

PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA

Notas de clase

Tema //

Modelos
Probabilísticos
Comunes

Profesores: A. Leonardo Bañuelos S.
Nayelli Manzanarez Gómez

TEMA IV

MODELOS PROBABILÍSTICOS COMUNES

INTRODUCCIÓN

Las variables aleatorias sirven para modelar problemas con incertidumbre en los cuales la pregunta que se desea contestar está claramente delimitada. En muchas ocasiones los problemas de interés, coinciden en la forma en la que se define la variable aleatoria, y con ello su función de probabilidad o de densidad y estas coincidencias permiten la formulación de modelos. Los modelos o distribuciones de las variables aleatorias pueden clasificarse en continuos y discretos.

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Una gran cantidad de fenómenos pueden modelarse utilizando distribuciones discretas o continuas. Para el caso de las distribuciones discretas considérense los siguientes ejemplos.

- En el lanzamiento de una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener una águila?
- En el lanzamiento de n monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener x águilas?
- En un metro cuadrado de tela, ¿cuál es la probabilidad de observar x defectos? etc.

Las distribuciones discretas que se estudiarán en este tema son:

Uniforme
Bernoulli
Binomial
Geométrica
de Pascal (Binomial negativa)
Hipergeométrica
de Poisson

DISTRIBUCIÓN DISCRETA UNIFORME

La distribución discreta uniforme es una de las más simples de todas las distribuciones discretas de probabilidad. Es aquella en la cual la v.a. asume cada uno de sus valores con la misma probabilidad.

Definición 4.1

Sea X una variable aleatoria que toma los valores x_1, x_2, \dots, x_k , con igual probabilidad

$$f_X(x; k) = \frac{1}{k}, \quad x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

entonces la distribución es discreta uniforme con parámetro k .

Se denota $X \sim \text{uniforme}(k)$.

En la notación $f_X(x; k)$, la variable aleatoria es X , mientras que k es un parámetro del cual depende la distribución¹. Puede utilizarse la notación indicando el parámetro, o simplemente $f_X(x)$. En las definiciones aquí mostradas se escribirá la función utilizando el parámetro, pero en la solución de problemas se escribirá simplemente $f_X(x)$.

Teorema 4.1

Si X es una variable aleatoria con distribución discreta uniforme, entonces:

$$\mu_X = E(X) = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu_X)^2}{k}$$

Demostración

De la definición de valor esperado

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^k x_i f_X(x_i, k) = \sum_{i=1}^k x_i \left(\frac{1}{k} \right)$$

Y de la definición de la variancia

¹ En realidad k no es un parámetro. La distribución discreta uniforme no tiene parámetros, pero en este momento es de utilidad la notación $f_X(x; k)$.

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu_X)^2 f_X(x_i; k)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu_X)^2 \left(\frac{1}{k} \right)$$

Debe observarse la similitud entre las fórmulas de la media y la variancia de una v.a. discreta y las fórmulas utilizadas en la estadística descriptiva para la media y la variancia de un conjunto de datos.

Ejemplo 4.1

Se selecciona a un alumno de un grupo de 10 para supervisar cierto trabajo, escogiendo aleatoriamente el nombre de una caja que contiene 10 papeles numerados del 1 al 10.

- Obtener la fórmula para la distribución de probabilidad de X que representa el número del papel que se saca. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que se saque sea menor a 4?
- Determinar la media y la variancia de X .

Resolución

- $X \sim \text{uniforme}(10)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & , \quad x = 1, 2, 3, \dots, 10 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = \frac{3}{10}$$

- $$E(X) = \sum_{x=1}^{10} x \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10]$$

$$= \frac{1}{10} (55) = 5.5$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{x=1}^{10} (x_i - \mu_X)^2 \left(\frac{1}{10} \right) = 8.25$$

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Es el caso más sencillo para modelar un experimento. Tiene únicamente dos resultados posibles; satisfactorio o insatisfactorio, bueno o malo, alto o bajo, etc. que en general, pueden denominarse éxito (e) o fracaso (f), con probabilidades p y $q = 1 - p$, respectivamente.

Definición 4.2

Sea X la variable aleatoria que representa el número de éxitos que se obtienen al realizar un ensayo de Bernoulli, entonces X tiene una distribución de Bernoulli con parámetro p .

$$f_X(x; p) = \begin{cases} 1 - p & ; \quad x = 0 \\ p & ; \quad x = 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

La distribución de Bernoulli también puede escribirse como:

$$f_X(x) = \begin{cases} p^x (1 - p)^{1-x} & ; \quad x = 0, 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 4.2

Si X es una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, entonces:

$$\mu_X = E(X) = p$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = p q$$

La demostración de la media y la variancia es inmediata a partir de la definición.

La limitante de la distribución Bernoulli es que sólo se tienen dos resultados y el experimento sólo se realiza una vez, por lo que sirve para el lanzamiento de una moneda (que también se puede modelar con distribución uniforme si la moneda es justa), para el lanzamiento de un dado pero cuando interesa la observación de un número en particular contra la no ocurrencia de dicho número, etc.

La principal utilidad de la distribución de Bernoulli se obtiene cuando se generaliza la definición de la variable aleatoria de Bernoulli. Para ello, considérese el proceso de Bernoulli.

PROCESO DE BERNOULLI

Si se repite un ensayo de Bernoulli, se tiene entonces un proceso de Bernoulli.

El proceso de Bernoulli tiene las siguientes propiedades.

- 1) El experimento consiste de n ensayos de Bernoulli.
- 2) Los resultados de cada ensayo pueden clasificarse como éxito o fracaso.
- 3) La probabilidad de éxito p , permanece constante para todos los ensayos.
- 4) Los ensayos son independientes.

A partir del proceso de Bernoulli se pueden definir otras variables aleatorias, como la binomial, la geométrica y la de Pascal.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Definición 4.3

Sea X la variable aleatoria que representa el número de éxitos que se observan al realizar un proceso de Bernoulli, entonces X recibe el nombre de variable aleatoria binomial, con distribución

$$f_X(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & ; \quad x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota: $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ ²

La expresión de la distribución binomial es inmediata al observar que se desean x éxitos en n ensayos, por lo que se tiene $n - x$ fracasos; puesto que el orden en el que se

obtienen los éxitos y los fracasos no es importante, deben de considerarse todas las posibilidades, por lo que

$$P(X=x) = ppp \dots qq + qpp \dots qqp + \dots$$

$$P(X=x) = p^x q^{n-x} + p^x q^{n-x} + \dots$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Teorema 4.3

Sea X una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros n y p , entonces:

$$\mu_X = np$$

$$\sigma_X^2 = npq$$

$$M_X(\theta) = (q + e^\theta p)^n$$

Ejemplo 4.3

Supóngase que los motores de un aeroplano operan en forma independiente y tienen una probabilidad de falla de 0.4. Suponiendo que un aeroplano puede realizar un vuelo seguro en tanto se mantengan funcionando al menos la mitad de sus motores, determinar qué aeroplano, uno de 4 motores o uno de 2, tiene mayor probabilidad de terminar su vuelo en forma segura.

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de motores que funcionen en el aeroplano de 2 motores, y sea Y la variable aleatoria que representa el número de motores que funcionen en el aeroplano de 4 motores.

$$X \sim \text{Binomial}(n=2, p=0.6), \quad Y \sim \text{Binomial}(n=4, p=0.6)$$

Entonces, para que los aeroplanos tengan un vuelo seguro se tiene:

$$P(X \geq 1) = \sum_{x=1}^2 \binom{2}{x} (0.6)^x (0.4)^{2-x} = 0.84$$

$$P(Y \geq 2) = \sum_{x=2}^4 \binom{4}{x} (0.6)^x (0.4)^{4-x} = 0.8208$$

² Algunos autores denotan a la variable aleatoria binomial como $X \sim b(n, p)$ o $X \sim \text{bin}(n, p)$

Por lo que el aeroplano con 2 motores tiene una ligera probabilidad mayor de terminar su vuelo en forma segura.

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Definición 4.4

Sea X la variable aleatoria que representa el número de ensayos de Bernoulli que se requieren para observar por primera vez un éxito, entonces X tiene una distribución geométrica con parámetro p .

$$f_X(x) = \begin{cases} q^{x-1}p & ; x = 1, 2, \dots, n \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota por $X \sim \text{Geométrica}(p)$.

La expresión de la distribución geométrica se deduce con facilidad al plantear las probabilidades de una serie de fracasos consecutivos y finalmente un éxito.

$$P(X=1) = P(\text{éxito}) = P(e) = p$$

$$P(X=2) = P(\text{fracaso éxito}) = P(fe) = qp$$

$$P(X=3) = P(ffe) = qpq = q^2p$$

$$P(X=4) = P(fffe) = qpqp = q^3p$$

.

.

.

$$P(X=x) = q^{x-1}p$$

La distribución geométrica en efecto es una función de probabilidad. Para probar que la suma de todos los posibles valores de x es 1 se utiliza la *serie geométrica*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

por lo que

$$\sum_{k=0}^{\infty} pq^k = \sum_{x=1}^{\infty} pq^{x-1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} pq^k &= p \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= p \frac{1}{1-q} = p \frac{1}{p} = 1 \end{aligned}$$

Teorema 4.4

Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica con parámetro p entonces

$$\mu_X = \frac{1}{p} \quad \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

y función generadora de momentos $M_X(\theta) = \frac{pe^\theta}{1-qe^\theta}$

Demostración de la media

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xpq^{x-1} = p \frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} q^x$$

$$\mu_X = p \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) = \frac{1}{p}$$

■

Ejemplo 4.3

Se supone que el 30% de los aspirantes para cierto trabajo industrial tiene un entrenamiento avanzado en programación computacional. Los aspirantes son entrevistados, uno tras otro, y son seleccionados al azar del conjunto de aspirantes. Determinar la probabilidad de que se encuentre el primer aspirante con un entrenamiento avanzado en programación en la quinta entrevista.

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de entrevistas para obtener al primer aspirante con entrenamiento avanzado.

$X \sim \text{Geométrica}(p = 0.3)$

$$P(X=5) = (0.7)^{5-1}(0.3) = 0.072$$

Al calcular probabilidades con la distribución geométrica, puede ser de gran utilidad su función de distribución acumulada,

$$F_X(x) = 1 - q^{\lfloor x \rfloor}, \quad x \geq 1$$

en donde q es la probabilidad de fracaso y $\lfloor x \rfloor$ es la función parte entera.

DISTRIBUCIÓN DE PASCAL (Distribución Binomial Negativa)

La distribución de Pascal es una generalización de la distribución geométrica, así mismo la distribución Binomial Negativa es una generalización de la de Pascal, por lo que algunos autores utilizan simplemente el nombre de distribución Binomial Negativa.

Definición 4.5

Sea X una variable aleatoria que representa el número de ensayos de Bernoulli que se requieren para observar el r -ésimo éxito, si en cada uno de los ensayos se tiene una probabilidad de éxito p , entonces X tiene una distribución de Pascal con parámetros r y p .

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} & ; \quad x = r, r+1, \dots \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota por $X \sim \text{Pascal}(r, p)$.³

Teorema 4.5

Sea X una variable aleatoria con distribución de Pascal con parámetros r y p , entonces

$$\mu_X = \frac{r}{p} \quad \sigma_X^2 = \frac{r q}{p^2}$$

y función generadora de momentos $M_X(\theta) = \left(\frac{p e^\theta}{1 - q e^\theta} \right)^r$

El nombre de “Distribución binomial negativa” proviene del hecho de que los valores de la distribución $f_X(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$, para $x = r, r+1, \dots$ son los

términos sucesivos de la expansión binomial $\left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p} \right)^{-r}$.

Ejemplo 4.4

Los empleados de una empresa que fabrica aisladores son examinados para detectar la presencia de asbesto en sus pulmones. La empresa debe enviar tres empleados con pruebas positivas de asbesto a un centro médico para realizarles más exámenes. Si el 40% de los empleados tienen pruebas positivas de asbesto en sus pulmones, encontrar la probabilidad de que se tenga que examinar 10 empleados para encontrar tres con asbesto en sus pulmones.

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de empleados que deben examinarse para encontrar al tercero con asbesto en sus pulmones, entonces:

$$X \sim \text{Pascal}(r = 3, p = 0.4)$$

$$P(X = 10) = \binom{9}{2} (0.4)^3 (0.6)^7 = 0.06$$

Ejemplo 4.5

Un gran lote de llantas contiene 10% de defectuosas, y de ahí se elegirán cuatro para colocarlas en un auto.

- Obtener la probabilidad de que seis llantas deban seleccionarse del lote para obtener cuatro en buen estado.
- Calcular el valor esperado y la variancia del número de selecciones que deben efectuarse para obtener cuatro llantas sin defectos.

Resolución

- Sea Y el número de llantas que deben ser seleccionadas hasta encontrar cuatro en buen estado.

$$Y \sim \text{Pascal}(r = 4, p = 0.9)$$

$$P(Y = 6) = \binom{5}{3} (0.9)^4 (0.1)^2 = 0.06561$$

$$\text{b) } E(Y) = \frac{r}{p} = \frac{4}{0.9} = 4.444$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{4(0.1)}{(0.9)^2} = 0.4938$$

³ o bien $X \sim \text{BinNeg}(r, p)$, y en algunos textos $X \sim b^*(r, p)$.

Especial. DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Cuando se desea calcular la probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos, pero la probabilidad en cada ensayo no se mantiene constante, sino que se ve modificada en función de las extracciones anteriores, la distribución binomial no puede utilizarse.

En estos casos se utiliza la distribución hipergeométrica.

En la práctica la diferencia entre la distribución binomial y la distribución hipergeométrica radica en el hecho de que para el caso de la binomial se considera que la población es *infinita* (o finita con reemplazo), mientras que para la hipergeométrica se considera que la población es *finita* de tamaño N (y sin reemplazo) y en ella existen r elementos que satisfacen la característica de interés (éxitos).

Definición 4.6

Si la variable aleatoria X representa el número de éxitos en n ensayos extraídos de una población de tamaño N , con r elementos que tienen la característica de interés, entonces X es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros N , n y r ; y con función de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \\ & \text{con } x \leq r, n-x \leq N-r \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota $X \sim \text{Hipergeométrica}(r, n, N)$ ⁴

La deducción de la fórmula para la distribución hipergeométrica es inmediata al considerar número de casos a favor entre número de casos totales aplicando las técnicas de conteo.

Debe observarse que la distribución hipergeométrica converge a la binomial

⁴ o $X \sim h(N, n, r)$.

cuando $N \rightarrow \infty$. En la práctica, la distribución binomial representa una buena aproximación a la hipergeométrica siempre que $n < 0.1 N$.

Teorema 4.6

Sea X una variable aleatoria con distribución hipergeométrica con parámetros N , n y r , entonces:

$$\mu_X = E(X) = n \left(\frac{r}{N} \right)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = n \left(\frac{r}{N} \right) \left(1 - \frac{r}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

El cociente $\frac{r}{N}$ debe interpretarse como la proporción de elementos que cumplen la característica de interés, o bien, como la probabilidad de observar un éxito en la primera extracción. Entonces si se sustituye $p = \frac{r}{N}$ el valor esperado y la variancia de una distribución hipergeométrica se pueden escribir

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

El valor esperado coincide con el de la distribución binomial y la variancia sólo difiere en el factor $\frac{N-n}{N-1}$, el cual recibe el nombre de *factor de corrección por población finita* y se denota $FCPF$.

$$FCPF = \frac{N-n}{N-1}$$

Si $N \rightarrow \infty$ entonces $FCPF \rightarrow 1$ y los parámetros de la distribución hipergeométrica coinciden con los de la binomial.

Ejemplo 4.6

¿Cuál es la probabilidad de que una auditora de Hacienda detecte solamente dos declaraciones de impuestos con deducciones ilegales, si se seleccionan

aleatoriamente seis de 18 declaraciones, ocho de las cuales contienen deducciones ilegales?

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa al número de declaraciones ilegales detectadas, entonces:

$X \sim \text{Hipergeométrica} (r = 8, n = 6, N = 18)$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \binom{10}{4}}{\binom{18}{6}} = 0.3167$$

Ejemplo 4.7

Un cargamento de 120 alarmas contra robo contiene cinco defectuosas. Si tres de ellas son seleccionadas aleatoriamente y embarcadas para un cliente, obtener la probabilidad de que al cliente le toque una defectuosa, utilizando

- la fórmula de la distribución hipergeométrica;
- la fórmula de la distribución binomial como una aproximación.

Resolución

- Sea X la variable aleatoria que representa el número de alarmas contra robo defectuosas de una muestra de tres, si en un lote de 120 sólo cinco están defectuosos

$X \sim \text{Hipergeométrica} (r = 5, n = 3, N = 120)$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{115}{2}}{\binom{120}{3}} = 0.1167$$

- Sea Y la variable aleatoria que representa el número de alarmas defectuosas.

$Y \sim \text{Binomial} \left(n = 3, p = \frac{5}{120} \right)$

$$P(Y = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{5}{120} \right)^1 \left(\frac{115}{120} \right)^2$$

$$P(Y = 1) = 0.1148$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de Poisson es una de las distribuciones discretas que tienen más aplicación. Sirve cuando se desea calcular la probabilidad de ocurrencias de un evento en un intervalo continuo determinado. En particular, se puede modelar el número de llegadas por unidad de tiempo.

La distribución de Poisson surge a partir del proceso de Poisson, el cual cumple con las siguientes características.

1) Estacionaridad. La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo de tiempo de longitud t es λt , con λ constante. λ recibe el nombre de intensidad del proceso.

2) Unicidad o No multiplicidad. La probabilidad de que ocurra más de un evento en un intervalo (de tiempo) de longitud h ($h \rightarrow 0$) es despreciable comparada con la probabilidad de que ocurra solamente uno.

3) Independencia. El número de ocurrencias en cualquier intervalo de tiempo es independiente del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo.

Deducción de la función de Probabilidad de Poisson a partir de la Distribución Binomial

Considérese la distribución binomial

$$f_X(x; n, p) = \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

si para $n \geq 1$ se cumple la relación $p = \frac{\lambda}{n}$ de modo que

$$n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np = \lambda$$

entonces

$$\begin{aligned} f_X(x; \lambda) &= \frac{n!}{(n-x)! x!} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-x} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \frac{n!}{(n-x)! n^x \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^x} \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{\left[n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right]^x}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$, mientras que el tercer factor tiende a uno, por lo que:

$$f_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Para modificar la escala se sustituye λ por λt ,

$$f_X(x; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

que es la distribución de Poisson obtenida anteriormente.

La escala t no es indispensable para la distribución de Poisson, puesto que puede considerarse que se estudia sobre 1 unidad (de tiempo) con lo que $t = 1$.

Definición 4.7

Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson, con parámetro λ entonces

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & ; \quad x = 0, 1, \dots \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Comúnmente, las unidades de la intensidad λ se consideran $\left[\frac{\text{ocurrencias}}{\text{tiempo}} \right]$,

pero en general son $\left[\frac{\text{eventos}}{\text{intervalo continuo}} \right]$.

Teorema 4.7

Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson y parámetro λ , entonces:

$$\mu_X = E(X) = \lambda \quad \sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \lambda$$

Demostración del valor esperado

La demostración del valor esperado se simplifica si se utiliza la fórmula de recurrencia para la distribución de Poisson,

$$R_P(x) = \frac{f_X(x+1; \lambda)}{f_X(x; \lambda)} = \frac{\lambda}{x+1}$$

de donde

$$f_X(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} f_X(x; \lambda), \quad x = 0, 1, \dots$$

o bien

$$(x+1) f_X(x+1; \lambda) = \lambda f_X(x; \lambda)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) f_X(x+1; \lambda) &= \sum_{x=0}^{\infty} \lambda f_X(x; \lambda) \\ &= \lambda \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x; \lambda) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

y para el lado izquierdo, si $y = x+1$

$$\sum_{x=0}^{\infty} (x+1) f_X(x+1; \lambda) = \sum_{y=1}^{\infty} y f_X(y; \lambda)$$

y reescribiendo a y como x , sin cometer error, puesto que para la suma funciona como variable muda,

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) f_X(x+1; \lambda) &= \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x; \lambda) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

Por lo que $E(X) = \lambda$

Ejemplo 4.8

En promedio, en una cierta intersección ocurren tres accidentes viales por mes. Determinar las probabilidades de que en un determinado mes en esta intersección ocurran

- a) exactamente cinco accidentes;
- b) menos de tres accidentes.

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de accidentes por mes.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 3)$

$$\text{a) } P(X = 5) = \frac{e^{-3}(3)^5}{5!} = 0.10081$$

$$\text{b) } P(X < 3) = P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-3}(3)^x}{x!} = 0.4232$$

Ejemplo 4.9

Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro β , y si $P(X = 0) = 0.2$, calcular $P(X > 2)$.

Nota: La distribución de Poisson es:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} \right)^k}{k!}; \quad k = 0, 1, \dots$$

Resolución

$$\text{De } P(X = 0) = 0.2$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{\beta} \right)^0}{0!}$$

$$0.2 = e^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$\ln 0.2 = -\frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\ln 0.2}$$

$$\beta = 0.6213$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - (0.2 + 0.3219 + 0.259) \\ &= 0.2191 \end{aligned}$$

APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON A LA BINOMIAL

Puesto que la distribución de Poisson puede obtenerse como un caso límite de la distribución binomial, no debe de sorprender que sirva para aproximar probabilidades binomiales. Cuando n es grande y p pequeña, las probabilidades binomiales se pueden aproximar mediante la distribución de Poisson utilizando $\lambda = np$

Una regla aceptable para emplear la aproximación es que si $n \geq 20$ entonces $p \leq 0.05$; o si $n \geq 100$ la aproximación es muy buena para $np \leq 10$. En general, mientras más grande sea n y más pequeña sea p , tanto mejor será la aproximación.

Ejemplo 4.10

Si el 0.8% de los fusibles depositados en un lote están defectuosos, utilizar la aproximación de Poisson para determinar la probabilidad de que cuatro fusibles estén defectuosos en una muestra aleatoria de 400.

Resolución

$$n = 400 \quad p = 0.008 \quad \text{de donde} \quad \lambda = np = 3.2$$

Sea X la variable aleatoria que representa el número de defectuosos entre los 400, $X \sim \text{Binomial}(400, 0.008)$ y Y la variable aleatoria que representa el número de defectuosos, $Y \sim \text{Poisson}(3.2)$

$$P(X = 4) \approx P(Y = 4) = \frac{(3.2)^4 e^{-3.2}}{4!} = 0.178$$

Después de estudiar las variables aleatorias discretas, deben de estudiarse aquellos modelos que sirven para los experimentos cuyo resultado tome valores de un conjunto continuo, lo que da lugar a las distribuciones continuas.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Las distribuciones continuas que se estudiarán en este capítulo, son:

Uniforme continua.
Exponencial.
Normal.

~~No son las únicas distribuciones continuas, algunas otras distribuciones son Gamma, Erlang, t, F y la ji cuadrada. Las distribuciones t y ji cuadrada se estudiarán en el tema 6.~~

DISTRIBUCIÓN CONTINUA UNIFORME

La distribución continua uniforme es la más simple de todas las distribuciones continuas de probabilidad.

Definición 4.8

Sea X una variable aleatoria que se distribuye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \quad a \leq x \leq b \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces X tiene una distribución continua uniforme con parámetros a y b .

Se denota $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$.

En la notación de la distribución uniforme continua, debe observarse que se tienen dos parámetros, por lo que no se puede confundir con la distribución discreta uniforme, puesto que la discreta se denota sólo con un parámetro.

Teorema 4.8

Si X es una variable aleatoria con distribución continua uniforme, entonces:

$$\mu_X = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Las demostraciones son inmediatas al aplicar la definición de valor esperado y variancia.

Para la variable aleatoria continua uniforme, la función de distribución acumulada puede obtenerse integrando directamente, de donde:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; \quad a \leq x \leq b \\ 1 & ; \quad x > b \end{cases}$$

~~que se utiliza en el siguiente ejemplo.~~

Ejemplo 4.11

El tiempo de un viaje (ida y vuelta) de los camiones que transportan el concreto hacia una obra de construcción en una carretera, está distribuido uniformemente en un intervalo de 50 a 70 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración del viaje sea mayor a 65 minutos si se sabe que la duración del viaje es mayor a 55 minutos?

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo del viaje, entonces

$$X \sim \text{Uniforme}(50, 70), \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & ; \quad 50 \leq x \leq 70 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$P(X > 65 \mid X > 55) = \frac{P(X > 65)}{P(X > 55)} = \frac{1 - \frac{65-50}{20}}{1 - \frac{55-50}{20}} = \frac{1}{3}$$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Dentro de un proceso de Poisson, considérese la variable aleatoria T , que representa el tiempo que transcurre entre dos ocurrencias sucesivas de un evento, lo cual llevará a la distribución exponencial.

Para obtener la función de densidad de una variable aleatoria con distribución exponencial, se obtendrá primero la función de distribución acumulativa, y puesto que la variable aleatoria T es continua la función de densidad se obtiene de la relación

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t)$$

Si X es una variable aleatoria con distribución de Poisson, entonces

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

pero agregando a la distribución la escala para el tiempo, se tiene:

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

por lo que:

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$

$$= 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Por lo que para obtener la función de densidad:

$$\frac{d}{dt} F_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Definición 4.9

Sea T la variable aleatoria que representa el intervalo (generalmente tiempo), que transcurre entre dos ocurrencias sucesivas de un evento, entonces T tiene una distribución exponencial con parámetro λ y función de densidad

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se denota por $T \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ ⁵.

En ocasiones algunos autores utilizan el parámetro β para definir a la función de densidad exponencial, donde $\beta = \frac{1}{\lambda}$, por lo que la función de densidad queda:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{1}{\beta} t} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 4.9

Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial y parámetro λ , entonces:

$$\mu_T = E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma_T^2 = \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

y la función generadora de momentos es:

$$M_T(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}$$

⁵ También se denota

$$T \sim \exp(\lambda)$$

Ejemplo 4.12

El tiempo en horas, que tarda un gerente en entrevistar a un aspirante para un trabajo, tiene una distribución exponencial con $\lambda = 2$. Los aspirantes están programados en intervalos de $\frac{1}{4}$ de hora, empezando a las 8:00 a.m., y los

aspirantes llegan exactamente a tiempo. Cuando el aspirante con una cita a las 8:15 a.m. llega a la oficina del gerente, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar para poder ver al gerente?

Resolución

Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo que tarda una entrevista, entonces:

$T \sim \text{Exponencial}(\lambda = 2)$

$$P\left(T > \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 2e^{-2t} dt = e^{-\frac{1}{2}}$$

O bien, utilizando la función de distribución acumulada, $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, se tiene:

$$P\left(T > \frac{1}{4}\right) = 1 - P\left(T \leq \frac{1}{4}\right) = 1 - F_T\left(\frac{1}{4}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = 0.6065$$

Los problemas de probabilidad, pueden involucrar más de una distribución para resolverlos. El siguiente ejemplo muestra el caso en el cual se utiliza la variable aleatoria exponencial y luego se calcula un valor esperado de una variable aleatoria discreta.

Ejemplo 4.13

Un fabricante de un monitor de televisión comercial garantiza el **cinescopio** por un año (8760 horas). Los monitores se utilizan en terminales de aeropuerto para programas de vuelo y están encendidos en uso continuo. La vida media de los tubos es de 20000 horas, y siguen una **densidad** de tiempo exponencial. El costo de fabricación, venta y entrega es de \$3000 y el monitor se vende en el mercado en \$4000. Cuesta \$1500 reemplazar el cinescopio cuando falla, incluyendo material y mano de obra. El fabricante no tiene obligación de sustituir el cinescopio si ya ha habido una primera sustitución. ¿Cuál es la utilidad esperada del fabricante?

Resolución

Sean U la utilidad, y T el tiempo de vida de un cinescopio.

$T \sim \text{Exponencial}(\lambda = 20000)$

$$U(t) = \begin{cases} 1000 & ; \quad t \geq 8760 \\ -500 & ; \quad t < 8760 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$E(U) = 1000 P(T \geq 8760) - 500 P(T < 8760)$$

$$P(T \geq 8760) = \int_{8760}^{\infty} \frac{1}{20000} e^{-\frac{1}{20000}t} dt = e^{-876/2000} \approx 0.64533$$

$$P(T < 8760) = 1 - P(T \geq 8760) \approx 0.35467$$

Finalmente:

$$E(U) = 1000(0.64533) - 500(0.35467) = 467.99$$

La utilidad será de \$467.99 por monitor.

La distribución exponencial posee una característica muy importante, la cual se conoce como *falta de memoria* o *amnésica*. Es la única variable aleatoria continua con recorrido en los reales positivos que tiene esta propiedad.

La propiedad de falta de memoria dice que:

$$P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s)$$

esto se comprueba con facilidad

$$\begin{aligned} P(T > t + s \mid T > t) &= \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

La *distribución normal* es una de las más utilizadas en la práctica. Muchos problemas reales tienen un comportamiento que se puede aproximar al de la distribución normal. Fue descubierta por DeMoivre en 1733 como una forma límite de la distribución binomial, después la estudió Laplace, aproximadamente en el año de 1775 y en ocasiones se le conoce como distribución gaussiana debido a que Gauss la citó en un artículo en

1809.

Durante los siglos XVIII y XIX se hicieron esfuerzos para establecer el modelo normal como la ley básica que rige las variables aleatorias continuas: de ahí el nombre "normal". Estos esfuerzos fracasaron.

Definición 4.10

Si una variable aleatoria X tiene una función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}; \quad -\infty < x < \infty$$

Donde μ y σ son constantes tales que $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, entonces X tiene una distribución normal con parámetros, media μ y variancia σ^2 , lo cual se denota por:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Propiedades de la función de densidad normal

- 1) $f_X(x) > 0$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_X(x) = 0$
- 4) $f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x)$ Es simétrica
- 5) El máximo ocurre en $x = \mu$
- 6) Puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$
- 7) Curtosis igual a 3

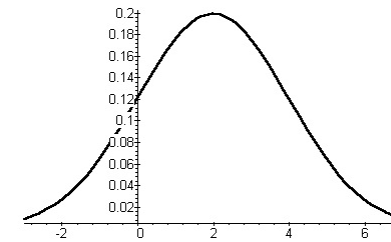
Puesto que la distribución normal es simétrica coinciden la media, la mediana y la moda en el mismo valor. Por otro lado, la curtosis de la distribución normal es 3, y es por eso que la curtosis se compara contra dicho valor.

Para obtener la probabilidad de que la variable aleatoria X se encuentre entre a y b , es necesario resolver la integral:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

que equivale a obtener el área bajo la curva normal; sin embargo, no existe solución analítica exacta para la integral, por lo que su evaluación se hace utilizando métodos numéricos o tablas de la *distribución normal estándar*.

Una variable estandarizada es aquella que tiene media 0 y variancia 1.



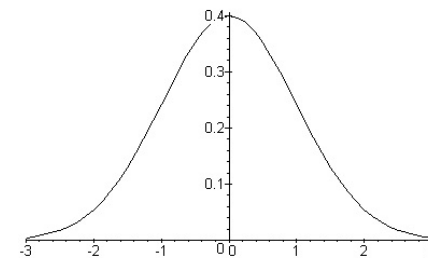
La gráfica anterior muestra una curva normal con parámetros media 2 y variancia 4.

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

La distribución normal estándar es un caso particular de la distribución normal, la cual tiene como parámetros 0 y 1, es decir, tiene una media de cero y una variancia de 1. Se denota mediante $Z \sim N(0,1)$. El procedimiento para obtener una variable aleatoria con distribución normal estándar a partir de una variable aleatoria con distribución normal y parámetros cualesquiera es mediante un corrimiento y un escalamiento, lo que lleva a la expresión:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

donde $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$.



La gráfica anterior muestra una curva normal estándar.

La tabla del apéndice 1 proporciona las probabilidades que se obtienen con la función de distribución acumulativa normal estándar (áreas bajo la curva normal estándar de cola izquierda). Por ejemplo, la probabilidad de que X sea menor que 1.66, $P(X < 1.66)$, es equivalente a encontrar el área bajo la curva normal de menos infinito a 1.66. Esta probabilidad se obtiene directamente de la tabla. La primera columna proporciona enteros y un decimal mientras que el primer renglón proporciona el segundo decimal, así, para encontrar el 1.66 se localiza en la primera columna el 1.6 y sobre ese renglón se cruza con la columna cuyo encabezado es 0.06 obteniéndose el valor de 0.9515.

Al obtener cualquier probabilidad que no proporcione directamente la tabla, deberá recordarse que la distribución normal estándar es simétrica con respecto al origen, y que el área total bajo la curva es la unidad.

Ejemplo 4.14

Sea Z una variable aleatoria con media 0 y desviación estándar 1, obtener:

- a) $P(Z \leq -1.84)$
- b) $P(-0.86 \leq Z \leq 1.97)$

Resolución

Utilizando tablas de distribución normal estándar

- a) $P(Z \leq -1.84) = 0.0329$
Que se obtiene directamente de la tabla.
- b) $P(-0.86 \leq Z \leq 1.97) = 0.7807$
Que se obtiene al realizar una diferencia de los valores encontrados en la tabla, para 1.97 y -0.86.

Ejemplo 4.15

Los pesos de un número grande de perros de lana miniatura están distribuidos aproximadamente en forma normal con una media de 8 kilogramos y una desviación estándar de 0.9 kilogramos. Si se registran las mediciones y se cierran a décimas de kilogramo, encontrar la fracción de estos perros de lana con pesos

- a) arriba de 9.5 kilogramos;
- b) cuando mucho 8.6 kilogramos;
- c) entre 7.3 y 9.1 kilogramos inclusive.

Resolución

- a) X : es la variable aleatoria que representa el peso de los perros de lana miniatura

$$X \sim N(8, 0.9^2)$$

$$z = \frac{(9.5 - 8)}{0.9} = 1.66$$

La fracción de perros de lana miniatura con peso por encima de 9.5 kilogramos es:

$$P(X > 9.5) \approx P(Z > 1.66) = 1 - 0.9515 = 0.0485$$

- b) $z = \frac{(8.6 - 8)}{0.9} = 0.66$

La fracción de perros de lana miniatura que pesan cuando mucho 8.6 kilogramos es:

$$P(X < 8.6) \approx P(Z < 0.66) = 0.7454$$

- c) $z_1 = \frac{(7.3 - 8)}{0.9} = -0.777$, $z_2 = \frac{(9.1 - 8)}{0.9} = 1.22$

La fracción de perros de lana miniatura que pesan entre 7.3 y 9.1 kilogramos es:

$$P(7.3 < X < 9.1) \approx P(-0.77 < Z < 1.22)$$

$$P(7.3 < X < 9.1) = 0.8888 - 0.2206 = 0.6682$$

Teorema 4.10

Sea X una variable aleatoria normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la función generadora de momentos está dada por:

$$M_X(\theta) = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$$

La demostración de este teorema se proporciona como tópico especial.

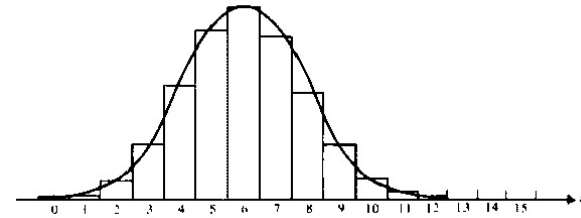
APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL A LA BINOMIAL

Las probabilidades asociadas con una distribución binomial, pueden obtenerse fácilmente cuando n es pequeña, utilizando la expresión

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

pero si n es grande, el cálculo se complica. Una forma de resolver estos problemas es mediante la aproximación de Poisson, vista en el tema anterior, pero tiene el inconveniente de que n debe ser grande y p pequeña. Ahora se estudiará otra forma de aproximar probabilidades binomiales utilizando la distribución normal.



Finalmente, para realizar la aproximación, es necesario realizar un ajuste por continuidad, es decir, la variable aleatoria binomial es discreta, mientras que la variable aleatoria normal es continua, por lo que debe realizarse un pequeño ajuste para mejorar la aproximación.

Si para una variable aleatoria X con distribución binomial se desea calcular la probabilidad de que este entre x_1 y x_2 , el ajuste por continuidad está dado por:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) \approx P\left(\frac{x_1 - d - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_2 + d - \mu}{\sigma}\right)$$

donde d es una diferencial de media unidad, i.e. representa media unidad de las estudiadas.

Teorema 4.11

Si X es una v.a. con distribución binomial con parámetros $\mu_X = np$ y

$\sigma_X^2 = npq$, entonces la forma límite de la distribución de

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, es la distribución normal estándar $Z \sim N(0, 1)$.

En general, la aproximación es adecuada cuando

$$np > 5 \quad \text{y} \quad p \leq \frac{1}{2}$$

o bien

$$nq > 5 \quad \text{y} \quad p > \frac{1}{2}$$

Una forma de ilustrar la aproximación, es mediante el histograma para la distribución binomial.

Ejemplo 4.16

Si 20% de los residentes de cierta ciudad prefieren un teléfono blanco que cualquier otro color disponible, determinar la probabilidad de que entre los siguientes 1000 teléfonos que se instalen en esta ciudad

- entre 170 y 185 inclusive sean blancos; y
- al menos 210 pero no más de 225 sean blancos.

Resolución

$$\mu = np = 1000(0.2) = 200$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200(0.8)} = 12.649$$

Utilizando aproximación normal, y con la variable aleatoria X que represente al número de teléfonos blancos que se instalan.

$$\text{a) } P(170 \leq X \leq 185) = P\left(\frac{170 - 0.5 - 200}{12.649} \leq Z \leq \frac{185 + 0.5 - 200}{12.649}\right)$$

$$P(-2.41 < Z \leq -1.15) = 0.1171$$

$$b) P(210 \leq X \leq 225) = P\left(\frac{210 - 0.5 - 200}{12.649} \leq Z \leq \frac{225 + 0.5 - 200}{12.649}\right)$$

$$P(0.75 < Z \leq 2.02) = 0.2049$$

NÚMEROS ALEATORIOS E INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN

La simulación es una técnica muy utilizada en la toma de decisiones cuando los modelos probabilísticos son muy complejos para obtener la solución analítica.

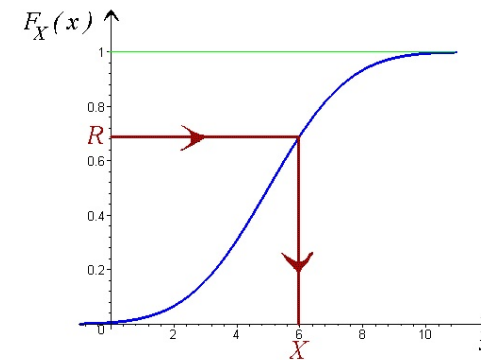
El desarrollo tecnológico de los sistemas computacionales ha permitido que la simulación de procesos sea cada vez más utilizada. En esta sección se mostrará la forma de generar variables aleatorias que sigan una distribución en particular, utilizando el método de la transformada inversa, y posteriormente se ilustrarán unas aplicaciones muy sencillas de simulación.

Método de la Transformada inversa

El método de la transformada inversa consiste en relacionar la función de distribución de una variable aleatoria con un número aleatorio con distribución uniforme entre cero y uno. De las propiedades de la función de distribución se sabe que

$$0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad \forall x$$

por lo que se iguala el número aleatorio con distribución uniforme entre cero y uno con la función de distribución acumulativa para despejar de esa ecuación la variable aleatoria X , que tendrá la distribución buscada.



Esto es, se iguala

$$R = F_X(x)$$

y de ahí se despeja a X , teniéndose

$$x = F_X^{-1}(R)$$

y al escribir a x como variable aleatoria se tiene

$$X = F_X^{-1}(R)$$

Ejemplo 4.17

Obtener una expresión para generar números aleatorios con distribución exponencial utilizando el método de la transformada inversa.

Resolución

Si $X \sim \text{exponencial}(\lambda)$

entonces, su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

y su función de distribución acumulativa es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

Al igualar con la variable aleatoria R' , con $R' \sim \text{uniforme}(0, 1)$, se tiene:

$$R' = 1 - e^{-\lambda x}$$

De donde

$$R' - 1 = -e^{-\lambda x}$$

$$1 - R' = e^{-\lambda x}$$

pero si $R' \sim \text{uniforme}(0, 1)$, entonces $1 - R'$ es su simétrico en el intervalo de cero a uno y también es una variable aleatoria uniforme, por lo que

$R = 1 - R' \sim \text{uniforme}(0, 1)$ y se puede escribir:

$$R = e^{-\lambda x}$$

de donde

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln R$$

y escribiendo en términos de variables aleatorias

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln R$$

El método de la transformada inversa también puede aplicarse para variables aleatorias discretas. El siguiente ejemplo muestra la forma de hacerlo.

Ejemplo 4.18

Un vendedor de periódicos sabe que la demanda diaria de los periódicos que tiene para venta está dada por:

x	0	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0.1	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

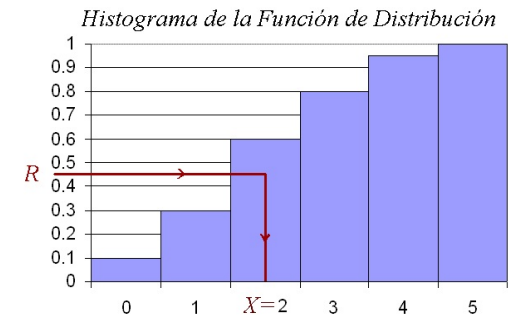
Utilizar los números aleatorios 0.4501, 0.0364, 0.5778, 0.8066 y 0.9591 para determinar la demanda de cada uno de los siguientes 5 días.

Resolución

La función de distribución acumulada de la demanda diaria está dada por

x	0	1	2	3	4	5
$F_X(x)$	0.1	0.3	0.6	0.8	0.95	1

El histograma de probabilidad sería



y se ilustra la aplicación del método de la transformada inversa para el valor 0.4501, el cual indica que en el primer día de la demanda es de 2 periódicos. La regla de asignación es:

$$X = \begin{cases} 0 & ; & 0 \leq R \leq 0.1 \\ 1 & ; & 0.1 < R \leq 0.3 \\ 2 & ; & 0.3 < R \leq 0.6 \\ 3 & ; & 0.6 < R \leq 0.8 \\ 4 & ; & 0.8 < R \leq 0.95 \\ 5 & ; & 0.95 < R \leq 1 \end{cases}$$

Utilizando la regla de correspondencia, las demandas serían:

Día	R	Demanda
1	0.4501	2
2	0.0364	0
3	0.5778	2
4	0.8066	4
5	0.9591	5

El método de la transformada inversa sirve para obtener una fórmula que permita generar los números aleatorios con la distribución deseada, a dicha fórmula se le llama *generador*. Una vez que se tiene el generador, entonces se debe utilizar una computadora o una calculadora que permita el manejo de hojas de cálculo o de

programación para obtener todos los números aleatorios deseados y de ahí la simulación del experimento.

Tópico Especial: Distribución Binomial Negativa

Si la variable aleatoria X representa el número de ensayos necesarios para observar el r -ésimo éxito, entonces X es una variable aleatoria con distribución de Pascal, $X \sim \text{Pascal}(r, p)$; pero al modelar sobre el mismo experimento, se puede definir a la variable aleatoria Y , que representa el número de fracasos hasta que se observen los primeros r éxitos, teniéndose la relación

$$X = Y + r$$

y Y es una variable aleatoria que recibe el nombre de binomial negativa. Se puede denotar por

$$Y \sim \text{BinNeg}(r, p)$$

aunque muchos autores utilizan la notación b^* o bn .

La función de probabilidad se deduce a partir de la distribución de Pascal, teniéndose:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P(Y = y) = P(X - r = y) = P(X = y + r) \\ &= \binom{y + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^y \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de simetría del coeficiente binomial, la distribución binomial negativa puede escribirse como

$$f_Y(y) = \begin{cases} \binom{y + r - 1}{y} p^r (1 - p)^y & ; \quad y = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde r es un entero positivo.

La distribución binomial negativa puede generalizarse para casos en los que r no es un entero, para ello sólo es necesario generalizar la definición del coeficiente binomial a través de la función gamma.

Definición 4.11

Si n y k son números reales, entonces

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n - k + 1) \Gamma(k + 1)}$$

donde Γ es la función gamma.

Utilizando esta extensión de la definición del coeficiente binomial, la distribución binomial negativa puede escribirse como

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(y + r)}{\Gamma(r) y!} p^r (1 - p)^y ; \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

$$r > 0, \quad 0 < p < 1$$

O bien, en forma más compacta

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \binom{-r}{y} p^r (p - 1)^y \\ &= \binom{-r}{y} p^r (-q)^y \end{aligned}$$

en donde el coeficiente binomial puede calcularse como:

$$\binom{-r}{y} = \frac{(-r)(-r - 1)(-r - 2) \dots (-r - y + 1)}{y!}$$

para r y y enteros.

Y de la última expresión para $f_Y(y)$ puede observarse la razón de que se le denomine distribución binomial negativa. Para hacerlo evidente considérese la probabilidad del espacio muestral, y a partir de ahí, se escriben las probabilidades de la distribución, esto es:

$$1 = p^r p^{-r} = p^r (1 - q)^{-r}$$

Y utilizando el binomio de Newton (que ahora puede generalizarse también)

$$1 = p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-r}{y} (-q)^y$$

y los términos

$$p^r \binom{-r}{y} (-q)^y$$

son las probabilidades de la variable aleatoria Y , el número de fracasos para observar los

primeros r éxitos.

Finalmente

$$p^r \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-r}{y} (-q)^y = \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-r}{y} p^r (-q)^y = 1$$

Y del inicio

$$1 = p^r (1 - q)^{-r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p} \right)^{-r}$$

De donde

$$\sum_{y=0}^{\infty} \binom{-r}{y} p^r (-q)^y = \left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p} \right)^{-r}$$

y se observa que el desarrollo del binomio negativo, proporciona los términos de probabilidad de la distribución, de ahí el nombre de binomial negativa.

Tópico Especial: Deducción de la función de Probabilidad de Poisson a partir del proceso de Poisson

Sea $f_X(x; t)$ la probabilidad de tener x ocurrencias en el intervalo de tiempo t , entonces, si se cumplen las características del proceso de Poisson

1. La probabilidad de una sola ocurrencia en un intervalo muy pequeño dt es λdt .
2. El intervalo dt es tan pequeño que la probabilidad de tener más de una ocurrencia es despreciable.
3. En un intervalo, los eventos son independientes.

Para observar x ocurrencias en el intervalo $t + dt$, se tienen dos diferentes (excluyentes) probabilidades.

1. Existen x ocurrencias en t , con probabilidad $f_X(x; t)$ y ninguna en dt , con probabilidad $1 - \lambda dt$.
2. Existen $x - 1$ ocurrencias en t , con probabilidad $f_X(x - 1; t)$ y una ocurrencia en dt con probabilidad λdt .

De la suposición de independencia, la probabilidad de observar x ocurrencias en $t + dt$ es:

$$f_X(x; t + dt) = f_X(x; t)(1 - \lambda dt) + f_X(x - 1; t)(\lambda dt)$$

manipulando algebraicamente

$$f_X(x; t + dt) = f_X(x; t) - \lambda f_X(x; t) dt + \lambda f_X(x - 1; t) dt$$

$$f_X(x; t + dt) - f_X(x; t) = -\lambda f_X(x; t) dt + \lambda f_X(x - 1; t) dt$$

$$\frac{f_X(x; t + dt) - f_X(x; t)}{dt} = \lambda [f_X(x - 1; t) - f_X(x; t)]$$

si se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$, entonces el lado izquierdo de la igualdad se convierte en la derivada de $f_X(x; t)$, es decir, $\frac{d}{dt} f_X(x; t)$

$$\frac{d}{dt} f_X(x; t) = \lambda [f_X(x - 1; t) - f_X(x; t)] \quad \dots (a)$$

que es una ecuación diferencial lineal con respecto a t y una ecuación en diferencias finitas de primer orden con respecto a x .

En particular, si $x = 0$, entonces (a) se convierte en

$$\frac{d}{dt} f_X(0; t) = \lambda [f_X(-1; t) - f_X(0; t)]$$

y puesto que $f_X(-1; t) = 0$ (la probabilidad de tener -1 ocurrencias es cero)

$$\frac{d}{dt} f_X(0; t) = -\lambda f_X(0; t)$$

Resolviendo por separación de variables la ecuación diferencial se tiene:

$$\frac{d f_X(0; t)}{f_X(0; t)} = -\lambda dt$$

$$\ln f_X(0; t) = -\lambda t + c_1$$

$$f_X(0; t) = e^{-\lambda t + c_1}$$

$$f_X(0; t) = c e^{-\lambda t}$$

Y puesto que la probabilidad de tener cero ocurrencias en un intervalo de longitud $t = 0$, debe ser uno, entonces $c = 1$, por lo que:

$$f_X(0; t) = e^{-\lambda t}$$

Si $x = 1$, entonces (a) se convierte en

$$\frac{d}{dt}f_X(1;t) = \lambda [f_X(0;t) - f_X(1;t)]$$

y puesto que $f_X(0;t) = e^{-\lambda t}$ entonces

$$\frac{d}{dt}f_X(1;t) + \lambda f_X(1;t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Se tiene una ecuación diferencial no homogénea. Para resolverla se debe considerar la condición inicial $f_X(1;0) = 0$, puesto que la probabilidad de tener una ocurrencia en un intervalo de longitud cero, $t = 0$, es cero.

Simplificando la notación, si $y = f_X(1;t)$ entonces:

$$y' + \lambda y = \lambda e^{-\lambda t}$$

aplicando la transformada de Laplace⁶

$$sY - 0 + \lambda Y = \lambda \frac{1}{s + \lambda}$$

$$Y = \frac{\lambda}{(s + \lambda)^2}$$

antitransformando

$$y = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$= \lambda t e^{-\lambda t}$$

En la notación original

$$f_X(1;t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Procediendo de manera similar, para $x = 2$, de (a) se obtiene:

$$f_X(2;t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}$$

Al continuar el proceso se deduce que

$$f_X(x;t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} & ; \quad x = 0, 1, \dots \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

expresión que recibe el nombre de distribución de Poisson.

Tópico Especial: Función Generadora de Momentos de la Distribución Normal

Si X es una variable aleatoria con distribución normal y parámetros μ_X y σ_X^2 entonces

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2}; \quad -\infty < x < \infty$$

Y la función generadora de momentos es

$$M_X(\theta) = E[e^{\theta X}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta x}}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2} dx$$

Realizando el cambio de variable $z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$

$$M_X(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu_X \theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta \sigma_X z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{e^{\mu_X \theta}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2 - 2\theta \sigma_X z}{2}} dz$$

⁶ Algunas fórmulas básicas son:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0), \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a), \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{e^{\mu_x \theta}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z - \theta \sigma_x)^2}{2} + \frac{\theta^2 \sigma_x^2}{2}} dz$$

$$= e^{\mu_x \theta + \frac{\sigma_x^2 \theta^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z - \theta \sigma_x)^2}{2}} dz$$

y se observa que la integral junto con el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, es la integral de

una función de densidad normal con media $\theta \sigma_x$ y variancia uno, por lo que su valor es 1.

Finalmente la función generadora es:

$$\mu_x(\theta) = e^{\mu_x \theta + \frac{\sigma_x^2 \theta^2}{2}}$$

■

AUTOEXAMEN TEMA IV

- 1.- En promedio, un jugador de beisbol conecta un "hit" en uno de tres intentos. Asumiendo que los eventos son independientes, la probabilidad de que conecte exactamente 3 "hits" en 6 intentos es:

A) $\frac{160}{3^6}$ B) $\frac{160}{3^5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{80}{3^6}$ E) $\frac{40}{3^6}$

- 2.- En cierta ciudad, la probabilidad de que ocurra una tormenta en cualquier día durante la primavera es 0.03. Suponiendo independendia, la probabilidad de que la primera tormenta ocurra el día 20 de la primavera es:

A) 0.0168 B) 0.03 C) 0.5438 D) 0.5606
E) Ninguna de las anteriores.

- 3.- Un gerente de personal está entrevistando a empleados potenciales con el fin de cubrir dos vacantes. La probabilidad de que el entrevistado tenga las

cualidades necesarias y acepte un ofrecimiento es 0.8. La probabilidad de que el gerente deba entrevistar cuando mucho a 3 personas es:

A) 0.64 B) 0.36 C) 0.0256 D) 0.896
E) Ninguna de las anteriores.

- 4.- Con el propósito de decidir si se aceptan los lotes de mercancía que envía una fábrica, se lleva a cabo un procedimiento que consiste en seleccionar diez artículos al azar de cada lote y determinar el número de defectuosos. Un lote se rechaza siempre que se encuentren dos o más artículos defectuosos entre los diez seleccionados. Supóngase que el número de artículos en cada lote es grande y que cada lote contiene un 5% de defectuosos, entonces la probabilidad de rechazar el lote es:

A) 0.0746 B) 0.914 C) 0.086 D) 0.599
E) 0.401

- 5.- En un crucero poco transitado, sólo el 20% de los automóviles hacen alto total antes de cruzar. De los siguientes 40 automóviles que transitan por el crucero, el número esperado de ellos que hacen alto total es:

A) Prácticamente cero B) 6.4 C) 8 D) 32
E) Ninguna de las anteriores.

- 6.- Un excursionista desea seleccionar el tipo de linterna de mano que debe llevar en su siguiente campamento. Puede llevar una linterna de una sola batería de 6 V u otra que utiliza dos baterías tamaño D de 1.5 V. En este momento tiene dos baterías de 6 V y cuatro de 1.5 V y no puede comprar más baterías. Si la probabilidad de que cualquier batería funcione es 0.6 y funcionan de manera independiente; entonces, las probabilidades de que las linternas de 6 V y de 3 V funcionen son, respectivamente:

A) 0.16, 0.179 B) 0.48, 0.346 C) 0.84, 0.821 D) 0.36, 0.13
E) Ninguna de las anteriores.

- 7.- La probabilidad de que un alumno de cierta universidad tenga teléfono celular es 0.2. Entonces, la probabilidad de que el décimo alumno entrevistado aleatoriamente de esta universidad sea el quinto con teléfono celular es:

A) 0.0001 B) 0.0032 C) 0.026 D) 0.0132
E) Ninguna de las anteriores.

- 8.- En cierto día, se puso en práctica la segunda etapa del plan de contingencia ambiental, en la Ciudad de México. Si en la zona que le corresponde a un supervisor hay 50 empresas, de las cuales 15 no siguieron los lineamientos de la contingencia, entonces la probabilidad de que 3 empresas de las 10 que verifica no sigan los lineamientos es:
- A) 0.2979 B) 0.6 C) 0.09 D) 0.2668
E) Ninguna de las anteriores.
- 9.- Si los aviones que llegan a un aeropuerto siguen un proceso de Poisson con una tasa media de 8 aviones por hora. La probabilidad de que lleguen exactamente 10 aviones en las siguientes 2 horas es lo más cercana a:
- A) 0 B) 0.1126 C) 0.099 D) 0.0341
E) Ninguna de las anteriores.
- 10.- En un sistema de cómputo de tiempo compartido, el número de peticiones de telepuerto es 0.2 por milisegundo, en promedio, y sigue una distribución de Poisson. Entonces la probabilidad de que no lleguen peticiones durante los tres milisegundos siguientes es:
- A) 0.5488 B) 0.8187 C) 0.1822 D) 0.2729
E) Ninguna de las anteriores
- 11.- Ciertas resistencias se fabrican con una tolerancia de $\pm 10\%$. Si se considera que la resistencia real está distribuida uniformemente dentro de dicho intervalo, la probabilidad de que una resistencia con valor nominal de 1000 Ω tenga una resistencia real entre 990 y 1010 Ω es:
- A) 0.8 B) 0.6 C) 0.4 D) 0.2 E) 0.1
- 12.- El precio que se pide por cierto artículo se distribuye normalmente con media de \$50.00 y desviación estándar de \$5.00. Los compradores están dispuestos a pagar una cantidad que también se distribuye normalmente con media de \$45.00 y desviación estándar de \$2.50. La probabilidad de que se realice la transacción es:
- A) 0 B) 1 C) 0.187 D) 0.813 E) 0.255
- 13.- Una videocasetera tiene una distribución de tiempo de falla exponencial, con tiempo medio de 20 000 horas. Si la videocasetera ha durado 20 000 horas, entonces la probabilidad de que falle a las 30 000 horas o antes es:
- A) 0.606 B) 0.3935 C) Prácticamente cero D) 0.777
E) Ninguna de las anteriores.
- 14.- De las siguientes curvas normales, con los parámetros que se indican, la que se parece más a la curva con parámetros $\mu = 10$ y $\sigma = 5$ es:
- A) $\mu = 10$, $\sigma = 10$ B) $\mu = 20$, $\sigma = 10$ C) $\mu = 20$, $\sigma = 2.5$
D) $\mu = 5$, $\sigma = 2.5$ E) $\mu = 20$, $\sigma = 5$
- 15.- El tiempo de servicio en la ventanilla de cierto banco sigue una distribución exponencial con una media de 2 minutos. La probabilidad de que el tiempo de servicio para el siguiente cliente sea de 3 minutos o más es:
- A) 0.25 B) 0.2231 C) 0.0024 D) 0.7769
E) Ninguna de las anteriores.
- 16.- Si para una variable aleatoria normal se sabe que $P(X \leq -1) = 0.1587$ y $P(X > 7.88) = 0.025$ entonces la media y la variancia de X son, respectivamente:
- A) 3, 2 B) 2, 3 C) 2, 9 D) -2, 3
E) Ningunos de los anteriores.
- 17.- Los parámetros de forma, sesgo (α_3) y curtosis (α_4) para una distribución normal deben tomar los valores:
- A) $\alpha_3 > 0$, $\alpha_4 > 0$ B) $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 > 3$
C) $\alpha_3 < 0$, $\alpha_4 = 3$ D) $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 > 0$
E) $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 3$

- 18.- Si X es una variable aleatoria con distribución normal con media 2 y variancia 9, y Z es una variable aleatoria normal estándar, entonces $P(0 < X < 4)$ es igual a:

A) $P\left(0 < Z < \frac{2}{3}\right)$ B) $P\left(-\frac{2}{9} < Z < \frac{2}{9}\right)$

C) $P\left(-\frac{9}{2} < Z < -\frac{5}{2}\right)$ D) $2P\left(0 < Z < \frac{2}{3}\right)$

E) Ninguna de las anteriores.

- 19.- La precipitación anual por lluvias en cierta región tiene una distribución normal con $\mu = 40$ [cm] y $\sigma^2 = 16$ [cm²]. La probabilidad de que en dos de los próximos cuatro años la precipitación sea de más de 44 [cm] es:

- A) 0.004 B) 0.1587 C) 0.4761
D) 0.1069 E) Ninguna de las anteriores.

- 20.- Una llamada telefónica llegó a un conmutador en un tiempo aleatorio dentro de un minuto. El conmutador estuvo completamente ocupado durante 15 segundos de ese período de un minuto. La probabilidad de que la llamada llegara cuando el conmutador no estaba ocupado es:

- A) 0.75 B) 0.99 C) 0.25 D) 1
E) Ninguna de las anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Hines, William W. y Montgomery, Douglas C. - Probabilidad y Estadística para ingeniería, cuarta edición.- CECSA.- México, 2005.

Devore, Jay L.- Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias, séptima edición.- Editorial Cengage.- México, 2008.

Milton, Susan J. Y Arnold, Jesse C.- Probabilidad y Estadística para con aplicaciones para ingeniería y ciencias computacionales, cuarta edición.- McGraw-Hill.- México, 2004.

Wackerly Dennis D.- Mendenhall, William, *et al.*- Estadística Matemática con Aplicaciones, sexta edición.- Editorial Thomson.- México, 2002.

Walpole, Ronald E., *et al.*- Probability and Statistics for Engineers and Scientists.- Pearson.- USA, 2007.

Montgomery, Douglas C. y Runger, George C.-Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería, segunda edición.- Limusa-Wiley.- México, 2002.

Scheaffer, Richard L. y McClave, James T.- Probabilidad y Estadística para Ingeniería.- Grupo Editorial Iberoamérica.- México, 1993.

Canavos, George C.- Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos.- McGraw-Hill.- México, 1988.

Meyer, Paul L.- Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.- Addison Wesley Iberoamericana.- México, 1992.

Borras García, Hugo E., *et al.*- Apuntes de Probabilidad y Estadística.-Facultad de Ingeniería.- México, 1985.

Rosenkrantz, Walter A.- Introduction to Probability and Statistics for Scientists and Engineers.- McGraw-Hill.- EE.UU., 1997.

Ross, Sheldon M.- Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias-McGraw-Hill.- México, 2002.

García, Francisco, *et. al.*- Simulación de Sistemas para Administración e Ingeniería.- CECSA.- México, 2005.

Coss Bu, Raúl.- Simulación un enfoque práctico.- Limusa.-México, 1993.