TEMA II
FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

De manera sencilla, puede decirse que *la probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia los fenómenos con incertidumbre*, pero ¿por qué estudiar Probabilidad en Ingeniería? Hasta este momento, en prácticamente todas las asignaturas cursadas en la Facultad de Ingeniería, se han estudiado modelos determinísticos, esto es, los problemas estudiados tienen siempre solución única. En Cinemática, el tiempo que tarda un objeto en llegar al suelo en caída libre, depende de la altura y de la aceleración de la gravedad; en Termodinámica, la presión manométrica en el fondo de un recipiente depende de la altura de la columna de agua y del peso específico del fluido; en Cálculo, el valor de una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ depende de la función y de los límites de integración; pero en todos los casos anteriores, se ha supuesto que es posible definir con precisión los parámetros que permitirán utilizar la expresión que proporcionará el resultado, y en cada caso el resultado siempre es único. La gran mayoría de los modelos determinísticos son idealizaciones o simplificaciones de la realidad, en el caso de la caída libre, se desprecia la resistencia del aire sobre el cuerpo que cae, así como la variación de la aceleración de la gravedad; en el caso de la presión manométrica, se considera que la densidad es constante (cuerpo homogéneo), etc. Cuando en un experimento no se pueden realizar las simplificaciones necesarias para conocer con precisión el resultado, se debe recurrir a los modelos aleatorios, por ejemplo, en el lanzamiento de un moneda al aire, dónde se pretende observar la cara que queda hacia arriba (volado), se sabe que existen dos resultados: águila o sol; sin embargo, no se pueden hacer más consideraciones que permitan predecir el resultado del lanzamiento. En este tipo de experimentos se deben utilizar modelos aleatorios. Así, en muchos problemas de ingeniería, es imposible predecir con exactitud las variables que intervienen en un problema específico, como por ejemplo, el número de llamadas telefónicas que debe enlazar una central en cierta hora del día, el número de personas que llegan a una fila bancaria para ser atendidas, la interferencia electromagnética en las comunicaciones, la cantidad de lluvia en un lugar determinado en un mes, el comportamiento de la bolsa de valores, etc. Y para poder estudiar éstos y otros problemas es necesario estudiar y comprender la Probabilidad.

DEFINICIONES

Un *experimento* es cualquier procedimiento capaz de generar resultados observables. Los experimentos se pueden clasificar en *determinísticos* y *aleatorios*.

$$\textit{Experimento}\begin{cases}\textit{Determinístico}\\ \textit{Aleatorio}\end{cases}$$

Un experimento determinístico es aquel que al repetirse bajo las mismas condiciones controlables presenta siempre el mismo resultado.

Un experimento aleatorio es aquel que al repetirse bajo las mismas condiciones aparentes puede presentar diferentes resultados.

La clasificación de los experimentos en determinísticos y aleatorios depende de la información y el conocimiento que se tenga del experimento, y dependiendo del experimento que se desee estudiar se utilizan *modelos matemáticos de tipo determinístico* o de *tipo aleatorio* (probabilístico).

Los modelos matemáticos de tipo determinístico permiten predecir los resultados de un experimento a partir de ciertas condiciones, ejemplos de modelos determinísticos son:

$s = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_o\,t + s_0$	Tiro parabólico
$F = k\,\delta$	Ley de Hooke
$V = R\,I$	Ley de Ohm

Los modelos matemáticos de tipo probabilístico no permiten predecir el resultado de un experimento, únicamente indican la frecuencia con la que cabe esperar determinado resultado al repetir el experimento un número muy grande de veces, o bien, la certidumbre que se tiene con respecto a la obtención de algún resultado en una sola ejecución del experimento, ejemplos de modelos aleatorios son:

El resultado de un volado.
El resultado de lanzar un dado.
El comportamiento en el precio de una acción.
La velocidad del aire.

Dependiendo de si el resultado que se puede observar toma valores de un conjunto continuo o discreto, el experimento aleatorio se puede clasificar en *experimento continuo* o *experimento discreto*. Ejemplos de experimentos aleatorios discretos son el volado y el lanzamiento de un dado, mientras que el precio de una acción y la velocidad del aire son continuos.

Los conceptos básicos de la Probabilidad tienen su fundamento en la *Teoría de Conjuntos*, en donde el concepto básico es la pertenencia; en Probabilidad, el concepto básico es la ocurrencia.

El conjunto de todos los resultados posibles recibe el nombre de *espacio muestral*, se denota por S, o bien por Ω. A cualquier subconjunto del espacio muestral se le llama *evento*, y se acostumbra denotar mediante las primeras letras mayúsculas del alfabeto.

Existen algunos eventos que por su importancia tienen un nombre en particular. El *evento seguro* es aquel que con seguridad ocurrirá, es el espacio muestral S. El *evento imposible o vacío* es aquel que nunca ocurrirá, se denota por $\varnothing$ (conjunto vacío). El *evento simple o elemental* es un solo elemento del espacio muestral, se suele denotar E_i. Los *eventos excluyentes o mutuamente excluyentes* son aquellos cuya intersección es vacía (conjuntos disjuntos). Los *eventos colectivamente exhaustivos* son aquellos eventos cuya unión forma todo el espacio muestral.

La probabilidad estudia los fenómenos en los cuales no se tiene la certeza del resultado en particular que ocurrirá; y puesto que pueden ocurrir varios resultados, es conveniente conocer algunas técnicas que permitan la cuantificación rápida de distintas opciones. Así, como antecedente de la probabilidad, es necesario conocer algunos temas del álgebra básica, los cuales servirán para realizar cálculos probabilísticos de una manera más simple.

TÉCNICAS DE CONTEO

Cuando resulta difícil o tedioso el contar el número de elementos de un conjunto finito por medio de la numeración directa, deben emplearse algunas técnicas especiales, las cuales reciben el nombre de técnicas de conteo. Para visualizar esto considérese el problema de adquirir un equipo de medición de entre 3 marcas distintas (A, B y C); y para cada marca se puede adquirir un equipo barato o caro (Ba o Ca); y además cada equipo se puede clasificar en fácil de operar o difícil de operar(F o D). Algunas de las opciones que se pueden generar son: equipo A, barato y difícil de operar; equipo B, caro y fácil de operar; equipo C, barato y fácil de operar; etc. Todos las posibles resultados se pueden escribir en forma gráfica utilizando un *diagrama de árbol*[1] como el que se muestra en la ilustración 1.

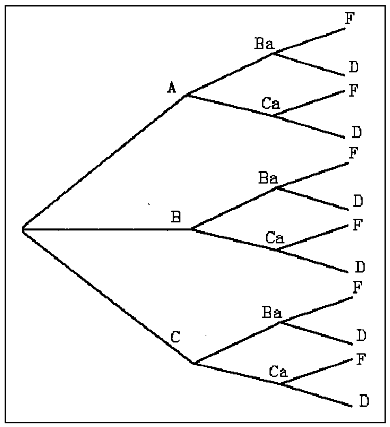


Ilustración 1. Diagrama de árbol

Debe observarse que en total existen 12 posibilidades, cada posibilidad corresponde a una rama del diagrama de árbol, este resultado se obtiene al multiplicar las posibilidades que existen en cada nodo, es decir, $3 \times 2 \times 2 = 12$. Lo que lleva a la regla de multiplicación de opciones, la cual se enuncia a continuación.

Teorema 2.1 (Multiplicación de opciones)
Si los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ contienen los elementos $n_1, n_2, \ldots, n_k$, respectivamente, entonces existen $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ maneras de elegir primero un elemento de A_1, luego un elemento de A_2, . . . y finalmente un elemento de A_k.

Ejemplo 2.1
En una caja existen 7 plumas, 3 lápices y 4 plumones todos diferentes entre sí. Determinar el número de formas en las que se pueden seleccionar una pluma, un lápiz y un plumón.
Resolución
Utilizando la regla de la multiplicación se tiene:

$$7 \times 3 \times 4 = 84 \text{ formas diferentes.}$$

Ejemplo 2.2
De cuántas formas diferentes se puede contestar un examen de 10 preguntas de opción múltiple, con cinco incisos por pregunta.

Resolución
Nuevamente, utilizando la regla de la multiplicación se tiene:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 9\,765\,625$$

Ejemplo 2.3
Puede comprarse un medicamento para la cura del asma ya sea líquido, en tabletas o en cápsulas a 5 diferentes fabricantes, y todas las presentaciones en concentración regular o alta. ¿En cuántas formas diferentes puede un médico recetar la medicina a un paciente que sufre de este padecimiento?

Resolución
Generalizando la regla de la multiplicación se tienen:
$(5)(3)(2) = 30$ formas diferentes.

En el ejemplo 1.2 se observa que el orden en el que se eligen las respuestas es importante, en general, si r objetos se seleccionan de un conjunto de n objetos distintos, cualquier arreglo ordenado de ellos recibe el nombre de *permutación*[2]. Una permutación difiere de otra si los elementos que la contienen cambian de orden.

---

1 Representación gráfica construida con líneas ramificadas unidas por nodos que permite ilustrar un proceso a pasos.

2 Algunos autores les llaman ordenaciones, siendo para ellos las permutaciones un caso particular de las ordenaciones en el cual $n = r$.

Para determinar una fórmula que proporcione el número total de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos, considérese que se desea obtener el número de placas de identificación que se pueden generar, si las placas tienen 4 dígitos y no se permite repetición. Entonces para el primer dígito se puede seleccionar una de las diez posibilidades que son $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, para el segundo dígito se tienen nueve posibilidades, para el tercer dígito se tienen ocho posibilidades y para el cuarto dígito se tienen siete posibilidades, lo que genera un total de

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ posibilidades.}$$

En general, la primera elección se realiza de entre los n objetos, la segunda elección se realiza de entre los $n - 1$ objetos restantes y así sucesivamente hasta la r-ésima elección en la cual se selecciona de entre los $n - (r - 1) = n - r + 1$ objetos restantes. Utilizando la regla de la multiplicación y denotando por ${}_nP_r$ al número de permutaciones de r objetos seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$. Si además se introduce la notación factorial la fórmula de la permutación se simplifica.

Definición 2.1

El factorial de un número entero no negativo se denota mediante el símbolo !, y corresponde al producto de los números naturales menores o igual que él.

Entonces el factorial del número n es:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

Y además $0! = 1$.

Utilizando la notación factorial el número de permutaciones de r elementos tomados de un conjunto de n objetos distintos está dado por el siguiente teorema:

Teorema 2.2

El número de permutaciones de r objetos tomados de un conjunto de n objetos distintos es

$${}_nP_r = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 2.4

El director de una cadena de televisión, debe elegir 7 de entre 20 programas para la transmisión en un cierto día, ¿de cuántas formas posibles puede armar la barra de programación?

Resolución

Claramente debe utilizar permutaciones de 7 elementos tomados de un grupo de 20, por lo que se tiene:

$${}_{20}P_7 = \frac{20!}{(20-7)!} = 390\,700\,800 \text{ formas distintas}$$

Ejemplo 2.5

a) ¿Cuántas permutaciones diferentes pueden hacerse con las letras de la palabra *columna*?

b) ¿Cuántas de estas permutaciones empiezan con la letra *m*?

Resolución

a) Puesto que no hay letras iguales:

$$P_n^n = P_7^7 = 7! = 5040 \text{ permutaciones}$$

b) Puesto que las palabras deben empezar con la letra *m*, sólo se permutan las otras 6 letras, por lo que:

$$P_6^6 = 6! = 720 \text{ permutaciones}$$

Un caso especial de las permutaciones es aquel en el cual se permite la repetición de los objetos que la forman, dando origen a las *permutaciones con repetición*. Por ejemplo, si se desea conocer el número de "combinaciones" distintas que puede tener un candado de cuatro dígitos cuyas numeraciones van del cero al seis se debe utilizar la regla de la multiplicación, teniéndose $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ formas distintas.

Teorema 2.3

Si se seleccionan r objetos de un conjunto de n elementos, con repetición, entonces se tienen

$${}_nPR_r = n^r$$

formas distintas de efectuar la selección.

Ejemplo 2.6

Las placas distintas de automóviles pueden generarse, si cada placa posee tres dígitos y tres letras. Considere un alfabeto de 26 letras.

Resolución

Para los números se tienen ${}_{10}PR_3 = 10^3 = 1000$ formas distintas.

Para las letras se tienen ${}_{26}PR_3 = 26^3 = 17\,576$ formas distintas.

Finalmente, utilizando la regla de la multiplicación se tienen:

${}_{10}PR_3 \times {}_{26}PR_3 = 1\,000 \times 17\,576 = 17\,576\,000$ placas distintas.

En ocasiones se deben de encontrar arreglos de objetos, de los cuales algunos son indistinguibles, por ejemplo al sacar las monedas de una caja que contiene cinco monedas de un peso, cuatro de cinco pesos y tres de diez pesos. En este caso es indistinto seleccionar cualquiera de las monedas de la misma denominación, lo que da lugar a las *permutaciones con grupos de elementos iguales*.

Teorema 2.4

Si se tiene un conjunto de n elementos, con grupos de elementos iguales, de los cuales n_1 son del tipo 1, n_2 son del tipo 2, etc. de tal forma que

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \quad .$$

Entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es

$$_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = P^n_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!}$$

Ejemplo 2.7

Determinar el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra cocodrilo.

Resolución

En la palabra cocodrilo se observan:

2 letras c
3 letras o
1 letra d
1 letra r
1 letra i
1 letra l

Por lo que se tienen

$$_9P_{2,3,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!\ 3!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!} = 30\,240 \text{ permutaciones distinguibles.}$$

Un caso muy especial de las permutaciones, se tiene cuando se desea generar el arreglo alrededor de un círculo, dando origen a las *permutaciones circulares* (PC). Debe observarse que existe diferencia entre las permutaciones en línea y las circulares, puesto que en las circulares se considera el mismo arreglo si sus elementos tienen el mismo precedente y consecuente en el sentido de las manecillas del reloj.

Teorema 2.5

Si n elementos se acomodan de manera que formen un círculo, entonces existen

$$PC_n = (n - 1)!$$

formas distintas de ordenar los elementos.

Ejemplo 2.8

En un partido de baloncesto los 10 jugadores se colocan alrededor del círculo central. ¿De cuántas formas se pueden acomodar?

Resolución

Utilizando las permutaciones circulares se tiene

$PC_{10} = (10 - 1)! = 362\,880$ formas distintas.

Si al seleccionar un grupo de r objetos de un conjunto de n elementos, no interesa el orden en el que se seleccionan, sino simplemente los objetos seleccionados, se generan entonces las *combinaciones.* Una combinación de r elementos tomados de un conjunto S que contiene n elementos, es un subconjunto de S que tiene r elementos distintos. Si se denota por ${}_nC_r$, o por C_r^n, al número de combinaciones que se pueden realizar al tomar r elementos de un conjunto de n, se tiene:

Teorema 2.6 (Combinaciones)

El número de formas en las cuales r objetos pueden seleccionarse, sin importar el orden de un conjunto de n objetos distintos es

$$_nC_r = C_r^n = \frac{n!}{r!\ (n - r)!}$$

Debe observase que la fórmula del teorema de combinaciones se obtiene a partir de la fórmula de las permutaciones, puesto que si C_r^n denota el número de combinaciones, sin importar el orden, de la regla de la multiplicación, para obtener las distintas posibilidades importando el orden se tiene que multiplicar por las permutaciones de los r elementos tomados de r en r, y esto es igual al factorial de r, entonces:

$$C_r^n\ r! = P_r^n$$

de donde

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$$

y finalmente

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

Ejemplo 2.9
De un grupo de 10 alumnos se piensa otorgar becas a 4 de ellos. ¿De cuántas maneras se puede hacer la selección?

Resolución
Puesto que para realizar la selección, no importa el orden, se utilizan combinaciones, de donde se tienen

$C_4^{10} = \dfrac{10!}{4!\ (10-4)!} = 210$ formas diferentes

---

Ejemplo 2.10
Una caja de cartón con 12 baterías para radio contiene una que está defectuosa. ¿En cuántas formas diferentes un inspector puede elegir tres de las baterías y obtener

a) la defectuosa;
b) ninguna defectuosa?

Resolución

a) Existen ${}_{12}C_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = 220$ formas distintas de seleccionar 3 baterías, y ${}_{11}C_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} = 165$ formas de seleccionar las no defectuosas.
$\therefore$ Existen 220 - 165 = 55 formas de seleccionar la defectuosa.

b) 165 formas.

Además de las combinaciones, se tienen las *combinaciones con repetición,* en las cuales se permite repetir los objetos en una misma combinación.

Teorema 2.7 (Combinaciones con repetición)
El número de formas en las cuales r objetos pueden seleccionarse, sin importar el orden, de un conjunto de n objetos distintos considerando que se pueden repetir es

$$CR_r^n = C_r^{n+r-1}$$

Para la obtención de la fórmula debe observarse que el hecho de que se puedan repetir los elementos es el equivalente a que la combinación se efectuase considerando que todos los elementos se repiten r veces cuando se seleccionan los primeros $r-1$ elementos, puesto que cuando se selecciona el r-ésimo ya no debe considerarse la repetición. Por lo que la selección se hace considerando $n+r-1$ elementos, dando lugar a la fórmula $CR_r^n = C_r^{n+r-1}$.

Ejemplo 2.11
Determinar el número de combinaciones con repetición que se pueden formar con cuatro números tomando de tres en tres.

Resolución
Se tienen

$CR_3^4 = C_3^{4+3-1} = C_3^6 = \dfrac{6!}{3!\ (6-3)!} = 20$ formas posibles.

Es común denotar las combinaciones C_r^n utilizando la notación $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$, y a los números que se obtienen de las combinaciones al variar r desde cero hasta n se les llama *números combinatorios.* Es común leer la expresión $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ como "las combinaciones de n sobre r".

Los números combinatorios tienen las siguientes propiedades:

- Los números combinatorios para $r = 0$ y para $r = n$ son iguales a la unidad.
  Demostración
  De la fórmula de combinaciones se tiene:
  $$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{0!\ (n-0)!} = 1$$
  $$\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \frac{n!}{n!\ (n-n)!} = 1$$

- Los números combinatorios que se tienen para valores de $r = 1, 2, \ldots, n-1$ son simétricos entre sí.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Demostración

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

- La suma de los números combinatorios con numerador igual a n y denominador consecutivo, $r = k-1$ y $r = k$ respectivamente, es igual al número combinatorio de numerador $n = n+1$ y denominador $r = k$.

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Demostración

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Pascal, matemático francés (1623-1662), estudió las propiedades de los números combinatorios y construyó un triángulo con los números combinatorios conocido como *triángulo de Pascal*.

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \end{matrix}$$

sustituyendo los números combinatorios se tiene:

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{matrix}$$

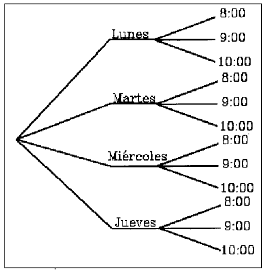
En donde se puede observar con claridad las tres propiedades de los números combinatorios.

Ejemplo 2.12

Un estudiante debe efectuar una práctica de campo, y puede realizarla de lunes a jueves en cualquiera de los horarios siguientes: 8:00, 9:00 o 10:00 A.M. Dibujar el diagrama de árbol que muestre las distintas formas en las que puede realizar la práctica.

Resolución

El diagrama de árbol se muestra a continuación



Ejemplo 2.13

En una competencia de maratón, hay 40 participantes. Determinar de cuántas formas diferentes se pueden repartir el primero, el segundo y el tercer lugar.

Resolución

Puesto que es una selección de tres personas de 40, importando el orden, se tienen:

$$P_3^{40} = \frac{40!}{(40-3)!} = 59\,280 \quad \text{formas posibles.}$$

Ejemplo 2.14

En un lote de 50 componentes electrónicos, se tienen 3 defectuosos.

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden tomar 5 de ellos y encontrar un defectuoso?

b) ¿De cuántas formas posibles se pueden tomar 10 de ellos y encontrar dos defectuosos?

Resolución

a) Debe observarse que se realiza una selección de cuatro de los 47 componentes no defectuosos y uno de los tres defectuosos, sin importar el orden, por lo que se tienen:

$$C_4^{47}\ C_1^3 = \binom{47}{4}\binom{3}{1} = 535\,095 \quad \text{formas posibles.}$$

b) Puesto que tampoco importa el orden, se tienen

$$C_8^{47}\ C_2^3 = \binom{47}{8}\binom{3}{2} = 943\,372\,485 \quad \text{formas posibles.}$$

Ejemplo 2.15

Un testigo de un accidente de tránsito en el que el causante huyó, le indica al policía que el número de la matrícula del automóvil tenía las letras RLH seguidas por tres dígitos, el primero de los cuales era un cinco. Si el testigo no puede recodar los otros dos dígitos pero está seguro de que los tres eran diferentes, encuentre el número máximo de registros de automóvil que debe verificar la policía.

Resolución

Como el primer número tiene que ser cinco la probabilidad queda en función de los otros dos, donde el segundo tiene $n_1 = 9$ posibilidades y el tercero $n_2 = 8$ posibilidades, entonces por la regla de la multiplicación se deben verificar $(n_1)(n_2) = (9)(8) = 72$

Ejemplo 2.16

En un estudio de economía de combustibles, se prueban 3 carros de carreras con 5 diferentes marcas de gasolina, en 7 sitios de prueba en distintas regiones del país. Si se utilizan 2 pilotos en el estudio y las pruebas se realizan una vez bajo cada conjunto de condiciones, ¿cuántas se necesitarán?

Resolución

Generalizando la regla de la multiplicación se tienen:

$(3)(5)(7)(2) = 210$ formas diferentes.

Después de repasar brevemente algunas de las técnicas para contar, debemos retomar el propósito del capítulo, el cual es que el alumno conozca el significado de la probabilidad y pueda desarrollar varias relaciones entre probabilidades utilizando la definición de probabilidad y los teoremas fundamentales. Históricamente los primeros usos de la probabilidad fueron en los juegos de azar, y se utilizó lo que en la actualidad se llama "enfoque clásico". El primer dado data de principios del tercer milenio a.C. Los griegos ya reconocían la importancia del azar, y tenían una Diosa de la suerte, llamada Tique. El primer autor reconocido en probabilidad es el matemático, médico, físico y astrólogo italiano Gerolamo Cardano (1501-1576). Cardano escribió sobre los juegos de azar en su libro, "Liber de ludo aleae" (Manual sobre juegos de azar) , escrito en la década de 1560 pero publicado póstumamente en 1663. Cardano fue consultado para el célebre problema del duque de Toscana (1560), pero no encontró una solución satisfactoria. El problema fue resuelto por Galileo Galilei 50 años después. Gerolamo predijo el día de su muerte, y para no fallar como lo había hecho en otras predicciones, se quito la vida ese día.

Posteriormente se utilizaron enfoques de frecuencia y personales, y se estableció el desarrollo axiomático de la probabilidad. Los enfoques o escuelas de la probabilidad se estudian a continuación.

ENFOQUES DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad tiene tres enfoques, interpretaciones o escuelas.

1. **Interpretación Clásica** o a priori

La interpretación clásica de la probabilidad dice que si el espacio muestral consta de $n(S)$ eventos simples, todos igualmente factibles, y si el evento A tiene $n(A)$ eventos simples, entonces la probabilidad del evento A, denotada por $P(A)$, se calcula como el cociente $\frac{n(A)}{n(S)}$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Los inconvenientes de la interpretación clásica son:

a. Es necesario que todos los resultados del experimento tengan la misma probabilidad.

b. En ocasiones es muy difícil o imposible determinar la cardinalidad de A y de S.

2. Interpretación Frecuentista o a posteriori

La interpretación frecuentista de la probabilidad dice que la probabilidad de un evento A es la frecuencia relativa con la que ha ocurrido dicho evento en un número muy grande de experimentaciones.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

donde $n(A)$ es el número de veces que se observa el evento A en n repeticiones del experimento.

La interpretación frecuentista también se conoce como de Von Mises.
El principal inconveniente del enfoque frecuentista es que no es aplicable cuando el experimento no se puede repetir un gran número de veces.

3. Interpretación Subjetiva o personal

Es una medida entre 0 y 1 (inclusive), que se asocia de manera subjetiva.
Se requiere de una persona experimentada para determinar la probabilidad.

El inconveniente de este enfoque es que suele cambiar el valor asignado cuando se le pregunta a otro experto.

A la interpretación clásica también se le conoce como *a priori* y de Laplace, a la interpretación frecuentista se le llama también de frecuencia relativa, objetiva, empírica, *a posteriori* y estadística; y la interpretación subjetiva también se le llama personal.

La definición de la función de probabilidad consiste en tres axiomas.

Definición Axiomática

Para un espacio muestral S, la probabilidad de cada evento $A \subset S$ es un número que se asigna al evento, se denota $P(A)$, y tiene las siguientes propiedades:

1. $P(A)$ es un número no negativo; esto es, $P(A) \geq 0$
2. La probabilidad del espacio muestral S es la unidad, esto es:
$$P(S) = 1$$
3. Si A y B son eventos que se excluyen mutuamente en S, entonces la probabilidad de la unión de los eventos es igual a la suma de sus probabilidades; es decir:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Debe observarse que los axiomas de la probabilidad no relacionan la probabilidad con los experimentos en sí. Los axiomas sólo sientan las bases que debe cumplir una función de probabilidad. La relación debe establecerse a través de alguno de los enfoques de la probabilidad.

Un punto muy importante que debe resaltarse es el hecho de que si un evento tiene probabilidad cero, en el axioma uno, no significa que sea un evento imposible. Para tener el evento vacío (o imposible) una probabilidad de cero es condición necesaria, pero no suficiente.

Ejemplo 2.17
Si se extrae una carta de un paquete bien barajado de 52 cartas. Determinar la probabilidad de obtener:
a) Un rey rojo.
b) Un 3, 4, 5 ó 6.
c) Una carta negra.
d) Un as rojo o una reina negra.

Resolución

a) Sea R el evento en el cual se obtiene un rey rojo.
$$P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$
b) Sea A el evento en el cual se obtiene un 3, 4, 5 ó 6.
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$
c) Sea N el evento en el cual se obtiene una carta negra.
$$P(N) = \frac{n(N)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$
d) Sea B el evento en el cual se obtiene un as rojo o una reina negra.
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Ejemplo 2.18
Una familia tiene 3 hijos. Determinar todas las posibles permutaciones, con respecto al sexo de los hijos. Bajo suposiciones adecuadas ¿cuál es la probabilidad de que, exactamente dos de los hijos tengan el mismo sexo? ¿Cuál es la probabilidad de tener un varón y dos mujeres? ¿Cuál es la probabilidad de tener 3 hijos del mismo sexo?

Resolución
Denotando H para hombre y M para mujer, las posibles permutaciones son:
HHH, HHM, HMH, MHH, MHM, MMH, HMM, MMM
Considerando que cada permutación tiene la misma probabilidad, y si A es el evento en el cual se tienen exactamente dos hijos del mismo sexo:

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Sea B el evento en el cual se tienen un varón y dos mujeres

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

Sea C el evento en el cual se tienen tres hijos del mismo sexo.

$$P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Para resolver los ejemplos anteriores se utilizó el enfoque clásico de la probabilidad, en el cual se supone que cada carta tiene la misma probabilidad de ocurrencia, o que cada punto posible de la combinación de hijos e hijas tiene la misma probabilidad; cuando se dispone de información histórica puede utilizarse el enfoque frecuentista, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.19

Se tienen 200 cilindros de concreto y se someten a una prueba de compre~~n~~sión. Todos los cilindros son iguales y están bajo las mismas condiciones de humedad y temperatura. Los resultados observados son los siguientes:

Límites de resistencia $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$	Frecuencia
171 – 180	10
181 – 190	12
191 – 200	25
201 – 210	132
211 – 220	21

Calcular la probabilidad para cada uno de los siguientes eventos

a) A: Un cilindro resiste entre *191* y *200* $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$

b) B: Un cilindro resiste entre *201* y *210* $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$

c) C: Un cilindro resiste entre *191* y *210* $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$

d) D: Un cilindro resiste a lo sumo *200* $\left[\frac{kg}{cm^2}\right]$

Resolución

Con $n = 200$ observaciones

a) $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{25}{200} = 0.125$

b) $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{132}{200} = 0.66$

c) $P(C) = P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{25 + 132}{200} = 0.785$

d) $P(D) = \frac{n(D)}{n} = \frac{10 + 12 + 25}{200} = \frac{47}{200} = 0.235$

La probabilidad es una función de conjunto que tiene como dominio al conjunto de todos los eventos (conjunto potencia de S), y como recorrido el intervalo de números reales $[0, 1]$. Se deno[illegible]r

$$P : 2^S \rightarrow [0, 1]$$

Teorema 2.9 Teoremas Elementales de la Probabilidad

1) $P(\varnothing) = 0$

2) Si A es un evento cualquiera, entonces $\overline{A}$ también lo es, y su probabilidad es

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3) Sean A y B dos eventos cualesquiera

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración de 1

Cualquier evento A puede escribirse como

$A = A \cup \varnothing$

Por lo que

$P(A) = P(A \cup \varnothing)$

Puesto que A y $\varnothing$ son excluyentes, $A \cap \varnothing = \varnothing$, y por el axioma 3

$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$

$P(\varnothing) = P(A) - P(A) = 0$

Demostración de 2

El espacio muestral puede escribirse como

$S = \overline{A} \cup A$

de donde

$P(S) = P(\overline{A} \cup A)$

por el axioma 3

$P(S) = P(\overline{A}) + P(A)$

y del axioma 2

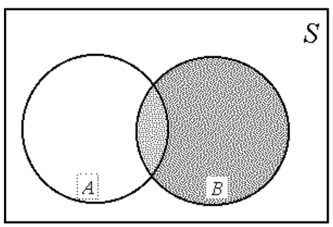
$1 = P(\overline{A}) + P(A)$

Finalmente

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Demostración de 3

Se parte del diagrama de Venn, y se descompone la unión



$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$

$B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$

Por lo tanto

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$

Restando la segunda ecuación de la primera se tiene:

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

de donde se obtiene la expresión buscada.

■

El teorema tres puede generalizarse para tres o más eventos. El siguiente teorema muestra la probabilidad de la unión de tres eventos.

Teorema 2.10

Sean A , B y C tres eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Teorema 2.11

Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Ejemplo 2.20

Un sistema electrónico consta de dos aparatos A y B, y para poder operar requiere que ambos aparatos funcionen. La probabilidad de que el aparato A funcione en un momento dado es 0.9 y la probabilidad de que el aparato B funcione es 0.85. La probabilidad de que ambos aparatos fallen simultáneamente es de 0.05. Calcular la probabilidad de que en un momento dado el sistema funcione.

Resolución

Sean los eventos

A el aparato A funciona.

B el aparato B funciona.

Datos: $P(A) = 0.9$

$P(B) = 0.85$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.05$

Análisis

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ . . . (a)

De las leyes de Morgan se sabe que $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, por lo que

$P[\overline{(A \cup B)}] = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.05$

$P(A \cup B) = 1 - P[\overline{(A \cup B)}] = 1 - 0.05$

$P(A \cup B) = 0.95$

sustituyendo en (a)

$P(A \cap B) = 0.9 + 0.85 - 0.95 = 0.8$

La probabilidad de que el sistema funcione es de 0.8.

Ejemplo 2.21

En un laboratorio de computadoras se tienen 15 computadoras de las cuales cinco están descompuestas, si una persona toma al azar tres de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una de las tres esté descompuesta?

Resolución

Sean los eventos:

$A \triangleq$ Al menos una de las tres computadoras está descompuesta.

$D_1 \triangleq$ Exactamente una computadora está descompuesta (y dos no).

$D_2 \triangleq$ Exactamente dos computadoras están descompuestas (y una no).

$D_3 \triangleq$ Exactamente las tres computadoras están descompuestas.

Análisis:
Es claro que la probabilidad buscada es:

$P(A) = P(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$

Y puesto que son eventos mutuamente excluyentes:

$P(A) = P(D_1) + P(D_2) + P(D_3)$

Para calcular cada una de las probabilidades se utiliza el enfoque clásico, considerando que la selección de cualquiera de las computadoras tiene la misma probabilidad.

$$P(D_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{5(45)}{455} \approx 0.4945$$

$$P(D_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0.2197$$

$$P(D_3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} \approx 0.02197$$

Finalmente

$P(A) \approx 0.4945 + 0.2197 + 0.02197 \approx 0.7363$

La probabilidad de que por lo menos una esté descompuesta es 0.7363.

Ejemplo 2.22

Una caja contiene 500 sobres, 75 de los cuales contienen \$1000 en efectivo, 150 contienen \$250 y 275 contienen \$100. Cada uno puede comprarse al precio de \$250.

a) ¿Cuál es el espacio muestral para las diferentes cantidades de dinero?

b) Asignar probabilidades a los elementos del espacio muestral y después obtener la probabilidad de que el primer sobre que se compre contenga menos de \$1000?

Resolución

a) El espacio muestral es:

$S = \{\$100, \$250, \$1000\}$

b) Las probabilidades para la primera extracción son, respectivamente:

$\frac{275}{500}$, $\frac{150}{500}$ y $\frac{75}{500}$

Sea el evento A, el primer sobre comprado contiene menos de \$1000.

$$P(A) = \frac{275 + 150}{500} = \frac{425}{500} = 0.85$$

Ejemplo 2.23

Si se seleccionan al azar 3 libros de un estante que contiene 5 libros de matemáticas, 3 libros de física y un diccionario, determinar las siguientes probabilidades:

a) Que se tome el diccionario.

b) Que se escojan 2 libros de matemáticas y un libro de física.

Resolución

a) $A \triangleq$ Se toma el diccionario

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{8}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{3}$$

b) $B \triangleq$ Se toman dos libros de matemáticas y un libro de física.

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{1}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84} \approx 0.3571$$

Ejemplo 2.24

La probabilidad de que una industria transnacional se ubique en México es de 0.7; de que se localice en Brasil, de 0.4, y de que se encuentre ya sea en Brasil o en México, o en ambas, es de 0.8. Determinar la probabilidad de que la industria se localice en:

a) ambas ciudades,
b) ninguna de las ciudades.

Resolución

Sean los eventos:

$M \triangleq$ La industria se localiza en México.

$B \triangleq$ La industria se localiza en Brasil.

a) $P(M \cap B) = P(M) + P(B) - P(M \cup B)$

$P(M \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.8 = 0.3$

b) $P(\bar{M} \cap \bar{B}) = 1 - P(M \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$

Ejemplo 2.25

Un circuito flexible se selecciona al azar de una corrida de producción de 1000 circuitos. Los defectos de manufactura se clasifican en tres diferentes tipos, denominados A, B y C. Los defectos tipo A ocurren el 2% de las veces, los del tipo B el 1%, y los del tipo C el 1.5%. Además, se sabe que el 0.5% tienen los defectos tipo A y B; el 0.6%, los defectos A y C, y el 0.4% presenta los defectos B y C, en tanto que el 0.2% tiene los tres defectos. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito flexible seleccionado tenga al menos uno de los tres tipos de defectos?

Resolución

$P(A) = 0.02$

$P(B) = 0.01$

$P(C) = 0.015$

$P(A \cap B) = 0.005$

$P(A \cap C) = 0.006$

$P(B \cap C) = 0.004, \quad P(A \cap B \cap C) = 0.002$

Por lo que

$P(A \cup B \cup C) = 0.02 + 0.01 + 0.015 - 0.005 - 0.006 - 0.004 + 0.002$

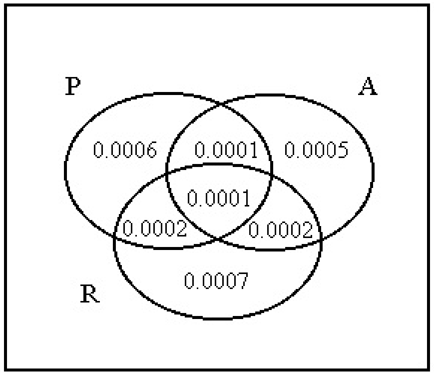
$P(A \cup B \cup C) = 0.032$

Ejemplo 2.26

Supóngase que, en el mantenimiento de un enorme archivo médico que sirve para cobrar el seguro médico, la probabilidad de un error en el procesamiento de registros es 0.0010, la probabilidad de error en el archivado es 0.0009, la probabilidad de un error en la recuperación de datos es 0.0012, la probabilidad de un error en el procesamiento de registros y en el archivado es 0.0002, la probabilidad de un error en el procesamiento de registro, así como en recuperación es de 0.0003, la probabilidad de un error en archivado, así como en recuperación es de 0.0003 y la probabilidad de un error en el procesado de registros, en el archivado y la recuperación es de 0.0001. ¿Cuál es la probabilidad de incurrir al menos en uno de estos errores?

Resolución

Sea P el procesamiento, A el archivado y R la recuperación



$\therefore P(P \cup A \cup R) = 0.0024$

PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

En estudios recientes se estableció cierta "relación" entre el fumar y el enfisema pulmonar, dos médicos británicos reportaron que de 135 hombres afectados con enfisema 122 (90%) eran fumadores. En términos simples, la inferencia que puede obtenerse es: si una persona tiene enfisema pulmonar, es más *probable* que sea un fumador a que no lo sea; pero, ¿podrá hacerse la afirmación inversa? ¿Si una persona es fumadora, sus posibilidades de enfermarse serán mucho mayores que las de una persona que no lo es? Para contestar preguntas así, es necesario definir el concepto de *probabilidad condicional*, el cual es fundamental en el estudio de la probabilidad.

> **Definición 2.2**
>
> La probabilidad condicional de un evento A, dado que ya ocurrió el evento B, es:
>
> $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
>
> siempre que $P(B) > 0$.

Justificación

Considerando eventos igualmente probables,

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \quad , \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

sustituyendo en $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A \mid B) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

■

La anterior justificación no es una demostración, la definición de la probabilidad condicional es eso, un definición; es decir no es un teorema ni un axioma. La función $P(A \mid B)$ cumple con las propiedades de una función de probabilidad.

Del planteamiento inicial, si consideramos que los datos reportados por los médicos provienen de una población de N hombres, en donde nos interesan dos eventos:

$A \triangleq$ La persona es fumadora.
$B \triangleq$ La persona está enferma de enfisema pulmonar.

y las cardinalidades de los eventos son: $n(B) = 135$ y $n(B \cap A) = 122$

La probabilidad de seleccionar aleatoriamente a una persona fumadora, del conjunto de personas con enfisema es:

$$\frac{n(B \cap A)}{n(B)} = \frac{122}{135} = 0.9$$

En palabras se dice: "La probabilidad del evento A (la persona es fumadora) dado que el evento B (la persona está enferma de enfisema pulmonar) ha ocurrido es 0.9".

En símbolos se escribe:

$$P(A \mid B) = 0.9$$

Por otro lado, la probabilidad de que una persona seleccionada aleatoriamente de la población sea fumadora y esté enferma de enfisema es:

$$P(A \cap B) = \frac{n(B \cap A)}{N}$$

de manera similar la probabilidad de que una persona seleccionada aleatoriamente de la población tenga enfisema es:

$$P(B) = \frac{n(B)}{N}$$

De donde

$$P(A \mid B) = \frac{n(B \cap A)}{n(B)} = \frac{\dfrac{n(B \cap A)}{N}}{\dfrac{n(B)}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

que coincide con la definición dada anteriormente.

En los problemas que involucran probabilidades condicionales, dependiendo de la forma en la que se proporciona la información, puede convenir realizar una tabla con las probabilidades conocidas, hacer un diagrama de árbol o simplemente utilizar las definiciones y teoremas correspondientes. En el siguiente ejemplo se acomodan los elementos en una tabla, de forma tal que las probabilidades correspondientes pueden obtenerse directamente del cociente “casos a favor” entre “casos totales”.

Ejemplo 2.27

En un curso especial de la Facultad hay 100 alumnos. Algunos de estos alumnos estudian (E) mientras otros no lo hacen ($\overline{E}$). Por otro lado, ~~y~~ por la forma de evaluar del profesor, algunos alumnos acreditan el curso (A) mientras que otros no lo acreditan ($\overline{A}$). La tabla siguiente muestra el número de alumnos en cada categoría. Si se selecciona a un alumno al azar y se descubre que la acreditado, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado?

	E	$\overline{E}$	¿?
A	60	10	70
$\overline{A}$	10	20	30
	70	30	100

Resolución

Utilizando las letras proporcionadas para la definición de eventos, se tiene:

$$P(E \mid A) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{6}{7}$$

———————————————————————————

El siguiente ejemplo ilustra el uso directo de la definición de probabilidad condicional.

———————————————————————————

Ejemplo 2.28

La probabilidad de que un automóvil al que se le llena el tanque de gasolina necesite también un cambio de aceite es de 0.25; la de que requiera un nuevo filtro de aceite, 0.40 y de que le haga falta tanto cambio de aceite como de filtro, 0.14.

a) Si debe cambiarse el aceite ¿cuál es la probabilidad de que necesite un filtro nuevo?

b) Si necesita un filtro nuevo, ¿cuál es la probabilidad de que requiera que se le cambie el aceite?

Resolución

Sean los eventos

$A \triangleq$ Requiere un cambio de aceite.

$F \triangleq$ Requiere un cambio de filtro.

Del enunciado

$$P(A) = 0.25$$
$$P(F) = 0.40$$
$$P(A \cap F) = 0.14$$

a) $$P(F \mid A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0.14}{0.25} = 0.56$$

b) $$P(A \mid F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0.14}{0.40} = 0.35$$

———————————————————————————

La consecuencia más importante de la definición de probabilidad condicional se obtiene escribiéndola de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)\, P(A)$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

que se conoce como el *teorema de multiplicación*.

Definición 2.3

Dos eventos A y B son estadísticamente independientes ~~o independientes,~~ si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

En otro caso los eventos son dependientes. Y de la definición de probabilidad condicional, la condición de independencia puede escribirse como:

Dos eventos son independientes si

$$P(A \mid B) = P(A)$$

y

$$P(B \mid A) = P(B)$$

En términos simples, la independencia de eventos significa que la ocurrencia o la no ocurrencia de un evento no tiene influencia en la ocurrencia o no ocurrencia de otro evento.

En un diagrama de Venn, los eventos independientes deben tener intersección. Si en un diagrama de Venn dos eventos no tienen intersección, entonces son invariablemente dependientes.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de los diagramas de árbol para el cálculo de probabilidades utilizando el teorema de la multiplicación.

Ejemplo 2.29
Súpongase que en la compañía de seguros "El cóndor", el 65% de sus clientes son mayores de 35 años, y estos clientes tienen una probabilidad de accidentarse de 0.06, mientras que los de 35 años o menos, tienen una probabilidad de accidentarse de 0.15. Determinar la probabilidad que una persona se accidente y sea de 35 años o menos.

Resolución
Se definen los eventos:

$A \triangleq$ Mayor de 35 años.

$B \triangleq$ De 35 años o menos.

$C \triangleq$ Se accidenta.

Del enunciado las probabilidades son:

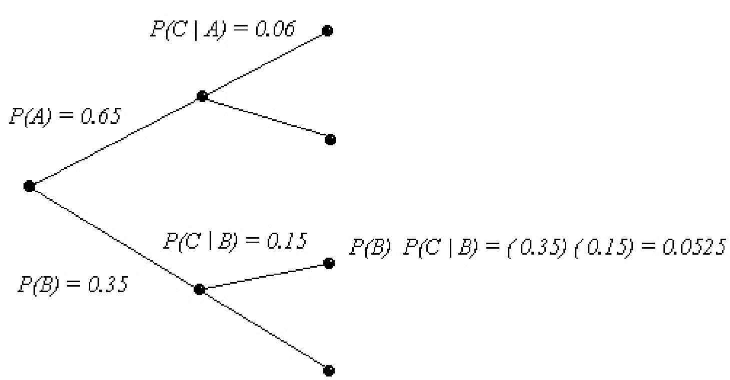
$P(A) = 0.65$

$P(B) = 0.35$ (Puesto que es el complemento de A)

$P(C \mid A) = 0.06$

$P(C \mid B) = 0.15$

y se busca la probabilidad de la intersección $P(C \cap B)$
Las probabilidades se pueden colocar en un diagrama de árbol de la siguiente manera.



La probabilidad buscada se obtiene de la multiplicación de las probabilidad es de las ramas de interés, esto es:

$$P(C \cap B) = P(B)\,P(C \mid B) = (0.35)\,(0.15) = 0.0525$$

El siguiente ejemplo muestra el uso de la condición de independencia para el cálculo de probabilidades.

Ejemplo 2.30
Supóngase que A y B son dos eventos independientes asociados con un experimento. Si la probabilidad de que A o B ocurran es igual a 0.6, mientras que la probabilidad de que ocurra A es igual a 0.4, determinar la probabilidad de que B ocurra.

Resolución
Datos: $P(A \cup B) = 0.6$, $P(A) = 0.4$
Y puesto que A y B son independientes:

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

y del teorema de la unión de eventos

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

de donde

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)$

sustituyendo

$0.6 = 0.4 + P(B) - 0.4\,P(B)$

Despejando

$$P(B) = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

PROBABILIDAD TOTAL Y TEOREMA DE BAYES

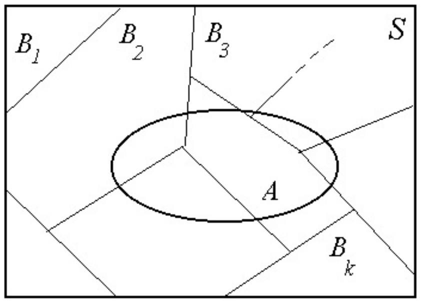
El teorema o regla de la multiplicación es útil para determinar la probabilidad de un evento que depende de otros, y esta idea se generaliza a través del *teorema de la probabilidad total.*

Teorema 2.12 Teorema de la Probabilidad Total

Sean los eventos B_1 , B_2 , . . . , B_k una partición exhaustiva y mutuamente excluyente del espacio muestral S, de tal forma que $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A en S

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)\, P(A \mid B_i)$$

En un diagrama de Venn, el teorema de la probabilidad total se ilustra de la siguiente forma.



Ejemplo 2.31

Una caja contiene 9000 componentes de los cuales 5% son defectuosos, una segunda caja contiene 7000 componentes de los cuales 40% son defectuosos. Existen otras 2 cajas con 6000 componentes cada una y 10% de defectuosos. Si se selecciona aleatoriamente una caja, y de ella una componente, ¿cuál es la probabilidad de que la componente seleccionada sea defectuosa?

Resolución

Sean los eventos:

$C_i \triangleq$ La caja seleccionada es la i-ésima, $i = 1, 2, 3, 4$.

$D \triangleq$ La componente seleccionada es defectuosa.

Del enunciado se tienen los datos:

$$P(C_i) = \frac{1}{4} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$P(D \mid C_1) = 0.05$ $\qquad$ $P(D \mid C_2) = 0.4$

$P(D \mid C_3) = 0.1$ $\qquad$ $P(D \mid C_4) = 0.1$

Por lo que utilizando el teorema de la probabilidad total

$$P(D) = \sum_{i=1}^{4} P(D \cap C_i)$$

$$P(D) = P(D \cap C_1) + P(D \cap C_2) + P(D \cap C_3) + P(D \cap C_4)$$

Y del teorema de la multiplicación

$$P(D \cap C_i) = P(C_i)\, P(D \mid C_i)$$

finalmente

$$P(D) = \frac{1}{4}(0.05 + 0.4 + 0.1 + 0.1) = 0.1625$$

Teorema 2.13 Teorema de Bayes

Sean los eventos B_1 , B_2 , . . . , B_k una partición exhaustiva y mutuamente excluyente del espacio muestral S, de tal forma que $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A en S tal que $P(A) \neq 0$ se tiene

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)\, P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)\, P(A \mid B_i)}$$

para $r = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Este teorema es un consecuencia de la definición de probabilidad condicional y del teorema de probabilidad total.

Ejemplo 2.32

Del ejemplo anterior de las cajas con componentes.

¿Cuál es la probabilidad de que la caja seleccionada haya sido la segunda, si la componente seleccionada fue defectuosa?

Resolución

$$P(C_2 \mid D) = \frac{P(C_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C_2) P(D \mid C_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(C_i)\, P(D \mid C_i)}$$

Y utilizando el resultado del ejemplo anterior

$$P(C_2 \mid D) = \frac{0.1}{0.1625} = 0.6154$$

Ejemplo 2.33

La policía planea reforzar el respeto a los límites de velocidad mediante la utilización de sistemas de radar en 4 diferentes sitios dentro de la ciudad. Los sistemas de radar en cada sitio L_1, L_2, L_3 y L_4 se ponen a funcionar, respectivamente, el 40%, 30%, 20% y 30% del tiempo, y si una persona que conduce a gran velocidad rumbo a su trabajo tiene, respectivamente, las probabilidades de 0.2, 0.1, 0.5 y 0.2 de pasar por alguno de estos sitios.

a) ¿cuál es la probabilidad de que le levanten una multa?

b) Si la persona recibe una infracción por conducir a gran velocidad rumbo a su trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado el radar que se localiza en el sitio L_2?

Resolución

Sea L_i el evento en el cual el conductor pasa por el radar i , $i = 1,2,3,4$; e I el evento en el cual le levantan una infracción(multa).

$P(L_1) = 0.2 \qquad P(L_2) = 0.1$

$P(L_3) = 0.5 \qquad P(L_4) = 0.2$

$P(I \mid L_1) = 0.4 \qquad P(I \mid L_2) = 0.3$

$P(I \mid L_3) = 0.2 \qquad P(I \mid L_4) = 0.3$

a) $$P(I) = \sum_{i=1}^{4} P(I \cap L_i)$$

$$P(I) = \sum_{i=1}^{4} P(L_i)P(I \mid L_i)$$

$$P(I) = P(L_1)P(I \mid L_1) + P(L_2)P(I \mid L_2) + P(L_3)P(I \mid L_3) + P(L_4)P(I \mid L_4)$$

Sustituyendo:

$$P(I) = (0.2)(0.4) + (0.1)(0.3) + (0.5)(0.2) + (0.2)(0.3)$$

$$P(I) = 0.27$$

b) $$P(L_2 \mid I) = \frac{P(L_2)P(I \mid L_2)}{P(I)}$$

$$P(L_2 \mid I) = \frac{0.1\,(0.3)}{0.27} = \frac{1}{9}$$

Ejemplo 2.34

Un inversionista está pensando en comprar un número muy grande de acciones de una compañía. La cotización de las acciones en la bolsa, durante los seis meses anteriores, es de gran interés para el inversionista. Con base en esta información, se observa que la cotización se relaciona con el producto nacional bruto. Si el PNB aumenta, la probabilidad de que el valor de las acciones aumente es de 0.8. Si el PNB es el mismo, la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de 0.2. Si el PNB disminuye, la probabilidad es de sólo 0.1. Si para los siguientes seis meses se asignan las probabilidades 0.4, 0.3 y 0.3 a los eventos; el PNB aumenta, es el mismo y disminuye, respectivamente, determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses.

Resolución

Sean los eventos:

A: El PNB aumenta.

M: El PNB es el mismo.

D: El PNB disminuye.

V: Las acciones aumentan su valor.

Del enunciado se tienen los datos:

$P(V \mid A) = 0.8$, $P(A) = 0.4$

$P(V \mid M) = 0.2$, $P(M) = 0.3$

$P(V \mid D) = 0.1$, $P(D) = 0.3$

Empleando el teorema de probabilidad total, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V \cap A) + P(V \cap M) + P(V \cap D) \\ &= P(A)\,P(V \mid A) + P(M)\,P(V \mid M) + P(D)\,P(V \mid D) \\ &= (0.4)(0.8) + (0.3)(0.2) + (0.3)(0.1) \\ &= 0.41 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.35

Con base en varios estudios una compañía ha clasificado, de acuerdo con la posibilidad de descubrir petróleo, las formaciones geológicas en tres tipos. La compañía pretende perforar un pozo en un determinado sitio, al que se le asignan las probabilidades de 0.35, 0.4 y 0.25 para los tres tipos de formaciones, respectivamente. De acuerdo con la experiencia, se sabe que el petróleo se encuentra en un 40% de formaciones del tipo I, en un 20% de formaciones del tipo II y en un 30% de formaciones del tipo III. Si la compañía no descubre petróleo en ese lugar, determinar la probabilidad de que exista una formación del tipo II.

Resolución

Sean los eventos:

$I \triangleq$ La formación es de tipo I.

$II \triangleq$ La formación es de tipo II.

$III \triangleq$ La formación es de tipo III.

$EP \triangleq$ Se encuentra petróleo.

Datos:

$P(I) = 0.35$, $P(EP \mid I) = 0.4$

$P(II) = 0.4$, $P(EP \mid II) = 0.2$

$P(III) = 0.25$, $P(EP \mid III) = 0.3$

$$P(II \mid \overline{EP}) = \frac{P(II)\, P(\overline{EP} \mid II)}{P(I)\, P(\overline{EP} \mid I) + P(II)\, P(\overline{EP} \mid II) + P(III)\, P(\overline{EP} \mid III)}$$

$$= \frac{0.4\,(0.8)}{0.35\,(0.6) + 0.4\,(0.8) + 0.25\,(0.7)} = \frac{64}{141}$$

$$\approx 0.4539$$

Ejemplo 2.36

Supóngase que la probabilidad de que los Potros de Baltimore ganen el campeonato de la Conferencia Americana es de 0.25, y la probabilidad de que lo obtengan los Cargadores de San Diego es 0.20. Además, la probabilidad de que el campeón de la Conferencia Americana gane el Super Tazón es 0.45, 0.55 o 0.35, dependiendo de si los Potros, los Cargadores o algún otro equipo gana el campeonato.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo de la conferencia americana gane el Super Tazón?

b) Si un equipo de la Conferencia Americana gana el Super Tazón, ¿cuál es la probabilidad de que los Potros de Baltimore ganen el titulo de su conferencia?

Resolución

Sean los eventos

$CA \triangleq$ Un equipo de la Conferencia Americana gana el Super Tazón.

$PB \triangleq$ Los Potros de Baltimore ganan el campeonato de la Conferencia Americana.

$CS \triangleq$ Los Cargadores de San Diego Ganan el campeonato de la Conferencia Americana.

$O \triangleq$ El campeonato de la Conferencia Americana no lo ganan ni los Potros ni los Cargadores.

Datos:

$P(PB) = 0.25$ $P(CA \mid PB) = 0.45$

$P(CS) = 0.2$ $P(CA \mid CS) = 0.55$

$P(O) = 0.55$ $P(CA \mid O) = 0.35$

a) $P(CA) = P(PB)P(CA \mid PB) + P(CS)P(CA \mid CS) + P(O)P(CA \mid O)$

$$= 0.25\,(0.45) + 0.2\,(0.55) + 0.55\,(0.35)$$

$$= 0.415$$

b) $$P(PB \mid CA) = \frac{P(PB)\, P(CA \mid PB)}{P(CA)}$$

$$= \frac{0.25\,(0.45)}{0.415} = 0.271$$

Ejemplo 2.37

En cierta ciudad, durante el mes de mayo, la probabilidad de que un día lluvioso sea seguido por otro también lluvioso es de 0.8 y la probabilidad de que un día soleado anteceda a un día lluvioso es de 0.6. Suponiendo que cada día se clasifica como lluvioso o soleado y que el tiempo de cualquier día depende solamente del tiempo del día anterior, determinar la probabilidad de que en la ciudad citada un día lluvioso de mayo anteceda a dos días lluviosos más, luego, a un día soleado y finalmente a otro día lluvioso.

Resolución

Eventos:

$S_i \triangleq$ El día i es soleado.

$L_i \triangleq$ El día i es lluvioso.

$$P(L_2\, L_3\, S_4\, L_5 \mid L_1) = (0.8)\,(0.8)\,(1 - 0.8)\,(0.6) = 0.0768$$

Apéndice A CONJUNTOS

TEORÍA ELEMENTAL: CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

CONCEPTO

La teoría de conjuntos se encuentra en los fundamentos de la matemática, y de ~~hay~~ la necesidad de entender algunos conceptos básicos que se utilizan en diversas asignaturas de ingeniería.

El *concepto de conjunto* es fundamental en la matemática; sin embargo, no existe una definición de conjunto[3]. Intuitivamente, se dice que un conjunto es un lista, colección o clase de objetos bien definidos. Los objetos se llaman elementos o miembros del conjunto.

---

3 Otros conceptos fundamentales de la~~s~~ matemática~~s~~ no tienen definición, como por ejemplo: punto, recta, plano, etc.

Ejemplos de conjuntos

- Los alumnos de la Facultad de Ingeniería.
- Los Ingenieros Industriales.
- Los números pares.
- Los números 1, 3, 5, 7, 9, 11, . . .

NOTACIÓN

Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas, generalmente las primeras del abecedario.

$$A,\ B,\ C,\ \ldots$$

y los elementos de los conjuntos se representan por la misma letra del conjunto pero minúscula.

$$a,\ b,\ c, \ldots$$

Un conjunto se define a través de los elementos que lo forman (pertenencia), si el elemento a pertenece al conjunto A entonces se escribe:

$$a \in A$$

Cuando un elemento, por ejemplo y, no pertenece al conjunto A se escribe:

$$y \notin A$$

Al escribir la asignación o igualdad de un conjunto se utilizan llaves, como se muestra a continuación

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

o bien

$$B = \{ \ x \mid x \text{ es un número par } \}$$ [4]

Obsérvese la forma en la que se definieron los dos últimos conjuntos. Cuando se define un conjunto escribiendo los elementos que los forman y separándolos con comas, se utiliza la *forma tabular*, y se dice que el conjunto se define por *extensión*. Mientras que cuando el conjunto se define mediante una regla, se utiliza la *forma constructiva* y se dice que el conjunto se define por *comprensión*.

Ejercicio
Definir 5 conjuntos por comprensión y 5 por extensión.

CARDINALIDAD

La *cardinalidad* de un conjunto es el número de elementos que pertenecen a un conjunto. La cardinalidad se denota generalmente por n, aunque también se llega a utilizar el símbolo $\#$.

---

[4] Recuérdese que la línea vertical " | " se lee "*tal que*".

Ejemplo A.1
Sea el conjunto

$$C = \{ x \mid x \text{ es un día de la semana } \}$$

Obtener la cardinalidad de C.

Resolución
Es claro que el conjunto es

$$C = \{ Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo \}$$

Por lo que

$$n(C) = 7$$

No todos los conjuntos tienen cardinalidad, esto se debe a que existen conjunto *finitos* e *infinitos*. Intuitivamente un conjunto es finito si consta de un cierto número de elementos distintos, es decir, que se pueda terminar de contar a los elementos del conjunto, en caso contrario se dice que el conjunto es infinito. Además existen conjuntos *numerables* y *no numerables*. Intuitivamente, un conjunto numerable es aquel que se puede contar, (o bien, poner en relación 1 a 1 con el conjunto de los números naturales) y un conjunto no numerable es aquel que no se puede contar.

Ejemplo A.2
Clasificar los siguientes conjuntos.

a) $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

b) $B = \{ \ x \mid x \text{ es un número par } \}$

c) $C = \{ \ x \mid x \text{ es un número real entre } 0 \text{ y } 1 \}$

Resolución

a) Finito.

b) Infinito numerable.

c) Infinito no numerable.

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos A y B son *iguales* si ambos tiene los mismos elementos; es decir, si cada elemento que pertenece a A también pertenece a B y cada elemento que pertenece a B también pertenece a A.

La igualdad se denota con el símbolo =

$$A = B$$

Debe observarse que la igualdad de conjuntos está basada en los elementos que lo componen, no en la forma en la que se describe, así los siguientes pares de conjuntos son iguales.

$A = \{ x \mid x \textit{ es un día de la semana } \}$
$B = \{ \textit{Lunes}, \textit{Martes}, \textit{Miércoles}, \textit{Jueves}, \textit{Viernes}, \textit{Sábado}, \textit{Domingo} \}$

$C = \{ x \mid x^2 - 1 = 0 \}$
$D = \{ -1, 1 \}$

$E = \{ 1, 2, 3 \}$
$F = \{ 3, 2, 1, 3 \}$

En efecto los conjuntos E y F son iguales, debe entenderse que los elementos 1,2,3 son abstracciones, y no importa el orden en el que aparecen ni que se repitan. Más aún, el 3 es una abstracción, representa "el número 3", y aunque aparezca repetido es el mismo número 3 como abstracción y no es "otro" número 3, por lo que los elementos de los conjuntos son los mismos y su cardinalidad es también la misma $n(E) = n(F) = 3$.

Ejemplo A.3
Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son iguales.
a) $A = \{ 1, 3 \}$
b) $B = \{ x \mid x \textit{ es un número de un dado } \}$
c) $C = \{ x \mid x^2 - 4x + 3 = 0 \}$
d) $D = \{ x \mid x \textit{ es el número de caras cuando se lanzan seis monedas } \}$

Resolución
$A = \{ 1, 3 \}$
$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
$C = \{ 1, 3 \}$ puesto que son las raíces
$D = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
Por lo que los únicos eventos iguales son A y C, $A = C$.

SUBCONJUNTOS

Si todo elemento que pertenece al conjunto A, también es elemento del conjunto B entonces A es un *subconjunto* de B. Lo cual se denota $A \subset B$ (y se lee A es subconjunto de B).

Por ejemplo, si los conjuntos son:

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$B = \{ 5, 4, 3, 2, 1 \}$

se observa con claridad que $A \subset B$.

Aunque es poco común, para el ejemplo anterior, también puede decirse que B es un *superconjunto* de A, lo cual se denota $B \supset A$.

La igualdad de conjuntos puede también definirse a partir de la definición de subconjuntos. Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Todo conjunto es subconjunto de sí mismo; es decir, para el conjunto A se puede escribir $A \subset A$.

Puesto que todo conjunto es subconjunto de sí mismo, cuando A es subconjunto de B, pero A y B no son iguales, entonces se dice que A es un *subconjunto propio* de B.

Algunos textos utilizan el símbolo $\subseteq$ para indicar que A es un subconjunto de B, $A \subseteq B$; dejando el símbolo $\subset$ para indicar que A es subconjunto propio de B, $A \subset B$. En este curso se utilizará solamente el símbolo $\subset$, que no distingue entre subconjunto y subconjunto propio.

Para indicar que A no es un subconjunto de B se cancela el símbolo de subconjunto, teniéndose $A \not\subset B$.

CONJUNTO UNIVERSAL

Todos los conjuntos que se utilizan en un problema o en una investigación se consideran subconjuntos de un conjunto fijo llamado *conjunto universal*, el cual se denota generalmente por U.

Ejemplo A.4

Escribir los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos universo.
a) El conjunto de los enteros entre 1 y 50 divisibles entre 8.
b) El conjunto $S = \{ x \mid x^2 + 4x - 5 = 0 \}$.
c) El conjunto de resultados cuando una moneda se lanza al aire hasta que resultan una águila o tres soles.

d) El conjunto $S = \{ x \mid x \text{ es un continente} \}$.

e) El conjunto $S = \{ x \mid 2x - 4 \geq 0 \quad y \quad x < 1 \}$.

Resolución

a) $S = \{ 8, 16, 24, 32, 40, 48 \}$.

b) Las soluciones de $x^2 + 4x - 5 = 0$ son -5 y 1, por lo tanto $S = \{ -5, 1 \}$.

c) Denotando A para águila y O para sol.
$S = \{ A\ ,\ OA\ ,\ OOA\ ,\ OOO \}$.

d) S = {América, África, Europa , Asia, Antártida y Oceanía}.

e) Resolviendo la inecuación (desigualdad) se tiene que $x \geq 2$ pero de la condición $x < 1$, se concluye que $S = \varnothing$.

Ejemplo A.5

Describir por comprensión el conjunto universo S consistente de todos los puntos en el primer cuadrante, dentro de un círculo de radio 3 con centro en el origen.

Resolución

$S = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 9 ; x > 0, y > 0 \}$

Ejemplo A.6

Un experimento consiste en lanzar primero un dado y después lanzar una moneda, siempre y cuando el número en el dado sea par. Si el resultado del dado es non, la moneda se lanza dos veces. Al utilizar la notación 4H, por ejemplo, se indica el elemento donde el número resultante en el dado es un 4 y la moneda cae cara; 3HT para señalar el elemento de que el dado cae 3 y en el la moneda se observan una cara y una cruz. Describir el conjunto universo completo.

Resolución

S = {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T}

Obsérvese que el conjunto universo está formado por 18 elementos.

Ejemplo A.7

Un experimento consiste en lanzar un par de dados, uno verde y uno rojo y registrar los números que resultan. Si x es el resultado del dado verde y y del dado rojo, describir el conjunto universo S.

a) Por extensión (lista de los elementos (x, y)).

b) Por comprensión (utilizando el método de la regla).

Resolución

a)

$$S = \left\{ \begin{array}{c} (1,1), (1,2), \ldots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \ldots, (2,6) \\ . \\ . \\ . \\ (6,1), (6,2), \ldots, (6,6) \end{array} \right\}$$

b) $S = \{ (x, y) \mid x = 1, 2 \ldots, 6\ ,\ y = 1, 2, \ldots 6 \}$

CONJUNTO VACÍO

Intuitivamente, el *conjunto vacío* es aquel que carece de elementos.

Por ejemplo, si A es el conjunto de personas mayores de 300 años con vida, entonces A es vacío.

En matemáticas, otro ejemplo sería

$$B = \{ x \mid x = x + 1 \}$$

y es vacío puesto que no existe un número que sea igual a sí mismo más uno.

El conjunto vacío se denota por: $\varnothing$, o bien por { }.

El conjunto vacío $\varnothing$ se considera subconjunto de cualquier conjunto.

Debe observarse la diferencia entre los conjuntos $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$. El primero es el conjunto vacío, mientras que el segundo es el conjunto que contiene al conjunto vacío. De hecho, es un conjunto de conjuntos, concepto que no se desarrolla en el curso propedéutico. La diferencia es difícil de entender y deberá considerarse como una definición.

COMPLEMENTO

El *complemento de un conjunto* A, que se denota mediante $\overline{A}$, A^c o A' es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A.

Ejemplo A.8

Si el conjunto universo es $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ y el conjunto

$A = \{2,4,6\}$, entonces el complemento de A es:
$\overline{A} = \{1,3,5,7,8\}$

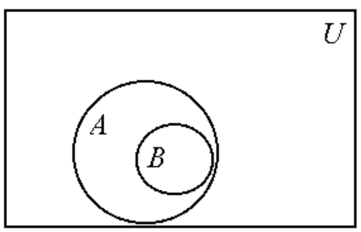
CONJUNTOS DISJUNTOS O EXCLUYENTES

Si dos conjuntos A y B no tienen ningún elemento en común, es decir, ningún elemento de A está en B y viceversa, entonces se dice que A y B son *disjuntos*.

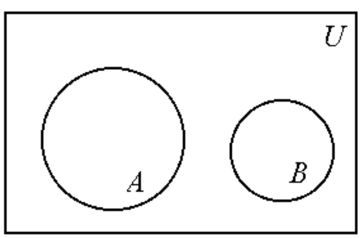
DIAGRAMAS DE VENN-EULER

Una manera sencilla de ilustrar los conjuntos y subconjuntos, así como las relaciones entre ellos es mediante la utilización de los diagramas de Venn-Euler. Los diagramas de Venn-Euler, o simplemente diagramas de Venn, son las representación de los conjuntos mediante un área plana, por lo general el área se delimita por una circunferencia.

En la siguiente figura se ilustra el conjunto universo, U; y los conjuntos A y B, donde B es subconjunto de A.



En la siguiente figura se ilustra el conjunto universo, U; y los conjuntos A y B, donde A y B son conjuntos disjuntos.



CONJUNTO POTENCIA

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto A se llama *conjunto potencia*, y se denota generalmente por 2^A.

Ejemplo A.9
Si $A = \{1,2\}$, entonces el conjunto potencia de A es
$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

La cardinalidad del conjunto potencia de A está dada por $n(2^A) = 2^{n(A)}$

El conjunto potencia es un *conjunto de conjuntos*, es decir, sus elementos son a su vez conjuntos.

Obsérvese que los conjuntos que forman al conjunto potencia de un conjunto A, incluyen al conjunto vacío (puesto que el vacío es subconjunto de cualquier conjunto) y al mismo conjunto A (puesto que todo conjunto es subconjunto de sí mismo).

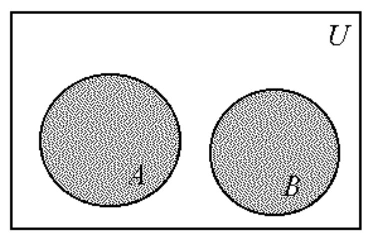
OPERACIONES FUNDAMENTALES CON CONJUNTOS

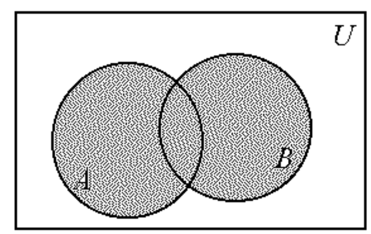
UNIÓN

La *unión* de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B. Se denota por $A \cup B$.

La unión es una operación conmutativa, es decir: $A \cup B = B \cup A$

En un diagrama de Venn-Euler, dados dos conjuntos A y B, la unión de ambos se puede indicar mediante un rayado, coloreado, punteado, etc.





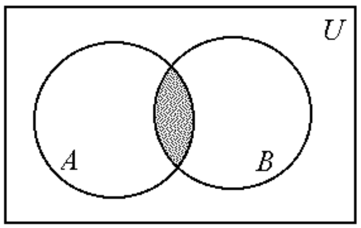
INTERSECCIÓN

La *intersección* de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen tanto a A como a B. Se denota por $A \cap B$.

Dos conjuntos disjuntos no tienen intersección.

La intersección es una operación conmutativa, es decir: $A \cap B = B \cap A$

En un diagrama de Venn-Euler, la intersección es el área común de los dos conjuntos.

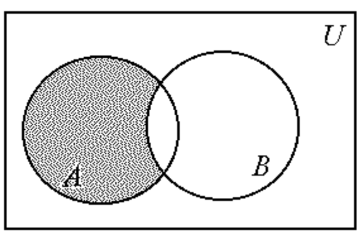


DIFERENCIA

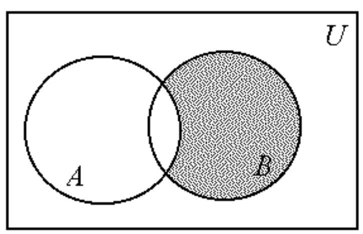
La *diferencia* de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a A, pero no a B. Se denota por $A - B$. La diferencia de dos conjuntos no es una operación conmutativa, es decir, en general $A - B \neq B - A$.

En ocasiones la diferencia de dos conjuntos se denota por: $A \,/\, B$, o bien $A \sim B$; pero es preferible utilizar la notación tradicional $A - B$. Ejemplo con diagramas de Venn-Euler.

$A - B$



$B - A$



Ejemplo A.10

Si el conjunto universal se define como

$U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y se definen los subconjuntos

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{2,4,6\}$

$C = \{1,3,5,7\}$

Determinar:

a) $\overline{A}$	b) $\overline{B}$
c) La relación entre $\overline{C}$ y B	d) $A \cup B$
e) $A \cup C$	f) $B \cup C$
g) $A \cap B$	h) $A \cap C$
i) $B \cap C$	j) $U - A$
k) $A - B$	l) $\overline{A} - \overline{B}$

Resolución

a) $\overline{A} = \{4,5,6,7\}$

b) $\overline{B} = \{1,3,5,7\}$

c) Puesto que $\overline{C} = \{2,4,6\}$, entonces $\overline{C} = B$

d) $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

e) $A \cup C = \{1,2,3,5,7\}$

f) $B \cup C = U$, es decir, el conjunto universo

g) $A \cap B = \{2\}$

h) $A \cap C = \{1,3\}$

i) $B \cap C = \varnothing$

j) $U - A = \overline{A} = \{4,5,6,7\}$

En general, para cualquier conjunto A, $U - A = \overline{A}$.

k) $A - B = \{1,3\}$

l) $\overline{A} - \overline{B} = \{4,6\}$

LEYES DE CONJUNTOS

Las operaciones de conjuntos pueden extenderse al involucrar cualquier número finito de conjuntos, en particular al utilizar la unión e intersección para tres conjuntos se tienen las siguientes leyes:

Leyes de identidad

$A \cup \varnothing = A$ $\quad$ $A \cap U = A$

$A \cup U = U$ $\quad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

Leyes asociativas

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Leyes distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

PRODUCTO CARTESIANO

Si A y B son dos conjuntos, entonces el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$ se denomina conjunto del *producto cartesiano* de A y B, o simplemente producto cartesiano. El producto cartesiano se denota por $A \times B$, y por comprensión se define como:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A , b \in B \}$$

El producto cartesiano no es conmutativo.

La cardinalidad del producto cartesiano es $n(A \times B) = \big(n(A) \big) \; \big(n(B) \big)$

Ejemplo A.11

Sean los conjuntos $A = \{ 1, 2, 3 \}$ y $B = \{ 3, 4 \}$

Obtener $A \times B$

Resolución

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{c} (1,3), (1,4), \\ (2,3), (2,4), \\ (3,3), (3,4) \end{array} \right\}$$

Ejemplo A.12

Un experimento consiste en lanzar un par de dados, uno verde y uno rojo y registrar los números que resultan. Sea x es el resultado del dado verde y y el dado rojo, listar los elementos que corresponden a los siguientes conjuntos.

a) A, en el que la suma sea mayor que 8.

b) B, de que ocurra un dos en cualquiera de los dados.

c) C, de que se obtiene un número mayor de 4 en el dado verde.

d) $A \cap C$.

e) $A \cap B$.

f) $B \cap C$.

Respuestas

a) A = {(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

b) B = {(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)}

c) C = {(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

d) $A \cap C$ = {(5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5)}

e) $A \cap B = \varnothing$

f) $B \cap C$ = {(5,2), (6,2)}

Apéndice B TEOREMA DEL BINOMIO

Una suma de dos elementos $a + b$ se denomina *binomio*. Es común utilizar n binomio elevado a una potencia natural, $(a + b)^n$; y el *teorema del binomio* proporciona una fórmula que permite desarrollar la expresión anterior en una suma.

Teorema 1.8 (Del Binomio)

El desarrollo del binomio $(a + b)^n$ está dado por la expresión

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r \, b^{n-r}$$

Y los números combinatorios $\binom{n}{r}$ reciben el nombre de *coeficientes binomiales*.

Ejemplo B.1

Demostrar que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Resolución

Del Binomio de Newton se sabe que

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

por lo que

$$(1 + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i}$$

es decir: $$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

AUTOEXAMEN TEMA II

1.- Una compañía planea construir cinco almacenes adicionales en sitios nuevos. Se consideran 10 sitios. El número total de elecciones que pueden considerarse es:

A) 50 B) 120 C) 252 D) *10!* E) 30240

2.- El pedido de una computadora personal digital puede especificar uno de cinco tamaños de memoria, cualquier tipo de monitor de tres posibles, cualquier tamaño de disco duro de entre cuatro posibles y puede incluir o no una tableta para lápiz electrónico. El número de sistemas distintos que pueden ordenarse es:

A) 14 B) 60 C) 16 D) 120
E) Ninguno de los anteriores.

3.- Un contratista desea construir 9 casas, cada una con diseño diferente. El número de formas diferentes en las que puede ubicar estas casas si 6 terrenos están de un lado de la calle y 3 están en el lado opuesto es:

A) $(6)\ (3) = 18$ B) $(6!)\,(3!)\,(2) = 8640$ C) $\binom{9}{6}\binom{9}{3} = 7056$

D) $9! = 362880$ E) $P_6^9\ \ P_3^9 = 30481920$

4.- Un club de tenis está formado por cinco hombres y cuatro mujeres. Si un equipo de dobles mixtos se forma con un hombre y una mujer, el número de partidos de dobles mixtos que se pueden realizar con los miembros del club es:
A) 380 B) 40 C) 190 D) 120 E) 240

5.- Un examen de 20 preguntas, tiene 5 opciones por pregunta. El número de formas diferentes para contestar todo el examen es:

A) 100 B) 32×10^5 C) 15504 D) 5^{20}
E) Ninguna de las anteriores.

6.- De un grupo de 15 graduados en Ingeniería se seleccionan 10 de manera aleatoria.
Sea P la probabilidad de que 4 de los mejores 5 graduados estén incluidos en la selección de 10, entonces la afirmación correcta es:

A) $0 \le P \le \frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{5} < P \le \frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{5} < P \le \frac{3}{5}$

D) $\frac{3}{5} < P \le \frac{4}{5}$ E) $\frac{4}{5} < P \le 1$

7.- Si $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.5$ y $P(\overline{A \cup B}) = 0.1$, entonces $P(A \mid B)$ es:

A) $\dfrac{3}{7}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) $\dfrac{5}{7}$ D) $\dfrac{7}{9}$ E)1

8.- Suponer que $P(A \mid B) = 0.8$, $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.2$. Entonces $P(B \mid A)$.
A) 0.16 B) 0.1 C) 0.125 D) 0.32
E) Ninguna de las anteriores.

9.- La probabilidad del espacio muestral, $P(S)$, debe cumplir con:

A) $P(S) < 1$ B) $P(S) = 0$ C) $P(S) = 1$
D) $0 < P(S) < 1$ E) $0 \le P(S) < 1$

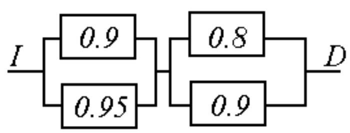
10.- Un lote de 50 tornillos tiene 30 que son más gruesos que la dimensión requerida. Suponer que del lote se seleccionan 3 tornillos al azar, sin reemplazo. La probabilidad de que los tres tornillos sean más gruesos es:

A) 0.207 B) 0.06 C) 0.18 D) 0.02
E) Ninguna de las anteriores.

11.- Dados los eventos A y B, para los cuales $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ y $P(A|B) = 0.1$, entonces $P(B|A)$ es:

A) 0.3 B) 0.03 C) 0.075
D) 0.9 E) Ninguna de los anteriores.

12.- El siguiente circuito trabaja si y sólo si, existe una trayectoria en funcionamiento de izquierda a derecha. El dibujo indica la probabilidad de que cada dispositivo funcione. Supóngase que la probabilidad de que un dispositivo funcione no depende del funcionamiento de los demás. Determinar la probabilidad de que el circuito funcione.



A) 0.6156 B) 0.3844 C) 0.975 D) 0.9751 E) 0.9999

13.- En una cierta gasolinería, se sabe que el 70% de los clientes utilizan Magna y que el 30% utilizan Premium. De los clientes que utilizan gasolina Magna, el 40% llena el tanque, mientras que el 55% de los que utilizan Premium llenan el tanque. La probabilidad de que un cliente cualquiera llene el tanque de gasolina es:

A) 0.43 B) 0.445 C) 0.95 D) 0.7272
E) Ninguna de las anteriores.

14.- Supóngase que la compañía de seguros "El cóndor" clasifica a las personas en alto y bajo riesgo. Los registros históricos indican que la probabilidad de que una persona clasificada en alto riesgo tenga un accidente es 0.3, mientras que para una persona de bajo riesgo es 0.08. Si el 70% de la población está clasificada como de bajo riesgo, entonces la probabilidad de que una persona que no tuvo accidente el año pasado esté clasificada como de bajo riesgo es:

A) 0.21 B) 0.246 C) 0.7 D) 0.754
E) Ninguna de las anteriores.

15.- Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes entonces se puede afirmar sobre ellos que:

A) Son colectivamente exhaustivos. B) Su unión es el vacío.
C) Son dependientes.
D) $P(A \mid B) = P(A)$
E) Ninguna de las anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Hines, William W. y Montgomery, Douglas C. - Probabilidad y Estadística para ingeniería, cuarta edición..- CECSA.- México, 2005.

Milton, Susan J. Y Arnold, Jesse C.- Probabilidad y Estadística para con aplicaciones para ingeniería y ciencias computacionales, cuarta edición.- McGraw-Hill.- México, 2004..

Devore, Jay L.- Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias, sexta edición.- Editorial Thomson.- México, 2005.

Wackerly Dennis D.- Mendenhall, William, *et al*.- Estadística Matemática con Aplicaciones, sexta edición.- Editorial Thomson.- México, 2002.

Walpole, Ronald E., *et al*.- Probability and Statistics for Engineers and Scientists.- Pearson.- USA, 2007.

Montgomery, Douglas C. y Runger, George C.-Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería, segunda edición.- Limusa-Wiley.- México, 2002.

Scheaffer, Richard L. y McClave, James T.- Probabilidad y Estadística para Ingeniería.- Grupo Editorial Iberoamérica.- México, 1993.

Canavos, George C.- Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos.- McGraw-Hill.- México, 1988.

Meyer, Paul L.- Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.- Addison Wesley

Iberoamericana.- México, 1992.

Borras García, Hugo E., *et al*.- Apuntes de Probabilidad y Estadística.-Facultad de Ingeniería.- México, 1985.

Rosenkrantz, Walter A.- Introduction to Probability and Statistics for Scientists and Engineers.- McGraw-Hill.- EE.UU., 1997.

Lipschutz, Seymour.- Teoría de Conjuntos y Temas Afines.- McGraw-Hill.- México, 1991.