

TEMA III

VARIABLES ALEATORIAS

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este tema es conocer y utilizar el concepto de variable aleatoria para resolver problemas probabilísticos.

¿Qué es la variable aleatoria? En el tema anterior, se describieron los resultados de un experimento (eventos) en palabras; claramente esto dificultaba el análisis de algunos problemas. Es mucho más fácil describir y manipular cuando se utilizan números.

El propósito de la variable aleatoria es "mapear" cada punto de un espacio muestral en un punto de un eje real, ~~y puesto que la regla de correspondencia para realizar el mapeo de un conjunto a otro recibe el nombre de función, la variable aleatoria es entonces una función.~~

LA VARIABLE ALEATORIA

Los fenómenos que más interesan a los ingenieros son aquellos que pueden ser identificados por números, los cuales reciben el nombre de eventos numéricos. Por ejemplo, un médico está interesado en el evento de que diez de diez pacientes se curen de cierta enfermedad.

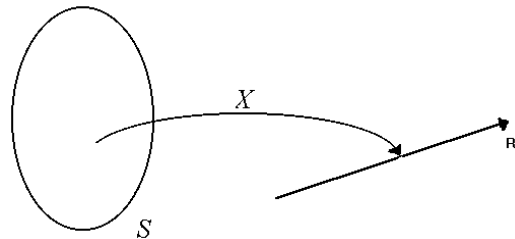


Fig. 3.1 Variable aleatoria.

Definición 3.1

Una variable aleatoria (v.a.) es una función, cuyos valores son números reales, definida en un espacio muestral. De una manera simple puede denotarse por $X : S \rightarrow \mathbb{R}$

En otras palabras una variable aleatoria es una función que asigna números reales a cada posible resultado de un experimento aleatorio; esto es, es una función cuyo dominio de definición es el espacio muestral de un experimento y cuyo rango es el eje real.

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

Usualmente, se denotan a las variables aleatorias (vv.aa.) utilizando las últimas letras mayúsculas del alfabeto.

Los valores de la imagen de dicha función, se conocen como valores de la variable aleatoria (v.a.) y se denotan con la misma letra que la función, pero con minúsculas.

S))Q

Ejemplo 3.1

Considerando ~~las~~ familias que tiene dos hijos, si se desea conocer el sexo de los hijos entonces el espacio muestral es:

$$S = \{ (F, F), (F, M), (M, F), (M, M) \}$$

Asignar valores ~~de~~ la variable aleatoria.

Resolución

Podrían realizarse varias asignaciones:

Utilizando **F** para el sexo femenino y **M** para el masculino.

$$X : 1, 2, 3, 4.$$

$$Y : 0, 1, 2, 3.$$

$$Z : 1, 2, 2, 3.$$

$$W : 0, 1, 1, 2.$$

etc.

S))Q

La definición (en su construcción y significado) de una variable aleatoria (v.a.) es arbitraria. Una forma adecuada de construir (definir) una v.a. es hacerlo de tal manera que dicha variable responda a la pregunta de interés.

En el ejemplo anterior, si nos interesa conocer el número de hijos varones en una familia, la definición más adecuada de la v.a. es la de **W** que asocia reales de la siguiente manera:

$$(F, F) \rightarrow 0 ; (F, M), (M, F) \rightarrow 1 ; (M, M) \rightarrow 2$$

S))Q

Ejemplo 3.2

En el lanzamiento de dos dados se desea calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea par.

- Definir el espacio muestral del experimento.
- Definir una variable aleatoria adecuada para el problema.
- Calcular la probabilidad.

Resolución

$$a) \quad S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

b) La definición es la siguiente:
Sea X la variable aleatoria que representa la suma de los resultados en el lanzamiento de los dados.

Los posibles valores x de X son entonces:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

c) Sea A el evento en el cual la suma de los resultados es par, es evidente que:

$$A = \{X=2, X=4, X=6, X=8, X=10, X=12\}$$

Por lo que

$$P(A) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + P(X=8) + P(X=10) + P(X=12)$$

$$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

S))Q

Ejemplo 3.3

En una ciudad se observa el tiempo que transcurre de un sismo a otro, el cual se representa mediante la v.a. T . Obtener el rango de T .

Resolución

Considerando que de un sismo a otro debe de transcurrir algún tiempo, y que no se sabe cuánto tardará en ocurrir el nuevo sismo, se tiene:

$$R_T = \{t \mid t > 0 ; t \in \mathbb{R}\}$$

S))Q

Las variables aleatorias pueden clasificarse en discretas, continuas o mixtas. Se estudiarán las características de las discretas y de las continuas, dejando las mixtas como

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

una combinación de los casos anteriores.

$$\text{Variables aleatorias} \begin{cases} \text{Discretas} \\ \text{Continuas} \end{cases}$$

Una variable aleatoria discreta toma valores de un conjunto numerable, mientras que una variable aleatoria continua toma valores de un conjunto continuo.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS**Definición 3.2**

Una variable aleatoria se dice discreta si solamente puede tomar valores de un conjunto numerable de valores.

Una vez definida una variable aleatoria discreta, se debe definir la forma en la que se asignarán las probabilidades a cada valor que puede tomar la variable aleatoria.

Definición 3.3

Sea X una v.a. discreta, se define su función de probabilidad¹ $f_X(x)$ ²

como:

$$f_X(x) = P(X=x)$$

donde $f: R_X \rightarrow [0, 1]$

Para cualquier función de probabilidad de una v.a. discreta debe cumplirse lo siguiente:

¹ También llamada: función masa de probabilidad o distribución de probabilidad.

² Es muy común la notación $p_X(x)$, donde se resalta el hecho de que la función proporciona probabilidad. En estas notas se utiliza la notación $f_X(x)$ para hacer énfasis en que es una función.

Definición 3.4 Propiedades de la función de Probabilidad

- 1) $0 \leq f_X(x) \leq 1, \quad \forall x$
- 2) $\sum_{\forall x} f_X(x) = 1$
- 3) $P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b f_X(x)$

Debe observarse la analogía de estas propiedades con los axiomas de la probabilidad. Para determinar si una función es una función de probabilidad, se deben cumplir las propiedades anteriores, en particular se deben probar (1) y (2).

S))Q

Ejemplo 3.4

Considérese el lanzamiento de una moneda. Se desea observar el número de lanzamientos hasta que "caiga" por primera vez un sol. Obtener una expresión para la función de probabilidad y verificar que cumple con las primeras dos propiedades.

Resolución

Sea X la v.a. que representa el número de lanzamientos necesarios para observar por primera vez un sol.

El rango de la v.a. es $R_X = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$$f_X(1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$$

$$f_X(2) = P(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f_X(3) = P(X=3) = \frac{1}{8}$$

·
·
·

En general

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

Verificando la propiedad (1)

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1, \quad \forall x$$

Verificando (2)

Debe cumplirse que $\sum_{\forall x} f_X(x) = 1$

es decir $\sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$

De la serie geométrica se sabe que: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge a $\frac{1}{1-r}$ cuando

$|r| < 1$ y diverge cuando $|r| \geq 1$.

Relacionando la función de probabilidad con la serie geométrica se tiene que

$$r = \frac{1}{2}.$$

Sólo falta restar el primer término cuando $k = 0$, de donde

$$\sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] - 1 = \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right] - 1 = 1$$

Por lo que sí se satisface (2).

S))Q

Debe observarse con mucho cuidado el hecho de que una vez definida la v.a., debe poderse obtener el rango de dicha variable, es decir el conjunto de valores que la variable aleatoria puede tomar; sin embargo, el dominio de la función de probabilidad puede extenderse a todos los reales, para facilitar la notación en análisis posteriores.

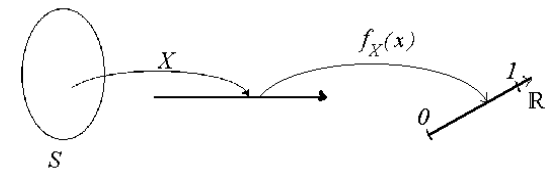


Fig. 3.2 Variable Aleatoria y Función de Probabilidad.

S))Q

Ejemplo 3.5

Considérese la v.a. X cuyos posibles valores son 0, 1, 2, 3 y 4; y que tiene la siguiente función de probabilidad.

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1+k}{6}$	$\frac{1+2k}{6}$	$\frac{1+3k}{6}$	$\frac{1+4k}{6}$

- a) Determinar el valor de la constante k para que $f_X(x)$ sea una función de probabilidad.
- b) Calcular $P(X < 3)$.

Resolución

- a) Para que $f_X(x)$ sea una función de probabilidad, deben cumplirse las propiedades 1 y 2.

Si $k > 0$ entonces se cumple que $f_X(x) > 0$

Y por otro lado:

$$\sum_{x=0}^4 f_X(x) = \frac{1}{6} + \frac{1+k}{6} + \frac{1+2k}{6} + \frac{1+3k}{6} + \frac{1+4k}{6} = 1$$

$$\text{De donde } k = \frac{1}{10}$$

- b) $P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1+\frac{1}{10}}{6} + \frac{1+\frac{2}{10}}{6} = \frac{11}{20}$$

S))Q

Los problemas que generalmente resultan más interesantes son aquellos en los que se debe obtener la función de probabilidad para una variable aleatoria discreta a partir de un problema en particular.

))Q
A.L.B.S. / I.K.M.R.

S))Q

Ejemplo 3.6

Al examinar pozos de agua en una región con respecto a dos tipos de impurezas encontradas frecuentemente en el agua potable, se encontró que el 20% de los pozos no revelaban impureza alguna, el 40% tenían la impureza del tipo A y el 50% la impureza del tipo B (naturalmente, algunas tenían ambas impurezas). Si se selecciona un pozo de la región al azar, obtener la distribución de probabilidad para Y , esto es, el número de impurezas encontradas en el pozo.

Resolución

Sea A el evento en el cual se tiene la impureza A, y B el evento en el cual se tiene la impureza B, entonces, la siguiente tabla muestra las probabilidades de las intersecciones de los eventos:

	A	\bar{A}	Total
B	0.1	0.4	0.5
\bar{B}	0.3	0.2	0.5
Total	0.4	0.6	1

De donde

$$P(Y=0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.2$$

$$P(Y=1) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

$$P(Y=2) = P(A \cap B) = 0.1$$

Por lo que la función de probabilidad es:

y	0	1	2
$f_Y(y)$	0.2	0.7	0.1

S))Q

Una función de probabilidad generalmente se representa de manera gráfica utilizando líneas verticales que representan la probabilidad, como se muestra en la siguiente figura.

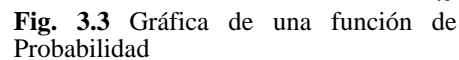


Fig. 3.4 Gráfica de una función de Probabilidad

Ejemplo 3.7

)))))))))))))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

Finalmente la distribución es:

y	0	1	2
$f_Y(y)$	0.019	0.252	0.729

Un ejemplo más elaborado de la obtención de una función de probabilidad es el mostrado en el siguiente ejemplo.

S))))))))))))))))))))))))))))))))))Q

Ejemplo 3.8

De la gente que llega a un banco de sangre como donador, uno de cada tres tiene sangre tipo O^+ , y uno de 15 sangre tipo O^- . Para las siguientes tres personas que llegan al banco, sea X el número que tiene sangre O^+ y Y las que tienen O^- .

Si se supone que las proporciones de los tipos de sangre se mantienen constantes (independencia), determinar las distribuciones de probabilidad para X y Y .

Resolución

Se tiene que:

 $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$, Probabilidad de que una persona tenga O^+ , $\frac{1}{3}$.

 $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$, Probabilidad de que una persona tenga O^- , $\frac{1}{15}$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

En general:

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

$$P(Y = y) = \binom{3}{y} \left(\frac{1}{15}\right)^y \left(\frac{14}{15}\right)^{3-y}, \quad y = 0, 1, 2, 3.$$

En forma tabular, se tiene:

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

y	0	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{2744}{3375}$	$\frac{588}{3375}$	$\frac{42}{3375}$	$\frac{1}{3375}$

S))Q

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.**VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS****Definición 3.5**

Una v.a. X se dice continua si puede tomar valores de un conjunto infinito no numerable de valores.

Las variables aleatorias continuas también tienen una función que proporciona información sobre la probabilidad, dicha función se define a continuación.

Definición 3.6 Propiedades de la Función de Densidad

Sea X una variable aleatoria continua, se define su función de densidad $f_X(x)$, como una función con las siguientes propiedades:

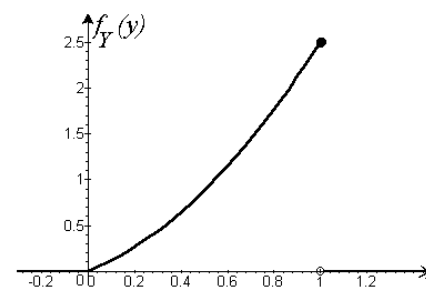
- 1) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
- 3) $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$

Recordando las propiedades de la integral definida, se tienen los siguientes resultados:

- a) $P(X = x) = 0$
- b) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

En términos simples, las propiedades de la función de densidad ~~dicen~~ que la función debe ser no negativa (1); y que la probabilidad del espacio muestral debe ser igual a la unidad (2). De los resultados debe destacarse el hecho de que la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome exactamente un valor es cero (a), lo cual debe interpretarse como: la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome exactamente un valor es *prácticamente* cero.

Una función de densidad, se representa gráficamente de igual forma que una función continua en el cálculo, como puede observarse en la figura 5.


$$\begin{aligned} \text{c) } P(0 \leq Y \leq 0.5) &= \int_0^{0.5} \left(\frac{3}{2}y^2 + y \right) dy = \frac{3}{16} \\ \text{d) } P\left(Y \geq \frac{1}{2} \mid Y \geq \frac{1}{4}\right) &= \frac{P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y \geq \frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{3}{2}y^2 + y \right) dy}{\int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{3}{2}y^2 + y \right) dy} = \frac{104}{123} \\ &= 0.8455 \end{aligned}$$
$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo 3.9

$$f_Y(y) = \begin{cases} cy^2 + y & ; \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Determinar el valor de \mathbf{c} .
- Trazar la gráfica de $\mathbf{f_Y(y)}$.
- Calcular la probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.
- Dado que cierto estudiante necesita al menos 15 minutos para presentar el examen, obtener la probabilidad de que necesite al menos 30 minutos para terminarlo.

a) $\int_0^1 (cy^2 + y) dy = 1$, de donde

$$\frac{c}{3} + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{2}$$

)))))))))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

Ejemplo 3.10

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad 59 \leq x \leq 61 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Calcular la probabilidad de que sea una temperatura mayor de 60°F la necesaria para que accione el interruptor.
- Si se utilizan en forma independiente dos de tales interruptores, calcular la probabilidad de que ambos necesiten que la temperatura sea mayor de 60°F para que se accionen.

)))))))))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

c) $F_Y(-1) = 0$
 $F_Y(0) = 0$

$$F_Y(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

S))Q

Ejemplo 3.13

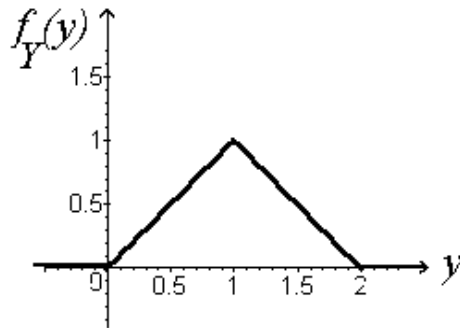
Una gasolinera tiene dos bombas que pueden bombear cada una hasta 10,000 litros de gasolina por mes. La cantidad total de gasolina bombeada en un mes es una variable aleatoria Y (expresada en diez mil litros), con una función de densidad de probabilidad dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} y & ; \quad 0 < y < 1 \\ 2 - y & ; \quad 1 \leq y < 2 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Trazar la gráfica de $f_Y(y)$.
- Obtener $F_Y(y)$ y construir su gráfica.
- Calcular la probabilidad de que la gasolinera bombee entre 8,000 y 12,000 litros en un mes.
- Si se sabe que la gasolinera ha bombeado más de 10,000 litros en un mes en particular, obtener la probabilidad de que haya bombeado más de 15,000 litros durante el mes.

Resolución

a)



- Para $0 < y < 1$, $F_Y(y) = \int_0^y t \, dt = \frac{y^2}{2}$

Para $1 \leq y < 2$

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

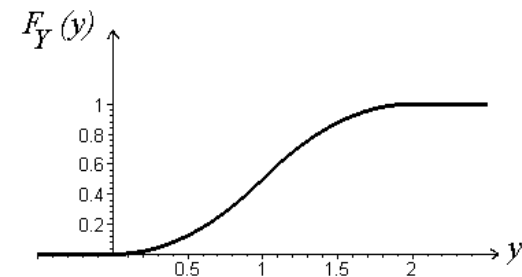
En este intervalo debe considerarse lo que se acumula de $y = 1$ en adelante, así como todo lo acumulado en el intervalo anterior.

$$F_Y(y) = \int_0^1 t \, dt + \int_1^y (2 - t) \, dt = 2y - \frac{y^2}{2} - 1$$

Finalmente

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; \quad y \leq 0 \\ \frac{y^2}{2} & ; \quad 0 < y < 1 \\ 2y - \frac{y^2}{2} - 1 & ; \quad 1 \leq y < 2 \\ 1 & ; \quad y \geq 2 \end{cases}$$

Obsérvese que la función de distribución es no decreciente, por lo que inicia teniendo el valor cero y termina teniendo el valor de uno.



- $P(0.8 \leq Y \leq 1.2) = F_Y(1.2) - F_Y(0.8)$
 $= (2.4 - 0.72 - 1) - 0.32 = 0.36$
- $P(Y > 1.5 \mid Y > 1) = \frac{P(Y > 1.5)}{P(Y > 1)}$
 $= \frac{1 - (3 - 1.125 - 1)}{0.5} = 0.25$

S))Q

⁴ o valor esperado.

Tópico Especial: FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS

Debido a que los momentos permitirán calcular algunas de las características numéricas de las variables aleatorias, es conveniente estudiar una forma alterna para obtener los momentos. La función generadora de momentos permite calcular con facilidad algunos momentos, que utilizando la definición resultan mucho más complicados.

Definición 3.9

Sea X una variable aleatoria se define su función generadora de momentos como

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X})$$

y si el valor esperado existe, genera todos los momentos con respecto al origen.

Al calcular el valor esperado $E(e^{\theta X})$, θ se considera como constante, de manera que $M_X(\theta)$ es finalmente sólo función de θ y no contiene X . La variable θ de la función generadora es una variable muda, puesto que para calcular el momento debe valuarse la variable. Es muy común que se denote a la función generadora como $m_X(t)$; sin embargo, aquí se preferirá la mayúscula M , debido a que la minúscula se utiliza en el curso de estadística para definir los momentos muestrales, y se prefiere θ sobre t debido a que t se utiliza como variable aleatoria en una función de densidad muy importante que se estudiará en detalle en el tema 6.

La razón por la cual la función $M_X(\theta)$ genera los momentos con respecto al origen y la forma en que lo hace puede observarse a continuación

La serie de Maclaurin es:

$$f(x) = \frac{f(0) x^0}{0!} + \frac{f'(0) x}{1!} + \frac{f''(0) x^2}{2!} + \dots$$

Expresando $e^{\theta X}$ en serie de Maclaurin se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Si } f(X) &= e^{\theta X} && \Rightarrow && f(0) = 1 \\ f'(X) &= \theta e^{\theta X} && \Rightarrow && f'(0) = \theta \\ f''(X) &= \theta^2 e^{\theta X} && \Rightarrow && f''(0) = \theta^2 \\ f'''(X) &= \theta^3 e^{\theta X} && \Rightarrow && f'''(0) = \theta^3 \end{aligned}$$

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

sustituyendo

$$e^{\theta X} = 1 + \theta X + \frac{\theta^2 X^2}{2!} + \frac{\theta^3 X^3}{3!} + \dots$$

por lo que sustituyendo en la definición de la función generadora de momentos

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X}) = E\left(1 + \theta X + \frac{\theta^2 X^2}{2!} + \frac{\theta^3 X^3}{3!} + \dots\right)$$

de donde

$$M_X(\theta) = E(1) + E(\theta X) + E\left(\frac{\theta^2 X^2}{2!}\right) + E\left(\frac{\theta^3 X^3}{3!}\right) + \dots$$

$$M_X(\theta) = 1 + \theta E(X) + \frac{\theta^2}{2} E(X^2) + \frac{\theta^3}{3!} E(X^3) + \dots$$

Para obtener el n -ésimo momento con respecto al origen se deriva n veces con respecto de θ y se valúa en $\theta = 0$.

$$\left. \frac{d^n M_X(\theta)}{d\theta^n} \right|_{\theta=0} = E(X^n) = \mu'_n$$

y para ello, la función $M_X(\theta)$ debe ser n veces derivable en cero.

S))Q

Ejemplo 3.16

Considérese la variable aleatoria X con función de probabilidad

x	-4	-2	0	1	10	20
$f_X(x)$	0.01	0.3	0.25	0.04	0.24	0.16

Construir la función generadora de momentos y utilizarla para calcular la media de la variable aleatoria.

Resolución

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X})$$

$$E(e^{\theta X}) = \sum_{\forall x} e^{\theta x} f_X(x) = e^{-4\theta}(0.01) + e^{-2\theta}(0.3) + e^{0\theta}(0.25) + e^{\theta}(0.04) + e^{10\theta}(0.24) + e^{20\theta}(0.16)$$

Por lo que

$$M'_X(\theta) = -4e^{-4\theta}(0.01) - 2e^{-2\theta}(0.3) + e^{\theta}(0.04) + 10e^{10\theta}(0.24) + 20e^{20\theta}(0.16)$$

$$\text{Valuando en cero: } M'_X(\theta) \Big|_{\theta=0} = 5$$

$$\text{Por lo que } E(X) = \mu_X = 5$$

S))Q

Para una variable aleatoria discreta, cuya función de probabilidad está definida por una tabla, resulta más laborioso utilizar la función generadora para obtener su media o valor esperado, que haber utilizado simplemente la definición. En general, la función generadora facilita el análisis cuando la obtención por medio de la definición es laboriosa, y lo dificulta cuando la obtención del valor esperado es muy fácil por medio de la definición.

S))Q

Ejemplo 3.17

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria está determinada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} e^{-\frac{x}{4}} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Determinar la función generadora de momentos de X .
- Utilizar la función generadora de momentos para obtener la media de X .

Resolución

- La función generadora de momentos está definida por

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X})$$

por lo que:

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

$$M_X(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{x}{16} e^{\left(\theta x - \frac{x}{4}\right)} dx$$

$$M_X(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{x}{16} e^{-\left(\frac{1}{4} - \theta\right)x} dx$$

integrando por partes se obtiene

$$M_X(\theta) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x e^{\left(\theta - \frac{1}{4}\right)x}}{16\left(\theta - \frac{1}{4}\right)} \right]_0^b - \int_0^{\infty} \frac{e^{\left(\theta - \frac{1}{4}\right)x}}{16\left(\theta - \frac{1}{4}\right)} dx$$

$$M_X(\theta) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x e^{\left(\theta - \frac{1}{4}\right)x}}{16\left(\theta - \frac{1}{4}\right)} - \frac{e^{\left(\theta - \frac{1}{4}\right)x}}{16\left(\theta - \frac{1}{4}\right)^2} \right]_0^b$$

Y recordando que la función generadora debe ser continua y n veces derivable en el origen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\theta - \frac{1}{4}\right)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\left(\frac{1}{4} - \theta\right)x} = 0$$

de donde

$$M_X(\theta) = \frac{1}{(4\theta - 1)^2}$$

- Para obtener la media, o valor esperado, se sabe que:

$$\mu_X = \frac{d}{d\theta} M_X(\theta) \Big|_{\theta=0}$$

por lo que

$$\frac{d}{d\theta} M_X(\theta) = \frac{-8}{(4\theta - 1)^3}, \quad \frac{d}{d\theta} M_X(\theta) \Big|_{\theta=0} = 8$$

$$\mu_X = 8$$

S))Q

CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS DE LA VARIABLE ALEATORIA

Si bien, el comportamiento probabilístico de las variables aleatorias queda completamente especificado mediante las funciones de probabilidad o de densidad, según sea el caso, en ocasiones es conveniente trabajar con algunas características numéricas que describen el comportamiento de la variable aleatoria.

Las características numéricas se clasifican en tres:

- Medidas de tendencia central.
- Medidas de dispersión.
- Parámetros de forma.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son la media, la moda y la mediana.

Media

La media o valor esperado, que también recibe el nombre de esperanza matemática, se estudió antes. En muchas aplicaciones se considera como el valor más representativo de una variable aleatoria. Se denota por μ .

Moda

Es aquel valor para el cual la función de probabilidad o función de densidad, según sea el caso, toma su valor máximo. Se denota por x_{mo} .

S))Q

Ejemplo 3.18

Considérese la variable aleatoria X con función de probabilidad

x	-4	-2	0	1	5	10
$f_X(x)$	0.01	0.3	0.25	0.04	0.24	0.16

Obtener la moda de la variable aleatoria.

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

Resolución

Al observar las probabilidades de la tabla se observa que:

$$x_{mo} = -2$$

S))Q

Mediana

Es aquel valor para el cual la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales a dicho valor es 0.5. Se denota por \tilde{x} .

Matemáticamente, la mediana es el valor \tilde{x} tal que $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$.

S))Q

Ejemplo 3.19

Sea la función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener la media, la mediana y la moda.

Resolución

La media está dada por $\mu_X = \int_0^{\infty} x (2e^{-2x}) dx$

Integrando por partes se tiene que: $\mu_X = \frac{1}{2}$

La mediana está dada por $P(X \leq \tilde{x}) = 0.5$

de donde $\int_0^{\tilde{x}} 2e^{-2x} dx = 0.5$

$$[-e^{-2x}]_0^{\tilde{x}} = 0.5$$

$$1 - e^{-2\tilde{x}} = 0.5$$

$$\tilde{x} = -\frac{\ln 0.5}{2} \approx 0.34657$$

La moda es el valor en el cual se encuentra el máximo, por lo que derivando e igualando a cero para obtener el máximo:

$$f'_x(x) = -4e^{-2x} = 0$$

No existe solución.

Por otro lado, no se puede considerar ningún extremo del intervalo, puesto que en ambos casos es abierto $(0, \infty)$.

Se concluye que la función no tiene moda.

S))Q

Como se pudo observar en el ejemplo anterior, no es necesario que existan todas las medidas de tendencia central, de hecho la media y la moda pueden no existir. La media no existe cuando la integral para las vv.aa. continuas no converge; la moda no existe en casos como el anterior, o bien, cuando para cualquier valor de la variable la función toma el mismo valor⁵.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión indican la lejanía de los valores que puede tomar la variable aleatoria. Las principales medidas de dispersión son el rango, la desviación media, la variancia, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

Rango

Es la ~~medida~~ de dispersión más simple. El rango se define como la diferencia entre el mayor valor que puede asumir la variable y el menor valor que puede asumir.

$$\text{Rango} = \text{Mayor valor} - \text{menor valor}$$

Desviación media

La desviación media de una variable aleatoria es el valor esperado de la diferencia en valor absoluto entre los valores de X y su media. Se denota DM_X

Matemáticamente:

$$DM_X = E(|X - \mu_X|) = \begin{cases} \sum_{\forall x} |x - \mu_X| f_X(x) & ; \quad X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu_X| f_X(x) dx & ; \quad X \text{ continua} \end{cases}$$

En otras palabras, puede decirse que la desviación media es el promedio de los valores absolutos de las dispersiones alrededor de la media.

Debido a la dificultad matemática que implica trabajar con el valor absoluto, recuérdese que el valor absoluto está definido mediante dos reglas de correspondencia, se utiliza una función cuadrática para eliminar el problema que se genera por las diferencias positivas y negativas, dando lugar a la variancia.

Variancia

La variancia⁶ se denota por $Var(X)$ o bien por σ_X^2 y se define como el promedio del cuadrado de la diferencia de la variable aleatoria y su media.

Matemáticamente:

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_{\forall x} (x - \mu_X)^2 f_X(x) & ; \quad X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx & ; \quad X \text{ continua} \end{cases}$$

De la definición de la variancia, y utilizando las propiedades del valor esperado, se puede escribir la variancia como:

$$Var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - \mu_X^2$$

Debe recordarse que en este momento se está considerando que $f_X(x)$ es una caracterización exacta de la distribución de frecuencias de una población, es decir, $f_X(x)$ proporciona toda la información de la población, por lo que se puede escribir:

$$E(X) = \mu_X$$

$$Var(X) = \sigma_X^2$$

en el curso de Estadística se estudiarán los casos en los cuales no se cuenta con toda la información de la población.

La variancia es el segundo momento con respecto a la media.

⁵ Algunos autores dicen que en este caso todos los valores son modas.

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

⁶ Algunos autores utilizan la traducción "varianza".

CARACTERÍSTICAS DE LA VARIANCIA

- 1) La variancia de una constante es cero.
 $\text{Var}(c) = 0$
- 2) La variancia de una constante por la variable aleatoria es el cuadrado de la constante por la variancia de la variable aleatoria
 $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$

Debido a que la variancia queda en unidades cuadradas, se obtiene la raíz cuadrada para regresar a las unidades originales, lo que da lugar a la desviación estándar.

Desviación estándar

La desviación estándar se define como la raíz cuadrada positiva de la variancia. Se denota por σ_X . Esto es:

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Coefficiente de Variación

El coeficiente de variación mide la dispersión relativa a la media de una distribución de probabilidad, y se utiliza para comparar la dispersión de dos distribuciones de probabilidad.

Se define como la desviación estándar entre la media. Se denota CV_X .

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

PARÁMETROS DE FORMA

Los parámetros de forma son el coeficiente de sesgo y el coeficiente de curtosis.

Coefficiente de sesgo

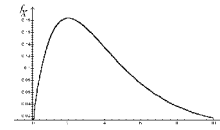
El coeficiente de sesgo mide el grado de simetría de una distribución de probabilidad. Se define como el tercer momento con respecto a la media estandarizado. Se denota por $\alpha_3(X)$.

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$$

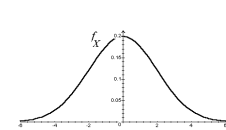
El valor del coeficiente de sesgo se compara contra cero, que indica una
))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

distribución simétrica con respecto a la media.

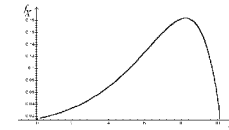
$$\alpha_3(X) \begin{cases} > 0 ; & \text{sesgo positivo} \\ = 0 ; & \text{distribución simétrica} \\ < 0 ; & \text{sesgo negativo} \end{cases}$$



Sesgo positivo



Simétrica



Sesgo negativo

El sesgo positivo también se llama sesgo hacia la derecha, y el sesgo negativo hacia la izquierda.

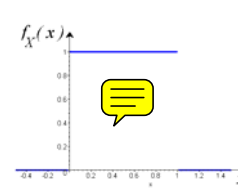
Tópico Especial: Coeficiente de curtosis

El coeficiente de curtosis mide el grado de aplanamiento, o bien, indica que tan puntiaguda es la distribución. Se define como el cuarto momento con respecto a la media estandarizado. Se denota por $\alpha_4(X)$.

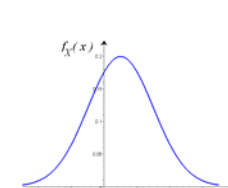
$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4}$$

El valor del coeficiente de curtosis se compara con el número tres.

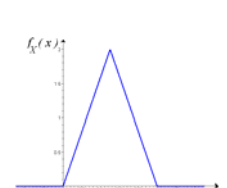
$$\alpha_4(X) \begin{cases} < 3 & \text{platicúrtica} \\ = 3 & \text{mesocúrtica} \\ > 3 & \text{leptocúrtica} \end{cases}$$



Platicúrtica



Mesocúrtica



Leptocúrtica

Un empresario debe decidir entre invertir en el proyecto **A** o el **B**. Según los estudios realizados por sus analistas cada proyecto puede generar distintos rendimientos dependiendo de situaciones relacionadas con la competencia y la política nacional. En resumen se tiene la siguiente información:

Probabilidad	R_A (%)	R_B (%)
0.1	-25	-40
0.2	5	0
0.4	15	16
0.2	30	40
0.1	45	66

- a) Determinar el rendimiento esperado de los activos A y B .
- b) Determinar la desviación estándar y coeficiente de variación de los rendimientos de los proyectos A y B .
- c) Jerarquizar los proyectos con base en el rendimiento esperado, el riesgo del proyecto y el riesgo por rendimiento prometido.

Resolución

- a) Sean R_A y R_B los rendimientos de los proyectos A y B .

$$E(R_A) = \sum_{\forall r_A} r_A f(r_A) = -25(0.1) + 5(0.2) + 15(0.4) + 30(0.2) + 45(0.1)$$

$$E(R_A) = 15$$

$$E(R_B) = \sum_{\forall r_B} r_B f(r_B) = -40(0.1) + 0(0.2) + 16(0.4) + 40(0.2) + 66(0.1)$$

$$E(R_B) = 17$$

- b) $\text{Var}(R_A) = E[(R_A - E(R_A))^2] = E(R_A^2) - [E(R_A)]^2$

$$\text{Var}(R_A) = -(25)^2(0.1) + (5)^2(0.2) + (15)^2(0.4) + (30)^2(0.2) + (45)^2(0.1) - (15)^2$$

$$\text{Var}(R_A) = 315 \Rightarrow \sigma_{R_A} = 17.748$$

$$\text{Var}(R_B) = 729 \Rightarrow \sigma_{R_B} = 27$$

))
A.L.B.S. / I.K.M.R.

$$CV_{R_A} = \frac{17.748}{15} = 1.183$$

$$CV_{R_B} = \frac{27}{15} = 1.588$$

- c) Con base en el rendimiento esperado, el mejor proyecto es el B .
- Con base en el riesgo del proyecto, el mejor proyecto es el A .
- Con base en el riesgo por rendimiento prometido, el mejor proyecto es el A .

S))Q

TÓPICOS ESPECIALES: TEOREMA DE CHEBYSHEV

El teorema de Chebyshev o la desigualdad de Chebyshev proporciona una cota para la probabilidad de que una variable aleatoria se aleje un cierto número de desviaciones estándar de la media. La cota no siempre genera un intervalo reducido; sin embargo, se requiere muy poca información de la variable aleatoria para generar el intervalo, de hecho, basta con conocer la media y la desviación estándar.

Teorema de Chebyshev

La probabilidad de que cualquier variable aleatoria X tome un valor dentro de k desviaciones estándar de la media es por lo menos $1 - \frac{1}{k^2}$; es decir,

$$P(\mu_X - k\sigma < X < \mu_X + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

De hecho, la desigualdad de Chebyshev se puede escribir también como:

$$P(|X - \mu_X| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

o bien, utilizando el complemento

$$P(|X - \mu_X| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

[illegible]

- A) La media, la moda y la mediana.
B) La moda, la media y la mediana.
C) La mediana, la media y la moda.
D) La moda, la mediana y la media.
E) Ninguna de las anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Hines, William W. y Montgomery, Douglas C. - Probabilidad y Estadística para ingeniería, cuarta edición.- CECSA.- México, 2005.

Milton, Susan J. Y Arnold, Jesse C.- Probabilidad y Estadística para con aplicaciones para ingeniería y ciencias computacionales, cuarta edición.- McGraw-Hill.- México, 2004..

Devore, Jay L.- Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias, sexta edición.- Editorial Thomson.- México, 2005.

Wackerly Dennis D.- Mendenhall, William, *et al.*- Estadística Matemática con Aplicaciones, sexta edición.- Editorial Thomson.- México, 2002.

Walpole, Ronald E., *et al.*- Probability and Statistics for Engineers and Scientists.- Pearson.- USA, 2007.

Montgomery, Douglas C. y Runger, George C.-Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería, segunda edición.- Limusa-Wiley.- México, 2002.

Scheaffer, Richard L. y McClave, James T.- Probabilidad y Estadística para Ingeniería.- Grupo Editorial Iberoamérica.- México, 1993.

Canavos, George C.- Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos.- McGraw-Hill.- México, 1988.

Meyer, Paul L.- Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.- Addison Wesley Iberoamericana.- México, 1992.

Borras García, Hugo E., *et al.*- Apuntes de Probabilidad y Estadística.-Facultad de Ingeniería.- México, 1985.

Rosenkrantz, Walter A.- Introduction to Probability and Statistics for Scientists and Engineers.- McGraw-Hill.- EE.UU., 1997.

Ross Sheldon M - Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias-McGraw-Hill.- México, 2002.

))))))))))
A.L.B.S. / I.K.M.R.