

Temario

- ▶ 1. Teoría de la probabilidad
- ▶ 2. Variables aleatorias
- ▶ **3. Variables aleatorias conjuntas**
- ▶ 4. Modelos probabilísticos de fenómenos aleatorios discretos
- ▶ 5. Modelos probabilísticos de fenómenos aleatorios continuos



Objetivo

El alumno **formulará funciones de densidad de probabilidad** para variables aleatorias discretas y continuas, analizará su comportamiento utilizando los fundamentos de la teoría de la probabilidad conjunta e individual de las variables, e **identificará las relaciones de dependencia** entre dichas variables.



Contenido

3.1 Variables aleatorias conjuntas discretas, función de probabilidad conjunta, su definición y propiedades, funciones marginales de probabilidad y funciones condicionales de probabilidad.

3.2 Variables aleatorias conjuntas continuas, función de densidad conjunta, su definición y propiedades. Funciones marginales de densidad y funciones condicionales de densidad.

3.3 Valor esperado de una función de dos o más variables aleatorias sus propiedades y su valor esperado condicional.

3.4 Variables aleatorias independientes, covariancia, correlación y sus propiedades, variancia de una suma de dos o más variables aleatorias.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son variables aleatorias conjuntas directas. Su función de probabilidad conjunta se define:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X = x_1 \cap X = x_2 \cap \dots \cap X = x_n)$$

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n)$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

Características de la función masa de probabilidad conjunta:
(función de densidad de probabilidad)

- 1) $0 \leq f_{XY}(x, y) \leq 1$
- 2) $\sum_{\forall x} \sum_{\forall y} f_{XY}(x, y) = 1$
- 3) $P(x_0 \leq X \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1) = \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{y=y_0}^{y_1} f_{XY}(x, y)$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO I

Una gran agencia de seguros presta servicios a numerosos clientes que han adquirido tanto una póliza de propietario de casa como una póliza de automóvil en la agencia. Por cada tipo de póliza, se debe especificar una cantidad deducible. Para una póliza de automóvil, las opciones son \$100 y \$250, mientras que para la póliza de propietario de casa, las opciones son 0, \$100 y \$200. Suponga que se selecciona al azar un individuo con ambos tipos de póliza de los archivos de la agencia. Sea X la cantidad deducible sobre la póliza de auto y Y la cantidad deducible sobre la póliza de propietario de casa.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO I

Suponga que la tabla de probabilidad conjunta siguiente da la función masa de probabilidad conjunta:

$f_{XY}(x, y)$		y		
		0	100	200
x	100	0.20	0.10	0.20
	250	0.05	0.15	0.30

Obtener la probabilidad de que el individuo seleccionado pague 100 o más pesos por la póliza de casa y 100 pesos por la póliza de auto.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 2

Un estudiante de cierta Universidad al sur de Copilco se enteró de un chisme de su profesora de Probabilidad y le urge contarlo a sus compañeros. Para no verse tan chismoso, decidió escribir sólo 3 papelitos con ese chisme, y entregarlo aleatoriamente a sus compañeros. Suponga que en el salón hay 56 estudiantes además del estudiante chismoso, y que hay 20 estudiantes que, si reciben el papelito, le contarán a su Profesora.

Sea X el número de alumnos discretos y Y el número de alumnos indiscretos, obtener la función de probabilidad de X y Y .



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

Función masa de probabilidad **marginal**

Es la función masa de probabilidad de **una** de las variables sola, se obtiene sumando $f_{XY}(x, y)$ con los valores de la otra variable.

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 3

Suponga que la tabla de probabilidad conjunta siguiente da la función masa de probabilidad conjunta:

$f_{XY}(x, y)$		y		
		0	100	200
x	100	0.20	0.10	0.20
	250	0.05	0.15	0.30

Obtener la función de probabilidad marginal de X y de Y .



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 4

Cierto artículo se fabrica en dos líneas de producción diferentes. La capacidad en cualquier día dado para cada línea es de dos artículos. Supóngase que el número de artículos producidos por la línea uno en un día cualquiera es una variable aleatoria X y que el número de artículos producidos por la línea dos está dado por Y . Con base en datos estadísticos se obtuvo la siguiente tabla que corresponde a la función de probabilidad conjunta de X y Y .

$f_{XY}(x, y)$		y		
		0	1	2
x	0	0.1	0.20	0.20
	1	0.04	0.08	0.08
	2	0.06	0.12	0.12

TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 4

$f_{XY}(x, y)$		y		
		0	1	2
x	0	0.1	0.20	0.20
	1	0.04	0.08	0.08
	2	0.06	0.12	0.12

- a. Calcular la probabilidad de que en un día dado el número de artículos producidos en la línea uno sea mayor que el número de artículos producidos en la línea dos .
- b. Obtener la función de probabilidad marginal de X y de Y .
- c. Calcular $P(X < 2|Y = 1)$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

TAREA 13

Cierto supermercado tiene una caja de salida común y una caja rápida. Sea X la v.a. que representa el número de clientes que están esperando en la caja común, en un momento particular del día, sea Y el número de clientes en la caja rápida, en el mismo instante. Supóngase que la función de probabilidad conjunta de X y Y está dada en la siguiente tabla.

$f_{XY}(x, y)$		y			
		0	1	2	3
x	0	0.08	0.07	0.04	0.0
	1	0.06	0.15	0.05	0.04
	2	0.05	0.04	0.10	0.06
	3	0.0	0.03	0.04	0.07
	4	0.0	0.01	0.05	0.06



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

TAREA 13

- a) Determinar la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada línea de espera.
- b) Determinar la probabilidad de que los números de clientes de las dos líneas de espera sean iguales.
- c) Sea A el evento en el cual hay por lo menos dos clientes más en una línea de espera que en la otra. Expresar A en términos de X y Y , y calcular la probabilidad de este evento.
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea por lo menos cuatro?



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

Función de probabilidad condicional

X dado que $Y = y_0$

$$f_{X|y_0}(x|y_0) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}; & f_Y(y_0) > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y dado que $X = x_0$

$$f_{Y|x_0}(y|X = x_0) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x_0, y)}{f_X(x_0)}; & f_X(x_0) > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Discretas

EJERCICIO 5

Para la siguiente función de probabilidad conjunta, obtener la función de probabilidad condicional de X dado $Y \geq 1$

$f_{XY}(x, y)$		y		
		0	1	2
x	0	0.1	0.20	0.20
	1	0.04	0.08	0.08
	2	0.06	0.12	0.12



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Sean X y Y variables aleatorias continuas. Una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ de estas dos variables para cualquier conjunto A en dos dimensiones

$$P[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{XY}(x, y) dx dy$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Características de la función masa de probabilidad conjunta:
(función de densidad de probabilidad)

1. $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$

3. $P((x_1, x_2, \dots, x_n) \in R) =$
 $\iint \dots \int_R f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 6

Sean X, Y dos variables aleatorias conjuntas con función de densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x + y); & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular el valor de k para que sea una función de densidad
- b) Obtener $P(0.5 \leq X \leq 1, 0.5 \leq Y \leq 1)$
- c) $P(X + Y \leq 1)$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 7

Supóngase que el tiempo de mantenimiento semanal de una máquina depende de dos variables aleatorias continuas (en horas), donde X es la variable aleatoria que representa la duración del mantenimiento mecánico y, Y es la variable aleatoria que representa la duración de mantenimiento eléctrico.

Supóngase que la función de densidad de probabilidad conjunta

$$\text{es: } f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y); & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular la probabilidad que en alguna semana, el mantenimiento mecánico dure menos de 15 minutos y el mantenimiento eléctrico dure más de 30 minutos.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 8

Cuando se usa cierto método para recolectar un volumen fijo de muestras de roca resulta que hay 4 tipos de roca. Sean X, Y y Z la proporción por volumen de los tipos de roca 1, 2 y 3 en una muestra seleccionada aleatoriamente. Sea la función de densidad.

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{144}xy(1-z) & 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y + z \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de que las rocas tipo 1 y 2 representen menos del 50% de la muestra.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Función masa de probabilidad marginal

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas continuas, entonces se define la función de densidad marginal de X como:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Y la función de densidad marginal de Y como:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 9

De la función de densidad de probabilidad conjunta siguiente:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y); & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar la función de densidad marginal de X y de Y



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 10

Dos variables aleatorias tienen la siguiente función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y); & 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Obtener $P(X < 0.8)$
- b) Obtener $P(Y > 1.5 | X < 1)$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO DE CLASE

Sean X_1 y X_2 las proporciones de dos sustancias distintas que se encuentran en una muestra de una mezcla de reactivos que se usa como insecticida. Supóngase que X_1 y X_2 tienen una densidad de probabilidad conjunta representada por :

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2, & x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Son estadísticamente independientes?



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

Función masa de probabilidad condicional

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas continuas, entonces se define la función de densidad marginal de X como:

$$f_{X|y_0}(x|Y = y_0) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}; & f_Y(y_0) > 0 \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para ambas v.v.a.a. (discretas y continuas) se obtiene la misma expresión



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO I I

Sean X_1 y X_2 las proporciones de dos sustancias distintas que se encuentran en una muestra de una mezcla de reactivos que se usa como insecticida. Supóngase que X_1 y X_2 tienen una densidad de probabilidad conjunta representada por:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f(x) = \begin{cases} 2, & x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular $P\left(X_1 \leq \frac{3}{4}, X_2 \leq \frac{3}{4}\right)$
- b) Calcular $P\left(X_1 \leq \frac{1}{2} \mid X_2 \leq \frac{1}{2}\right)$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

TAREA 14

Si tres variables aleatorias tiene la densidad conjunta:

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} k(x + y)e^{-z}; & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \quad z > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Obtener el valor apropiado de K.
- b) Obtener la probabilidad de $x < y$ y $z > 1$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Dos variables aleatorias conjuntas son independientes si y sólo si:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Para todo valor de x y de y



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 12

Sea X el precio que el transportista inicial paga por un barril de petróleo crudo, y Y , el que paga la refinería que compra ese petróleo. La densidad conjunta de está dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{200} \quad 20 < x < y < 40$$

Determinar si las v.v.a.a. conjuntas son independientes o no.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 13

Dada la siguiente función de probabilidad conjunta, determinar si las variables son o no independientes.

$f_{XY}(x, y)$	$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0.1	0.20	0.20
1	1	0.04	0.08	0.08
2	2	0.06	0.12	0.12



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

VALOR ESPERADO

Si X y Y son variables aleatorias conjuntas con función de probabilidad o de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y si $g(x, y)$ es una función de dichas variables aleatorias. Entonces el valor esperado de $g(x, y)$ se define como:

$$E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum_{\forall R_x} \sum_{\forall R_y} g(x, y) f_{XY}(x, y) & \text{discretas} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy & \text{continuas} \end{cases}$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

1. $E[c] = c$
2. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
3. Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces:

$$E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(x)]E[g_2(y)]$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 14

La función de densidad de probabilidad conjunta de la cantidad de X almendras y Y nueces de macadamia en una lata de una libra de nueces está dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 24xy; & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si una libra de almendras le cuesta a la compañía \$1.00 y una libra de nueces le cuesta \$1.50, y suelen completar la lata con cacahuates que tienen un costo de \$0.50 por libra, determinar el costo esperado total del contenido de la lata.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

TAREA 15

En un estudio de contaminación atmosférica por partículas en muestras de gases de una chimenea, X representa la cantidad (en peso) de partículas contaminantes por muestra cuando no trabaja un equipo depurador, y Y representa la cantidad cuando sí trabaja. Si X y Y tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 2y \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y la v.a. $Z=X-Y$ representa la cantidad de contaminante que se puede reducir cuando trabaja el equipo de limpieza, calcular el valor esperado de Y .



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 15

Suponer que X y Y son v.v.a.a. independientes que tienen la distribución de probabilidad conjunta:

$f_{XY}(x, y)$		y			
x		0.02	0.06	0.02	0.10
		0.04	0.15	0.20	0.10
		0.01	0.15	0.14	0.01

Encontrar:

- a) El primer momento con respecto al origen de $2X-3Y$
- b) El valor esperado de XY



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

VALOR ESPERADO CONDICIONAL

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas, se define el valor esperado condicional como:

$$\mu_{Y|x_0} = E[Y|X = x_0] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x_0}(y|x_0) dy & \text{continua} \\ \sum_{\forall R_Y} y f_{Y|x_0}(y|x_0) & \text{discreta} \end{cases}$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 16

Sean las variables aleatorias conjuntas X y Y , con una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla

$f_{XY}(x, y)$	y		
x		-1	1
	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Determinar $E[X|Y > 0]$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 17

Suponga que el porcentaje X de alumnos y Y de alumnas que han concluido un examen de probabilidad y estadística se puede describir mediante la función densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 8xy; & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuál es el porcentaje esperado de alumnos que hayan concluido el examen cuando el 50% de las alumnas ya lo concluyó?



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO DE CLASE

La cantidad de queroseno, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una cantidad aleatoria Y , de la cual una cantidad aleatoria X se vende durante el día. Supóngase que el tanque no se rellena durante el día, de tal forma que $x \leq y$, y que la función de densidad conjunta es:

$$f_{XY}(x, y) = 2 \quad 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Obtener la cantidad promedio de queroseno que queda en el tanque al final del día.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas

► COVARIANCIA

Medida de dispersión que indica en promedio, qué tanto se alejan conjuntamente los valores de sus medias respectivas

Si X y Y son dos v.v.a.a. conjuntas, su covariancia está dada por:

$$Cov(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas

► COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE PEARSON

Medida de dispersión estandarizada que indica en promedio, qué tanto se alejan conjuntamente los valores de sus medias respectivas

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas

► COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN

Medida de dispersión estandarizada que indica grado de explicación de una variable con respecto de otra

$$\rho^2 = \frac{Cov(X, Y)^2}{Var(X)Var(Y)} = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 18

La función de probabilidad conjunta de la cantidad de deducible sobre una póliza de automóvil (X) y la cantidad deducible sobre póliza de propietario de casa (Y) está dada por:

$f_{XY}(x, y)$		$x \quad y$		
		0	100	200
x	100	0.2	0.1	0.2
	250	0.05	0.15	0.3

- a) Obtener la covariancia de la función conjunta.
- b) Obtener el coeficiente de correlación de Pearson
- c) Obtener el grado de explicación entre variables.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

EJERCICIO 19

La función de probabilidad conjunta de la cantidad de almendras (X) y la cantidad de nueces (Y) está dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 24xy; & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Obtener la covariancia de la función conjunta.
- b) Obtener el coeficiente de correlación de Pearson.
- c) Obtener el grado de explicación entre variables.



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

VARIANCIA DE DOS O MÁS VARIABLES

$$\text{Var}[aX + bY] = a^2\text{Var}[X] + 2ab\text{Cov}[X, Y] + b^2\text{Var}[Y]$$

Si dos variables aleatorias X e Y son independientes, entonces la varianza de su suma es igual a la suma de sus varianzas.

$$\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y]$$



TEMA III

Variables aleatorias Conjuntas Continuas

TAREA 16

a) Comprobar que

$$\text{Var}[aX + bY] = a^2\text{Var}[X] + 2ab\text{Cov}[X, Y] + b^2\text{Var}[Y]$$

b) Comprobar que si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$\text{var}[X + Y] = \text{var}[X] + \text{var}[Y]$$

