

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Notas de clase

Tema V *Variables aleatorias* *Conjuntas*

A. Leonardo Bañuelos Saucedo
Nayelli Manzanarez Gómez

TEMA V

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se estudiaron variables aleatorias unidimensionales; es decir, se estudió cada variable de manera independiente; sin embargo, en muchas ocasiones es necesario estudiar dos o más características (variables) de un experimento. En cualquier sistema físico, económico o social, que se estudie a través de modelos aleatorios, pueden existir varias variables, y debido a la interrelación entre ellas, deben estudiarse modelos que describan el comportamiento probabilístico conjunto de dichas variables.

Definición 5.1

Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio muestral, dichas variables aleatorias reciben el nombre de *VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS*.

Así como se dijo en el tema anterior, que una variable aleatoria responde a una pregunta de interés en un fenómeno, las variables aleatorias conjuntas se puede decir que representan varias características (o responden a varias preguntas) de interés en un mismo fenómeno. Y al igual que en el tema anterior, existen variables aleatorias conjuntas discretas y continuas.

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS DISCRETAS

Definición 5.2

Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son variables aleatorias conjuntas discretas, se define su función de probabilidad conjunta como:

$$\begin{aligned} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) \\ &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \end{aligned}$$

Es bastante común utilizar p_{XY} para denotar la función de probabilidad conjunta; sin embargo, aquí se prefiere la notación $f_{XY}(x, y)$, puesto que también es una función y facilita la generalización de diversas expresiones.

En particular si $n = 2$

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x \cap Y = y) = P(X = x, Y = y)$$

Ejemplo 5.1

Considérese el lanzamiento de dos dados.

El espacio muestral es

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

Si interesa el resultado del primer dado y la suma de los puntos en los dos lanzamientos, entonces

Sea

X_1 : El resultado del primer lanzamiento

X_2 : La suma de los resultados de los dos lanzamientos.

$$R_{X_1} = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$R_{X_2} = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

La función de probabilidad conjunta para X_1 y para X_2 se construye de la siguiente forma:

$$f_{X_1 X_2}(1, 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{36}$$

$$f_{X_1 X_2}(1, 3) = P(X_1 = 1, X_2 = 3) = \frac{1}{36}$$

.

.

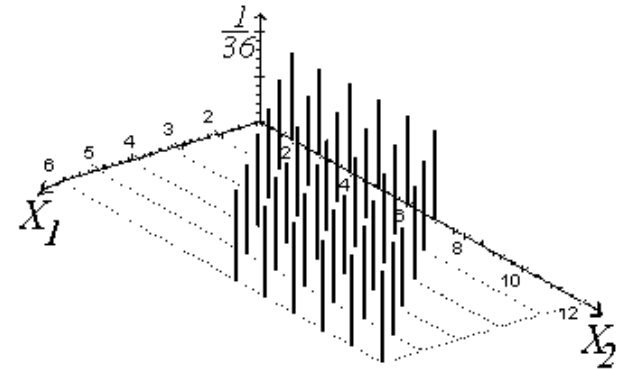
.

Anotando las probabilidades en una tabla se tiene:

$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4	5	6
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
7	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
8	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
9	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
10	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
11	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA

Al igual que para las variables aleatorias unidimensionales, lo más común es dibujar rectas verticales cuya altura representa la probabilidad, también se pueden dibujar los puntos; sin embargo, como puede observarse, la lectura de una gráfica de una función de probabilidad conjunta se complica un poco y sólo puede hacerse para el caso de dos variables.



CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA

Si X , Y son dos variables aleatorias conjuntas discretas. Su función de probabilidad conjunta tiene las siguientes características:

$$1) \quad 0 \leq f_{XY}(x, y) \leq 1 \quad \forall \quad (x, y)$$

$$2) \quad \sum_{\forall R_X} \sum_{\forall R_Y} f_{XY}(x, y) = 1$$

$$3) \quad P(x_0 \leq X \leq x_1, y_0 \leq Y \leq y_1) = \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{y=y_0}^{y_1} f_{XY}(x, y)$$

FUNCIONES DE PROBABILIDAD: MARGINAL Y CONDICIONAL

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas discretas, entonces se pueden hacer las siguientes definiciones:

La función de probabilidad marginal de X (función de probabilidad de X al margen de Y) como

$$f_X(x) = \sum_{\forall R_Y} f_{XY}(x, y)$$

La función de probabilidad marginal de Y (función de probabilidad de Y al margen de X) como

$$f_Y(y) = \sum_{\forall R_X} f_{XY}(x, y)$$

La función de probabilidad condicional de X dado que $Y = y_0$ es:

$$f_{X|y_0}(x | Y = y_0) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} & ; \quad f_Y(y_0) > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de probabilidad condicional de Y dado que $X = x_0$ es:

$$f_{Y|x_0}(y | X = x_0) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x_0, y)}{f_X(x_0)} & ; \quad f_X(x_0) > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 5.2

Para la función de probabilidad conjunta discreta estudiada anteriormente, del lanzamiento de dos dados, obtener las marginales.

Resolución

$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$		x_1						$f_{X_2}(x_2)$
		1	2	3	4	5	6	
x_2	2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\frac{3}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{5}{36}$
	7	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
	8	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$
	9	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$
	10	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$
	11	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
	12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	$f_{X_1}(x_1)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	1

Ejemplo 5.3

Cierto artículo se fabrica en dos líneas de producción diferentes. La capacidad en cualquier día ~~dado~~ para cada línea es de dos artículos. Supóngase que el número de artículos producidos por la línea uno en un día cualquiera es una variable aleatoria X y que el número de artículos producidos por la línea dos está dado por Y . Con base en datos estadísticos se obtuvo la siguiente tabla que corresponde a la función de probabilidad conjunta de X y Y .

$f_{XY}(x, y)$		x		
		0	1	2
y	0	0.10	0.20	0.20
	1	0.04	0.08	0.08
	2	0.06	0.12	0.12

- Calcular la probabilidad de que en un día ~~dado~~ el número de artículos producidos en la línea uno sea mayor que el número de artículos producidos en la línea dos.
- Obtener las funciones de probabilidad marginales de X y Y
- Determinar la función de probabilidad condicional de X dado $Y=1$
- Calcular $P(X < 2 | Y = 1)$

Resolución

a) $P(X > Y) = P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1)$
 $= 0.2 + 0.2 + 0.08 = 0.48$

b)

$f_{XY}(x, y)$		x			
		0	1	2	$f_Y(y)$
y	0	0.10	0.20	0.20	0.5
	1	0.04	0.08	0.08	0.2
	2	0.06	0.12	0.12	0.3
	$f_X(x)$	0.20	0.40	0.40	1.0

c) $f_{X|Y=1}(x|Y=1)$

$$P(X=0 | Y=1) = \frac{f_{XY}(X=0, Y=1)}{f_Y(1)} = \frac{0.04}{0.2} = 0.2$$

$$P(X=1 | Y=1) = \frac{f_{XY}(X=1, Y=1)}{f_Y(1)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4$$

$$P(X=2 | Y=1) = \frac{f_{XY}(X=2, Y=1)}{f_Y(1)} = \frac{0.08}{0.2} = 0.4$$

Construyendo la tabla $f_{X|Y=1}(x|Y=1)$

x	0	1	2
$f_{X Y=1}(x Y=1)$	0.2	0.4	0.4

d) De la tabla:

$$P(X < 2 | Y=1) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS CONTINUAS

Definición 5.3

Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son variables aleatorias conjuntas continuas, entonces su función de densidad conjunta se define como una función con las siguientes características

1) $f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall \quad x_1, x_2, \dots, x_n$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$

3) $P((x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}) = \int \int \dots \int_{\mathbb{R}} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$

Ejemplo 5.4

Sean X, Y dos variables aleatorias conjuntas con función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcular el valor de k para el cual $f_{XY}(x, y)$ es función de densidad
 b) $P(0.5 \leq X \leq 1, 0.5 \leq Y \leq 1)$
 c) $P(X + Y \leq 1)$

Resolución

- a) Para el caso de dos variables aleatorias la propiedad 2 puede reescribirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

Por lo que

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 k(x + y) dx dy$$

$$1 = k \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_0^1 dy = k \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy$$

$$1 = k \left[\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1$$

$$= k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = k(1) \Rightarrow k = 1$$

b) $P(0.5 \leq X \leq 1, 0.5 \leq Y \leq 1) = \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^1 (x + y) dx dy$

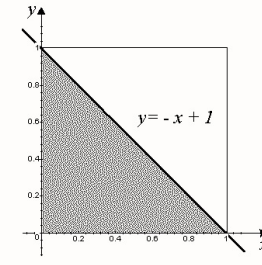
$$= \int_{0.5}^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{0.5}^1 dy$$

$$= \int_{0.5}^1 \left[\left(\frac{1}{2} + y \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{y}{2} \right) \right] dy$$

$$= \int_{0.5}^1 \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{8} \right) dy = \left[\frac{y^2}{4} + \frac{3}{8}y \right]_{0.5}^1$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{6}{16} - \frac{4}{16} = \frac{6}{16} = 0.375$$

- c) Para obtener $P(X + Y \leq 1)$, se dibuja la región de integración



$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{-x+1} (x + y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-x+1} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(-x+1)^2}{2} + x(-x+1) \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{-x^2 + 1}{2} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

FUNCIONES DE DENSIDAD: MARGINAL Y CONDICIONAL

Al igual que para las variables aleatorias conjuntas discretas, para las continuas también se definen las funciones de densidad marginal y condicional.

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas continuas, entonces se define:

La función de densidad marginal de X (función de probabilidad de X al margen de Y) como

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

La función de densidad marginal de Y (función de probabilidad de Y al

margen de X) como

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

La función de densidad condicional de X dado que $Y = y_0$ es:

$$f_{X|Y_0}(x | Y = y_0) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} & ; \quad f_Y(y_0) > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de densidad condicional de Y dado que $X = x_0$ es:

$$f_{Y|X_0}(y | X = x_0) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x_0, y)}{f_X(x_0)} & ; \quad f_X(x_0) > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que la distribución condicional, se obtiene con la misma expresión tanto para variables aleatorias discretas como continuas.

Ejemplo 5.5

Sean X_1 y X_2 las proporciones de dos sustancias distintas que se encuentran en una muestra de una mezcla de reactivos que se usa como insecticida. Supóngase que X_1 y X_2 tienen una densidad de probabilidad conjunta representada por

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 & ; \quad 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

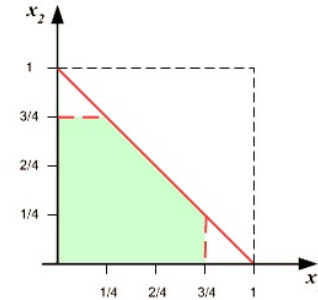
a) Calcular $P\left(X_1 \leq \frac{3}{4}, X_2 \leq \frac{3}{4}\right)$.

b) Determinar $P\left(X_1 \leq \frac{1}{2}, X_2 \leq \frac{1}{2}\right)$.

c) Calcular $P\left(X_1 \leq \frac{1}{2} \mid X_2 \leq \frac{1}{2}\right)$.

Resolución

a) La región es

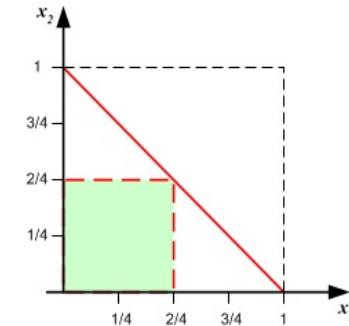


$$P\left(X_1 \leq \frac{3}{4}, X_2 \leq \frac{3}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{\frac{3}{4}} 2 dx_2 dx_1 + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_0^{1-x_1} 2 dx_2 dx_1$$

$$P\left(X_1 \leq \frac{3}{4}, X_2 \leq \frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2(1-x_1) dx_1$$

$$P\left(X_1 \leq \frac{3}{4}, X_2 \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

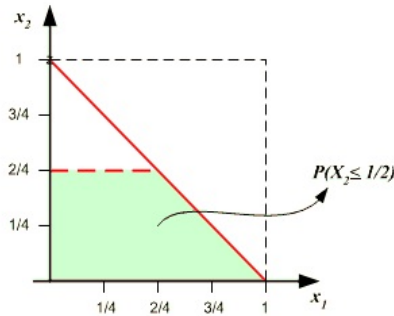
b) La región es:



$$P\left(X_1 \leq \frac{1}{2}, X_2 \leq \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$c) \quad P\left(X_1 \leq \frac{1}{2} \mid X_2 \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X_1 \leq \frac{1}{2}, X_2 \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(X_2 \leq \frac{1}{2}\right)}$$

La región de integración para $P\left(X_2 \leq \frac{1}{2}\right)$ es:



$$P\left(X_1 \leq \frac{1}{2} \mid X_2 \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-x_2} 2 \, dx_1 \, dx_2} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 5.6

Sea la función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^3 + \frac{xy^2}{a} & ; \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Obtener el valor de $a \in \mathbb{R}$.
- Calcular $P(X \leq Y)$.

- Obtener las funciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.
- Obtener las funciones de densidad condicional $f_{X|Y_0}(x|y_0)$ y $f_{Y|X_0}(y|x_0)$.

Resolución

- Para que la función sea una función de densidad conjunta debe de cumplirse que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dx \, dy = 1$, por lo que:

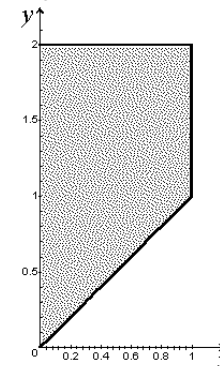
$$\int_0^2 \int_0^1 \left(x^3 + \frac{xy^2}{a}\right) \, dx \, dy = 1$$

de donde

$$\int_0^2 \frac{1}{4} \frac{a + 2y^2}{a} \, dy = \frac{1}{6} \frac{3a + 8}{a} = 1$$

$$a = \frac{8}{3}$$

- La región de integración es:



Por lo que

$$P(X \leq Y) = \int_1^2 \int_0^1 \left(x^3 + \frac{3}{8}xy^2\right) \, dx \, dy + \int_0^1 \int_0^y \left(x^3 + \frac{3}{8}xy^2\right) \, dx \, dy$$

o bien utilizando el complemento

$$P(X \leq Y) = 1 - P(X > Y) = 1 - \int_0^1 \int_y^1 \left(x^3 + \frac{3}{8}xy^2\right) \, dx \, dy$$

$$P(X \leq Y) = 1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16}y^2 - \frac{7}{16}y^4 \right) dy$$

$$P(X \leq Y) = 1 - \frac{9}{40} = \frac{31}{40} = 0.775$$

c) Las marginales se obtienen de

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Para la marginal de x

$$f_X(x) = \int_0^2 \left(x^3 + \frac{3}{8}xy^2 \right) dy = 2x^3 + x \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^3 + x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para la marginal de y

$$f_Y(y) = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{3}{8}xy^2 \right) dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}y^2 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{16}y^2, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

d) Para las funciones de densidad condicional

$$f_{X|Y_0}(x | Y = y_0) = \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

$$= \frac{x^3 + \frac{3}{8}xy_0^2}{\frac{1}{4} + \frac{3}{16}y_0^2} = \frac{2x(8x^2 + 3y_0^2)}{4 + 3y_0^2}$$

$$f_{X|Y_0}(x | Y = y_0) = \begin{cases} \frac{2x(8x^2 + 3y_0^2)}{4 + 3y_0^2} ; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

y siempre que $0 \leq y_0 \leq 2$

Por otro lado

$$f_{Y|X_0}(y | X = x_0) = \frac{f_{XY}(x_0, y)}{f_X(x_0)} = \frac{x_0^3 + \frac{3}{8}x_0y^2}{2x_0^3 + x_0} = \frac{8x_0^2 + 3y^2}{8(2x_0^2 + 1)}$$

$$f_{Y|X_0}(y | X = x_0) = \begin{cases} \frac{8x_0^2 + 3y^2}{8(2x_0^2 + 1)} ; & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

y siempre que $0 \leq x_0 \leq 1$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

Proporciona el comportamiento probabilístico acumulado conjunto de una serie de variables aleatorias.

Definición 5.4

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas se define $F_{XY}(x, y)$ como $F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas discretas o continuas, entonces:

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{u=-\infty}^x \sum_{v=-\infty}^y f_{XY}(u, v) \quad \text{para vv.aa. discretas}$$

$$F_{XY}(x, y) = \int_{u=-\infty}^{u=x} \int_{v=-\infty}^{v=y} f_{XY}(u, v) dv du \quad \text{para vv.aa. continuas}$$

Y $F_{XY}(x, y)$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedades de la Función de distribución Conjunta

- 1) F_{XY} es una función no decreciente
- 2) $F_{XY}(-\infty, y) = 0$
 $F_{XY}(x, -\infty) = 0$
 $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$
- 3) $F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y)$
 $F_{XY}(x, \infty) = F_X(x)$
- 4) $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$
- 5) Para vv.aa. continuas, si F_{XY} tiene derivadas parciales de orden superior a dos.

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial y \partial x}$$

Ejemplo 5.7

Utilizando la función de probabilidad conjunta del ejemplo 5.3, obtener su función de distribución conjunta discreta.

Resolución

De la definición de función de distribución conjunta se tiene:

$F_{XY}(x, y)$		x		
		0	1	2
y	0	0.1	0.3	0.5
	1	0.14	0.42	0.7
	2	0.2	0.6	1

Obsérvese que para construir una tabla de función de de distribución conjunta discreta sólo se requiere sumar todos los valores por arriba y hacia la izquierda (incluyendo valores diagonales) del valor que se desea obtener, en la tabla de la función de la probabilidad conjunta.

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Después de estudiar las funciones de probabilidad y de densidad marginales, se observa que el conocimiento (o la información) sobre el valor de una de las variables aleatorias puede modificar el comportamiento probabilístico de la otra variable. Esto sólo sucede si las variables conjuntas son dependientes.

Definición 5.5

Si X y Y son variables aleatorias conjuntas, se dice que son independientes si y sólo si

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

para todo x y y .

En general, para n variables aleatorias conjuntas X_1, X_2, \dots, X_n , con función de probabilidad o de densidad conjunta $f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y marginales $f_{X_i}(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, son independientes si y sólo si

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)$$

Ejemplo 5.8

Determinar si las vv.aa. conjuntas X y Y con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{3}x(x+y) & ; \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

son independientes o no. Justificar su respuesta.

Resolución

Para determinar si las vv. aa. son independientes o no, deben obtenerse las marginales primero.

Para la marginal de x

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{8}{3}x(x+y) dy$$

$$f_X(x) = \frac{8}{3} \left(x^3 + \frac{x^3}{2} \right) = 4x^3 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

De donde

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para la marginal de y

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{8}{3}x(x+y) dx$$

$$f_Y(y) = \frac{8}{3} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} \right]_y^1 = \frac{8}{9} + \frac{4}{3}y - \frac{20y^3}{9} \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1$$

De donde

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{8}{9} + \frac{4}{3}y - \frac{20y^3}{9} & ; \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y puesto que

$$f_X(x) f_Y(y) = \frac{32}{9}x^3 + \frac{16}{3}x^3 y - \frac{80}{9}x^3 y^3 \neq f_{XY}(x, y)$$

se concluye que las variables X y Y no son independientes (son dependientes).

CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

Las características numéricas de las variables aleatorias conjuntas son valores que describen el comportamiento probabilístico conjunto.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL: VALOR ESPERADO Y COEFICIENTE DE REGRESIÓN

Definición 5.6

Si X , Y son variables aleatorias conjuntas con función de probabilidad o de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y si $g(x, y)$ es una función de dichas variables aleatorias. Entonces el valor esperado de $g(x, y)$ se define como:

$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_{\forall R_x} \sum_{\forall R_y} g(x, y) f_{XY}(x, y) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy & \text{caso continuo} \end{cases}$$

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

- $E(c) = c$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Si X , Y son variables aleatorias independientes entonces

$$E(g_1(X) g_2(Y)) = E(g_1(X)) E(g_2(Y))$$

Ejemplo 5.9

En cierto proceso para elaborar una sustancia química especial, el producto resultante contiene dos tipos de impurezas. En una muestra específica de este proceso, X denota la proporción de impurezas en la muestra y Y la proporción de la impureza tipo I entre todas las impurezas encontradas. Supóngase que se puede elaborar un modelo de la distribución conjunta de X y Y mediante la función de densidad de probabilidad siguiente:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2 - 2x & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encontrar el valor esperado de la proporción de impurezas tipo I.

Resolución

Puesto que X es la proporción de impurezas en la muestra y Y la proporción de impurezas de tipo I en relación al total de las impurezas muestrales, tenemos que XY es la proporción de impurezas tipo I en la muestra entera. Es decir, se debe obtener $E(XY)$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 2xy(1-x) dy dx = 2 \int_0^1 x(1-x) \left(\frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Es importante observar que si X , Y son 2 variables aleatorias conjuntas, aún cuando se imponga la condición $X = x_0$ a la variable aleatoria X , la otra variable aleatoria conjunta Y sigue siendo una variable aleatoria, y como tal posee un comportamiento probabilístico propio, descrito por $f_{Y|x_0}(Y | X = x_0)$, y por lo tanto también se pueden determinar sus características numéricas.

Esto mismo ocurre con la condición $(X | Y = y_0)$.

Así, si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas y se conoce con certeza

el valor que tomará X , el mejor pronóstico que se puede realizar del valor que tomará Y es el valor esperado, calculado desde luego a partir de la distribución condicional correspondiente. Por lo tanto, si se sabe que $X = x_0$, el valor pronosticado para Y que se denota por \hat{y}_0 es

$$\hat{y}_0 = E[Y | X = x_0] = \mu_{Y|x_0}$$

Definición 5.7

Si X , Y son 2 variables aleatorias conjuntas, se define el valor esperado condicional como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 = \mu_{Y|x_0} = E[Y | X = x_0] &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x_0}(y | x_0) dy & \text{si } Y \text{ es continua} \\ \sum_{\forall R_Y} y f_{Y|x_0}(y | x_0) & \text{si } Y \text{ es discreta} \end{cases} \\ \hat{x}_0 = \mu_{X|y_0} = E[X | Y = y_0] &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y_0}(x | y_0) dx & \text{si } X \text{ es continua} \\ \sum_{\forall R_X} x f_{X|y_0}(x | y_0) & \text{si } X \text{ es discreta} \end{cases} \end{aligned}$$

La **curva de regresión** de Y dado x , es el lugar geométrico de los valores esperados de las distribuciones condicionales de Y . Su ecuación es: $\hat{y} = \mu_{Y|x}$

La **curva de regresión** de X dado y , es el lugar geométrico de los valores esperados de las distribuciones condicionales de X . Su ecuación es: $\hat{x} = \mu_{X|y}$

El concepto de curva de regresión tiene su principal utilidad en los pronósticos, puesto que para cada x proporciona el valor esperado (o pronóstico) de Y , o viceversa. ~~En el tema de Análisis de Datos, se estudió un resultado particular de la curva de regresión, en el cual se modela para una línea recta u otra curva a través de un sistema lineal en los parámetros, dando lugar al concepto de regresión lineal.~~

Ejemplo 5.10

Sea la función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^3 + \frac{3}{8}xy^2 & ; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener las esperanzas condicionales para cualquier valor (curvas de regresión).

Resolución

De un ejemplo anterior se sabe que para la función de densidad conjunta, las condicionales son:

$$f_{X|y_0}(X | Y = y_0) = \begin{cases} \frac{2x(8x^2 + 3y_0^2)}{4 + 3y_0^2} & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

siempre que $0 \leq y_0 \leq 2$

$$f_{Y|x_0}(Y | X = x_0) = \begin{cases} \frac{8x_0^2 + 3y^2}{8(2x_0^2 + 1)} & ; \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

siempre que $0 \leq x_0 \leq 1$

Y las esperanzas condicionales están dadas por:

$$\hat{y}_0 = \mu_{Y|x_0} = E[Y | X = x_0] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x_0}(y | x_0) dy$$

$$\hat{x}_0 = \mu_{X|y_0} = E[X | Y = y_0] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y_0}(x | y_0) dx$$

Por lo que

$$\hat{y}_0 = \mu_{Y|x_0} = \int_0^2 \frac{1}{8} \frac{y(8x_0^2 + 3y^2)}{2x_0^2 + 1} dy$$

$$\hat{y}_0 = \mu_{Y|x_0} = \frac{1}{2} \frac{3 + 4x_0^2}{2x_0^2 + 1} \quad \text{siempre que } 0 \leq x_0 \leq 1$$

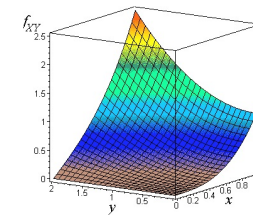
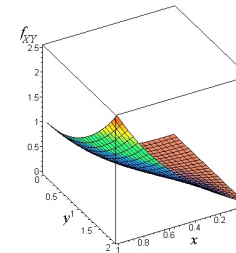
$$\hat{x}_0 = \mu_{X|y_0} = \int_0^1 2 \frac{x^2(8x^2 + 3y_0^2)}{4 + 3y_0^2} dx$$

$$\hat{x}_0 = \mu_{X|y_0} = \frac{2}{5} \frac{8 + 5y_0^2}{4 + 3y_0^2} \quad \text{siempre que } 0 \leq y_0 \leq 2$$

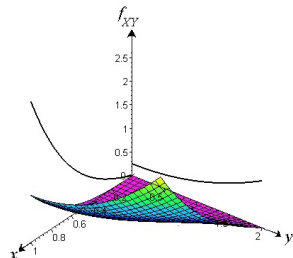
Las funciones marginales y las curvas de regresión pueden interpretarse con mayor facilidad a través de sus gráficas.

$$\text{Función de densidad conjunta } f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x^3 + \frac{3}{8}xy^2 & ; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su gráfica desde dos perspectivas es:

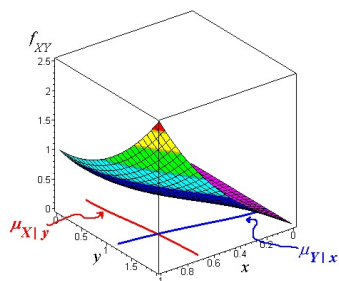


Las funciones condicionales dibujadas junto a la función de densidad son:



Debe observarse que las funciones condicionales se dibujan en el plano (y cada una en su plano); sin embargo, aquí se dibujan junto con la función de densidad conjunta para que se observe que tienen la misma tendencia. Es decir, para cada valor y_0 la condicional $f_{X|y_0}(x|y_0)$ acumula la probabilidad de la función conjunta $f_{XY}(x,y)$ para el valor constante y_0 y luego la refiere a la unidad.

Las esperanzas condicionales son:



Que igualmente deben dibujarse en el plano. La función $\hat{y} = E(Y|x)$ debe dibujarse en el plano xy , mientras que $\hat{x} = E(X|y)$ debe dibujarse en el plano yx .

MEDIDAS DE DISPERSIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS: COVARIANCIA Y CORRELACIÓN

COVARIANCIA

La covariancia es una medida de dispersión que indica, en promedio, qué tanto se alejan conjuntamente los valores de sus medias respectivas, *i.e.* qué tanto varían en conjunto (qué tanto covarían).

Definición 5.8

Si X y Y son 2 variables aleatorias conjuntas, entonces se define la covariancia $Cov(X, Y)$ como:

$$Cov(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Aplicando las propiedades del valor esperado, se tiene que la covariancia se puede calcular mediante:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

Teorema 5.1

Si X y Y son dos variables aleatorias conjuntas independientes, entonces:

$$Cov(X, Y) = 0$$

El valor esperado de la covariancia depende de la escala en la que están X y Y . Para referir la relación entre X y Y a una escala fija se debe utilizar el coeficiente de correlación.

Definición 5.9

El coeficiente de correlación, denotado por ρ es:

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

El coeficiente de correlación es una cantidad adimensional que mide la asociación lineal entre las dos variables aleatorias, el valor de ρ está contenido en el intervalo $[-1, 1]$.

El coeficiente de correlación tiene las siguientes propiedades.

- 1) Si X, Y son variables aleatorias independientes, entonces $\rho = 0$
- 2) Para cualesquiera variables aleatorias conjuntas $-1 \leq \rho \leq 1$
- 3) $\rho = \pm 1$, si y sólo si $Y = mX + b$ para m y b constantes.

Ejemplo 5.11

Dada la función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & ; \quad 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener:

- a) Las densidades marginales de X y Y
- b) Las funciones de densidad condicional de X y Y
- c) La expresión de las esperanzas condicionales de X y Y
- d) El coeficiente de correlación.

Resolución

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f_X(x) &= \int_0^\infty 4xye^{-(x^2+y^2)} dy = -2xe^{-(x^2+y^2)} \Big|_{y=0}^{y=\infty} \\ &= 2xe^{-x^2} \end{aligned}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & ; \quad 0 \leq x < \infty \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

De manera análoga, por simetría

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2} & ; \quad 0 \leq y < \infty \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f_{X|Y_0}(x | y_0) &= \frac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{4xy_0e^{-(x^2+y^2)}}{2y_0e^{-y_0^2}} \\ &= 2xe^{-x^2} \end{aligned}$$

$$f_{X|Y_0}(x | y_0) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

de forma análoga, por simetría

$$f_{Y|X_0}(y | x_0) = \begin{cases} 2ye^{-y^2} & y \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \hat{x}_0 &= \mu_{X|Y_0} = E[X | Y = y_0] = \int_0^\infty x (2xe^{-x^2}) dx \\ &= \int_0^\infty 2x^2e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sea} \quad u &= x, & du &= dx \\ dv &= 2xe^{-x^2} dx, & v &= -e^{-x^2} \end{aligned}$$

entonces:

$$\hat{x}_0 = -xe^{-x^2} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\hat{x}_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{y de forma análoga} \quad \hat{y}_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- d) Puesto que $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, entonces las variables aleatorias son independientes y $\text{Cov}(X, Y) = 0$, por lo que $\rho = 0$

Definición 5.10

El coeficiente de determinación, denotado por ρ^2 es:

$$\rho^2 = \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}$$

El coeficiente de determinación, proporciona el grado de explicación de una variable (generalmente y) respecto a la otra (generalmente x), es decir, qué tanto se explica y , conociendo x .

Teorema 5.2

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias con parámetros

$$E(X_i) = \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y a_1, a_2, \dots, a_n son constantes. Entonces la variable aleatoria Y con la combinación lineal siguiente

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

tiene como parámetros

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

La obtención de la variancia de una combinación lineal se facilita si se utiliza la forma matricial

$$\text{Var}(Y) = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

donde la matriz

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

recibe el nombre de **matriz de variancia-covariancia**, y tiene diversas aplicaciones en ingeniería.

Ejemplo 5.12

Supóngase que Y_1, Y_2 y Y_3 son variables aleatorias con

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= 2 & E(Y_2) &= -1 & E(Y_3) &= 4 \\ \text{Var}(Y_1) &= 4 & \text{Var}(Y_2) &= 6 & \text{Var}(Y_3) &= 8 \\ \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= 1 & \text{Cov}(Y_1, Y_3) &= -1 & \text{Cov}(Y_2, Y_3) &= 0 \end{aligned}$$

Obtener $E(3Y_1 + 4Y_2 - 6Y_3)$ y $\text{Var}(3Y_1 + 4Y_2 - 6Y_3)$

Resolución

$$\begin{aligned} E(3Y_1 + 4Y_2 - 6Y_3) &= 3E(Y_1) + 4E(Y_2) - 6E(Y_3) \\ E(3Y_1 + 4Y_2 - 6Y_3) &= 3(2) + 4(-1) - 6(4) = -22 \\ \text{Var}(3Y_1 + 4Y_2 - 6Y_3) &= 9\text{Var}(Y_1) + 16\text{Var}(Y_2) + 36\text{Var}(Y_3) + \\ &\quad + 2(3)(4)\text{Cov}(Y_1, Y_2) + \\ &\quad + 2(3)(-6)\text{Cov}(Y_1, Y_3) + \\ &\quad + 2(4)(-6)\text{Cov}(Y_2, Y_3) \\ \text{Var}(3Y_1 + 4Y_2 - 6Y_3) &= 9(4) + 16(6) + 36(8) + 2(3)(4)(1) \\ &\quad + 2(3)(-6)(-1) + 2(4)(-6)(0) \\ \text{Var}(3Y_1 + 4Y_2 - 6Y_3) &= 480 \end{aligned}$$

DISTRIBUCIÓN BINORMAL

Una generalización de la variable aleatoria normal unidimensional es la distribución normal bivariada, o binormal. La principal aplicación de la distribución binormal se encuentra en el cálculo de errores y en la teoría para la regresión lineal, cuando se estudian los supuestos teóricos que debe cumplir.

Definición 5.11

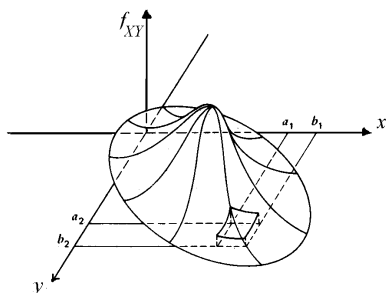
Sean X y Y dos variables aleatorias conjuntas, con función de densidad

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]}$$

para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$

Se denota $[X, Y] \sim \text{Binormal}(\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2, \rho)$.

La función de densidad binormal tiene como interpretación gráfica una superficie.



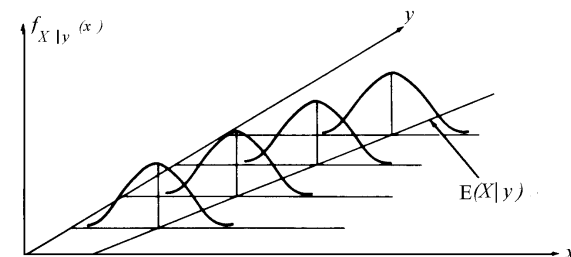
Y las funciones de densidad marginales son normales con parámetros μ_X , σ_X^2 y μ_Y , σ_Y^2 ; respectivamente.

Las condicionales también son normales con parámetros:

$$\mu_{X|y} = E(X|y) = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$$

$$\sigma_{X|y}^2 = \text{Var}(X|y) = \sigma_X^2(1 - \rho^2)$$

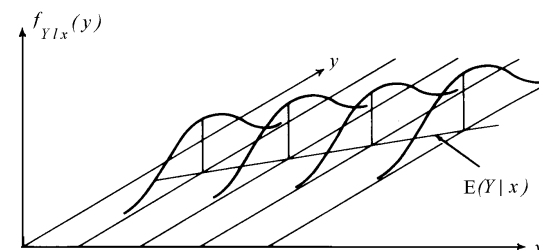
para la condicional de x dado y .



Mientras que la condicional de y dado x tiene como parámetros a:

$$\mu_{Y|x} = E(Y|x) = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

$$\sigma_{Y|x}^2 = \text{Var}(Y|x) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2)$$

**Ejemplo 5.13**

La vida útil de un foco X y el diámetro del filamento Y , se distribuyen de tal forma que el comportamiento conjunto se puede modelar mediante una distribución normal bivariada, con los siguientes parámetros.

$$\mu_X = 2000 \text{ [horas]}$$

$$\mu_Y = 0.1 \text{ [cm]}$$

$$\sigma_X^2 = 2500 \text{ [horas}^2\text{]}$$

$$\sigma_Y^2 = 0.01 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\rho = 0.87$$

El gerente de control de calidad desea determinar la vida de servicio de cada foco midiendo el diámetro del filamento. Si el diámetro de un filamento es 0.098, determinar la probabilidad de que el foco dure 1950 horas?

Resolución

Del enunciado $X \sim N(2000, 2500)$, $Y \sim N(0.1, 0.01)$, $\rho = 0.87$

De donde:

$$E(X|y) = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$$

$$= 2000 + 0.87 \left(\frac{50}{0.1} \right) (0.098 - 0.1)$$

$$= 1999.13$$

$$\sigma_{X|y}^2 = \text{Var}(X|y) = \sigma_X^2(1 - \rho^2)$$

$$= 2500(1 - 0.7569) = 607.75$$

Por lo que

$$P(X > 1950 | Y = 0.098) \approx P\left(Z > \frac{1950 - 1999.13}{\sqrt{607.75}}\right)$$

$$= P(Z > -1.99) = 0.9767$$

AUTOEXAMEN TEMA V

- 1.- El valor de la constante c , para que la función

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & ; \text{ si } 0 \leq x \leq 0.25, 0 \leq y \leq 2000 \\ 0 & ; \text{ en otro caso} \end{cases}$$

sea una función de densidad conjunta es:

- A) $\frac{1}{2000}$ B) $\frac{1}{500}$ C) 1 D) 4

E) Ninguna de las anteriores.

- 2.- Sean X y Y dos variables aleatorias conjuntas con función de densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6x^2y & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ; \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $P(X \leq 0.5, Y \leq 0.5)$ es:

- A) 0.03125 B) 0.75 C) 0.25 D) 0.6562
- E) Ninguna de las anteriores.

- 3.- La ganancia de un almacén de la central de abastos depende del tiempo de llegada del proveedor (que llega entre 1 y 4 a.m.) y la calidad del producto (que convencionalmente varía de 1 a 2). Llamemos X al tiempo de llegada y Y a la calidad.

Ambas variables tienen una función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x-y}{18} & ; 1 < x < 4, 1 < y < 2 \\ 0 & ; \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la función de densidad de probabilidad del tiempo de llegada es:

- A) $\frac{5}{4} - \frac{1}{6}y$ B) $\frac{1}{6}x - \frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{2}x - \frac{5}{12}$
- D) $\frac{1}{4} - \frac{1}{18}y$ E) 1

- 4.- Si X, Y son variables aleatorias conjuntas con función de densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces la densidad condicional de X dado Y cuando $0 < x < y, 0 < y < 1$

es:

- A) $2x$ B) $\frac{2x}{y^2}$ C) $2y$ D) $\frac{2x}{1-y^2}$

E) Ninguna de las anteriores

- 5.- Sean X y Y dos variables aleatorias conjuntas con función de probabilidad

$f_{XY}(x,y)$		y	
		1	2
x	0	0.1	0.3
	1	0.4	0.2

Entonces, el valor esperado de XY es:

- A) 0.6 B) 0.8 C) 0.9 D) 1.5
E) Ninguno de los anteriores.

- 6.- Dos líneas de ensamble producen cierto número de piezas en un día según la distribución de probabilidad conjunta siguiente

$f_{XY}(x,y)$		x		
		0	1	2
y	0	0.2	0.1	0.05
	1	0.1	0.15	0.1
	2	0.05	0.12	0.13

Entonces el número esperado de piezas que producen las dos líneas en un día cualquiera es:

- A) 2 B) 0.93 C) 1.86 D) 1.88
E) Ninguna de las anteriores.

- 7.- Si dos variables aleatorias tienen la densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces su covariancia, $Cov(X,Y)$, es:

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) 0 D) 1

E) Ninguna de las anteriores.

- 8.- Si X y Y son variables aleatorias conjuntas con $\mu_x = 10, \mu_y = 15, \sigma_x^2 = 3, \sigma_y^2 = 4, Cov(X,Y) = 2$ entonces $Var(2X - Y)$ es:

- A) 2 B) 16 C) 0 D) 24 E) 8

- 9.- Las variables aleatorias X y Y representan los rendimientos de las acciones de dos empresas. Sus parámetros son: $\mu_x = 10, \sigma_x = 15, \mu_y = 15, \sigma_y = 20$, y $\rho_{XY} = -0.1$. La media y la desviación estándar de la combinación lineal

$R = 0.4X + 0.6Y$ son respectivamente:

- A) 12.86, 18 B) 13, 18 C) 13, 13.41
D) 13, 12.86 E) Ninguna de las anteriores.

- 10.- Si las variables aleatorias conjuntas X y Y tienen la función de probabilidad conjunta

F_{XY}		x	
		0	1
y	1	0.1	0.3
	2	0.4	0.2

Entonces el coeficiente de correlación entre X y Y es:

- A) -0.408 B) 0.7 C) -0.1
D) -1.66 E) Ninguna de las anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Hines, William W. y Montgomery, Douglas C. - Probabilidad y Estadística para ingeniería, cuarta edición.- CECSA.- México, 2005.

Milton, Susan J. Y Arnold, Jesse C.- Probabilidad y Estadística para con aplicaciones para ingeniería y ciencias computacionales, cuarta edición.- McGraw-Hill.- México, 2004..

Devore, Jay L.- Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias, séptima edición.- Editorial Cengage.- México, 2008.

Wackerly Dennis D.- Mendenhall, William, *et al.*- Estadística Matemática con Aplicaciones, sexta edición.- Editorial Thomson.- México, 2002.

Walpole, Ronald E., *et al.*- Probability and Statistics for Engineers and Scientists.- Pearson.- USA, 2007.

Montgomery, Douglas C. y Runger, George C.-Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería, segunda edición.- Limusa-Wiley.- México, 2002.

Scheaffer, Richard L. y McClave, James T.- Probabilidad y Estadística para Ingeniería.- Grupo Editorial Iberoamérica.- México, 1993.

Canavos, George C.- Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos.- McGraw-Hill.- México, 1988.

Meyer, Paul L.- Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.- Addison Wesley Iberoamericana.- México, 1992.

Borras García, Hugo E., *et al.*- Apuntes de Probabilidad y Estadística.-Facultad de Ingeniería.- México, 1985.

Rosenkrantz, Walter A.- Introduction to Probability and Statistics for Scientists and Engineers.- McGraw-Hill.- EE.UU., 1997.

Ross Sheldon M - Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias-McGraw-Hill.- México, 2002.