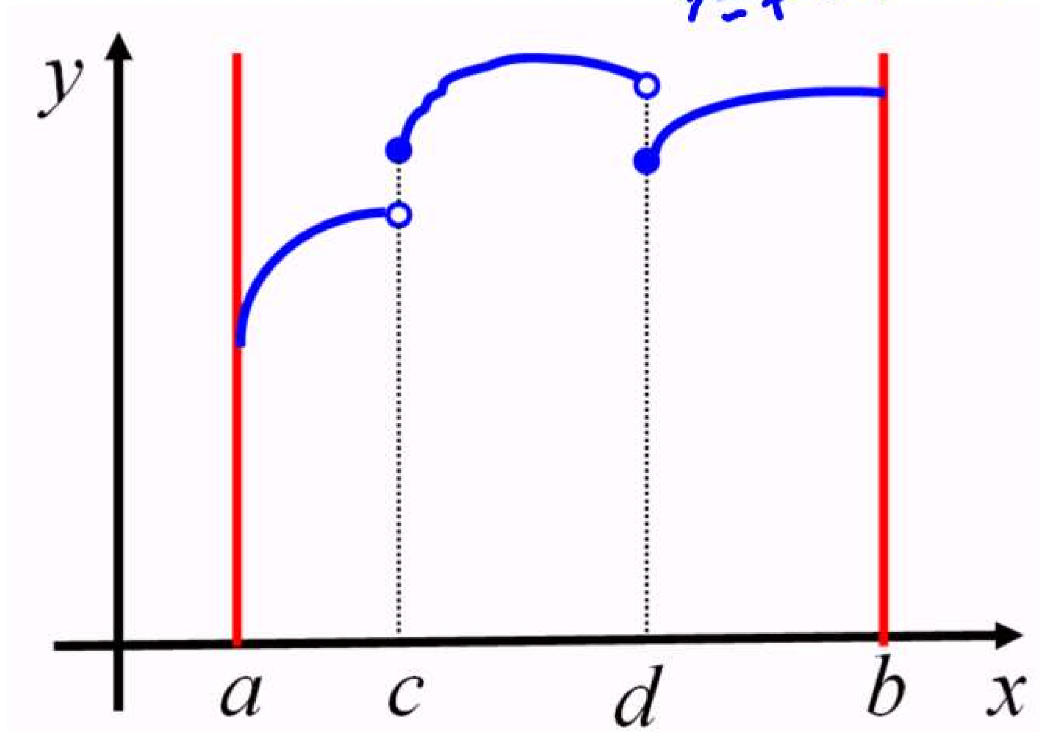
$|f(x)| \leq 2$ f está acotada

$-2 \leq f(x) \leq 2$

$\therefore$ f no es integrable

$y = M$

$y = f(x)$



$$|f(x)| \leq M$$

f está acotada en $[a, b]$

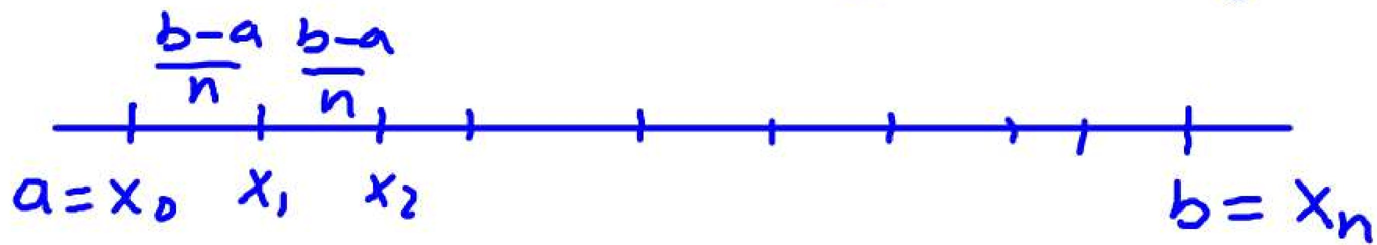
Tiene 2 puntos de discontinuidad

$\therefore$ f es integrable

Expresión matemática para calcular integrales definidas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

$[a, b]$ partición regular (n partes iguales)



$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots$

$, x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}, \ldots, \quad x_n = a + n\frac{b-a}{n}$

$\|P\| = \frac{b-a}{n} \qquad \|P\| \to 0, \; n \to \infty$

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

$$x_i^* = x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

Teorema

Si f es integrable en $\left[a,b\right]$, entonces

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

Ejemplo:

Mediante sumas de Riemann calcule la integral definida:

$$\int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1+i\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} =$$

$f(x)=x$

$a=1$

$b=2$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left[1+i\frac{1}{n}\right]\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}}(\cancel{n}) + \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}$$