SERIE DE CÁLCULO INTEGRAL

PROFESOR: PEDRO RAMÍREZ MANNY

TEMA 1 Sucesiones y series

1) Escribir cuatro términos más de cada sucesión y una expresión que represente el término general (enésimo).

   a) $1, -1, 1, -1, \ldots$ Solución: $\{a_n\} = \left\{(-1)^{n+1}\right\}$

   b) $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \ldots$ Solución: $\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n+2}\right\}$

Indicar si la sucesión es convergente o divergente, si es convergente determinar su límite.

2) $\left\{n^2 + n^3\right\}$ Solución: diverge

3) $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$ Solución: diverge

4) $\{e\}$ Solución: converge a e

5) $\left\{\frac{10}{\sqrt{n}}\right\}$ Solución: converge a cero.

6) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ Solución: converge a cero

7) $\left\{ \left(\frac{5}{4} \right)^n \right\}$ Solución: $r = \frac{5}{4} > 1$, diverge.

8) $\left\{ \pi^{-n} \right\}$ Solución: $r = \pi^{-1} < 1$, converge a cero.

9) $\left\{ 5 + \frac{2}{n^{5/3}} \right\}$ Solución: converge a 5.

10) $\left\{ \frac{1}{n^{7/4}} \right\}$ Solución: $r = \frac{7}{4} > 0$, converge a cero

Indicar si la sucesión es monótona o no monótona.

11) $\left\{ 2 + (-1)^n \right\}$ Solución: No es monótona

12) $\left\{ \frac{3n}{1+n} \right\}$ Solución: es monótona

13) $\left\{ \frac{n^2}{2^n - 1} \right\}$ Solución: No es monótona

14) Determine si 3 es una cota superior para la sucesión $\left\{ \frac{3n+1}{n+1} \right\}$.

Solución: 3 representa una cota superior para dicha sucesión.

15) Determine si $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}$ está acotada superiormente.

Solución: No tiene cota superior.

16) Determine si la sucesión $\left\{2(-1)^n\right\}$ es acotada.

Solución: Si es acotada.

17) Para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$

a) Escriba su n-ésima suma parcial.
b) Calcular la suma de la serie.

Solución: a) $S_n = 1 - \dfrac{1}{2n+1}$ b) $S = 1$

18) Utilice el criterio del término general para la divergencia

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Solución: a) La serie diverge. b) el criterio no es aplicable.

19) Determine si la siguiente serie converge o diverge:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{3^n}$

Solución: converge a 6

$r = \dfrac{1}{3} < 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Solución: converge a $\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{4}<1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n$

Solución: la serie diverge,

$r=\frac{5}{2}>1$

20) De las siguientes series ¿Cuáles convergen?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

Solución: converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$

Solución: diverge

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$

Solución: converge

21) Utilizando el criterio de comparación directa analizar la convergencia o divergencia de la serie.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+4^n}$

Solución: converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^3-4}$

Solución: diverge

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$

Solución: Converge.

Serie de prueba $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

22) Utilizar el criterio del límite para decidir si es convergente o divergente la serie.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$

Solución: Serie de prueba $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$; converge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{10n^7+2}}$

Solución: Serie de prueba $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$; diverge

23) Utilizando el criterio de D'Alembert verifique la convergencia o divergencia de la serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

Solución: converge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^{15}}$

Solución: diverge

24) Utilizar el criterio de Leibniz para determinar si la serie es convergente o divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

Solución: converge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n(n+2)}$

Solución: converge

25) Determine si las siguientes series son absolutamente convergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

Solución: es absolutamente convergente

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$

Solución: es absolutamente convergente

26) Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{1/2}}$ es condicionalmente convergente.

Solución: No es absolutamente convergente, es condicionalmente convergente.

27) Utilizando el criterio de cociente absoluto determinar si la serie es convergente o divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n!}$

Solución: la serie converge absolutamente y en consecuencia es convergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^n}$

Solución: la serie es absolutamente convergente y por lo tanto convergente.

28) Utilizando el criterio de la raíz determinar si la serie es convergente o divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}}{n}$

Solución: la serie es absolutamente convergente y en consecuencia es convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{4n+1}}{n^{3n}}$

Solución: la serie es absolutamente convergente y en consecuencia es convergente.

29) Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n3^n}.$$

Solución: El intervalo de convergencia es $I_c = [2,8)$.

30) Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n (n+1)^2}$$

$(1EF / \; TIPO\ A \; / 2004-1)$

Solución: El intervalo de convergencia es $I_c = [1,5]$.

31) Obtener el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3+n} (-1)^n$

$(1EF / \; TIPO\ A \; / 2004-2)$

Solución: El intervalo de convergencia es $I_c = (0,2]$.

32) Obtener los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin, para la función $f\left(x\right)=\sqrt{1-x}$.

$\left(1EF\ /\ TIPO\ A\ /2003-2\right)$

Solución: $f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^{2}-\dfrac{1}{16}x^{3}$.

33) Obtener la serie de Maclaurin que representa a la función

$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}$.

$\left(2EF\ /\ TIPO\ A\ /2005-1\right)$

Solución: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-2x\right)^{n}$.

34) Obtener la serie de Taylor de $f\left(x\right)=\ln x$ en $a=1$, y su intervalo de convergencia.

Solución: $f\left(x\right)=\ln x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\left(x-1\right)^{n}$.

$I_{c}=\left(0,2\right)$

35) Obtener la serie de Taylor de $f\left(x\right)=e^{x}$ en $a=1$, y su intervalo de convergencia.

Solución: $f\left(x\right)=e^{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e}{n!}\left(x-1\right)^{n}$.

$I_{c}=\mathbb{R}$

36) Determinar el carácter de la siguiente serie, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ si es convergente, calcular su suma.

$\left(2EF/\ TIPO\ A\ /2004-1\right)$

Solución: $S=2$.

37) Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}{n^3}$.

$\left(1EF/\ TIPO\ A\ /2005-1\right)$

Solución: $p_1=\frac{8}{3}>1$ y $p_2=\frac{5}{2}>1$ por lo tanto es convergente.

38) Determinar si la siguiente serie converge o diverge.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n-1}}{5^{2n}}$

$\left(1EF/\ TIPO\ A\ /2003-1\right)$

Solución: La serie converge.

TEMA 2 Las integrales definida e indefinida

39) Determine n tal que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 91$ Solución: n=6

40) Determine n tal que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 784$ Solución: n=7

41) Determine el valor del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$$

Solución: 14

42) Determine el valor del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 - 2\left(1+\frac{2i}{n}\right)\right]$$

Solución: $\frac{2}{3}$

43) Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[5\frac{i^4}{n^4} + 4\frac{i^3}{n^3} + 3\frac{i^2}{n^2} + \frac{2}{n}i + 1\right]$$

Solución: 5

44) Calcule la suma

$$\sum_{i=1}^{10} (i-1)^4$$

Solución: 15333

45) Si se divide el intervalo $[0,1]$ en subintervalos mediante la partición P y el conjunto de puntos de partición es:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n^5}, x_2 = \frac{32}{n^5}, x_3 = \frac{243}{n^5}, \ldots, x_i = \frac{i^5}{n^5}, \ldots, x_n = \frac{n^5}{n^5}$$

¿Cuál es la longitud de cada subintervalo?

Solución: $\Delta x_i = \frac{5i^4 - 10i^3 + 10i^2 - 5i + 1}{n^5}$.

46) Evaluar el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$ para la función $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ en el intervalo $\left[0,1\right]$.

Sugerencia: Utilice el conjunto de puntos de partición

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{n^3}, x_2=\frac{8}{n^3}, x_3=\frac{27}{n^3},\ldots, x_i=\frac{i^3}{n^3},\ldots, x_n=\frac{n^3}{n^3}.$$

Por punto muestra tome el extremo derecho de cada subintervalo

$$x_i^*=x_i=\frac{i^3}{n^3}.$$

Solución: $\frac{3}{4}$

47) Mediante sumas de Riemann evalúe $\int_0^1 \left(x-1\right)^4 dx$

Solución: $\frac{1}{5}$

48) Mediante sumas de Riemann evalúe $\int_{-3}^{3}\left(\frac{x}{3}+1\right)dx$

Solución: 6

49) Mediante sumas de Riemann, calcular $\int_0^1 \left(x-1\right)^2 dx$.

(1EE / 2009-2)

Solución: $\int_0^1 \left(x-1\right)^2 dx=\frac{1}{3}$

50) Por medio de sumas de Riemann, calcule $\int_1^2 \left(12-3x^2\right)dx$

Solución: 5

51) Encuentre $G'(x)$, si $G(x)=\int_{x}^{0}\left(2t^2+\sqrt{t}\right)dt$

Solución: $-\left(2x^2+\sqrt{x}\right)$

52) Encuentre $f(x)$ si $\int_{1}^{x} f(t)dt = 2x-2$

Solución: $f(x)=2$

53) Utilizando la derivación implícita, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ de

$$x^3+\cos^2 y+\left(2\int_{\cos y}^{1}(t)dt\right)+2y+100=0$$

Solución: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2}{2}$

54) Calcule la segunda derivada de la función

$$f(x)=\int_0^x\left(\int_1^t\sqrt{1+u^2}\,du\right)dt$$

Solución: $f''(x)=\sqrt{1+x^2}$

55) Calcule la segunda derivada de la función

$$g(x)=\int_0^x\left[\int_1^{sent}\sqrt{1-u^2}\,du\right]dt$$

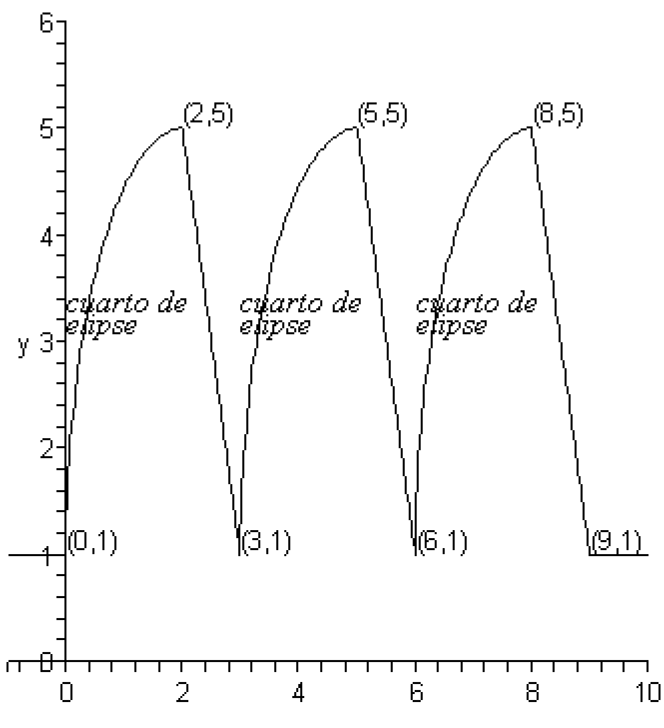
Solución: $g''(x)=\cos^2 x$

56) Obtenga $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^{\left(\int_1^x sen\left(t^2\right)dt\right)\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)} (t)\,dt\right]$

Solución:

$$\left(\int_1^x sen\left(t^2\right)dt\right)\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)\left[\left(\int_1^x sen\left(t^2\right)dt\right)e^{x^2}+\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)senx^2\right]$$

57) Sea la gráfica de f que aparece en la siguiente figura.
Determine su valor medio en el intervalo $[-1,10]$.



Solución: $f(c)=\dfrac{17+6\pi}{11}$

58) Determine la abscisa media de la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $[-1,1]$.

Solución: $c=\pm\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{16}}$

EFECTUAR LAS SIGUIENTES INTEGRALES

59) $\int \left(1+2x^2\right)^2 dx$

60) $\int \dfrac{1+senx}{\cos x} dx$

61) $\int \dfrac{2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

62) $\int \dfrac{x}{1+x} dx$

63) $\int \dfrac{x^2}{1+x} dx$

64) $\int \sqrt{1-senx}\,dx$

65) $\int \tan^2 x dx$

66) $\int \dfrac{\cos x}{sen^2 x} dx$

67) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^6-1}} dx$

68) $\int \dfrac{(4+x)^2}{x^2+4} dx$

69) $\int \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\tan\left(x-\dfrac{1}{x}\right) dx$

70) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\sqrt{x^5}\right)^2\left(\frac{3}{\sqrt{x^5}}+5\sqrt{x^3}\right)dx$

71) $\int\frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+6\right)^2}dx$

72) $\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

73) $\int x^2\cos\left(x^3\right)sen^3(x^3)dx$

74) $\int\left(\sec x+2\tan x\right)^{-\frac{1}{2}}\sec x\left(\tan x+2\sec x\right)dx$

75) $\int\frac{sen2x}{\left(\cos^2 x+4\right)^2}dx$

76) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(16+sen^2\sqrt{x}\right)}dx$

77) $\int\csc\left(5\cos x\right)\cot\left(5\cos x\right)senxdx$

78) $\int\frac{1+x^4+x^6}{x^2\left(1+x^6\right)}dx$

79) $\int\frac{sen2\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}\sqrt{sen^2\sqrt{x}+10\sqrt{x}}}dx$

80) $\int\left(x^2+2\right)^{10}x^3dx$

81) $\int\frac{dx}{\left(x+2\right)\sqrt{x\left(x+4\right)}}$

82) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$

83) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

84) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}}dx$

85) $\int \sqrt{\frac{angsenx}{1-x^2}}dx$

86) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

87) $\int 5^x 2^x \left[\frac{1}{x}+(\ln 10)\ln x\right]\left(\log_5 x^{10^x}\right)^2 dx$

88) $\int 5^{\left(x^4+2x\right)}\left(2x^3+1\right)dx$

89) $\int e^x 7^{e^x} 2^{e^x}\,dx$

90) $\int \frac{6^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}\,dx$

91) $\int senh(8x)dx$

92) $\int \cosh(5x-4)dx$

93) $\int x^2 \sec h^2\left(x^3\right)dx$

94) $\int \frac{\csc h\sqrt[3]{x}\coth\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx$

95) $\int \cosh^2 xsenhxdx$

96) $\int \frac{\csc h^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

97) $\int \sec h(2x)\tanh(2x)dx$

98) $\int \sqrt{1+senh(2x)}\cosh(2x)\,dx$

99) $\int \frac{senh(5x)}{7+\cosh(5x)}dx$

100) $\int x\coth\left(x^2\right)dx$

101) $\int e^{-\cosh 3x} senh 3x dx$

102) $\int \frac{e^{\tanh x}}{\cosh^2 x}dx$

103) $\int \left(\cosh^2 x - 1\right)^3 \cosh x dx$

104) $\int \tanh x \sec h^2 x dx$

105) $\int e^x \cosh\left(e^x\right)dx$

106) $\int \frac{\tanh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}dx$

107) $\int x\coth\left(x^2\right)\ln\left(senhx^2\right)dx$

SOLUCIONES A LAS INTEGRALES 59-107

59) $x+\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{5}x^5+C$

60) $\ln\left|\sec x+\tan x\right|+\ln\left|\sec x\right|+C$

61) $2angsen\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

62) $x-\ln\left|x+1\right|+C$

63) $\frac{x^2}{2}-x+\ln\left|x+1\right|+C$

64) $2\sqrt{1+senx}+C$

65) $\tan x - x + C$

66) $-\csc x + C$

67) $\frac{1}{3} ang\sec\left(x^3\right) + C$

68) $x + 4\ln\left(x^2 + 4\right) + 6ang\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

69) $\ln\left|\sec\left(x - \frac{1}{x}\right)\right| + C$

70) $-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \sqrt{x^5}\right)^3 + C$

71) $-\frac{1}{3\left(x^3 + 3x + 6\right)} + C$

72) $\frac{1}{3} angsen\left(\frac{3x}{2}\right) + C$

73) $\frac{1}{12}\left(sen\left(x^3\right)\right)^4 + C$

74) $2\sqrt{\sec x + 2\tan x} + C$

75) $\frac{1}{\cos^2 x + 4}$

76) $\frac{1}{2} ang\tan\left(\frac{sen\sqrt{x}}{4}\right) + C$

77) $\frac{1}{5}\csc\left(5\cos x\right) + C$

78) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3} ang\tan\left(x^3\right) + C$

79) $4\sqrt{sen^2\sqrt{x} + 10\sqrt{x}} + C$

80) $\frac{1}{24}\left(x^2 + 2\right)^{12} - \frac{\left(x^2 + 2\right)^{11}}{11} + C$

81) $\frac{1}{2} ang\sec\frac{x+2}{2}+C$

82) $\frac{1}{3} ang\,\mathrm{se}\,n\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+C$

83) $\frac{2}{\sqrt{3}} ang\sec\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\right)+C$

84) $3ang\tan\left(\sqrt[3]{x}\right)+C$

85) $\frac{2}{3}\sqrt{(angsenx)^3}+C$

86) $2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$

87) $\frac{\ln 5}{3}\left(\log_5 x^{10^x}\right)^3+C$

88) $\frac{1}{2\ln 5}5^{\left(x^4+2x\right)}+C$

89) $\frac{14^{e^x}}{\ln 14}+C$

90) $-\frac{6^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{\ln 6}+C$

91) $\frac{1}{8}\cosh(8x)+C$

92) $\frac{1}{5} sen\,\mathrm{h}(5x-4)+C$

93) $\frac{1}{3}\tanh\left(x^3\right)+C$

94) $-3\operatorname{csc}h\sqrt[3]{x}+C$

95) $\frac{1}{3}\cosh^3 x + C$

96) $-2\coth\sqrt{x} + C$

97) $-\frac{1}{2}\sec h(2x) + C$

98) $\frac{1}{3}(1+senh2x)^{\frac{3}{2}} + C$

99) $\frac{1}{5}\ln(7+\cosh 5x) + C$

100) $\frac{1}{2}\ln\left|senh\left(x^2\right)\right| + C$

101) $-\frac{1}{3}e^{-\cosh 3x} + C$

102) $e^{\tanh x} + C$

103) $\frac{1}{7}sen\,\mathrm{h}^7 x + C$

104) $\frac{1}{2}\tanh^2 x + C$

105) $senh\left(e^x\right) + C$

106) $ang\sec(\cosh x) + C$

107) $\frac{1}{4}\left[\ln\left(senhx^2\right)\right]^2 + C$

108) Calcular $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x dx$ Solución: $\frac{1}{3}$

109) Calcular $\int_0^2 |2x-1| dx$ Solución: $\frac{5}{2}$

110) Calcular $\int_{-1}^{1}\left(x-3|x|\right)dx$ Solución: -3

Utilice el teorema de simetría para evaluar la integral que se da.

111) $\int_{-1}^{1}\left(x\,sen^{4}x+x^{3}\right)dx$ Solución: 0

112) $\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}} x^{5}\cos\left(x^{3}\right)dx$ Solución: 0

113) $\int_{-2}^{2} x^{4}dx$ Solución: $\frac{64}{5}$

114) En una cierta zona del sur de la ciudad de México, el número de imecas entre las $12:00$ y las $15:00$ horas, se puede modelar con la función $f(x)=-20\left(x^{2}-4x-5\right)$, en donde $f(x)$ es el número de imecas a las x horas después del mediodía con $\left(0\le x\le 3\right)$.

Determine el número promedio de imecas que hay en esta zona de la ciudad, entre las $12:00$ y las $15:00$ horas. ¿A que hora se alcanza este número promedio de imecas?

Solución: 160 imecas; $13:00$ y $15:00$ horas.

115) La temperatura de un caldo de pollo que se saca del refrigerador (a 5 grados centígrados) y se pone al fuego, durante los primeros 12 minutos, puede modelarse por la función $T(t)=5+0.5t(t+1)$, en donde $T(t)$ es la temperatura (en grados centígrados) del caldo a los t minutos de haberse puesto a la lumbre. Calcule la temperatura promedio que tuvo el caldo de pollo durante los 12 minutos en que se calentó. ¿En que momento de los primeros 12 minutos de calentamiento, el caldo tuvo la temperatura promedio?

Solución: $32^{o}C$, $6.86\,\text{min}$.

116) A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a diferentes velocidades. La velocidad del sonido s(x) (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x)=\begin{cases} -4x+341, & 0\le x<11.5 \\ 295, & 11.5\le x<22 \\ \dfrac{3}{4}x+278.5, & 22\le x<32 \\ \dfrac{3}{2}x+254.5, & 32\le x<50 \\ -\dfrac{3}{2}x+404.5, & 50\le x\le 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo $[0,80]$?

Solución: Velocidad promedio = 308 metros por segundo.

117) Calcular el valor medio de la función $f(x)=\left|x^2-4\right|$ en el intervalo $[-2,0]$.

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución: $f(c)=\dfrac{8}{3}$

118) Calcular el valor medio de la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en el intervalo $[0,8]$.

(1EE / 2009-2)

Solución: $f(c)=\dfrac{3}{2}$

119) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$

Solución: ∞

120) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$

Solución: 0

121) Calcular, de ser posible, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+6x+3x^2-6e^x}{x-senx}$

Solución: -6

122) Calcular, si existe $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{e^{(3-x)^2}-e^9}{6x}$

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución: $-e^9$

123) Calcular, de ser posible, $\lim_{x\to 0^+} (senx)^{\int_0^x tdt}$

Solución: 1

124) Calcular, de ser posible, $\lim_{x\to 0^+} (1+senx)^{\csc x}$

Solución: e

125) Calcular, de ser posible, $\lim_{x\to 0^+} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución: e^2

126) Determinar si la integral converge $\int_1^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución: π

127) Calcular, de ser posible, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

Solución: converge y su valor es $\frac{\pi}{2}$

128) Calcular, de ser posible, $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

Solución: converge y su valor es $\frac{\pi}{2}$

129) Calcular, de ser posible, $\int\limits_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx$

Solución: converge y su valor es $-\frac{1}{2\ln 5}$.

130) Calcular, de ser posible, $\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{x^5}\,dx$

Solución: La integral diverge.

131) Si $a<b<c$, entonces $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx$ es equivalente a……..☐

1) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx-\int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx$ 2) $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx+\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

3) $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx+\int\limits_{b}^{c} f(x)\,dx$ 4) $\int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx-\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

132) Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ diferenciable $\forall x\in[a,b]$. Entonces se cumple que…………☐

1) $F'(x)=f(x)$ 2) $F'(x)=f(x)-f(a)$

3) $F'(x)=F(x)$ 4) $F'(x)=F(x)-F(a)$

133) La igualdad $\ln(a+b)=\ln a+\ln b$, con $a>0$ y $b>0$ es.☐

1) verdadera. 2) falsa.

3) verdadera si $a>1$ y $b>1$ 4) verdadera si $0\le a\le 1$ y $0\le b\le 1$

134) La función $f(x)=\ln x$ se define como.................... $\square$

1) $\ln x=\int_0^x \frac{1}{t}dt,\ \ t>0$ 2) $\ln x=\int_0^x \frac{1}{t}dt,\ \ x>0$

3) $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt,\ \ t>0$ 4) $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt,\ \ x>0$

135) Si f es una función definida en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral definida de a a b se denota por......................... $\square$

1) $\lim\limits_{\|\Delta x\|\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$ 3) $\lim\limits_{\|\Delta x\|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{\infty} f\left(x_i^*\right)\left(\Delta x_i\right)$

Los siguientes ejercicios son del primer examen parcial colegiado del semestre 2004-2

136) Mediante el límite de Sumas de Riemann, calcular

$$\int_{-2}^{1}\left(-2x^2+x\right)dx$$

Solución: $-\dfrac{15}{2}$

137) Sea la función $f(x)=3-|x|$

Obtener:

a) El valor promedio de f en el intervalo $[-4,1]$.

b) El valor o los valores de $c\in[-4,1]$ cuya existencia garantiza el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Solución: a) $f(c)=\frac{13}{10}$ b) $c=-\frac{17}{10}$

138) Determinar

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$ b) $\int \frac{senx}{1-sen^2x}dx$

c) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, donde $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ -2\le x<1 \\ x\left(x^2-1\right)^3 & si\ \ 1\le x\le 2 \end{cases}$

Solución:

a) $2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$ b) $\sec x+C$ c) $\frac{81}{8}$

139) Obtener $\frac{dF}{dx}$ de las siguientes funciones

a) $F(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{t^5+1}dt$ b) $F(x)=\log_2\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right|$

c) $F(x)=\tanh\left(\frac{2}{x}\right)$

Solución:

a) $F'(x)=\sqrt{x^5+1}$ b) $F'(x)=\frac{2e^x}{\left(1-e^{2x}\right)\ln 2}$

c) $F'(x)=-\frac{2}{x^2}\sec h^2\left(\frac{2}{x}\right)$

140) Determinar, si existe $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)^{e^x}$

Solución: e^{-1}

141) Evaluar la siguiente integral y determinar si converge o diverge $\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$.

Solución: La integral impropia converge y su valor es 2

TEMA 3 Métodos de integración

Efectúe las siguientes integrales.

Ajuste de integrandos a las reglas básicas.

142) $\int \left(1+2e^{2x}\right)^2 dx$ Solución: $x+2e^{2x}+e^{4x}+C$

143) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ Solución: $\ln\left(1+e^x\right)+C$

144) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ Solución: $e^x-\ln\left(1+e^x\right)+C$

145) $\int \frac{x^2}{x-1}dx$ Solución: $\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|x-1\right|+C$

146) $\int \frac{dx}{\cosh x+senhx}$ Solución: $senhx-\cosh x+C$

147) $\int \frac{1}{\sqrt{3^{2x}-1}}dx$ Solución: $\frac{1}{\ln 3}ang\sec\left(3^x\right)+C$

148) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-2x}dx$ Solución: $-\ln\left|1-2\sqrt{x}\right|+C$

149) $\int \frac{3}{\sqrt{3x-x^2}}dx$ Solución: $3angsen\frac{2x-3}{3}+C$

150) $\int \sqrt{\cosh x-1}dx$ Solución: $2\sqrt{\cosh x+1}+C$

Integración por partes.

151) $\int e^{-2x}sen\left(e^{-x}\right)dx$ Solución: $e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)-sen\left(e^{-x}\right)+C$

152) $\int ang\cos xdx$ Solución: $xang\cos x-\sqrt{1-x^2}+C$

153) $\int \cos(\ln x)\,dx$

Solución:
$\frac{x}{2}\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x\,sen(\ln x)+C$

154) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$

Solución: $x\ln\sqrt{x}-\frac{x}{2}+C$

155) $\int \csc^3 x\,dx$

Solución:
$-\frac{1}{2}\csc x\cot x+\frac{1}{2}\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$

156) $\int (\ln x)^2 dx$

Solución: $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

157) $\int \left(x^4+3x^3-2x^2+19x+2\right) senhx\,dx$

Solución:
$\left(x^4+3x^3+10x^2+37x+22\right)\cosh x-\left(4x^3+9x^2+20x+37\right)senhx+C$

158) Determinar si la integral converge o diverge $\int_0^{\infty} e^{-x}(1-x)\,dx$.

(1EE / 2009-2)

Solución: La integral impropia converge y su valor es cero.

159) $\int x^2(x-2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

Solución: $\frac{16}{315}(x-2)^{\frac{9}{2}}-\frac{8}{35}x(x-2)^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{5}x^2(x-2)^{\frac{5}{2}}+C$

160) Emplee integración por partes para determinar la fórmula de reducción de $\int \cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\left(\cos^{n-1}x\right)senx+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$.

161) Emplee integración por partes para obtener la fórmula de reducción de $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

Integrales de expresiones trigonométricas.

162) $\int sen^4 x \cos x dx$ Solución: $\frac{1}{5} sen^5 x + C$

163) $\int sen^5 x \cos x dx$ Solución: $\frac{1}{6} sen^6 x + C$

164) $\int sen^3 x dx$ Solución: $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

165) $\int \cos^5 x dx$ Solución: $senx - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5 x + C$

166) $\int sen^2 x \cos^3 x dx$ Solución: $\frac{1}{3} sen^3 x - \frac{1}{5} sen^5 x + C$

167) $\int sen^3 x \cos^3 x dx$ Solución: $\frac{1}{4} sen^4 x - \frac{1}{6} sen^6 x + C$

$-\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C$

168) $\int \cos 4x \cos 3x dx$ Solución: $\frac{1}{2} senx + \frac{1}{14} sen7x + C$

169) $\int sen2x \cos 4x dx$ Solución: $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$

170) $\int sen3x \cos 5x dx$ Solución: $\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$

171) $\int \cos x \cos 3x dx$ Solución: $\frac{1}{4} sen2x + \frac{1}{8} sen4x + C$

172) $\int \tan^6 x dx$

Solución: $\frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + C$

173) $\int \sec^4 x dx$

Solución: $\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$

174) $\int \tan^{-5} x dx$

Solución: $-\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|senx| + C$

175) $\int \sec^4 x \tan^5 x dx$

Solución: $\frac{1}{8}\sec^8 x - \frac{1}{3}\sec^6 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + C$

$\frac{1}{6}\tan^6 x + \frac{1}{8}\tan^8 x + C$

176) $\int \frac{\csc^4 x}{\cot^2 x} dx$

Solución: $\tan x - \cot x + C$

$-2\cot 2x + C$

177) $\int \frac{\tan^4 x}{\sec^5 x} dx$

Solución: $\frac{1}{5} sen^5 x + C$

178) $\int \sec^5 x dx$

Solución: $\frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

179) $\int \csc^5 x dx$

Solución: $-\frac{1}{4}c\,sc^3 x \cot x - \frac{3}{8}\csc x co\,t\, x + \frac{3}{8}\ln|\csc x - \cot x| + C$

180) $\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cot^3\sqrt{x}} dx$

Solución: $\frac{2}{3}\sec^3\sqrt{x} - 2\sec\sqrt{x} + C$

181) $\int \sec^{-\frac{3}{2}} x \tan^5 x dx$ Solución:

$$\frac{2}{5}\sec^{\frac{5}{2}} x - 4\sec^{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{3}\sec^{-\frac{3}{2}} x + C$$

Sustitución trigonométrica.

182) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$ Solución: $8angsen\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2} + C$

183) $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$ Solución:

$$\sqrt{x^2+16} + 4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}\right| + C$$

184) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}dx$ Solución:

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} + 8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right| + C$$

185) $\int \frac{1}{\left(25-x^2\right)^{3/2}} dx$ Solución: $\frac{x}{25\sqrt{25-x^2}} + C$

186) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$ Solución:

$$\sqrt{x^2+4x+8} - 2\ln\left|\sqrt{x^2+4x+8} + x + 2\right| + C$$

187) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$ Solución: $\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 + C$

188) $\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$ Solución: $\frac{1}{2}ang\tan x - \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + C$

189) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}dx$ Solución: $angsen\left(\frac{x-3}{3}\right)+C$

190) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+50}}dx$ Solución: $\ln\left|\sqrt{x^2+2x+50}+x+1\right|+C$

191) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ Solución: $\frac{3}{2}angsen(x-1)-\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2}+C$

Integración por descomposición en fracciones racionales.

192) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$ Solución: $\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$

193) $\int \frac{x}{x-5}dx$ Solución: $x+5\ln|x-5|+C$

194) $\int \frac{1}{x(x+1)(2x+3)}dx$ Solución: $\frac{1}{3}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|2x+3|+C$

195) $\int \frac{x^2}{(x-3)(x+2)^2}dx$ Solución: $\frac{9}{25}\ln|x-3|+\frac{16}{25}\ln|x+2|+\frac{4}{5(x+2)}+C$

196) $\int \frac{x^3-2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}dx$ Solución: $ang\tan x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{3}{2}ang\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$

197) $\int \frac{x^4+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$ Solución: $\ln|x|+\frac{1}{x^2+1}+C$

198) $\int \frac{1}{x^3-1}dx$

Solución: $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}ang\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

199) $\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$

Solución: $x+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}ang\tan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

200) $\int \frac{e^{5x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}dx$ Solución: $e^x-\frac{3}{2}ang\tan\left(e^x\right)+\frac{e^x}{2\left(e^{2x}+1\right)}+C$

201) $\int \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}dx$ Solución: $\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$

Miscelánea de integrales.

202) $\int 2^x x^2 dx$ Solución:

$$\frac{2^x}{\ln 2}\left[x^2-\frac{2x}{\ln 2}+\frac{2}{(\ln 2)^2}\right]+C$$

203) $\int \frac{e^{(\ln x)+\frac{1}{x}}}{x^4}dx$ Solución: $-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}+C$

204) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$ Solución:

$$\ln\left|\sqrt{1+(\ln x)^2}+\ln x\right|+C$$

205) $\int \frac{1}{e^{3x}+1}dx$ (Sugerencia: multiplique y divida entre e^x, y haga la sustitución $u=e^x$).

Solución: $x-\frac{1}{3}\ln\left(e^x+1\right)-\frac{1}{3}\ln\left|e^{2x}-e^x+1\right|+C$

206) $\int \frac{1}{x\left(x^4-1\right)}dx$ (Sugerencia: multiplique y divida entre x, y haga la sustitución $u=x^2$).

Solución: $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|-\ln|x|+C$

207) $\int sen^3 x\cos x dx$ Solución: $\frac{1}{4}sen^4 x+C$

208) $\int(\sec x+\tan x)^2 dx$ Solución: $2\tan x+2\sec x-x+C$

209) Efectuar las integrales

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}dx$ b) $\int \cos\sqrt{x}dx$ c) $\int \frac{3-x}{x^3-2x^2+3x}dx$

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución: a) $I=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-angsen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b) $I=2\sqrt{x}\,sen\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$ c) $I=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2-2x+3}}+C$

210) Efectuar

a) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ b) $\int e^x\sqrt{9-4e^{2x}}dx$ c) $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2+3x+1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$

(1EE / 2009-2)

Solución: a) $I=-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x\ln 3}+\frac{3^{\frac{1}{x}}}{(\ln 3)^2}+C$

b) $I=\frac{9}{4}angsen\left(\frac{2e^{x}}{3}\right)+\frac{1}{2}e^{x}\sqrt{9-4e^{2x}}+C$

c) $I=\frac{x^{2}}{2}+2x+\ln\frac{\sqrt[4]{x^{2}+1}}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}ang\tan x+C$

APLICACIONES

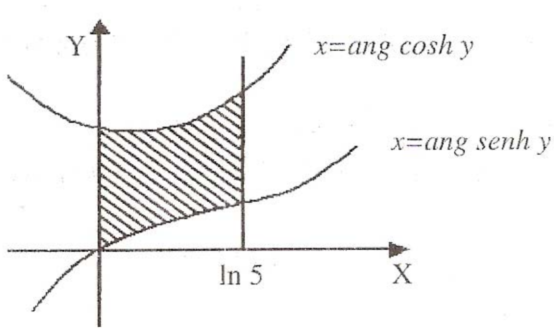
211) Sea la región del plano xy, limitada por las curvas $y=x^{2}$, $x=0$, $y=16$. Calcular $b\in\mathbb{R}$, tal que la recta $y=b$ divida a R en dos regiones con áreas iguales. (2EP/B/2003-2)

Solución: $b=(32)^{2/3}$.

212) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de ecuaciones $y=\sqrt{x}$ y $y=x^{3}$. (2EP/A/2005-1)

Solución: $A=\frac{5}{12}$ unidades de área.

213) Calcular el área de la región indicada en la figura (1EF/A/2002-2)



Solución: $A=\frac{4}{5}$ unidades de área.

214) Calcular el área de la región limitada por las curvas dadas por $y^2 = x,\ y = x - 2$.

Solución: $A = \dfrac{9}{2}$ unidades de área.

215) Calcule el área de la región limitada por las gráficas de las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 6$, y $y = 1$.

Solución: $A = \dfrac{13}{6}$ unidades de área.

216) Calcular la longitud de la curva $y = 200\left(\cosh \dfrac{x}{200}\right)$ en el intervalo $[-50, 50]$. (2EP/A/2003-2)

Solución: $s = 200\left(e^{\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{4}}\right)$ unidades de longitud.

217) Calcular la longitud del arco de la curva dada por $r = 4sen\theta$ para $\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{2}{3}\pi$. (2EP/A/2005-1)

Solución: $s = \dfrac{5}{3}\pi$ unidades de longitud.

218) Calcular la longitud del arco de la curva dada por $r = 1 - \cos\theta$.
(1EE / 2009-2)
Solución: $s = 8$ unidades de longitud.

219) Determinar la longitud de la curva de ecuación $r = 2e^{-\theta}$ en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$. (1EF/A/2005-2)
Solución: $s = 2\sqrt{2}\left(1 - e^{-\pi}\right)$ unidades de longitud.

220) Calcular la longitud de la curva polar $r = 9\cos\theta$. (2EF/2003-2).

Solución: $A = 9\pi$ unidades de longitud.

221) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación, alrededor del eje X, de la región plana limitada por $y = senx$, $x \in [0, \pi]$. (2EP/A/2003-1).

Solución: $V = \frac{1}{2}\pi^2$ unidades de volumen.

222) Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje X, la región limitada por $y = x$, $y = \sqrt{x}$.

Solución: $V = \frac{1}{6}\pi$ unidades de volumen.

223) Calcular el volumen del sólido de revolución que se forma al hacer girar alrededor del eje de las ordenadas, la región limitada por las curvas de $y = \sqrt{x+1}$, $y = 0$ y $x = 0$. (1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución: $V = \frac{8\pi}{15}$ unidades de volumen.

224) Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje X. (1EF/A/2004-2)

Solución: $V = \frac{28}{15}\pi$ unidades de volumen.

Ejercicios del segundo examen parcial del semestre 2006-1

225) Al realizar $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, se obtiene………………………...☐

1) $\ln\sqrt{\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}}+C$ 2) $\ln\sqrt{\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\frac{2}{x}}+C$

3) $\ln\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}}+C$ 4) $\ln\sqrt{\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}}+C$

226) El área de la región limitada por las gráficas de ecuaciones $y^2-2y+x=0$ y $y^2-2y-x=0$, es……..……………….☐

1) $\frac{3}{8}\left[u^2\right]$ 2) $\frac{3}{4}\left[u^2\right]$ 3) $\frac{4}{3}\left[u^2\right]$ 4) $\frac{8}{3}\left[u^2\right]$

227) Al efectuar $\int(w)(\ln w)\,dw$, se obtiene…………………….☐

1) $w^2\left(\ln\sqrt{w}-\frac{1}{4}\right)+C$ 2) $-w^2\left(\ln\sqrt{w}+\frac{1}{4}\right)+C$

3) $w^2\left(\frac{1}{4}-\ln\sqrt{w}\right)+C$ 4) $w^2\left(\ln\sqrt{w}+\frac{1}{4}\right)+C$

228) Al realizar $\int\frac{x^2}{(x+4)(x-1)}dx$, se obtiene……..…………..☐

1) $\ln\left|\sqrt[5]{\frac{x-1}{(x+4)^{16}}}\right|+C$ 2) $x+\ln\left|\sqrt[5]{\frac{(x+4)^{16}}{x-1}}\right|+C$

3) $x+\ln\left|\sqrt[5]{\frac{x-1}{(x+4)^{16}}}\right|+C$ 4) $x+\ln\left|\frac{1}{(x+4)^{\frac{8}{5}}(x-1)^{\frac{7}{5}}}\right|+C$

229) El volumen que se obtiene al hacer girar la región limitada por la gráfica de ecuación $y = \sqrt{1-x}$ y los ejes coordenados, alrededor del eje de las ordenadas es……………………☐

1) $\frac{3}{4}\pi\left[u^3\right]$ 2) $\frac{8}{15}\pi\left[u^3\right]$ 3) $\frac{\pi^2}{2}\left[u^3\right]$ 4) $\frac{4}{5}\pi\left[u^3\right]$

230) La longitud de la curva de ecuación $y = \ln\left(\cos x\right)$ en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, es………………………………………☐

1) $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)[u]$ 2) $\ln\left(2-\sqrt{2}\right)[u]$ 3) $\left(\sqrt{2}+2\right)[u]$ 4) $\ln\left(\sqrt{2}+1\right)[u]$

231) Al efectuar $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$, se obtiene…………………☐

1) $angsen\left(\frac{x-1}{4}\right)+C$ 2) $angsen\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$

3) $angsen\left(\frac{1-x}{2}\right)+C$ 4) $angsen\left(\frac{1-x}{4}\right)+C$

TEMA 4
Derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables

Indique si es falso o verdadero.

232) $S=\{(x,y)\mid x+y\leq 1; x>0; y\geq 0; x,y\in\mathbb{R}\}$ es un conjunto cerrado.

Solución: Falso

233) Sea $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ su dominio esta representado por el conjunto $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4; x,y\in\mathbb{R}\}$

Solución: Verdadero

234) Determine el dominio de la función $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$.

Solución: $S=\{(x,y)\mid y>-x; x,y\in\mathbb{R}\}$

235) Obtenga el dominio de la función $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$.

Solución: $S=\{(x,y)\mid y\geq 0; x\geq -\sqrt{y}; x,y\in\mathbb{R}\}$.

236) Obtenga el dominio de la función

$f(x,y)=\ln\left[y\ln(1+x+y)\right]$

Solución: $S=S_1\cup S_2$ donde

$S_1=\{(x,y)\mid y>0; y>-x; x,y\in\mathbb{R}\}$

$S_2=\{(x,y)\mid y<0; -(1+x)<y<-x; x,y\in\mathbb{R}\}$

237) Determinar el dominio y el recorrido de la función

$$f(x,y)=\sqrt{(x^2-4)(1-y)}.$$

Solución: $S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$S_1=\{(x,y)\mid -2\le x\le 2; y\ge 1; x,y\in\mathbb{R}\}$,

$S_2=\{(x,y)\mid x\le -2; y\le 1; x,y\in\mathbb{R}\}$

$S_3=\{(x,y)\mid x\ge 2; y\le 1; x,y\in\mathbb{R}\}$

Su recorrido $R=[0,\infty)$.

238) Sea la función $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

a) Determinar el dominio y representarlo gráficamente en el plano xy.

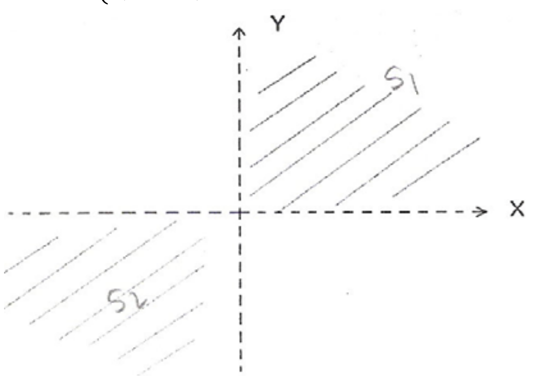
b) Graficar sus curvas de nivel para $z=\dfrac{1}{2}$ y $z=1$.

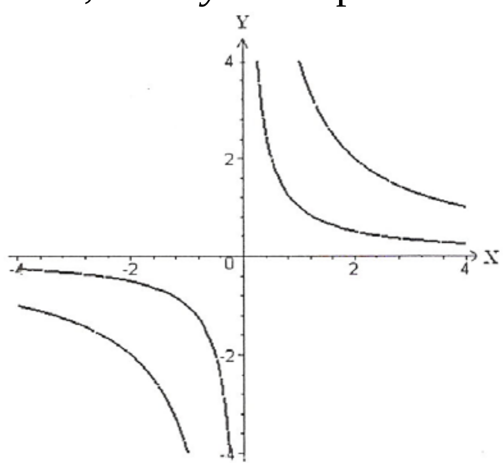
(1EE / 2009-2)

Solución:

<table>
<tr>
<td>
a) $S=S_1\cup S_2$

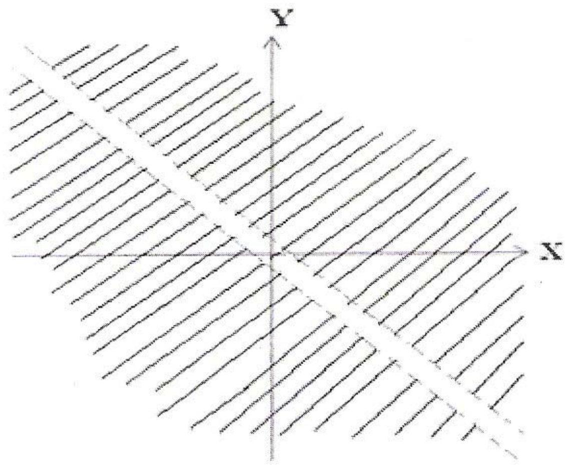
$S_1=\{(x,y)\mid x>0; y>0; x,y\in\mathbb{R}\}$

$S_2=\{(x,y)\mid x<0; y<0; x,y\in\mathbb{R}\}$


</td>
<td>
b) Curvas de nivel
$z=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ xy=4$ hipérbola equilátera
$z=1,\ \rightarrow\ xy=1$ hipérbola equilátera


</td>
</tr>
</table>

239) Trazar la región de definición y obtener el recorrido de la función $f(x,y)=\dfrac{2}{x+y}$.
(1EF / TIPO A / 2009-2)
Solución:

	Su recorrido $R=\mathbb{R}-\{0\}$

240) Sea la función $y^2+z^2=3x$, $z\geq 0$; obtenga su dominio y recorrido.
Solución: $S=\{(x,y)\mid y^2\leq 3x; x,y\in\mathbb{R}\}$, $R=[0,\infty)$.

241) Determinar el dominio y recorrido de la función $f(x,y)=\sqrt{4-4x^2-4y^2}$.
Solución: $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1; x,y\in\mathbb{R}\}$, $R=[0,2]$.

242) Para la función $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-1\right)$, determinar el dominio y el recorrido.
Solución: $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1; x,y\in\mathbb{R}\}$, $R=\mathbb{R}$.

243) Sea la función $z=e^{y-x^3}$, determine la curva de nivel para
a) $z=1$, b) $z=e$.
Solución: a) $y=x^3$, b) $y=x^3+1$.

244) Para la función $f(x,y)=\sqrt{|x|-y}$, obtenga sus curvas de nivel para $z=0,1$.
Solución: $z=0$, $y=|x|$; $z=1$, $y=|x|-1$.

245) Sea la función $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2+1}$, encuentre sus curvas de nivel para $z=1$ y $z=2$.
Solución: $z=1$, dos rectas: $y=x$, $y=-x$
$z=2$, la hipérbola $x^2-y^2=3$.

246) Determinar el dominio de $f(x,y,z)=\sqrt{z}\,e^{-|xy|}$.
(1EF/A/2005-2)
Solución: $S=\{(x,y,z)\mid z\geq 0; x,y,z\in\mathbb{R}\}$

247) Sea la función $y^2+z^2=3x,\ z\geq 0$. Obtenga la ecuación de la curva de nivel para $z=3$.
Solución: $y^2=3(x-3)$.

248) Sea la función $z=\sqrt{y^2-x^2+1}$. Determinar la ecuación de sus curvas de nivel para:
a) $z=0$
b) $z=-\sqrt{2}$
Solución:
Si $z=0$, $x^2-y^2=1$
Si $z=-\sqrt{2}$, $y^2-x^2=1$

249) Identificar las curvas de nivel de la superficie

$9x^2 + y^2 - z^2 = 9;\ z \geq 0$ correspondientes a los valores

a) $z = 0$

b) $z = 4$

Solución:

Si $z = 0$, la elipse $9x^2 + y^2 = 9$.

Si $z = 4$, la elipse $9x^2 + y^2 = 25$.

250) Obtenga el límite $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$

a) a través de $y = x$

b) a lo largo de $y = -x + 2$

Solución: a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$.

251) Determine el valor del límite, si este existe, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Solución: No existe.

252) Obtenga el límite, si este existe, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2}$

Solución: No existe.

253) Determine, si existe el límite, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$.

Solución: No existe.

254) Determinar , si existe, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + 3x^3y^2 + 2xy^2}{3x^4 + 2y}$

(3EP/B/2005-2)

Solución: No existe.

255) Calcule el límite $\underset{(x,y)\to(4,\pi)}{lím} x^2 sen\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Solución: $8\sqrt{2}$.

256) Para la función $f(x,y)=9-x^2-y^2$, determine la pendiente de la recta tangente en $(2,1,4)$ en el plano $x=2$.

Solución: $m=-2$.

257) Sea $P=\dfrac{kT}{V}$, donde k es una constante, determine $\dfrac{\partial P}{\partial T}$.

Solución: $\dfrac{\partial P}{\partial T}=\dfrac{k}{V}$.

258) Sea $f(x,y)=\pi^{xy}$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=(\ln \pi)^2 xy\pi^{xy}+(\ln \pi)\pi^{xy}$.

259) Sea $f(x,y,z)=x\cosh(yz)$, obtenga $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}$.

Solución: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}=senh(yz)+yz\cosh(yz)$.

260) Sea $f(x,y)=\int_x^y (t^2-1)\,dt$, obtenga $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1-x^2$.

261) Determine la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $f(x,y)=8e^{-2y}sen4x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{24},0,4\right)$.

Solución: Plano tangente: $x-\frac{\sqrt{3}}{6}y-\frac{\sqrt{3}}{48}z-\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{12}=0$

Recta normal: $\frac{x-\frac{\pi}{24}}{-16\sqrt{3}}=\frac{y}{8}=\frac{z-4}{1}$

262) Sea $\omega=x^2y+z^2$ a su vez $\begin{aligned} x&=\rho sen\phi\cos\theta \\ y&=\rho sen\phi sen\theta \\ z&=\rho cos\phi \end{aligned}$

Encuentre $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right|_{\rho=2,\theta=\pi,\phi=\frac{\pi}{2}}=$

Solución: $\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=-8$.

263) Para la función $z=x^2y-1$ si $x=\sqrt{t+1}$, $y=e^t$, calcular $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$.

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=2$

264) Sea la función compuesta $z=f\left(x^2+y^2,\frac{x}{y}\right)$ obtenga $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Solución: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial v}$

265) Sea $u(x,y)=f(3x+y)+g(x+y)-x^3+5$

obtenga $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3f'(3x+y)+g'(x+y)-3x^2$

266) Sea $f(x,y,z)=xy^z$, obtenga $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}=y^{z-1}\left[z\ln y+1\right]$.

267) Los lados de un triángulo equilátero crecen a razón de $3\left[\dfrac{cm}{\min}\right]$, calcular con qué rapidez crece el área del triángulo en el instante en el que los lados miden $100cm$. (1EF/A2005-2)

Solución: $\dfrac{dA}{dt}=150\sqrt{3}\left[\dfrac{cm^2}{\min}\right]$.

268) Sea $x\ln(yz)-y\ln(xz)+z\ln(xy)=0$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z\left(x-y\ln(xz)+z\right)}{y\left(x-y+z\ln(xy)\right)}$

269) Sean $\begin{array}{c} u^2-v-3x-y=0 \\ u-2v^2-x+2y=0 \end{array}$ determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1-12v}{1-8uv}$.

270) Sea $z = u^2v^2$ a su vez $\begin{matrix} x^4 + y + u - 2v = 0 \\ x^2 + y^2 + u^2 + v = 0 \end{matrix}$ determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Solución: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2uv^2\left(4x^3+4x\right)+2u^2v\left(2x-8ux^3\right)}{1+4u}$.

271) Calcule la derivada direccional de la función $f\left(x,y\right)=\sqrt{2}\,x^2 seny$ en el punto $A_0\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ y en la dirección del vector que forma un ángulo de $30°$ con la dirección positiva del eje x.

Solución: $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u},A_0} = \sqrt{3}+\dfrac{1}{2}$.

272) Calcular la derivada direccional de la función $f\left(x,y\right)=\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2$ en el punto $P\left(0,2\right)$ y en la dirección de vector $\bar{v}=\left(-1,1\right)$. (3EP/B/2005-2)

Solución: $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\bar{u},P} = 2\sqrt{2}$

273) La superficie de una montaña se describe mediante la ecuación $h\left(x,y\right)=3e^{-\left(x^2+2y^2\right)}$. El eje X positivo apunta hacia el este y el eje Y positivo apunta hacia el norte. Una montañista está directamente sobre el punto $\left(1,1,1\right)$. Si la montañista se mueve hacia el norte ¿Ascenderá o descenderá y con qué pendiente? (1EF/A/2005-2)

Solución: $\left(\dfrac{dh}{ds}\right)_{\bar{u}} = -12e^{-3}$ por lo que la montañista desciende con una pendiente de $-12e^{-3}$.

274) La temperatura en una caja rectangular es aproximada por $T(x,y,z)=xyz(1-x)(2-y)(3-z)$; $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 3$. Si un mosquito se localiza en $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$, ¿en que dirección debe volar para enfriarse lo más rápidamente posible?

Solución: El mosquito debe volar en la dirección $-\frac{1}{4}\hat{k}$ para que su temperatura disminuya más rápidamente.

275) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z=e^{xy-1}$ en el punto $(1,1,1)$.

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución: $x+y-z=1$

276) Determine la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy+z^2=4$ en $(1,1,1)$.

Solución: $3x+3y+2z-8=0$.

277) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie definida por $f(x,y)=xseny+ysenx$ en el punto $P(\pi,\pi,0)$.

(1EE / 2009-2)

Solución: $L_N:\begin{cases} x=\pi-\pi t \\ y=\pi-\pi t \quad ; \; t\in\mathbb{R} \\ z=-t \end{cases}$

278) Determine el gradiente para la curva de nivel de la función $f(x,y)=-x^2+y^2$ con $k=5$ en el punto $(2,3)$.

Solución: $\nabla f=-4\hat{i}+6\hat{j}$.

279) Para la función $f\left(x,y,z\right)=x^{y}senhz$ obtenga su gradiente.

Solución: $\nabla f=yx^{y-1}senhz\hat{i}+x^{y}\ln x\,senhz\hat{j}+x^{y}\cosh z\hat{k}$.