

3 Die Plattentheorie

3.1

Die Tragwirkung von Platten

3.1.1

Allgemeines

Wie bereits in Abschnitt 1.3 erklärt wurde, stellen Platten ebene Flächentragwerke dar, die durch Lasten senkrecht zu ihrer Ebene oder durch andere Einflüsse beansprucht werden, die eine Verkrümmung der Plattenmittelfläche bewirken (z. B. Randmomente, exzentrische Vorspannung, ungleichmäßige Temperatur und Stützensenkungen). Bild 1.3-1 zeigt ein Beispiel für eine belastete Platte, die an ihren Ecken gestützt ist.

Die elastizitätstheoretische Behandlung des Plattenproblems führt auf eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die Biegefläche $w(x,y)$, die sogenannte Plattengleichung, die erstmals von KIRCHHOFF im Jahre 1850 veröffentlicht wurde.

Platten können punktwise, linienförmig oder flächig (auf sogenannter elastischer Bettung) gelagert sein. Für die Grundrißdarstellung linienförmiger Lagerungen werden die in Bild 3.1-1 dargestellten Vereinbarungen getroffen.

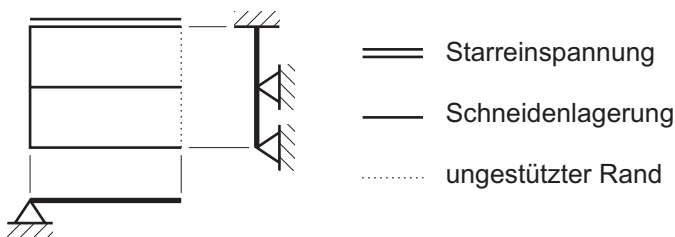


Bild 3.1-1: Darstellung linienförmiger Lagerungen von Platten

Im folgenden werden die Platten horizontal liegend angenommen, wobei die kartesischen Koordinaten x , y bzw. die Polarkoordinaten r , φ die Plattenmittelfläche beschreiben. Die Koordinate z weist nach unten.

3.1.2

Die Schnittgrößen von Platten

Die einzelnen Plattenstreifen werden, wie aus Bild 3.1-2 ersichtlich, bei der Beanspruchung nicht nur balkenartig verbogen, sondern auch verdreht.

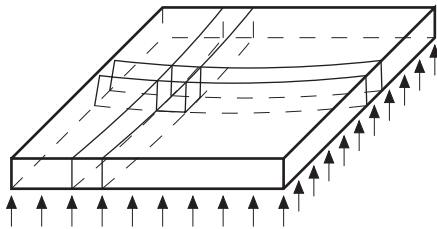


Bild 3.1-2: Verformung einzelner Plattenstreifen

Dementsprechend treten in der Platte nicht nur Biegemomente m_x , m_y mit achsenparallelen Vektoren und Querkräfte q_x , q_y , sondern auch Drillmomente m_{xy} auf. Da die Belastung keine zur Plattenebene parallelen Komponenten aufweist, werden keine Normalkräfte hervorgerufen. Die an den Lagern infolge der Plattenverdrehung entstehenden Normalkräfte werden wegen Geringfügigkeit vernachlässigt. Voraussetzung hierfür ist die Beschränkung der Verformung.

Die Plattenschnittgrößen und die durch sie verursachten Spannungen sind in Bild 3.1-3 dargestellt.

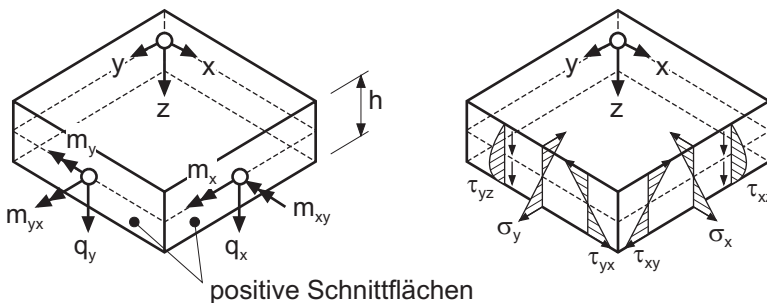


Bild 3.1-3: Schnittgrößen und Spannungen in Platten

Die positiven Schnittkräfte sind so definiert, daß die zugeordneten Spannungen in den positiven Schnittflächen im Bereich positiver z in die Koordinatenrichtungen weisen.

Der Index bei den Biegemomenten gibt die Richtung der zugeordneten Spannungen an. Die Querkräfte erhalten den gleichen Index wie die im selben Schnitt wirkenden Biegemomente. Aus der Gleichheit der Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} folgt $m_{xy} = m_{yx}$.

Sämtliche Schnittkräfte sind längenbezogen, z. B. Querkraft q_x [kN/m] und Biegemoment m_x [kNm/m].

3.1.3 Hauptmomente

Es gibt einen ausgezeichneten Winkel φ , bei dem die Drillmomente verschwinden und die Biegemomente Extremwerte annehmen. Diese Extrema heißen Hauptmomente und werden mit m_1 , m_2 bezeichnet. Ein entsprechendes infinitesimales Plattenelement ist in Bild 3.1-4 dargestellt.

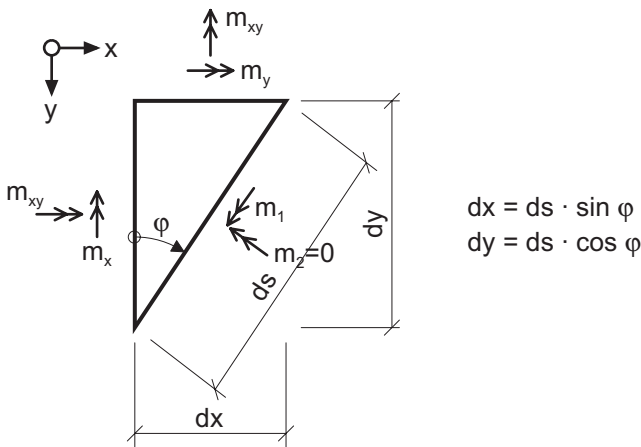


Bild 3.1-4: Infinitesimales Plattenelement mit Hauptmoment m_1

Das Momentengleichgewicht um eine Achse senkrecht zur schrägen Elementseite lautet

$$\Sigma M_2 = m_x \cdot dy \cdot \sin \varphi - m_{xy} \cdot dy \cdot \cos \varphi - m_y \cdot dx \cdot \cos \varphi + m_{xy} \cdot dx \cdot \sin \varphi = 0$$

oder

$$(m_x - m_y) \sin \varphi \cos \varphi - m_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für Winkelfunktionen ergibt sich daraus

$$\tan 2\varphi = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y}. \quad (3.1.1)$$

Durch Umformung dieser Gleichung erhält man

$$\tan \varphi = -\frac{m_x - m_y}{2m_{xy}} \pm \frac{1}{m_{xy}} \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + m_{xy}^2}. \quad (3.1.2)$$

Die Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma M_x = m_x \cdot dy + m_{xy} \cdot dx - m_1 \cdot ds \cdot \cos \varphi = 0$$

führt zunächst auf

$$m_1 = m_x + m_{xy} \cdot \tan \varphi$$

und mit (3.1.2) zum Ausdruck für die Hauptmomente

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2} \quad (3.1.3)$$

Diese Gleichung läßt sich im MOHRschen Momentenkreis graphisch deuten. Siehe hierzu Bild 3.1-5.

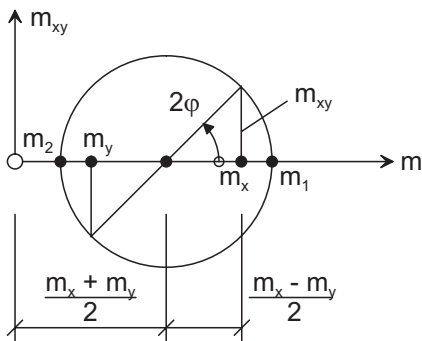


Bild 3.1-5: MOHRscher Kreis für die Plattenmomente

Aus der Darstellung erkennt man, daß φ für $m_{xy} = 0$ verschwindet, so daß $m_1 = m_x$ und $m_2 = m_y$ wird. Für die Bemessung von Platten sind die Hauptmomente maßgebend.

In einer quadratischen, gelenkig gelagerten Platte (siehe Bild 3.1-6) treten unter Gleichlast auf den beiden Koordinatenachsen aus Symmetriegründen keine Drillmomente auf. Die Momente m_x und m_y sind demnach Hauptmomente. Dementsprechend verlaufen die Hauptmomente auf den beiden Diagonalen parallel und senkrecht zu diesen. In der Plattenmitte liefert (3.1.1) wegen $m_x = m_y$ einen unbestimmten Ausdruck für φ . Das Maximalmoment ist in allen Richtungen gleich.

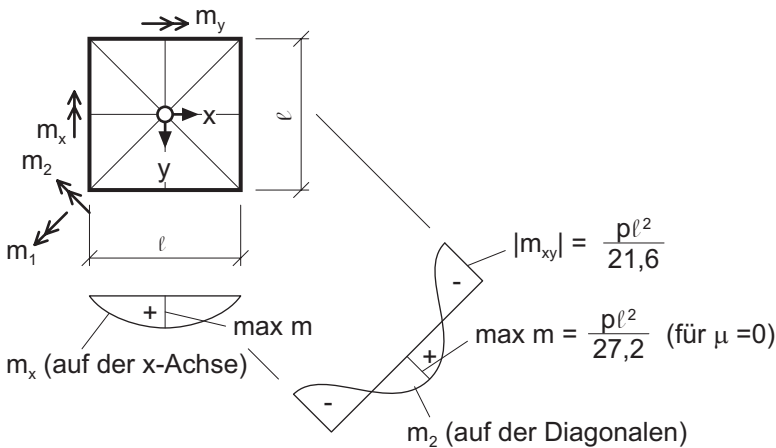


Bild 3.1-6: Hauptmomente einer quadratischen, gelenkig gelagerten Platte unter Gleichlast

An den Plattenecken wird $m_1 = -m_2 = m_{xy}$, da der Mittelpunkt des zugehörigen MOHRschen Kreises bei $m = 0$ liegt. Die Hauptmomente haben also denselben Absolutwert, jedoch umgekehrtes Vorzeichen. Dementsprechend muß im Stahlbetonbau die Drillbewehrung an Plattenecken oben in Richtung der Winkelhalbierenden verlaufen, unten senkrecht dazu (vgl. beispielsweise DIN 1045 [4.1], Abschnitt 20.1.6.4).

Die in Bild 3.1-6 angegebenen Zahlenwerte wurden Tafel 2 entnommen.

3.1.4

Lastaufteilungsverfahren für Rechteckplatten

Wird die in Bild 3.1-2 veranschaulichte Wirkung der Drillmomente vernachlässigt, so liegt man auf der sicheren Seite, sowohl im Hinblick auf die Biegemomente, als auch auf die Durchbiegungen. Deshalb dürfen z.B. laut Abschnitt 20.1.5 der DIN 1045 [4.1] die Biegemomente zweiachsig gespannter, allseits gelagerter Rechteckplatten näherungsweise an sich kreuzenden Plattenstreifen gleicher größter Durchbiegung f ermittelt werden. Die auf die Platte wirkende konstante Belastung p wird bei dieser Methode mit Hilfe der Bedingung

$$f_x = f_y \quad (3.1.4)$$

gemäß

$$p = p_x + p_y \quad (3.1.5)$$

in die Anteile p_x und p_y aufgeteilt, so daß man die Platte getrennt in beiden Richtungen als Balken berechnen kann.

Die Methode wird anhand des Bildes 3.1-7 erläutert.

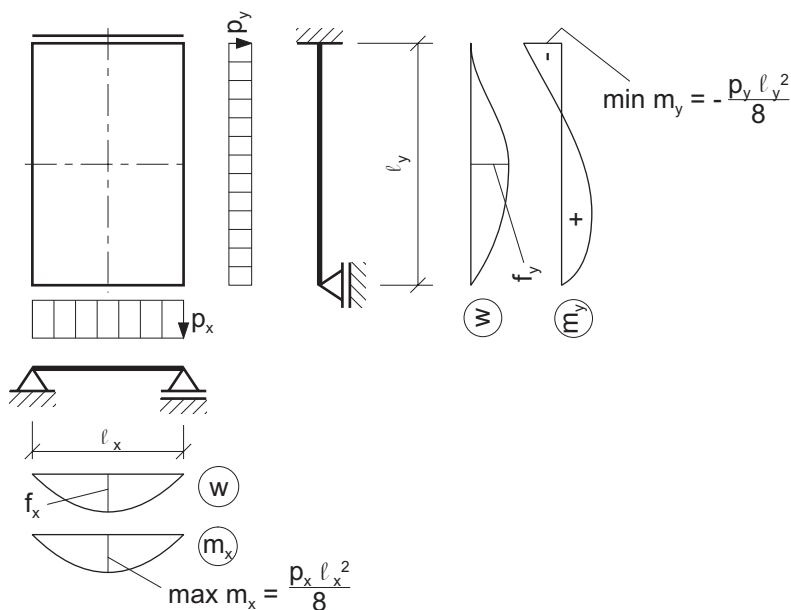


Bild 3.1-7: Veranschaulichung der Streifenmethode

Mit der Lastanteilszahl κ gilt

$$p_x = \kappa p, \quad (3.1.6)$$

$$p_y = (1 - \kappa) \cdot p. \quad (3.1.7)$$

In Bild 3.1-8 sind die Mitteldurchbiegungen von Balken in Abhängigkeit von den Lagerungsbedingungen angegeben (siehe z. B. HIRSCHFELD [1.16]).

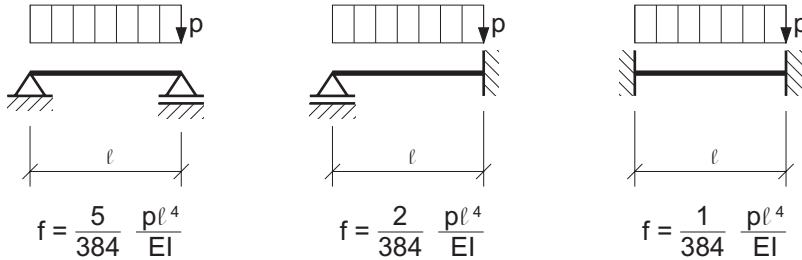


Bild 3.1-8: Mitteldurchbiegungen von Balken

Damit und mit $\varepsilon = \ell_y / \ell_x$ erhält man für die 6 verschiedenen Stützungsarten vierseitig gelagerter Rechteckplatten die in Bild 3.1-9 angegebenen Lastanteilszahlen κ .

Stützungsart	1	2	3	4	5	6
κ	$\frac{\varepsilon^4}{1 + \varepsilon^4}$	$\frac{2\varepsilon^4}{5 + 2\varepsilon^4}$	$\frac{\varepsilon^4}{5 + \varepsilon^4}$	$\frac{\varepsilon^4}{1 + \varepsilon^4}$	$\frac{2\varepsilon^4}{1 + 2\varepsilon^4}$	$\frac{\varepsilon^4}{1 + \varepsilon^4}$

Bild 3.1-9: Plattenlagerungsarten und zugehörige Lastanteilszahlen κ

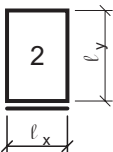
Bei gedrungenen Platten, d.h. bei einem Seitenverhältnis $2/3 \leq \varepsilon \leq 3/2$ ergeben sich nach der Plattentheorie wesentlich geringere Feldmomente als nach der Streifenmethode, da die Lasten im Eckbereich diagonal abgetragen werden.

Um die großen Unterschiede der Ergebnisse beider Verfahren an einem Beispiel aufzuzeigen, werden drei Platten vom Typ 2 mit unterschiedlichen Seitenverhältnissen

nissen untersucht. Nach der Streifenmethode lauten die beiden Feldmomente und das Stützmoment der betrachteten Platte allgemein

$$\begin{aligned}\max m_x &= \frac{p_x \ell_x^2}{8} = \frac{p \ell_x \ell_y}{\alpha_{xf}}, \\ \max m_y &= \frac{9}{128} p_y \ell_y^2 = \frac{p \ell_x \ell_y}{\alpha_{yf}}, \\ \min m_y &= \frac{-p_y \ell_y^2}{8} = \frac{p \ell_x \ell_y}{\alpha_{ys}}.\end{aligned}$$

Den ermittelten Momentenbeiwerten α_{xf} , α_{yf} , α_{ys} werden in Bild 3.1-10 die entsprechenden Zahlenwerte nach der Plattentheorie (siehe Tafel 2) gegenübergestellt.



$\epsilon = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	κ	Streifenmethode			Plattentheorie		
		α_{xf}	α_{yf}	α_{ys}	α_{xf}	α_{yf}	α_{ys}
0,70	0,0876	63,9	22,3	-12,5	78,3	29,2	-13,1
1,00	0,2857	28,0	19,9	-11,2	41,2	29,4	-11,9
1,50	0,6694	17,9	28,7	-16,1	24,9	48,5	-13,3

Bild 3.1-10: Lastanteilszahlen und Momentenbeiwerte für drei Platten des Typs 2

Der Einfluß der Drillmomente zeigt sich deutlich bei einem Vergleich der Feldmomente. In vorstehendem Beispiel ergeben sich diese nach der Streifenmethode um ca. 50 % größer als nach der Plattentheorie.

Die günstige Wirkung der Drillmomente darf nur in vollem Umfang berücksichtigt werden, wenn diese überall von der Platte aufgenommen werden können. Das setzt voraus, daß

- die Plattenecken gegen Abheben gesichert sind,
- an den Ecken, wo zwei frei drehbar gelagerte Ränder zusammenstoßen, eine ausreichende Eckbewehrung eingelegt wird und
- an den Ecken keine Aussparungen vorhanden sind, die die Drillsteifigkeit wesentlich beeinträchtigen.

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, dann dürfen die Biegemomente nicht nach der Plattentheorie ermittelt werden, wohl aber nach der Streifenmethode.

3.2

Die Plattengleichung in kartesischen Koordinaten

3.2.1

Idealisierungen und Annahmen

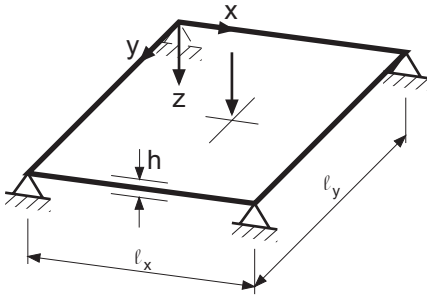


Bild 3.2-1: Beispiel für eine belastete Platte

Der Herleitung der KIRCHHOFFSchen Plattengleichung liegen Idealisierungen und Annahmen im Hinblick auf Geometrie, Beanspruchung, Verformung und Material zugrunde, die im folgenden zusammengestellt werden.

Geometrie:

- Die Mittelfläche der unbelasteten Platte ist eben.
- Die Dicke h der Platte ist klein im Verhältnis zu deren Spannweiten.
- Die Plattendicke wird im folgenden als konstant vorausgesetzt.
- Es werden keine Imperfektionen berücksichtigt.

Belastung:

- Alle äußeren Lasten, Lagerkräfte und Lagerverschiebungen wirken senkrecht zur unverformten Mittelfläche, die Vektoren von Randmomenten oder Randverdrehungen liegen in ihr.
- Temperaturänderungen verlaufen linear über die Plattendicke mit Nullpunkt in der Mittelfläche.
- Die Spannungen σ_z in der Platte infolge der Vertikallasten sind im Vergleich zu den Spannungen σ_x und σ_y vernachlässigbar gering, so daß ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt werden darf.
- Alle Beanspruchungen sind zeitunabhängig.

Verformungen:

- Für die Neigungen der Biegefläche wird $\partial w / \partial x \ll 1$ und $\partial w / \partial y \ll 1$ vorausgesetzt, damit für die Krümmungen mit ausreichender Genauigkeit $\kappa_x = -\partial^2 w / \partial x^2$ und $\kappa_y = -\partial^2 w / \partial y^2$ gilt und die Membrankräfte vernachlässigt werden können.
- Wie beim Balken wird das Ebenbleiben der Querschnitte (Hypothese von BERNOULLI) vorausgesetzt, indem die Schubverformungen gegenüber den Biegeverformungen vernachlässigt werden. Daraus folgt, daß Punkte auf einer Normalen zur Platte nach deren Verformung auf einer Normalen zur verformten Mittelfläche liegen.
- Punkte der Mittelfläche verschieben sich bei deren Verformung nur in z-Richtung.

Material:

- Der Baustoff ist homogen und isotrop.
- Das Material verhält sich idealelastisch, so daß ohne Einschränkung das HOOKEsche Gesetz gilt.
- Das Materialverhalten ist zeitunabhängig.

3.2.2

Gleichgewicht am Plattenelement

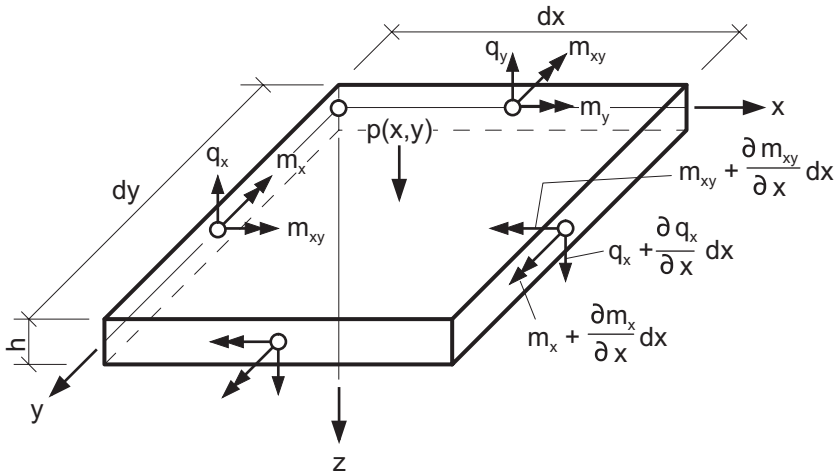


Bild 3.2-2: Infinitesimales Plattenelement mit positiven Kraftgrößen

Bild 3.2-2 zeigt ein Plattenelement mit den an seinen Rändern angreifenden, positiv definierten Querkraften und Momenten (vgl. Bild 3.1-3). In den positiven Schnittflächen enthalten die Schnittgrößen jeweils einen differentiellen Zuwachs, der sich aus der partiellen Ableitung nach der betreffenden Richtung berechnet. Außer den Schnittgrößen ist die Flächenlast $p(x,y)$ eingezeichnet. Diese kann im Bereich des Elements als konstant angesehen werden.

Am Element treten die fünf unbekannten Schnittgrößen m_x , m_y , m_{xy} , q_x und q_y auf. Dem stehen nur drei Gleichgewichtsbedingungen gegenüber, nämlich $\Sigma Z = \Sigma M_x = \Sigma M_y = 0$. Die restlichen drei Bedingungen $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma M_z = 0$ sind schon erfüllt, da nur Belastungen in z -Richtung auftreten und $m_{xy} = m_{yx}$ gesetzt wurde. Die vorhandenen Gleichungen reichen demnach zur Lösung des Plattenproblems nicht aus. Es müssen zusätzlich Formänderungsbetrachtungen angestellt werden.

Bei der Formulierung des Gleichgewichts sind die Schnittgrößen mit den Längen der Kanten zu multiplizieren, an denen sie wirken. Für die Vertikalrichtung erhält man

$$\Sigma V = p(x, y) \cdot dx \cdot dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) \cdot dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right) \cdot dx = 0$$

und daraus nach Division durch die Elementfläche

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p(x, y). \quad (3.2.1)$$

Das Momentengleichgewicht um die rechte Kante lautet

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = & -p(x, y) \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} + q_x \cdot dy \cdot dx - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} \\ & + \left(m_x - m_x - \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy + \left(m_{xy} - m_{xy} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

und nach Vereinfachung

$$-p(x, y) \cdot \frac{dx}{2} + q_x - \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot \frac{dx}{2} - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0.$$

Die beiden Terme, die dx enthalten, sind infinitesimal klein und können gegenüber den drei endlichen Gliedern der Gleichung vernachlässigt werden. Es verbleibt dann

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}. \quad (3.2.2)$$

Dementsprechend ergibt sich aus einer Momentenbetrachtung um die x-Achse

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}. \quad (3.2.3)$$

Mittels (3.2.2) und (3.2.3) können die Querkräfte aus (3.2.1) entfernt werden, so daß nur noch eine Gleichung mit den drei Momenten als Unbekannten verbleibt:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p(x, y). \quad (3.2.4)$$

3.2.3

Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen

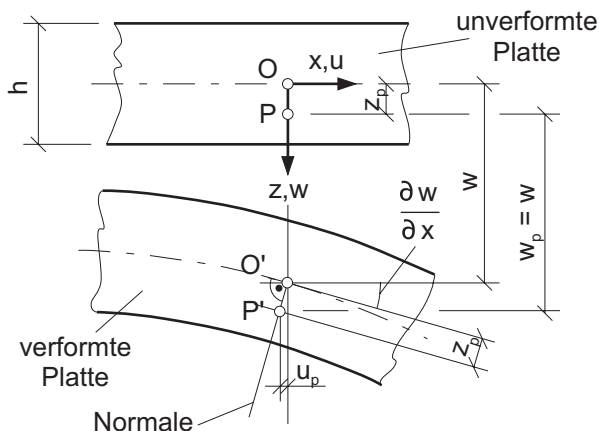


Bild 3.2-3: Vertikalschnitt durch die Platte vor und nach der Verformung

Wie in Abschnitt 3.2.1 postuliert, verschiebt sich der Punkt O der Plattenmittelfläche (siehe Bild 3.2-3) nur in z-Richtung. Der darunter auf der Normalen liegende Punkt P erfährt durch die Verbiegung der Platte auch Verschiebungen in x- und y-Richtung. Diese lauten allgemein

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y} \cdot z. \quad (3.2.5)$$

Da kleine Verformungen vorausgesetzt wurden, ist die Vertikalverschiebung w beider Punkte gleich.

Die Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen des ebenen Spannungszustands in der x-y-Ebene wurden bereits in Abschnitt 2.2.2 am Scheibenelement abgeleitet. Die entsprechenden Gleichungen (2.2.3) bis (2.2.5) werden hier übernommen und mit (3.2.5) kombiniert. Es ergibt sich

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.2.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.2.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.2.8)$$

In diesen drei Gleichungen treten vier neue Unbekannte auf, nämlich ε_x , ε_y , γ_{xy} und w . Das in Abschnitt 3.2.2 konstatierte Defizit an Gleichungen hat sich demnach von zwei auf drei erhöht.

3.2.4

Spannungs-Verschiebungs-Beziehungen

Die Beziehungen zwischen den Normalspannungen und den Verschiebungen ergeben sich aus (1.1.4) in Verbindung mit (3.2.6) und (3.2.7) zu

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.2.9)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (3.2.10)$$

Für die Schubspannung erhält man mit (3.2.8)

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.2.11)$$

Da in den vorstehenden drei Gleichungen die drei neuen Unbekannten σ_x , σ_y , τ_{xy} auftreten, fehlen weiterhin drei Gleichungen zur Lösung des Problems. Diese werden im nächsten Abschnitt hergeleitet, indem die Äquivalenz der Momente mit den durch sie verursachten Spannungen formuliert wird.

3.2.5

Momenten-Verschiebungs-Beziehungen

Anhand des Bildes 3.2-4 werden die Plattenmomente als Resultierende der inneren Spannungen mit ihren Hebelarmen ausgedrückt.

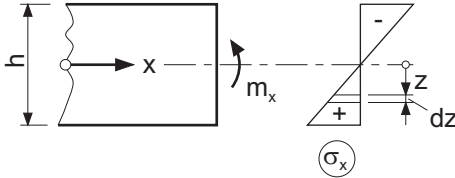


Bild 3.2-4: Biegemoment m_x und zugehörige Spannungen σ_x

Durch Integration über die Plattendicke erhält man unter Verwendung von (3.2.9)

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z dz = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Mit der sogenannten Plattensteifigkeit

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.2.12)$$

folgt hieraus

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -K(w'' + \mu w''). \quad (3.2.13)$$

Der entsprechende Ausdruck für m_y ergibt sich durch Vertauschung von x und y zu

$$m_y = -K(w'' + \mu w''). \quad (3.2.14)$$

Schließlich erhält man mit (3.2.11) für das Drillmoment

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z dz = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

oder

$$m_{xy} = -K(1-\mu)w'''. \quad (3.2.15)$$

In (3.2.13) bis (3.2.15) sind keine neuen Unbekannten aufgetreten, so daß nunmehr genügend Gleichungen zur Verfügung stehen.

3.2.6

Querkraft-Verschiebungs-Beziehungen

Aus (3.2.2) und (3.2.3) folgen mit (3.2.13) bis (3.2.15) nun auch die Beziehungen zwischen den Querkraften und den Verschiebungen. Für q_x erhält man zunächst

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -K(w'''' + \mu w''') - K(1-\mu)w'''$$

und weiter

$$q_x = -K(w'''' + w'''). \quad (3.2.16)$$

Dementsprechend wird

$$q_y = -K(w'''' + w'''). \quad (3.2.17)$$

Mit den letzten beiden Gleichungen sind nun alle Spannungen, Dehnungen und Schnittgrößen auf die eine Unbekannte w zurückgeführt.

3.2.7

Plattengleichung

Die Ausdrücke (3.2.13) bis (3.2.15) für die Plattenmomente werden in die kombinierte Gleichgewichtsbedingung (3.2.4) eingeführt. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial y^2} &= -K(w'''' + \mu w''') - 2K(1-\mu)w'''' \\ &\quad - K(w'''' + \mu w''') = -p(x, y). \end{aligned}$$

Nach Zusammenfassung und Division durch K folgt

$$w'''' + 2w'''' + w'''' = p(x, y) / K \quad (3.2.18)$$

oder mit (2.2.12)

$$\Delta \Delta w = p(x, y) / K. \quad (3.2.19)$$

Dies ist eine lineare, partielle Differentialgleichung 4. Ordnung. Sie wird als Plattengleichung bezeichnet und ist vom selben Typ wie die Scheibengleichung (2.2.13), jedoch im allgemeinen inhomogen.

Die Plattengleichung ist unter Beachtung der Randbedingungen zu lösen. Aus dem Ergebnis $w(x,y)$ erhält man die Schnittgrößen durch Differentiation entsprechend (3.2.13) bis (3.2.17).

Rückblickend soll noch einmal nachvollzogen werden, welche Grundgleichungen schließlich zur Gesamtdifferentialgleichung geführt haben. Wie auch bei der Scheibengleichung und bei jedem anderen elastizitätstheoretischen Problem sind das

- die Gleichgewichtsbedingungen, die die statische Verträglichkeit gewährleisten und den Zusammenhang zwischen den inneren und äußeren Kraftgrößen beschreiben,
- die kinematischen Beziehungen, die aus der geometrischen Verträglichkeit resultieren und den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen wiedergeben, sowie
- das Materialgesetz, welches den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den inneren Kraftgrößen beschreibt.

3.2.8

Die Randbedingungen

3.2.8.1

Randscherkräfte

An jedem Rand der Platte treten drei verschiedene Schnittgrößen auf (Biegemoment, Drillmoment und Querkraft), die mit dem äußeren Randangriff im Gleichgewicht stehen müssen. Für $w(x,y)$ als Lösung der Plattengleichung können jedoch je Rand entsprechend der Ordnung der Differentialgleichung nur zwei Randbedingungen vorgeschrieben werden. Man hilft sich, indem man die Wirkungen von q_x bzw. q_y und m_{xy} zu einer Größe, der sogenannten Randscherkraft, zusammenfaßt. Die Herleitung wird anhand von Bild 3.2-5 erläutert.

Links ist die Plattenmittelfläche mit den positiven Randschnittgrößen dargestellt. Für die beiden Randflächen der Platte, die die Achsen x und y enthalten, sind im rechten Teil des Bildes die Drillmomente eines Abschnitts dx bzw. dy jeweils durch ein gleichwertiges Kräftepaar ersetzt worden. An den Grenzen der Abschnitte der Länge dx heben sich die Komponenten der beiden Kräftepaare teilweise auf. Es verbleibt als Resultierende $(\partial m_{xy} / \partial x) \cdot dx$. Diese Einzelkraft wird auf

die Länge dx verteilt, so daß sich die bezogene Ersatzscherkraft $\partial m_{xy}/\partial x$ ergibt. Für die Randfläche $x = 0$ erhält man die Ersatzscherkraft $\partial m_{xy}/\partial y$.

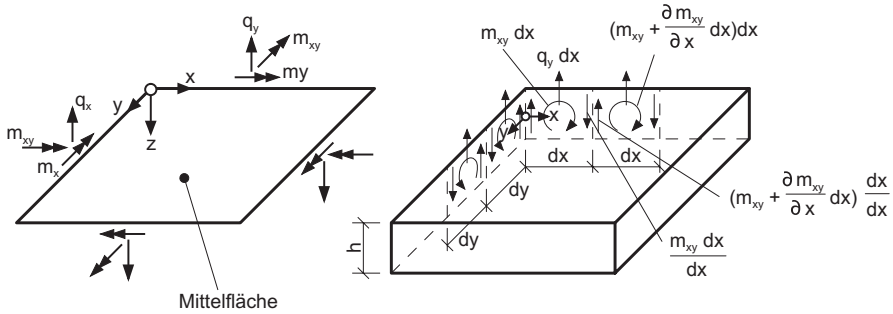


Bild 3.2-5: Zur Herleitung der Ersatzscherkräfte

Die Summe aus Querkraft und zugehöriger Ersatzscherkraft wird als Randscherkraft bezeichnet:

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad (3.2.20)$$

$$\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}. \quad (3.2.21)$$

Die Randscherkräfte entsprechen den Auflagerkräften. Im allgemeinen stimmen also Auflagerkraft und Randquerkraft nicht überein.

An einer rechtwinkligen Plattenecke addieren sich die Ersatzscherkräfte zu einer abhebenden Einzelkraft

$$A = 2 m_{xy}. \quad (3.2.22)$$

3.2.8.2

Randbedingungen an geraden Rändern

In Bild 3.2-6 sind verschiedene Lagerungen des geraden Randes bei $x = 0$ dargestellt. Hierfür sollen im folgenden die Randbedingungen formuliert werden.

Gerader, eingespannter Rand (a)

Die Randbedingungen für w lauten unabhängig von μ

$$w(0,y) = w'(0,y) = 0. \quad (3.2.23)$$

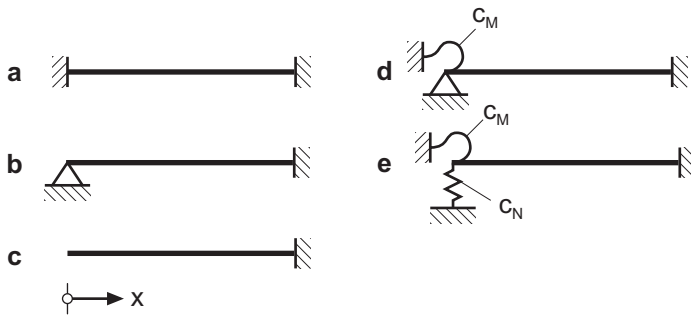


Bild 3.2-6: Verschiedene Lagerungen des Randes bei $x = 0$

Daraus folgt durch Differentiation $w''(0, y) = 0$ und weiter mit (3.2.15)

$$m_{xy}(0, y) = -K(1 - \mu)w''(0, y) = 0.$$

Am eingespannten Rand tritt also kein Drillmoment auf. Dementsprechend gilt dort

$$\bar{q}_x(0, y) = q_x(0, y) \quad \text{und} \quad A = 0.$$

Gerader, gelenkig gelagerter Rand (b)

Außer der Durchbiegung verschwindet am Rand das Biegemoment m_x . Es gilt demnach

$$w(0, y) = m_x(0, y) = 0.$$

Da sich der Rand nicht verkrümmen kann, gilt auch $w''(0, y) = 0$, und aus (3.2.13) folgt

$$w'''(0, y) = 0.$$

Die Randbedingungen für w lauten demnach unabhängig von μ

$$w(0, y) = w''(0, y) = 0. \quad (3.2.24)$$

Die gemischte Ableitung von w verschwindet nicht, da sich die Randverdrehung der Platte mit y ändert. Deshalb treten am gelenkig gelagerten Rand Drillmomente auf, und es gilt

$$m_{xy} \neq 0, \quad A = 2 m_{xy} \quad \text{und} \quad q_x \neq \bar{q}_x.$$

Gerader, freier Rand (c)

Das Randmoment und die Randscherkraft verschwinden:

$$m_x(0, y) = \bar{q}_x(0, y) = 0 .$$

Daraus erhält man mit (3.2.13) die erste Randbedingung für w :

$$w''(0, y) + \mu \cdot w''(0, y) = 0 . \quad (3.2.25)$$

Diese ist von μ abhängig. Das gilt auch für die zweite Randbedingung, die sich unter Verwendung von (3.2.15) und (3.2.16) aus (3.2.20) ergibt. Mit

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -K(w''' + w''') - K(1 - \mu)w''$$

erhält man

$$w'''(0, y) + (2 - \mu) \cdot w''(0, y) = 0 . \quad (3.2.26)$$

Ebenso wie die Randbedingungen hängt bei Rechteckplatten mit freiem Rand die gesamte Lösung der Plattengleichung von μ ab.

Gerader, gestützter Rand mit elastischer Einspannung (d)

Die Lösung unterscheidet sich von Fall (b) dadurch, daß das Randmoment nicht verschwindet, sondern proportional zur Randverdrehung ist:

$$m_x(0, y) = -c_M \cdot w'(0, y) .$$

Dementsprechend lauten die Randbedingungen für w

$$w(0, y) = 0, \quad c_M \cdot w'(0, y) - K \cdot w''(0, y) = 0 . \quad (3.2.27)$$

Über K ergibt sich eine Abhängigkeit von μ .

Gerader Rand mit elastischer Stützung und Einspannung (e)

Abweichend von Fall (c) ergeben sich das Randmoment und die Randscherkraft aus den betreffenden Randverformungen zu

$$m_x(0, y) = -c_M \cdot w'(0, y) \quad \text{und} \quad \bar{q}_x(0, y) = +c_N \cdot w(0, y) .$$

Dementsprechend lauten die Randbedingungen für w

$$\begin{aligned} c_M \cdot w'(0, y) - K[w''(0, y) + \mu \cdot w''(0, y)] &= 0 , \\ c_N \cdot w(0, y) + K[w'''(0, y) + (2 - \mu)w''(0, y)] &= 0 . \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

3.2.9

Einfluß der Querdehnung

3.2.9.1

Allgemeines

Aus der modifizierten Form der Plattengleichung (3.2.19)

$$\Delta\Delta(K \cdot w) = p(x, y)$$

geht hervor, daß das Produkt $K \cdot w$ unabhängig von der Querdehnzahl μ ist, wenn das auch für die Randbedingungen gilt. Es liegt deshalb nahe, gegebenenfalls die Lösung für $\mu = 0$ zu suchen und das Ergebnis nach der Gleichung

$$K_\mu \cdot w_\mu = K_0 \cdot w_0$$

auf den Fall $\mu \neq 0$ umzurechnen. Mit K nach Gleichung (3.2.12) gilt dann

$$w_\mu = (1 - \mu^2) \cdot w_0.$$

Diese Methode ist auf Probleme mit μ -freien Rändern, wie z.B. die Fälle **(a)** und **(b)** nach Bild 3.2-6, beschränkt und wird im folgenden Unterabschnitt weiter ausgeführt.

Bei den Biegemomenten besteht, wie man aus (3.2.13) und (3.2.14) ersieht, keine Affinität zwischen den Lösungen für $\mu = 0$ und $\mu \neq 0$. Eine Umrechnung ist jedoch trotzdem möglich, da z.B.

$$m_x = -K_\mu \cdot (w_\mu'' + \mu w_\mu'') = -K_0 \cdot (w_0'' + \mu w_0'') = m_{x0} + \mu \cdot m_{y0}$$

gilt.

Im Stahlbetonbau mit Ausnahme von Fahrbahnplatten darf i.a. $\mu = 0$ angenommen werden. Im Spannbetonbau ist $\mu = 0,2$, bei Stahlkonstruktionen $\mu = 0,3$ zu setzen. Je größer μ ist, desto kleiner werden die Verformungen und desto größer die Feldmomente. Die Stützmomente und die Querkkräfte sind unabhängig von μ .

3.2.9.2

Umrechnungsformeln für Platten mit von μ unabhängigen Randbedingungen

Vierseitig gestützte Platten, deren Ränder gelenkig gelagert oder starr eingespannt sind, besitzen von der Querdehnzahl μ unabhängige Randbedingungen. Dementsprechend bezeichnet man ihre Ränder als μ -frei. Sollen mit $\mu = 0$ ermittelte Zustandsgrößen von Platten mit μ -freien Rändern (siehe Bild 3.2-7) auf $\mu \neq 0$ umge-

rechnet werden, so gelten hierfür die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Formeln.

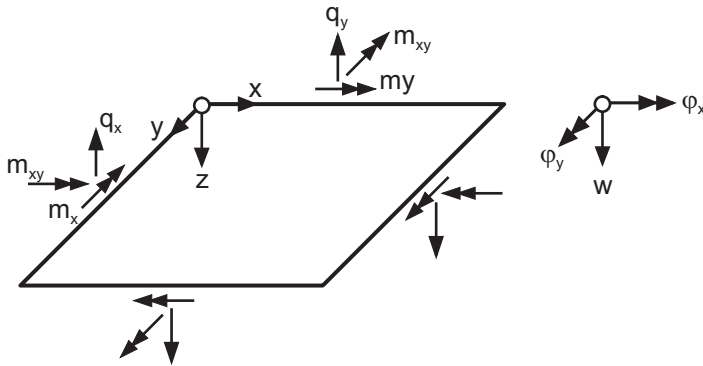


Bild 3.2-7: Zustandsgrößen von Platten

Zustandsgröße	Lösung für $\mu = 0$	Lösung für $\mu \neq 0$	Gleichungsnummer
Durchbiegung	w_0	$w_\mu = (1 - \mu^2) w_0$	(3.2.29)
Neigungen der Biegefläche	$\varphi_{x0} = w'_0$ $\varphi_{y0} = -w'_0$	$\varphi_{x\mu} = (1 - \mu^2) \varphi_{x0}$ $\varphi_{y\mu} = (1 - \mu^2) \varphi_{y0}$	(3.2.30)
Biegemomente	m_{x0} m_{y0}	$m_{x\mu} = m_{x0} + \mu m_{y0}$ $m_{y\mu} = m_{y0} + \mu m_{x0}$	(3.2.31)
Drillmoment	m_{xy0}	$m_{xy\mu} = (1 - \mu) m_{xy0}$	(3.2.32)
Querkräfte	q_{x0} q_{y0}	$q_{x\mu} = q_{x0}$ $q_{y\mu} = q_{y0}$	(3.2.33)
Randscherkräfte	$\bar{q}_{x0} = q_{x0} + m'_{xy0}$ $\bar{q}_{y0} = q_{y0} + m'_{xy0}$	$\bar{q}_{x\mu} = q_{x0} + (1 - \mu) m'_{xy0}$ $\bar{q}_{y\mu} = q_{y0} + (1 - \mu) m'_{xy0}$	(3.2.34)

3.2.9.3

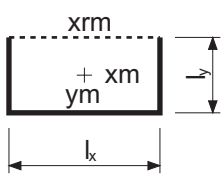
Rechteckplatten mit freiem Rand

Freie Plattenränder sind, wie in Abschnitt 3.2.8.2 nachgewiesen wurde, nicht μ -frei. Deshalb ist die Lösung w der Plattengleichung von der Querdehnzahl abhän-

gig, und die Lösung für $\mu \neq 0$ kann nicht aus derjenigen für $\mu = 0$ hergeleitet werden. Entsprechende Tafelwerke müssen also den Parameter μ enthalten. Die für vierseitig gestützte Rechteckplatten gültigen Umrechnungsformeln würden hier zu Fehlern führen.

Mit Hilfe der diesem Buch beigelegten CD-ROM wurden für den Lastfall $p = \text{const.}$ die Momentenbeiwerte einer Platte mit einem freien Rand für $\mu = 0$ und $\mu = 0,20$ und für drei verschiedene Seitenverhältnisse ermittelt. Sie sind der folgenden Tabelle (siehe Bild 3.2-8) zu entnehmen. Dabei gilt allgemein

$$m = \frac{p \ell_x^2}{\alpha}$$



$\epsilon = \frac{\ell_y}{\ell_x}$	$\mu = 0$			$\mu = 0,20$		
	α_{xm}	α_{ym}	α_{xrm}	α_{xm}	α_{ym}	α_{xrm}
0,50	33,8	52,0	19,6	28,1	46,9	17,4
1,00	13,7	46,1	9,8	12,9	29,9	9,2
1,50	10,2	68,2	8,4	10,0	30,2	8,0

Bild 3.2-8: Momentenbeiwerte für drei Platten mit freiem Rand

Nach den hier nicht anwendbaren Umrechnungsformeln (3.2.31) würden sich die Randmomente m_{xrm} für $\mu \neq 0$ nicht von denen für $\mu = 0$ unterscheiden.

3.2.10 Der Lastfall ungleichmäßige Temperatur

3.2.10.1 Temperaturverlauf

Entsprechend Bild 3.2-9 wird in der Platte ein linearer Temperaturverlauf mit Nulldurchgang in der Mittelfläche angenommen. Eine positive Temperaturdifferenz

$$\Delta T = T_u - T_o \quad (3.2.35)$$

erzeugt Verkrümmungen mit demselben Vorzeichen wie ein positives Biegemoment.

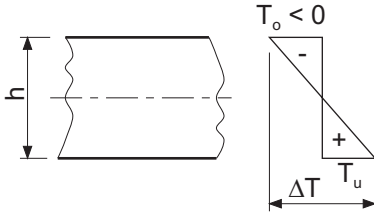


Bild 3.2-9: Temperaturverlauf in einer Platte

3.2.10.2

ΔT am Grundsystem

Als Grundsystem wird eine ringsum fest eingespannte Platte gewählt. Die Ränder dieser Platte können sich nicht verdrehen. Deshalb wäre nur eine Biegefläche mit Wendepunkten denkbar. Diese würde jedoch veränderliche Biegemomente und damit Querkräfte voraussetzen, die aus Gleichgewichtsgründen nicht auftreten können. Die Platte muß also eben bleiben. Es entstehen Biegemomente, die eine Verkrümmung infolge ΔT verhindern.

Wenn die Schnittgrößen und Verformungen dieses Grundsystems mit dem Fußindex o gekennzeichnet werden, gilt für die Krümmungen mit der Wärmedehnzahl α_T

$$\kappa_{x0} = \frac{\alpha_T \Delta T}{h} + \frac{m_{x0}}{EI} - \frac{\mu m_{y0}}{EI} = 0,$$

$$\kappa_{y0} = \frac{\alpha_T \Delta T}{h} + \frac{m_{y0}}{EI} - \frac{\mu m_{x0}}{EI} = 0.$$

Daraus folgt

$$m_{x0} = m_{y0} = -\frac{EI}{1-\mu^2} (1+\mu) \frac{\alpha_T \Delta T}{h}.$$

Mit (3.2.12) erhält man daraus

$$m_{x0} = m_{y0} = m_0 = -K(1+\mu) \frac{\alpha_T \Delta T}{h}. \quad (3.2.36)$$

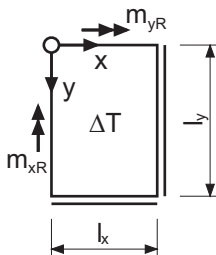
Die Biegemomente m_{x0} und m_{y0} sind in der gesamten Platte konstant. Querkräfte, Drillmomente und Durchbiegungen treten nicht auf:

$$q_{x0} = q_{y0} = m_{xy0} = w_0 = 0. \quad (3.2.37)$$

3.2.10.3

ΔT an der gelenkig gelagerten Platte

Da das Moment m_{x0} bzw. m_{y0} an einem gelenkigen Rand nicht aufgenommen werden kann, wird dem oben behandelten Grundzustand ein Lastfall überlagert, der aus der Randmomentenbelastung $m_R = -m_0$ an den gelenkigen Rändern besteht. Bild 3.2-10 zeigt ein entsprechendes Beispiel. In Abschnitt 3.3.4.3 wird eine vierseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte unter ΔT berechnet.



Randbedingungen

Rand $x = 0$: $w = 0$; $m_{xR} = -m_0$

Rand $y = 0$: $w = 0$; $m_{yR} = -m_0$

Rand $x = l_x$: $w = w' = 0$

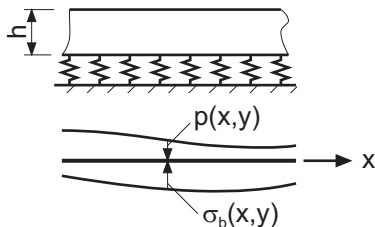
Rand $y = l_y$: $w = w' = 0$

Bild 3.2-10: Beispiel zur Berücksichtigung gelenkiger Ränder beim Lastfall ΔT

3.2.11

Die elastisch gebettete Platte

Bei der Berechnung der elastisch gebetteten Platte (siehe Bild 3.2-11) kann man von der normalen Plattengleichung $\Delta \Delta w = q/K$ ausgehen und dabei unter q die Differenz zwischen der Belastung p der Platte und der Bodenpressung σ_b verstehen:



$$q(x, y) = p(x, y) - \sigma_b(x, y)$$

Bild 3.2-11: Elastisch gebettete Platte

Vereinfacht wird die Sohldruckverteilung $\sigma_b(x,y)$ hier entsprechend dem Bettungsmodulverfahren affin zur Setzungsmulde angenommen:

$$\sigma_b = c \cdot w \quad \text{mit} \quad c = \text{Bettungsmodul} [\text{MN} / \text{m}^3] .$$

Das entspricht der Annahme einer Lagerung auf unendlich vielen Einzelfedern, die unabhängig voneinander wirken. (Korrekt wäre es, nach dem Steifezahlverfahren diejenige Sohldruckverteilung zu suchen, bei der die Biegefläche der Platte gleich der Setzungsmulde des Geländes wird).

Man erhält

$$\Delta \Delta w + \frac{c}{K} w = \frac{p}{K} . \quad (3.2.38)$$

Der Typ der Differentialgleichung unterscheidet sich von dem der Plattengleichung. Für die Kreisplatte mit rotationssymmetrischer Beanspruchung erhält man eine geschlossene Lösung mit Hilfe der sogenannten Zylinderfunktion (siehe z.B. HIRSCHFELD [1.16]).

3.3

Vierseitig gelagerte Rechteckplatten

3.3.1

Allgemeines

Bei der Lagerung vierseitig gestützter Rechteckplatten werden nach den vorhandenen Einspannungen sechs Typen unterschieden. Diese sind in Bild 3.3-1 dargestellt.



Bild 3.3-1: Lagerungsfälle vierseitig gestützter Rechteckplatten

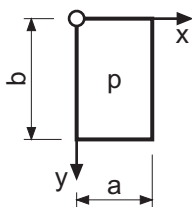
Unter der Voraussetzung, daß die Platten für die Aufnahme der Drillmomente bemessen sind und daß die Ecken gegen Abheben gesichert sind, können die Schnittgrößen dieser Platten aus der Plattengleichung als Reihenlösung ermittelt werden. Für Gleichlast und für hydrostatische Lastfälle liegen die Ergebnisse in Tabellenform vor (siehe z.B. CZERNY [3.6]), und zwar für $\mu = 0$. Falls die Quer-

dehnzahl berücksichtigt werden soll, geschieht dies nach den Gleichungen (3.2.31) bis (3.2.33).

3.3.2

Lösung der Plattengleichung mit Reihenansatz

Als Beispiel für eine Plattenberechnung mit Hilfe einer FOURIER-Reihe wird die in Bild 3.3-2 dargestellte, vierseitig gelenkig gelagerte Platte (vgl. GIRKMANN [1.1]) unter der Wirkung der konstanten Flächenlast p gewählt.



Randbedingungen:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = a : \quad w = m_x = 0$$

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y = b : \quad w = m_y = 0$$

Bild 3.3-2: Gelenkig gelagerte Rechteckplatte mit Randbedingungen

3.3.2.1

Lösungsansatz

Die Lösung der Plattengleichung $\Delta\Delta w = p/K$ setzt sich gemäß

$$w = w_h + w_p \quad (3.3.1)$$

aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen, wobei für w_h

$$\Delta\Delta w_h = 0 \quad \text{und} \quad w_h = A \cdot f_1(x,y) + B \cdot f_2(x,y) + C \cdot f_3(x,y) + D \cdot f_4(x,y) \quad (3.3.2)$$

mit den vier unabhängigen, biharmonischen Funktionen $f_i(x,y)$ gilt. Die Konstanten A bis D dienen der Befriedigung der Randbedingungen und sind aus diesen zu bestimmen.

Die partikuläre Lösung w_p ist unabhängig von den Randbedingungen und enthält keine unbekannten Konstanten. Man erhält sie aus

$$\Delta\Delta w_p = p(x,y)/K. \quad (3.3.3)$$

Als Ansatz für die partikuläre Lösung w_p wird die Doppelreihe

$$w_p(x,y) = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.3.4)$$

gewählt. Diese erfüllt alle, in Bild 3.3-2 angegebenen Randbedingungen der Platte. Deshalb werden die Konstanten A bis D der homogenen Lösung nicht benötigt, und es wird $w_h = 0$. Demnach gilt für das gewählte Beispiel

$$w = w_p. \quad (3.3.5)$$

Für die Gleichlast p auf der Platte wird als Näherung ein zweidimensionaler Ansatz in Form der FOURIERSchen Doppelreihe

$$p \approx \bar{p}(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.3.6)$$

gewählt. Dabei ergeben sich die Koeffizienten a_{mn} in Analogie zu Gleichung (2.6.6) aus

$$a_{mn} = \frac{16p}{mn\pi^2} \quad \text{mit} \quad m = 1, 3, 5 \dots \quad \text{und} \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (3.3.7)$$

3.3.2.2

Lösung der Plattengleichung

Durch Differentiation erhält man aus (3.3.4)

$$\Delta w = w'' + w'' = - \sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Damit und mit (3.3.6) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w &= \sum_m \sum_n w_{mn} \pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ &= \frac{1}{K} \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt weiter

$$w_{mn} \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{1}{K} a_{mn}.$$

Die Lösung für die Biegefläche der vierseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte unter Gleichlast lautet demnach

$$w(x, y) = \frac{16p}{K\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{1}{\left[(m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.3.8)$$

mit $m = 1, 3, 5 \dots$ und $n = 1, 3, 5 \dots$.

3.3.2.3 Schnittgrößen

Aus (3.3.8) ergeben sich durch Differentiation die Biegemomente

$$m_x(x, y) = -K(w'' + \mu w'') \\ = \frac{16p}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(m/a)^2 + \mu(n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.3.9)$$

$$m_y(x, y) = -K(w'' + \mu w'') \\ = \frac{16p}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\mu(m/a)^2 + (n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.3.10)$$

Für das Drillmoment gilt

$$m_{xy} = -K(1 - \mu)w' \\ = \frac{-16p}{\pi^4} (1 - \mu) \sum_m \sum_n \frac{1}{ab} \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.3.11)$$

Die Randscherkräfte erhält man aus

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -K[w''' + (2 - \mu)w''] \\ = \frac{16p}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(m/a)^3 + (2 - \mu)(m/a)(n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.3.12)$$

$$\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -K[w''' + (2 - \mu)w''] \\ = \frac{16p}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{(n/b)^3 + (2 - \mu)(m/a)^2(n/b)}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.3.13)$$

Die Gleichungen (3.3.9) bis (3.3.13) gelten jeweils für $m=1, 3, 5 \dots$ und $n=1, 3, 5 \dots$.

3.3.2.4

Auswertung für eine quadratische Platte

Für die Auswertung wird das einfache Beispiel $a = b = \ell$ und $\mu = 0$ gewählt. Es werden die Durchbiegung und die Biegemomente in Plattenmitte, das Drillmoment an der Plattenecke und die Randscherkraft in Randmitte als Extremwerte der genannten Schnittgrößen berechnet.

Durchbiegung in Plattenmitte: $\max w = w(\ell/2, \ell/2)$

$$\max w = \frac{16p}{\pi^6} \frac{12}{Eh^3} \ell^4 \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn(m^2 + n^2)^2} = \frac{192}{\pi^6} \frac{p\ell^4}{Eh^3} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn(m^2 + n^2)^2} = \alpha \frac{p\ell^4}{Eh^3}$$

$$m = n = 1: \quad \alpha = \frac{192}{\pi^6} \frac{1}{1 \cdot 1(1+1)^2} = \frac{192}{\pi^6} \cdot \frac{1}{4} = 0,0499$$

$$\left. \begin{matrix} m = 1, 3 \\ n = 1, 3 \end{matrix} \right\}: \quad \alpha = \frac{192}{\pi^6} \left(\frac{1}{4} + \frac{-1}{3(9+1)^2} + \frac{-1}{3(1+9)^2} + \frac{1}{3 \cdot 3(9+9)^2} \right)$$

$$= \frac{192}{\pi^6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{300} - \frac{1}{300} + \frac{1}{2916} \right) = 0,0487$$

Der genaue Wert lautet nach CZERNY [3.6] $\alpha = 0,0487$. Für die Durchbiegung zeigt sich demnach eine gute Konvergenz.

Biegemoment in Plattenmitte: $\max m_x = \max m_y = m_x(\ell/2, \ell/2)$

$$\max m_x = \frac{16p}{\pi^4} \ell^2 \sum_m \sum_n \frac{m^2}{mn(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{16}{\pi^4} p\ell^2 \sum_m \sum_n \frac{m}{n(m^2 + n^2)^2} (-1)^{\frac{m+n-2}{2}} = \beta p\ell^2$$

$$m = n = 1: \quad \beta = \frac{16}{\pi^4} \frac{1}{1(1+1)^2} \cdot 1 = \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{1}{4} = 0,0411$$

$$m = 1, 3 \quad \text{und} \quad n = 1, 3: \quad \beta = 0,0361$$

$$m = 1, 3, 5 \quad \text{und} \quad n = 1, 3, 5: \quad \beta = 0,0371$$

Der genaue Wert ergibt sich aus Tafel 2 zu $\beta = 1/27,2 = 0.0368$. Die Konvergenz bei den Biegemomenten ist deutlich schlechter als bei den Durchbiegungen und alterniert. Die erreichte Genauigkeit läßt sich deshalb gut abschätzen.

Drillmoment an der Plattenecke: $\min m_{xy} = m_{xy}(0,0)$

$$\min m_{xy} = -\frac{16p\ell^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} = \gamma \cdot p\ell^2$$

$$m = n = 1: \quad \gamma = -\frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{1}{4} = -0,0411$$

$$m = 1, 3 \quad \text{und} \quad n = 1, 3: \quad \gamma = -0,0449$$

$$m = 1, 3, 5 \quad \text{und} \quad n = 1, 3, 5: \quad \gamma = -0,0457$$

Der genaue Wert ergibt sich aus Tafel 2 zu $\gamma = -1/21,6 = -0,0463$. Wie beim Biegemoment genügen wenige Reihenglieder, um den Fehler in die Größenordnung von 1 % zu bringen.

Randscherkraft in Randmitte: $\max \bar{q}_x = \bar{q}_x(0, \ell/2)$

$$\max \bar{q}_x = \frac{16}{\pi^3} p\ell \sum_m \sum_n \frac{m^2 + 2n^2}{n(m^2 + n^2)^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} = \delta \cdot p\ell$$

$$m = n = 1: \quad \delta = \frac{16}{\pi^3} \cdot \frac{3}{4} = 0,387$$

$$m = 1, 3 \quad \text{und} \quad n = 1, 3: \quad \delta = 0,397$$

$$m = 1, 3, 5 \quad \text{und} \quad n = 1, 3, 5: \quad \delta = 0,427$$

Der genaue Wert wird in CZERNY [3.6] mit $\delta = 1/2,19 = 0,457$ angegeben. Um dieses Ergebnis zu erhalten, ist eine größere Anzahl von Reihengliedern zu erfassen. Die gegenüber den Momenten schlechtere Konvergenz ist damit zu erklären, daß der gewählte Reihenansatz die Biegefläche zwar gut approximiert, daß die Genauigkeit der Ergebnisse jedoch mit jeder Ableitung abnimmt.

3.3.3

Zahlentafel für vierseitig gestützte Rechteckplatten unter Gleichlast

Die für die Bemessung maßgebenden Momente der in Bild 3.3-1 dargestellten sechs Plattentypen unter Gleichlast können mit Hilfe der Tafel 2 ermittelt werden.

Diese Hilfstafel gilt für $\mu = 0$ und enthält die Momentenbeiwerte α der maximalen Feld-, Stütz- und Drillmomente für die Seitenverhältnisse ℓ_y/ℓ_x von 0,5 bis 2,0.

Allgemein gilt für die Momentenermittlung

$$m = \frac{p \ell_x \ell_y}{\alpha} \quad (3.3.14)$$

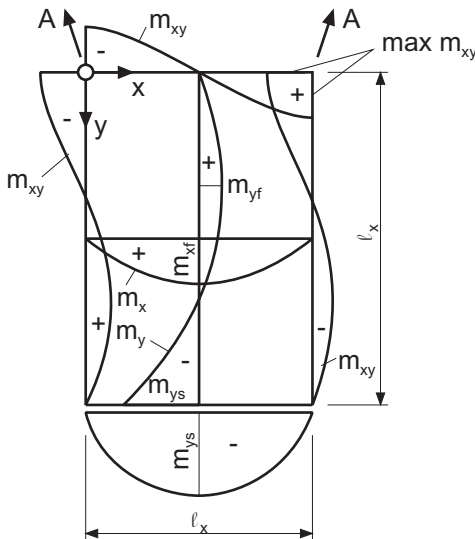
Für das Feldmoment in x-Richtung erhält man beispielsweise mit (3.2.31)

für $\mu = 0$:
$$\max m_x = \frac{p \ell_x \ell_y}{\alpha_{xf}},$$

für $\mu \neq 0$:
$$\max m_x = p \ell_x \ell_y \left(\frac{1}{\alpha_{xf}} + \frac{\mu}{\alpha_{yf}} \right).$$

Die Anwendung der Tafel wird in Bild 3.3-3 für eine Platte mit einem eingespannten Rand (Plattentyp 2) gezeigt. Als Seitenverhältnis wird $\ell_y/\ell_x = 1,5$ gewählt.

Die Momentenbeiwerte für m_{xf} , m_{yf} , m_{ys} und m_{xy} lauten 24,9, 48,5, -13,3 und 26,2. Es wird der qualitative Momentenverlauf in den Mittel- und Auflagerlinien angegeben.



$$P = p \ell_x \ell_y \quad (\text{Gesamtlast})$$

$$m_{xf} = P / 24,9$$

$$m_{yf} = P / 48,5$$

$$m_{ys} = -P / 13,3$$

$$\max m_{xy} = P / 26,2$$

$$A = P / 13,1$$

$$\mu = 0$$

$$\beta = \frac{\ell_y}{\ell_x} = 1,5$$

$$p = \text{const.}$$

Bild 3.3-3: Biege- und Drillmomente einer Platte vom Lagerungstyp 2

Das Biegemoment m_x verläuft näherungsweise parabolisch mit dem Größtwert auf der Symmetrieachse. Das Gleiche gilt für das Einspannmoment. Wie beim einseitig eingespannten Träger liegt das Maximum von m_y näher am gelenkigen als am eingespannten Rand. An diesem existieren keine Drillmomente, wohl aber an den drei anderen Rändern. An den beiden Plattenecken, wo zwei gelenkige Ränder zusammenstoßen, tritt die abhebende Kraft A nach (3.2.22) auf. Falls keine entsprechende Auflast vorhanden ist, kann sie durch eine Verankerung nach unten oder durch Randbalken aufgenommen werden.

3.3.4

Allseits gelenkig gelagerte Rechteckplatte mit Randmoment

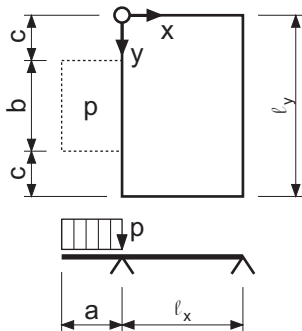
3.3.4.1

Verlauf der Biegemomente

In Tafel 4 wird für verschiedene Seitenverhältnisse der Verlauf von m_x und m_y infolge eines sinusförmigen Randmoments angegeben (siehe BITTNER [2.6]). Die Zahlenwerte gelten für $\mu = 0$. Für den unendlich langen Plattenstreifen mit $\ell_y/\ell_x = \infty$ verläuft m_x in x -Richtung linear, wobei $m_y = 0$ ist.

3.3.4.2

Anwendungsbeispiel: Einfeldplatte mit auskragendem Balkon



$$\left. \begin{array}{l} \ell_x = 3,00 \text{ m} \\ \ell_y = 4,50 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\ell_y}{\ell_x} = 1,50$$

$$a = 1,20 \text{ m}$$

$$b = 3,20 \text{ m}$$

$$p = 5,0 \text{ kN/m}^2$$

$$\mu = 0,2$$

Bild 3.3-4: Zahlenbeispiel zur Berücksichtigung von Randmomenten

Das Randmoment m_R wird nach (2.6.5) in eine FOURIER-Reihe entwickelt. Im folgenden soll nur das erste Glied dieser Reihe

$$m_x(0, y) = m_1 \cdot \sin \frac{\pi y}{\ell_y} \quad (3.3.15)$$

berücksichtigt werden. Für das Randmoment gilt

$$\begin{aligned} 0 < y < c: & \quad m_R = 0, \\ c \leq y \leq \ell_y - c: & \quad m_R = m_0 = -pa^2/2 = -3,60 \text{ kNm/m}, \\ \ell_y - c < y < \ell_y: & \quad m_R = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nach (2.6.4) mit $L = 2 \ell_y$

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{\ell_y} \int_0^{2\ell_y} m_R(y) \sin \frac{\pi y}{\ell_y} dy = 2 \cdot \frac{1}{\ell_y} \int_c^{\ell_y - c} m_0 \cdot \sin \frac{\pi y}{\ell_y} dy \\ &= \frac{4}{\pi} m_0 \cos \frac{\pi c}{\ell_y} = -\frac{4}{\pi} \cdot 3,60 \cdot \cos 0,454 = -4,12 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

Mit den Zahlenwerten aus Tafel 4 für $\ell_y/\ell_x = 1,50$ erhält man z.B. für die Plattenmitte

$$\begin{aligned} m_x\left(\frac{\ell_x}{2}, \frac{\ell_y}{2}\right) &= -4,12(0,185 + 0,2 \cdot 0,128) = -0,87 \text{ kNm/m}, \\ m_y\left(\frac{\ell_x}{2}, \frac{\ell_y}{2}\right) &= -4,12(0,128 + 0,2 \cdot 0,185) = -0,68 \text{ kNm/m}. \end{aligned}$$

3.3.4.3

Anwendungsbeispiel: Lastfall ΔT bei der gelenkig gelagerten Einfeldplatte

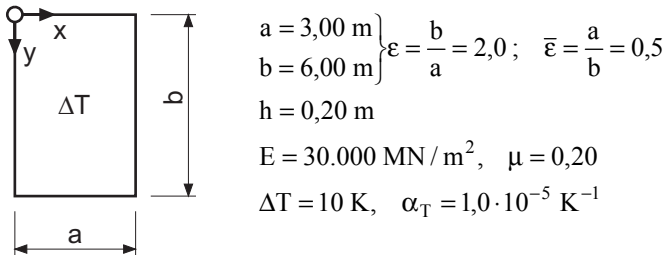


Bild 3.3-5: Zahlenbeispiel zur Behandlung des Lastfalls ΔT

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich nach (3.2.12)

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = 20,83 \text{ MNm} .$$

Nach (3.2.36) betragen die Biegemomente des eingespannten Grundsystems

$$m_0 = -K(1+\mu) \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} = -12,50 \text{ kNm/m} .$$

Entsprechend Abschnitt 3.2.10.3 sind diesem Grundzustand die Biegemomente infolge der Randbelastung $m_R = -m_0 = \text{const.}$ entsprechend Bild 3.3-6 zu überlagern.

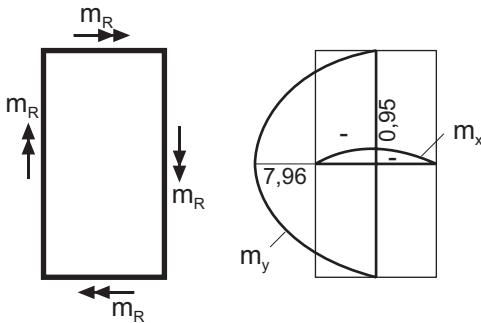


Bild 3.3-6: Randbelastung und resultierender Momentenverlauf

Näherungsweise wird stattdessen das erste Glied einer FOURIER-Reihe angesetzt. Entsprechend (2.6.7) gilt dann

$$\bar{m}_R(x) = m_{R0} \cdot \sin \pi x/a \quad \text{bzw.} \quad \bar{m}_R(y) = m_{R0} \cdot \sin \pi y/b$$

mit

$$m_{R0} = 4 m_R/\pi = 15,92 \text{ kNm/m}.$$

Aus Tafel 4 liest man für die Plattenmitte die folgenden Momentenbeiwerte ab, wobei die Zahlen für $\bar{\epsilon}$ zu vertauschen waren:

	m_x	m_y
$\epsilon = 2,0$	0,280	0,097
$\bar{\epsilon} = 0,5$	0,068	-0,024

Die Mittenmomente der Platte lauten damit

$$\begin{aligned} m_{xf} &= -12,50 + 2 \cdot 15,92 [0,280 + 0,068 + 0,2(0,097 - 0,024)] \\ &= -12,50 + 11,55 = -0,95 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{yf} &= -12,50 + 2 \cdot 15,92 [0,097 - 0,024 + 0,2(0,280 + 0,068)] \\ &= -12,50 + 4,54 = -7,96 \text{ kNm/m} . \end{aligned}$$

Der Momentenverlauf ist in Bild 3.3-6 dargestellt.

3.4

Grundgleichungen für Rotationssymmetrie

Die Plattengleichung (3.2.19) und die Gleichungen (3.2.13) bis (3.2.17) für die Plattenschnittgrößen gelten unabhängig von den Randbedingungen, d.h. von Lagerungsart und Berandungsform, also auch für Kreisplatten. Für diese ist jedoch, falls auch die Belastung rotationssymmetrisch ist, eine Formulierung in Polarkoordinaten vorteilhafter, da hierbei alle Formänderungs- und Schnittgrößen von φ unabhängig sind und deshalb nur die Variable r in den Gleichungen verbleibt. Die Plattengleichung wird dann zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

3.4.1

Plattengleichung

Analog zur Scheibengleichung (2.4.5) lautet die Plattengleichung für rotationsymmetrische Belastungsfälle

$$\Delta \Delta w(r) = w'''' + \frac{2}{r} w''' - \frac{1}{r^2} w'' + \frac{1}{r^3} w' = \frac{1}{K} p(r) . \quad (3.4.1)$$

3.4.2

Schnittgrößen

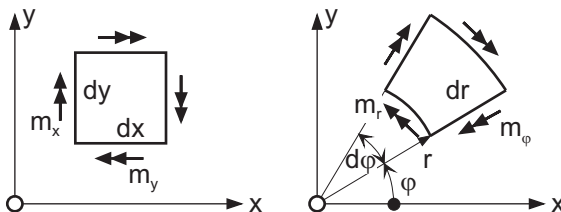


Bild 3.4-1: Infinitesimales Plattenelement in kartesischen und in Polarkoordinaten

Die Gleichungen der Schnittgrößen in Polarkoordinaten werden aus (3.2.13) bis (3.2.16) mit Hilfe der Beziehungen (2.4.2) bis (2.4.4) hergeleitet.

Für $\varphi = 0$ wird bei dem in Bild 3.4-1 in Polarkoordinaten dargestellten, infinitesimalen Plattenelement $m_r = m_x$ und $m_\varphi = m_y$. Für die Querkraft am Innenrand gilt $q_r = q_x$.

Aus

$$\begin{aligned} m_x &= -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= -K \left(\cos^2 \varphi \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{dw}{dr} + \mu \sin^2 \varphi \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cos^2 \varphi \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned}$$

ergibt sich mit $\varphi = 0$ das Radialmoment, wenn die Ableitung nach r durch einen Strich gekennzeichnet wird, zu

$$m_r = -K \left(w'' + \frac{\mu}{r} w' \right). \quad (3.4.2)$$

Dementsprechend gilt für das Ringmoment

$$m_\varphi = -K \left(\frac{1}{r} w' + \mu w'' \right). \quad (3.4.3)$$

Wegen der Rotationssymmetrie wird $q_\varphi = 0$. Zur Berechnung der Querkraft q_r wird zunächst (3.2.16) mit Hilfe von (2.4.4) in Polarkoordinaten transformiert:

$$\begin{aligned} q_x &= -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -K \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \\ &= -K \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ &= -K \cos \varphi \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \end{aligned}$$

Mit $\varphi = 0$ erhält man dann

$$q_r = -K \left(w''' + \frac{1}{r} w'' - \frac{1}{r^2} w' \right). \quad (3.4.4)$$

Diese Gleichung wird im folgenden nur zur Formulierung von Randbedingungen verwendet. Die Schnittgröße q_r berechnet man bei Rotationssymmetrie einfacher aus dem Gleichgewicht in Vertikalrichtung.

3.4.3

Randbedingungen und Einfluß der Querdehnung

Ebenso wie bei den Rechteckplatten sind eingespannte, gelenkige und freie Ränder zu unterscheiden (siehe Bild 3.4-2).

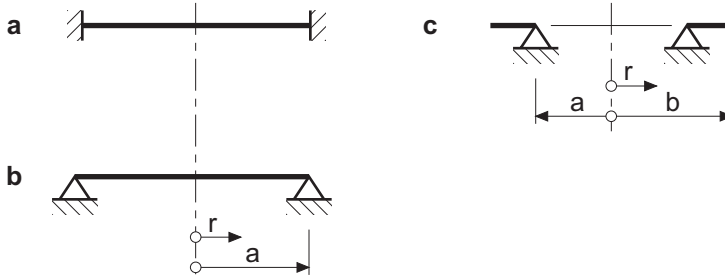


Bild 3.4-2: Verschiedene Lagerungen kreisförmiger Plattenränder

Eingespannter Rand (a)

Die Randbedingungen für w lauten unabhängig von μ

$$w(a) = w'(a) = 0.$$

Deshalb können die Formänderungs- und Schnittgrößen für $\mu \neq 0$ entsprechend Abschnitt 3.2.9.1 aus denen für $\mu = 0$ hergeleitet werden. Analog zu (3.2.29), (3.2.31) und (3.2.33) gilt dann

$$w_{\mu} = (1 - \mu^2) w_0, \quad (3.4.5)$$

$$m_{r\mu} = m_{r0} + \mu m_{\varphi 0}, \quad (3.4.6)$$

$$m_{\varphi\mu} = m_{\varphi 0} + \mu m_{r0}, \quad (3.4.7)$$

$$q_{r\mu} = q_{r0}. \quad (3.4.8)$$

Gelenkig gelagerter Rand (b)

Außer der Durchbiegung verschwindet am Rand das Radialmoment. Es gilt demnach

$$w(a) = 0 \quad \text{und} \quad m_r(a) = -K \left[w''(a) + \frac{\mu}{a} w'(a) \right] = 0. \quad (3.4.9)$$

Die zweite Randbedingung ist von μ abhängig, also auch die gesamte Lösung des Problems. Das hat zur Folge, daß die Umrechnungsformeln (3.4.5) bis (3.4.7) nicht anwendbar sind und daß Zahlentafeln für Kreis- und Kreisringplatten, die nicht eingespannte Ränder aufweisen, den Parameter μ enthalten müssen.

Freier Rand (c)

Es wird der Außenrand $r = b$ betrachtet. Wenn dort keine äußeren Lasten angreifen, gilt

$$m_r(b) = q_r(b) = 0.$$

Mit (3.4.2) und (3.4.4) folgen daraus die beiden Randbedingungen für w :

$$w''(b) + \frac{\mu}{b} w'(b) = 0, \quad (3.4.10)$$

$$w'''(b) + \frac{1}{b} w''(b) - \frac{1}{b^2} w'(b) = 0. \quad (3.4.11)$$

Gleichung (3.4.10) ist von μ abhängig und damit auch die Biegefläche w . Hinsichtlich der Umrechnungsformeln und der Zahlentafeln gilt das Gleiche wie für gelenkige gekrümmte Ränder.

3.5

Kreis- und Kreisringplatten unter rotationssymmetrischer Belastung

3.5.1

Allgemeines zur Lösung der Plattengleichung in Polarkoordinaten

Die allgemeine Lösung der Plattengleichung (3.4.1) lautet

$$w(r) = w_h(r) + w_p(r). \quad (3.5.1)$$

Die partikuläre Lösung ist je nach Lastfall verschieden. Für den homogenen Lösungsanteil, der wie die Plattengleichung biharmonisch ist, wird der gleiche Ansatz (2.5.2) wie für die Kreisscheibe mit w statt F verwendet:

$$w_h(r) = A + B \cdot \ln r + C \cdot r^2 + D \cdot r^2 \ln r. \quad (3.5.2)$$

Die ersten drei Ableitungen dieser Funktion lauten

$$w'_h = \frac{B}{r} + 2Cr + D(2r \ln r + r), \quad (3.5.3)$$

$$w_h'' = -\frac{B}{r^2} + 2C + D(2 \ln r + 3), \quad (3.5.4)$$

$$w_h''' = \frac{2B}{r^3} + \frac{2D}{r}. \quad (3.5.5)$$

Damit erhält man für die homogenen Anteile des Radialmoments und der Querkraft unter Verwendung von (3.4.2) bzw. (3.4.4)

$$\begin{aligned} m_{rh} &= -K \left(w_h'' + \frac{\mu}{r} w_h' \right) \\ &= -K \left[(-1 + \mu) \cdot \frac{B}{r^2} + 2(1 + \mu)(C + D \ln r) + (3 + \mu) \cdot D \right], \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

$$q_{rh} = -K \left(w_h''' + \frac{1}{r} w_h'' - \frac{1}{r^2} w_h' \right) = -K \cdot \frac{4D}{r}. \quad (3.5.7)$$

Diese beiden Gleichungen werden zur Formulierung der Randbedingungen benötigt.

3.5.2

Gelenkig gelagerte Kreisplatte unter Gleichlast

Die in Bild 3.5-1 dargestellte Platte hat nur einen Rand. Dort gelten die beiden Bedingungen (3.4.9).

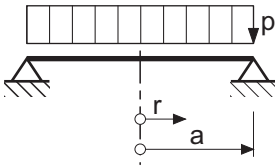


Bild 3.5-1: Gelenkig gelagerte Kreisplatte unter Gleichlast

Zusätzlich können für die Plattenmitte die beiden Bedingungen

$$w'(0) = q_r(0) = 0$$

aufgestellt werden, so daß vier Gleichungen zur Ermittlung der Konstanten A bis D zur Verfügung stehen.

Wegen $\Delta\Delta w = \text{const.}$ wird für die partikuläre Lösung der Ansatz

$$w_p(r) = \alpha \cdot r^4 \quad (3.5.8)$$

gewählt, dessen Ableitungen

$$w_p' = 4 \alpha r^3, \quad w_p'' = 12 \alpha r^2, \quad w_p''' = 24 \alpha r, \quad w_p'''' = 24 \alpha$$

lauten. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (3.4.1) erhält man als Bestimmungsgleichung für α

$$\alpha(24 + 2 \cdot 24 - 12 + 4) = p/K$$

mit der Lösung

$$\alpha = \frac{p}{64K}.$$

Der gesamte Lösungsansatz lautet damit

$$w = A + B \cdot \ln r + C \cdot r^2 + D \cdot r^2 \ln r + \frac{p}{64K} \cdot r^4$$

Nun sind aus den Randbedingungen die Konstanten A bis D zu bestimmen.

$$(a) \quad w'(0) = \frac{B}{0} + D \cdot 2 \cdot 0 \cdot \ln 0 = 0, \quad \rightarrow B = 0$$

$$(b) \quad q_r(0) = -K \cdot \frac{4D}{0} = 0, \quad \rightarrow D = 0$$

$$(c) \quad w(a) = A + C \cdot a^2 + \frac{p}{64K} \cdot a^4 = 0,$$

$$(d) \quad m_r(a) = -K \left[2(1+\mu) \cdot C + \frac{p}{64K} (12a^2 + \mu \cdot 4a^2) \right] = 0.$$

Die Ergebnisse aus (a) und (b) wurden in den folgenden Zeilen bereits berücksichtigt. Aus (c) und (d) folgen die beiden Konstanten

$$A = \frac{pa^4}{64K} \frac{5+\mu}{1+\mu},$$

$$C = -\frac{pa^2}{32K} \frac{3+\mu}{1+\mu},$$

so daß die Gleichung der Biegefläche

$$w = \frac{pa^4}{64K(1+\mu)} \left[(5+\mu) - 2(3+\mu)\frac{r^2}{a^2} + (1+\mu)\frac{r^4}{a^4} \right] \quad (3.5.9)$$

lautet. Man erkennt die in Abschnitt 3.4.3 für den Lagerungsfall (b) vorausgesagte Abhängigkeit von μ . Aus (3.5.9) ergeben sich mit (3.4.2) bis (3.4.4) die Schnittgrößen

$$m_r = \frac{pa^2}{16} (3+\mu) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (3.5.10)$$

$$m_\phi = \frac{pa^2}{16} \left[2(1-\mu) + (1+3\mu) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \right], \quad (3.5.11)$$

$$q_r = -\frac{pr}{2}. \quad (3.5.12)$$

Gleichung (3.5.12) hätte man eleganter aus der Gleichgewichtsbedingung für die kreisförmige Teilfläche mit dem Radius r

$$\Sigma V = p \cdot \pi r^2 + q_r(r) \cdot 2\pi r = 0$$

gewonnen. Die Neigung der Biegefläche erhält man durch Differentiation von (3.5.9) zu

$$w'(r) = -\frac{pa^2 \cdot r}{16K(1+\mu)} \left[(1+\mu) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + 2 \right].$$

Die Randverdrehung ergibt sich daraus zu

$$w'(a) = -\frac{pa^3}{8K(1+\mu)}. \quad (3.5.13)$$

Die Gleichungen (3.5.9) bis (3.5.13) finden sich in den Tafeln 5 und 6 wieder. Der Verlauf der Schnittgrößen ist Bild 3.5-2 zu entnehmen.

Die Biegemomente verlaufen quadratisch und weisen in der Plattenmitte den gleichen Maximalwert auf. Bemerkenswert ist, daß das Ringmoment im Unterschied zum Radialmoment am Plattenrand nicht verschwindet. Darauf ist im Stahlbetonbau bei der Bemessung der Ringbewehrung zu achten. Wird eine Radialbewehrung angeordnet, so ist zu bedenken, daß die Momentendeckungslinie wegen der linearen Änderung der Stababstände konkav verläuft und die konvexe Momentenlinie m_r nicht schneiden darf.

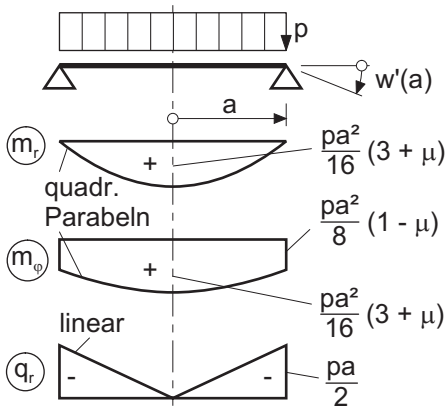
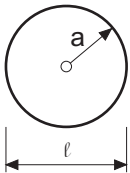


Bild 3.5-2: Schnittgrößen der gelenkig gelagerten Kreisplatte unter Gleichlast

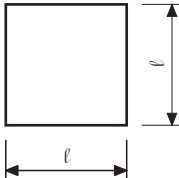
Für die Plattenmitte ergeben sich nach (3.5.9) und (3.5.10) ohne Berücksichtigung der Querdehnung die Maximalwerte der Durchbiegung und des Biegemoments zu



$$\max w = \frac{pa^4}{64} \frac{12}{Eh^3} \cdot 5 = 0,0586 \frac{p\ell^4}{Eh^3},$$

$$\max m = \frac{3pa^2}{16} = 0,0469p\ell^2.$$

Für die quadratische Platte mit gleicher Stützweite gilt (vgl. Abschnitt 3.3.2.4)



$$\max w = 0,0487 \frac{p\ell^4}{Eh^3},$$

$$\max m = 0,0368p\ell^2.$$

Trotz größerer Gesamtfläche liegen diese Ergebnisse um etwa 20 % unter denen der Kreisplatte. Das Festhalten der Ecken entspricht in seiner Wirkung einer elastischen Randeinspannung der Platte.

3.5.3

Gelenkig gelagerte Kreisplatte mit Randmoment

Das Randmoment M der Platte nach Bild 5.3-3 ist konstant und längenbezogen. Es weist z.B. die Dimension [kNm/m] auf. Da keine Flächenlast auftritt, entfällt die partikuläre Lösung der Plattengleichung, so daß (3.5.2) den vollständigen Ansatz darstellt.

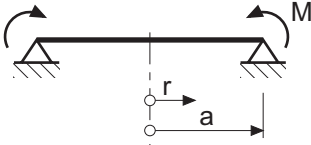


Bild 3.5-3: Gelenkig gelagerte Kreisplatte mit konstantem Randmoment M

Die ersten beiden Randbedingungen (a) und (b) stimmen mit denen der Platte unter Gleichlast überein. Demnach gilt auch hier $B = D = 0$. Die Bedingungen für den äußeren Rand lauten

$$(c) \quad w(a) = A + C \cdot a^2 = 0$$

$$(d) \quad m_r(a) = -K \cdot 2C(1 + \mu) = M$$

Daraus erhält man

$$A = -C \cdot a^2,$$

$$C = -\frac{M}{2K(1 + \mu)},$$

so daß die Gleichung der Biegefläche

$$w(r) = \frac{M}{2K(1 + \mu)} (a^2 - r^2) \quad (3.5.14)$$

lautet. Des weiteren folgen aus (3.4.2) bis (3.4.4) die Schnittgrößen

$$m_r = -K \left(w'' + \frac{\mu}{r} w' \right) = +M, \quad (3.5.15)$$

$$m_\varphi = -K \left(\frac{1}{r} w' + \mu w'' \right) = +M, \quad (3.5.16)$$

$$q_r = -K \left(w''' + \frac{1}{r} w'' - \frac{1}{r^2} w' \right) = 0 \quad (3.5.17)$$

und aus (3.5.14) die Randverdrehung

$$w'(a) = -\frac{Ma}{K(1 + \mu)}. \quad (3.5.18)$$

Diese Ergebnisse wurden in die Tafeln 5 und 6 aufgenommen. Sie sind in Bild 3.5-4 dargestellt.

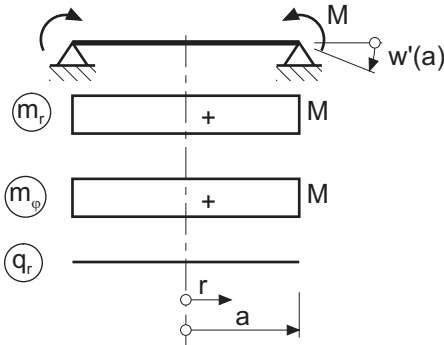


Bild 3.5-4: Schnittgrößen der gelenkig gelagerten Kreisplatte mit Randmoment.

In der Platte herrscht ein von μ unabhängiger, homogener Biegezustand. Querkkräfte und Auflagerkräfte treten nicht auf.

3.5.4

Gelenkig gelagerte Kreisringplatte mit Randmoment

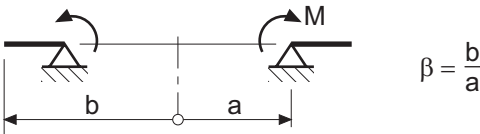


Bild 3.5-5: Gelenkig gelagerte Kreisringplatte mit Randmoment M

Als Beispiel für eine Kreisringplatte wurde in Bild 3.5-5 eine solche mit gelenkiger Lagerung am inneren Rand gewählt. Dort soll auch das längenbezogene Moment $M = \text{const.}$ angreifen. Der Radius des gelagerten Randes wird, wie auch stets in folgenden, mit a bezeichnet, der des freien Randes mit b .

Als Lösungsansatz wird, wie bei der Kreisplatte mit Randmoment, $w(r) = w_h(r)$ nach (3.5.2) verwendet. Die Randbedingungen lauten

$$w(a) = q_r(b) = m_r(b) = 0 \quad \text{und} \quad m_r(a) = M.$$

Nach hier nicht wiedergegebener Zwischenrechnung ergeben sich die Biegemomente mit $\beta = b/a$ und $\rho = r/a$ aus

$$m_r = \frac{M}{1 - \beta^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2} \right), \quad (3.5.19)$$

$$m_{\varphi} = \frac{M}{1-\beta^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right). \quad (3.5.20)$$

Sie sind unabhängig von μ und weisen am Innenrand ihre Extrema auf. Die Summe von m_r und m_{φ} ist über r konstant. Querkräfte und Auflagerkräfte treten nicht auf. Deshalb ist es bei dem betrachteten Lastfall für die Biegemomente ohne Belang, auf welchem Radius die Platte gelenkig gelagert ist und ob sie überhaupt gestützt wird.

Für das Radienverhältnis $\beta = b/a = 2$ ist der Momentenverlauf in Bild 3.5-6 dargestellt. Die Radialmomente sind positiv, die Ringmomente negativ. Im Stahlbetonbau müßte demnach die entsprechende Radialbewehrung unten, die Ringbewehrung oben liegen.

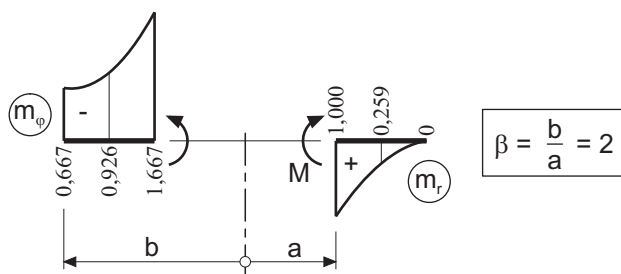


Bild 3.5-6: Biegemomente einer Kreisringplatte infolge eines Randmoments $M = 1$

(3.5.19) und (3.5.20) sind in Tafel 7 aufgeführt. Dort finden sich auch die Schnittgrößen für weitere Lastfälle und für Kreisringplatten mit gelenkiger Lagerung am Außenrand. Die entsprechenden Verformungen der Ränder sind Tafel 8 zu entnehmen.

3.5.5

Grenzübergang zum stabförmigen Ringträger

Wenn (3.5.20) in der Form

$$m_{\varphi} = \frac{M}{(1+\beta)(1-\beta)} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right)$$

geschrieben wird, ergibt sich beim Grenzübergang $b \rightarrow a$ (siehe Bild 3.5-7) mit $b - a = t$, $1 - \beta = -t/a$ und $\beta \approx \rho \approx 1$

$$\lim m_\varphi = -\frac{Ma}{t}.$$

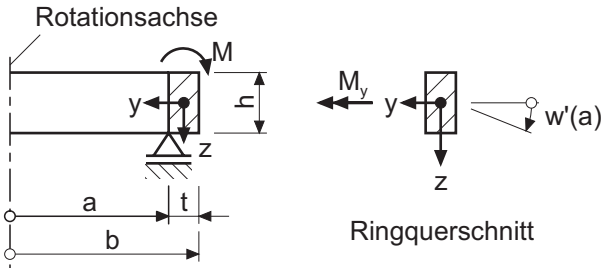


Bild 3.5-7: Dünner Kreisringträger mit an der Ringachse angreifendem Moment M

Für den Ringquerschnitt mit der Breite t folgt daraus das Biegemoment

$$M_y = m_\varphi \cdot t = -Ma. \quad (3.5.21)$$

Weitere Schnittgrößen treten im Ringquerschnitt nicht auf, also auch kein Torsionsmoment, obwohl M eine tordierende Belastung darstellt.

Um die Verdrehung des Rings um seine Achse zu erhalten, wird an dieser das virtuelle bezogene Moment $\bar{M} = 1$ angesetzt, aus dem entsprechend (3.5.21) das Biegemoment $\bar{M}_y = -a$ resultiert. Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit (siehe z.B. MESKOURIS/HAKE [1.17]) ergibt sich daraus

$$2\pi a \cdot w' = \oint \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} ds = \frac{Ma^2}{EI_y} \cdot 2\pi a$$

mit dem Endergebnis

$$w' = \frac{Ma^2}{EI_y}. \quad (3.5.22)$$

Die beiden Gleichungen (3.5.21) und (3.5.22) gelten unabhängig von der Form des Ringquerschnitts. Allerdings muß die y -Achse eine Hauptachse des Querschnitts sein. Das tordierende Moment M ist auf die Ringachse mit dem Radius a bezogen.

(3.5.21) und (3.5.22) können mit guter Genauigkeit auf Ringe mit $t/a \leq 0,1$ angewandt werden. Die Abweichung von den genauen Werten der Randverdrehungen liegt dabei unter ca. 1 %.

3.5.6

Tafeln für Kreis- und Kreisringplatten und Anwendungsbeispiele

3.5.6.1

Allgemeines zu den Tafeln

In den Tafeln 5 bis 8 sind die Gleichungen der Schnittgrößen und der Formänderungen von Kreis- und Kreisringplatten infolge ausgewählter, rotationssymmetrischer Lastfälle zusammengestellt. Alle Platten sind statisch bestimmt und am Rand gelagert.

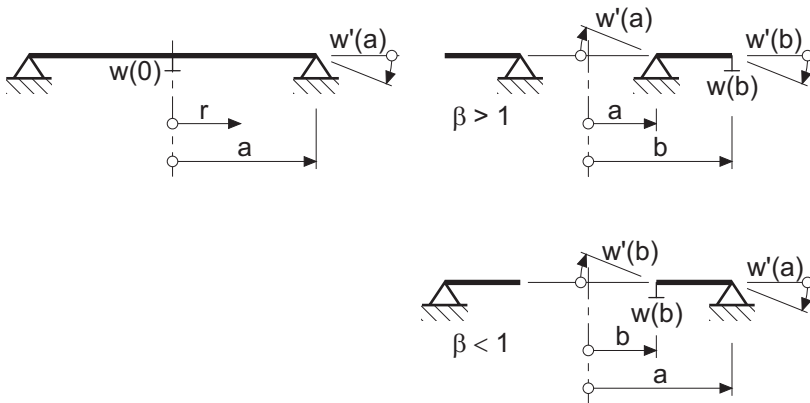


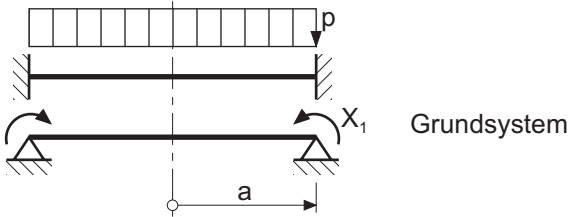
Bild 3.5-8: Typen von Kreis- und Kreisringplatten mit Bezeichnungen

Wie in Bild 3.5-8 dargestellt, wird der Radius des gestützten Randes stets mit a , der des freien Randes gegebenenfalls mit b bezeichnet.

Die angegebenen Durchbiegungen und Randverdrehungen der Platten werden benötigt, um zusammengesetzte rotationssymmetrische Flächentragwerke (z.B. den Behälter in Bild 1.5-1) oder statisch unbestimmt gelagerte Kreis- und Kreisringplatten mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens berechnen zu können.

Obwohl die in den Tafeln 5 bis 8 enthaltenen Formeln leicht programmiert werden können und diesem Buch auch eine entsprechende CD-ROM beigelegt ist, werden sie für den schnellen Gebrauch für $\mu = 0,2$ ausgewertet. Die Ergebnisse sind in den Tafeln 9 bis 13 zu finden.

3.5.6.2

Beispiel 1: Eingespannte Kreisplatte unter Gleichlast**Bild 3.5-9:** Eingespannte Kreisplatte unter Gleichlast

Die statisch Unbestimmte X_1 ergibt sich aus der Formänderungsbedingung

$$\delta_1 = X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{10} = 0,$$

wobei für die Formänderungsgrößen

$$\delta_{1i} = -w'(a)$$

infolge $X_1 = 1$ bzw. infolge p gilt. Hier wird nach Tafel 6

$$\delta_{11} = +\frac{a}{K(1+\mu)} \quad \text{und} \quad \delta_{10} = +\frac{pa^3}{8K(1+\mu)},$$

so daß das Einspannmoment

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{pa^2}{8}$$

lautet. Die Schnittgrößen der Platte erhält man durch Superposition der beiden Lastfälle p und X_1 am Grundsystem.

3.5.6.3

Beispiel 2: Zweifach gelagerte Kreisplatte

Wie aus Bild 3.5-10 zu ersehen, wird die Auflagerkraft an der inneren Stützung als statisch Unbestimmte eingeführt. Nachdem die beiden Formänderungswerte

$$\delta_{10} = -w(b) \quad \text{infolge der gegebenen Belastung,}$$

$$\delta_{11} = -w(b) \quad \text{infolge der Ringlast } P = -1 \text{ bei } \beta = b/a$$

mit Hilfe der Tafel 6 bestimmt wurden, erhält man die unbekannte Auflagerkraft aus

$$X_1 = -\delta_{10}/\delta_{11}.$$

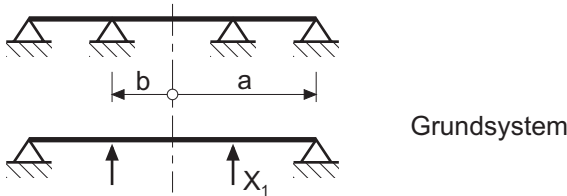


Bild 3.5-10: Zweifach gelagerte Kreisplatte

3.5.6.4

Beispiel 3: Kreisringplatte mit Lagerung zwischen Innen- und Außenrand

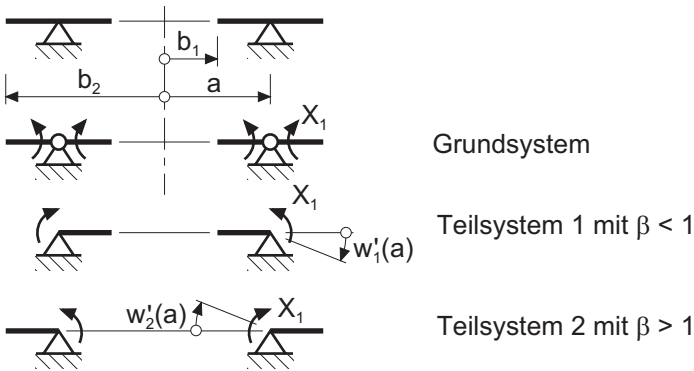


Bild 3.5-11: Kreisringplatte mit Zwischenlagerung

Das Grundsystème besteht aus zwei Kreisringplatten (siehe Bild 3.5-11), von denen eine am äußeren, die andere am inneren Rand gelagert ist. Die beiden Formänderungswerte setzen sich gemäß

$$\delta_{1i} = -w'_1(a) + w'_2(a)$$

wachsen die Momente in Plattenmitte an, wenn der Radius b des Lastbereichs kleiner wird. Für den Grenzfall $b \rightarrow 0$ erhält man aus (3.5.23) mit $p b^2 = P/\pi$ die Biegemomente infolge einer Einzellast P in Plattenmitte zu

$$\begin{aligned} m_r &= -\frac{P}{4\pi}(1+\mu)\ln\rho, \\ m_\varphi &= \frac{P}{4\pi}[(1-\mu)-(1+\mu)\ln\rho]. \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

In der Plattenmitte werden die beiden Momente unendlich. Das gilt übrigens generell für die Plattenmomente unter einer Einzellast. Für die Bemessung kommt es deshalb sehr auf die Größe der Lastverteilungsfläche von Punktlasten an.

3.5.6.6

Beispiel 5: Kreisplatte mit Auskragung unter Gleichlast

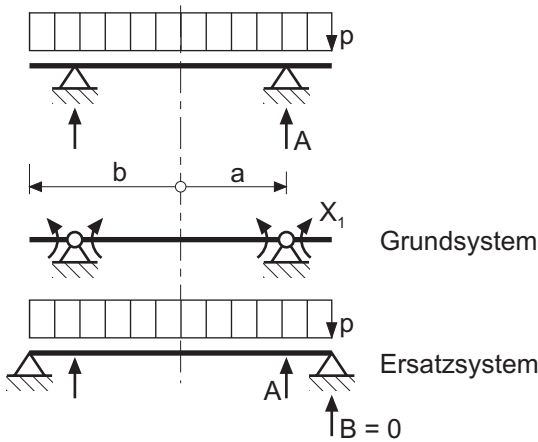


Bild 3.5-13: Kreisplatte mit Auskragung unter Gleichlast

Um die in Bild 3.5-13 dargestellte Aufgabe ohne Ansatz einer statisch Unbestimmten allein mit Hilfe der Tafeln 5 und 6 lösen zu können, wird ersatzweise ein gleichwertiges Problem behandelt, bei dem die statisch bestimmte Auflagerkraft

$$A = \frac{pb^2}{2a}$$

als Last angesehen und die Platte als am Rand gelagert angenommen wird. Die Auflagerkraft B ist natürlich gleich Null. Die Schnittgrößen ergeben sich aus der Superposition der beiden Lastfälle Gleichlast p und Ringlast $P = -A$ an der Kreis-

platte mit dem Radius b . Für das Radialmoment m_r wird das Vorgehen in Bild 3.5-14 gezeigt.

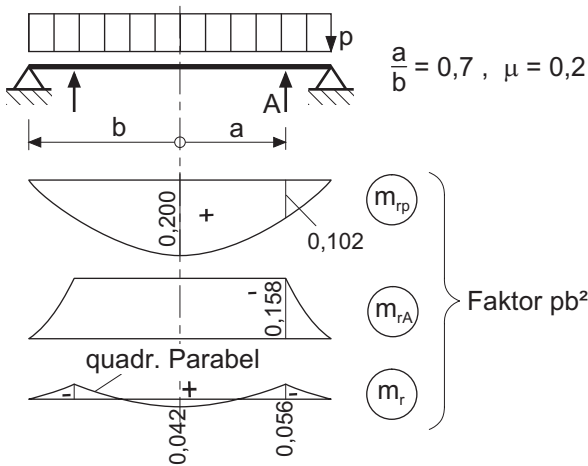


Bild 3.5-14: Radialmomente einer Kreisplatte mit Auskrägung unter Gleichlast

Nach Tafel 9 ergeben sich für $a/b = 0,7$ und $\mu = 0,2$ im Lastfall p die Momente

$$m_r(0) = 0,200pb^2 \text{ und } m_r(0,7) = (1 - 0,7^2)m_r(0) = 0,102pb^2.$$

Die Auflagerkraft A beträgt

$$A = \frac{pb}{2 \cdot 0,7} = 0,7143pb.$$

Sie erzeugt im Bereich innerhalb der Lagerlinie das Radialmoment

$$m_r(0) = -0,221 \cdot Ab = -0,158pb^2.$$

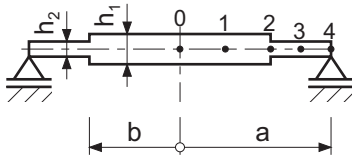
3.5.6.7

Beispiel 6: Kreisplatte mit unterschiedlicher Dicke

Für die in Bild 3.5-15 dargestellte Platte sind die Biegemomente infolge Eigengewicht gesucht (Ordinaten an den Stellen 0 bis 4).

An der Unstetigkeitsstelle braucht entsprechend Bild 3.5-16 nur eine statisch Unbestimmte angesetzt zu werden, da die Mittelflächen der beiden Plattenbereiche in gleicher Höhe liegen. Die Flächenlasten betragen

$$g_1 = \gamma h_1 = 25 \cdot 0,28 = 7,0 \text{ kN/m}^2, \quad g_2 = 25 \cdot 0,20 = 5,0 \text{ kN/m}^2.$$



$$\begin{aligned} a &= 4,00 \text{ m}, \quad b = 2,40 \text{ m} \\ h_1 &= 0,28 \text{ m}, \quad h_2 = 0,20 \text{ m} \\ \mu &= 0,2, \quad \gamma = 25 \text{ kN/m}^3 \end{aligned}$$

Bild 3.5-15: Kreisplatte mit unterschiedlicher Dicke

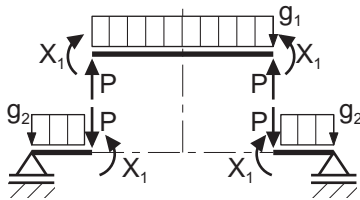


Bild 3.5-16: Grundsystem mit Belastung

Die Kraft P ergibt sich nach Tafel 5 zu

$$P = \frac{1}{2} g_1 b = \frac{1}{2} \cdot 7,0 \cdot 2,40 = 8,4 \text{ kN/m}.$$

Zur Berechnung der Formänderungswerte werden die beiden Verhältnisse

$$\frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3 = \left(\frac{0,28}{0,20} \right)^3 = 2,744 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{b}{a} = \frac{2,40}{4,00} = 0,60$$

benötigt. Mit Hilfe der Tafeln 6, 12 und 13 erhält man

$$K_1 \delta_{11} = \frac{b}{1 + \mu} + 1,45313 \cdot a \cdot \frac{K_1}{K_2} = \frac{2,40}{1,2} + 1,45313 \cdot 4,00 \cdot 2,744 = 17,95,$$

$$\begin{aligned} K_1 \delta_{10} &= \frac{g_1 b^3}{8(1 + \mu)} - 0,50917 \text{ Pa}^2 \frac{K_1}{K_2} - 0,11975 g_2 a^3 \frac{K_1}{K_2} \\ &= \frac{7,00 \cdot 2,40^3}{8 \cdot 1,2} - (0,50917 \cdot 8,40 + 0,11975 \cdot 5,00 \cdot 4,00) \cdot 4,00^2 \cdot 2,744 \\ &= -282,85. \end{aligned}$$

Damit wird

$$X_1 = -\frac{-282,85}{17,95} = +15,76 \text{ kNm/m}.$$

Es folgt die Ermittlung der Momente anhand der Tafeln 5, 6, 12 und 13:

$$m_{r0} = 0,200 \cdot g_1 b^2 + X_1 = 0,200 \cdot 7,0 \cdot 2,40^2 + 15,76 = 23,82 \text{ kNm/m}$$

$$m_{r1} = 0,150 \cdot 7,0 \cdot 2,40^2 + 15,76 = 21,81 \text{ kNm/m}$$

$$m_{r2} = X_1 = 15,76 \text{ kNm/m}$$

$$m_{r3} = 0,022Pa + 0,025 \cdot g_2 a^2 + 0,316X_1$$

$$(Pa = 8,4 \cdot 4,00 = 33,6 \text{ kN} ; g_2 a^2 = 5,0 \cdot 4,00^2 = 80,0 \text{ kN})$$

$$m_{r3} = 0,022 \cdot 33,6 + 0,025 \cdot 80,0 + 0,316 \cdot 15,76 = 7,72 \text{ kNm/m}$$

$$m_{r4} = 0$$

$$m_{\varphi 0} = m_{r0} = 23,82 \text{ kNm/m}$$

$$m_{\varphi 1} = 0,175 \cdot 7,0 \cdot 2,40^2 + 15,76 = 22,82 \text{ kNm/m}$$

$$m_{\varphi 2\ell} = 0,100 \cdot 7,0 \cdot 2,40^2 + 15,76 = 19,79 \text{ kNm/m}$$

$$m_{\varphi 2r} = 0,815 \cdot Pa + 0,192 \cdot g_2 a^2 - 2,125X_1$$

$$= 0,815 \cdot 33,6 + 0,192 \cdot 80,0 - 2,125 \cdot 15,76 = 9,25 \text{ kNm/m}$$

$$m_{\varphi 3} = 0,585 \cdot 33,6 + 0,145 \cdot 80,0 - 1,441 \cdot 15,76 = 8,55 \text{ kNm/m}$$

$$m_{\varphi 4} = 0,447 \cdot 33,6 + 0,110 \cdot 80,0 - 1,125 \cdot 15,76 = 6,09 \text{ kNm/m}$$

Der Verlauf der Momente ist in Bild 3.5-17 dargestellt.

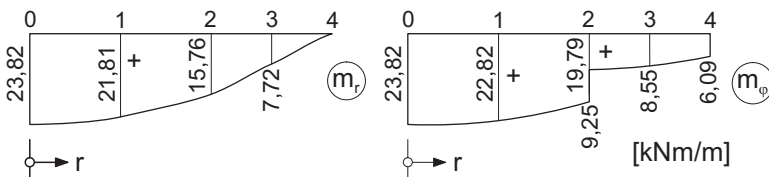
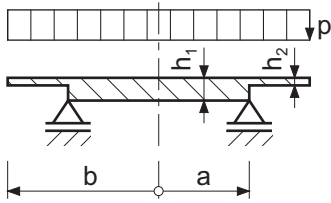


Bild 3.5-17: Momentenverlauf in einer Kreisplatte mit unterschiedlicher Dicke

3.5.6.8

Beispiel 7: Kreis- und Kreisringplatte mit unterschiedlicher Dicke

$$\beta = \frac{b}{a} = 1,3$$

$$\mu = 0,2$$

Bild 3.5-18: Kreisplatte mit dünnerer Auskrragung

Die Mittelflächen der Kreisplatte und der Auskrragung liegen nicht auf gleicher Höhe (siehe Bild 3.5-18). Deshalb tritt eine Scheibenwirkung auf, die an der Unstetigkeitsstelle außer dem Radialmoment eine zweite statisch Unbestimmte in Form einer Radialkraft erfordert. Das Grundsystem und der Ansatz der statisch Unbestimmten ist aus Bild 3.5-19 zu ersehen.

Hier sollen nur die Formänderungswerte berechnet werden. Bei den δ_{2i} ist zu beachten, daß sich der Angriffspunkt von X_2 bei einer Verformung der inneren Platte um $e \cdot w'(a)$ verschiebt. Es werden die Tafeln 1, 6, 10 und 11 benutzt.

$$\delta_{11} = \frac{a}{K_1(1+\mu)} + 4,26932 \cdot \frac{a}{K_2}$$

$$\delta_{12} = -\frac{a}{K_1(1+\mu)} \cdot e = \delta_{21}$$

$$\delta_{22} = \frac{a}{Eh_1}(1-\mu) + \frac{a}{K_1(1+\mu)} \cdot e + \frac{1}{Eh_2} \frac{a^3}{b^2 - a^2} \left[(1-\mu) + \frac{b^2}{a^2}(1+\mu) \right]$$

$$\delta_{10} = \frac{pa^3}{8K_1(1+\mu)} + 0,22250 \cdot \frac{pa^3}{K_2}$$

$$\delta_{20} = -\frac{pa^3}{8K_1(1+\mu)} \cdot e$$

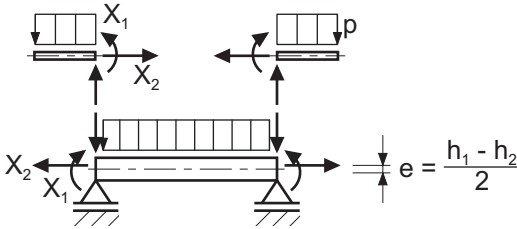


Bild 3.5-19: Grundsystem mit Ansatz der statisch Unbestimmten

3.5.7

Der Satz von BETTI an der Kreisplatte

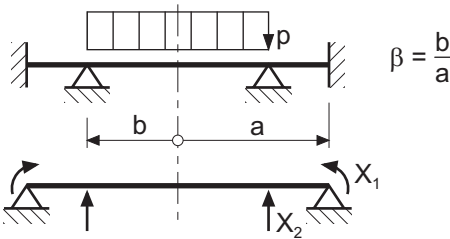


Bild 3.5-20: Eingespannte Kreisplatte mit Zwischenlagerung

Die in Bild 3.5-20 dargestellte Platte wird statisch bestimmt gemacht, indem das Einspannmoment und die Kraft am Zwischenlager als Unbestimmte X_1 bzw. X_2 angesetzt werden. Wenn diese nacheinander aufgebracht werden, sind die beiden Fremdarbeiten W_{12} und W_{21} wie bei der Kreisringscheibe in Abschnitt 2.5.8 gleich. Das bedeutet

$$1 \cdot 2\pi a \cdot \delta_{12} = 1 \cdot 2\pi b \cdot \delta_{21}$$

und

$$\frac{\delta_{21}}{\delta_{12}} = \frac{a}{b}. \quad (3.5.25)$$

Diese Gleichung entspricht (2.5.31) und wird durch einen Vergleich der beiden Ausdrücke für δ_{12} und δ_{21} aus Tafel 6 bestätigt:

$$\delta_{21} = -w(b) = -\frac{a^2}{2K(1+\mu)}(1-\beta^2),$$

$$\delta_{12} = -w'(a) = -\frac{ab}{2K(1+\mu)}(1-\beta^2).$$

Der Satz von MAXWELL ist demnach auf das gewählte Beispiel nicht anwendbar, weil die statisch Unbestimmten auf verschiedenen Radien wirken. Das System der Elastizitätsgleichungen ist unsymmetrisch.

3.6 Einflußflächen für Platten

3.6.1 Allgemeines

Die Ordinaten $\eta(x,y)$ einer Einflußfläche geben den Wert der betreffenden Formänderung oder Schnittgröße am Ort n infolge der Last $P = 1$ an der Stelle m an. Der feste Ort n mit den Koordinaten x_n, y_n wird als Aufpunkt bezeichnet. Der Ort m ist variabel und hat die Koordinaten x, y (siehe Bild 3.6-1).

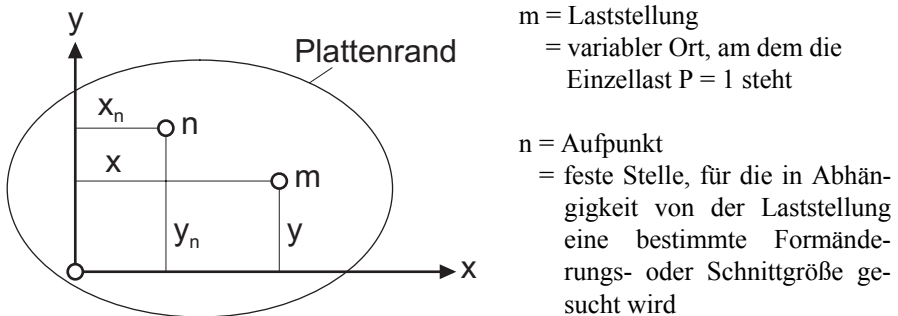


Bild 3.6-1: Beliebige Platte mit Aufpunkt n und Laststellung m

Mit Hilfe der Einflußflächen ist es möglich, die ungünstigste Stellung veränderlicher Verkehrslasten zu finden und durch Auswertung die Extremwerte der betreffenden Schnittgrößen zu berechnen.

Einflußflächen werden hauptsächlich zur Berechnung von Fahrbahnplatten unter nicht gleichmäßig verteilten Verkehrslasten benutzt. Diese Lasten sind für Brücken in DIN 1072 [4.3], für den Hochbau in DIN 1055 Blatt 3 [4.2] festgelegt. Brücken im Zuge von Bundesfernstraßen sind außerdem für militärische Verkehrslasten (Räder- und Kettenfahrzeuge) nach STANAG 2021 [4.6] zu bemessen. In Bild 3.6-2 werden als Beispiele die Lastbilder eines Schwerlastwagens SLW 60 mit der Gesamtlast 600 kN und eines Gabelstaplers GSt 13 mit der Regellast 120 kN gezeigt.

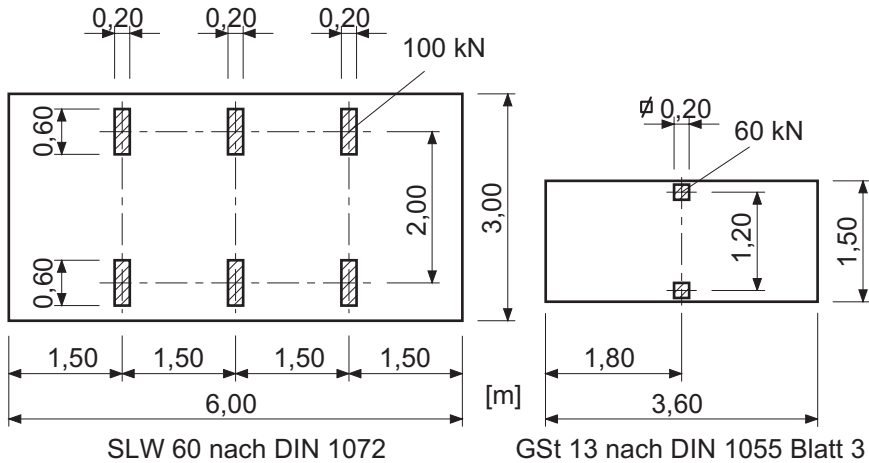


Bild 3.6-2: Lastbilder eines Schwerlastwagens und eines Gabelstaplers

RÜSCH [3.8] hat die Einflußflächen von Rechteckplatten für die Verkehrslasten nach DIN 1072 ausgewertet und in Heft 106 des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton veröffentlicht.

Es werden Einflußflächen für Biegemomente, Drillmomente und Querkräfte benötigt, und zwar für verschiedene Aufpunkte. Da alle Schnittgrößen der Platte nach (3.2.13) bis (3.2.17) durch Ableitungen der Funktion w dargestellt werden können, geht man von der Einflußfläche für die Durchbiegung w aus und differenziert diese entsprechend.

Bei der Ermittlung der Einflußflächen für Momente setzt man die Querdehnzahl gleich Null. Soll μ berücksichtigt werden, so kann dies bei vierseitig gelagerten Rechteckplatten nach (3.2.31) und (3.2.32), bei eingespannten Kreisplatten nach (3.4.6) und (3.4.7) erfolgen. Die Einflußflächen für Rechteckplatten mit ungestützten Rändern und für gelenkig gelagerte Kreisplatten müssen das zu berücksichtigende μ als Parameter enthalten.

Es liegen Einflußflächen für Rechteckplatten mit verschiedenen Seitenverhältnissen und Lagerungsbedingungen sowie für gelenkig gelagerte und eingespannte Kreisplatten vor. Hier seien zwei Tafelwerke genannt: die Zahlentafeln von BITTNER [2.5], ermittelt mit trigonometrischen Reihen, und die Höhenlinienpläne von PUCHER [3.4], ermittelt nach der sogenannten Singularitätenmethode (siehe den folgenden Abschnitt).

3.6.2

Die Singularitätenmethode

3.6.2.1

Allgemeines

Wie bereits erwähnt, werden die Einflußflächen der Schnittgrößen durch mehrmalige Ableitung der Einflußfunktion für die Durchbiegung w ermittelt. Eine Schwierigkeit entsteht dadurch, daß bestimmte Ableitungen von w im Aufpunkt unendlich werden. Dieser wird deshalb als singuläre Stelle bezeichnet, im Gegensatz zum regulären Bereich, wo sämtliche Ableitungen endlich sind. Wegen der Singularitäten konvergieren Reihenentwicklungen schlecht und werden im folgenden nicht behandelt. Vorteilhafter ist die von PUCHER entwickelte Singularitätenmethode, bei der die Einflußfunktion in einen singulären und einen regulären Anteil aufgespalten wird.

Gesucht ist zunächst die Einflußfläche „ w_n “ = w_{nm} , d.h. die Durchbiegung w im festen Aufpunkt n , wenn $P = 1$ an der variablen Stelle m steht. Nach dem Satz von MAXWELL dürfen die Indizes von w_{nm} vertauscht werden. w_{mn} bezeichnet die Durchbiegung w an der variablen Stelle m , wenn $P = 1$ am festen Ort n steht, beschreibt also eine Biegefläche. Statt der Einflußfläche für w kann demnach die Biegefläche infolge der Last $P = 1$ im Aufpunkt ermittelt werden.

Im folgenden wird die Einflußfunktion für w_n mit

$$\eta(x,y) = \eta_0(x,y) + \eta_1(x,y) \quad (3.6.1)$$

bezeichnet. Darin ist $\eta_0(x,y)$ der singuläre und $\eta_1(x,y)$ der reguläre Anteil. Der singuläre Anteil enthält die Singularität im Aufpunkt und wird unabhängig von der Form des Plattenrandes und von den Stützbedingungen der Platte gewählt. Deshalb erfüllt $\eta_0(x,y)$ lediglich die Plattengleichung $\Delta\eta_0 = 0$, nicht jedoch die Randbedingungen. Der reguläre Anteil muß der Differentialgleichung $\Delta\eta_1 = 0$ genügen und zusammen mit $\eta_0(x,y)$ die Randbedingungen befriedigen.

3.6.2.2

Die Singularität des Feldmoments m_x

Für Feldmomente wird die Singularität aus der Biegefläche einer durch eine mittige Einzellast P beanspruchten, gelenkig gelagerten Kreisplatte hergeleitet. Die entsprechende Gleichung ist Tafel 6 zu entnehmen:

$$w(r) = \frac{Pa^2}{16\pi K} \left[\frac{3+\mu}{1+\mu} (1-\rho^2) + 2\rho^2 \ln \rho \right]. \quad (3.6.2)$$

Die beiden ersten Ableitungen nach r lauten mit $\rho = r/a$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{Pa}{4\pi K} \left(-\frac{1}{1+\mu} \rho + \rho \ln \rho \right), \quad (3.6.3)$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{P}{4\pi K} \left(\frac{\mu}{1+\mu} + \ln \rho \right). \quad (3.6.4)$$

(3.6.2) und (3.6.3) sind überall regulär, weil das Produkt $\rho \cdot \ln \rho$ im Nullpunkt verschwindet. Die zweite Ableitung wird jedoch im Aufpunkt singulär. Ursächlich hierfür ist der Anteil

$$w_0 = \frac{Pa^2}{8\pi K} \rho^2 \ln \rho \quad (3.6.5)$$

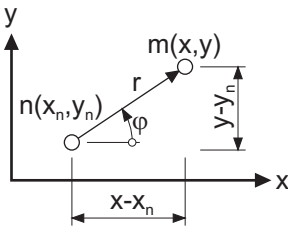
in (3.6.2). Dementsprechend lautet der die Singularität enthaltende Anteil der Einflußfunktion für w

$$\eta_0 = \frac{1}{8\pi K} r^2 \cdot \ln \frac{r}{r_0} = \frac{1}{16\pi K} r^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)^2. \quad (3.6.6)$$

Dabei wurde $P = 1$ gesetzt und statt des Plattenradius a die beliebige Bezugsgröße r_0 eingeführt, die wegen $\ln(r/r_0) = \ln r - \ln r_0$ lediglich den regulären Anteil in (3.6.6) beeinflusst.

Da die Querdehnung, wie erläutert, nicht berücksichtigt wird, gilt entsprechend (3.2.13) für den singulären Anteil

$$m_{x0} = -K \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x_n^2}. \quad (3.6.7)$$



$$r^2 = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2$$

$$\cos \varphi = \frac{x - x_n}{r}$$

Bild 3.6-3: Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Um die Differentiationen nach x_n durchführen zu können, müssen zuvor die Polarkoordinaten in (3.6.6) auf das x-y-System umgerechnet werden. Mit den Beziehungen nach Bild 3.6-3 erhält man zunächst

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x_n} = -2(x - x_n) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\ln \frac{r^2}{r_0^2} \right) = -\frac{2}{r^2} (x - x_n)$$

und weiter

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial x_n} = -\frac{1}{16\pi K} \left[2(x - x_n) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + 2(x - x_n) \right] \quad (3.6.8)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x_n^2} &= \frac{1}{8\pi K} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + (x - x_n) \cdot \frac{2(x - x_n)}{r^2} + 1 \right] \\ &= \frac{1}{8\pi K} \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 2 \cos^2 \varphi + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

Damit ergibt sich schließlich nach (3.6.7)

$$"m_{x0}" = -\frac{1}{8\pi} \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 2 \cos^2 \varphi + 1 \right). \quad (3.6.10)$$

Man erkennt, daß die Einflußfläche nicht rotationssymmetrisch ist. Die Funktion der Höhenlinien ergibt sich, indem „ m_{x0} “ = κ = const. gesetzt wird:

$$\kappa = -\frac{1}{8\pi} \left(2 \ln \frac{r}{r_0} + 2 \cos^2 \varphi + 1 \right).$$

Daraus folgt durch Umformung die Gleichung der Höhenlinien in Polarkoordinaten

$$r(\kappa, \varphi) = r_0 \cdot e^{\frac{8\pi\kappa+1}{2}} \cdot e^{-\cos^2 \varphi}. \quad (3.6.11)$$

Aus (3.6.11) erkennt man, daß alle Höhenlinien unabhängig von κ affin zueinander sind. Sie weisen die Form einer eingeschnürten Ellipse auf mit dem Achsenverhältnis

$$\frac{r(\kappa, \pi/2)}{r(\kappa, 0)} = \frac{e^0}{e^{-1}} = e \approx 2,72.$$

In Bild 3.6-4 sind einige Höhenlinien von „ m_{x0} “ dargestellt. Die längere Achse liegt in der y -Richtung, in die auch der Vektor des zugehörigen Moments m_{x0} weist. Die Linien gelten für verschiedene Werte κ . Im Aufpunkt ist $\kappa = \infty$.

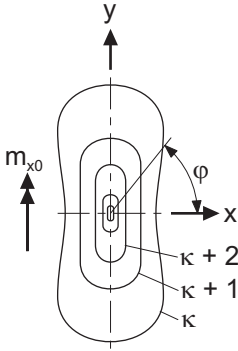


Bild 3.6-4: Höhenlinien der Einflußfläche „ m_{x0} “ und zugehöriger Momentenvektor

Die Einflußfläche bildet räumlich einen unendlich langen Schlauch, der sich nach oben verjüngt und der einen endlichen Inhalt besitzt. Diesen muß man für die Auswertung der Einflußfläche kennen (siehe Abschnitt 3.6.4.2).

Die von der Höhenlinie κ umschlossene Fläche ergibt sich aus

$$A(\kappa) = \frac{1}{2} \oint r^2 d\varphi = \frac{1}{2} r_0^2 e^{-(8\pi\kappa+1)} \int_0^{2\pi} e^{-2\cos^2\varphi} d\varphi. \quad (3.6.12)$$

Das Integral ist nicht geschlossen lösbar. Es hat den Zahlenwert 2,93, wie sich z.B. mit der SIMPSONschen Regel berechnen läßt. Für das Volumen der Einflußfläche oberhalb der Höhenlinie κ gilt damit

$$V(\kappa) = \int_{\kappa}^{\infty} A(\kappa) d\kappa = \frac{2,93}{2e} r_0^2 \int_{\kappa}^{\infty} e^{-8\pi\kappa} d\kappa = 0,0214 \cdot r_0^2 \cdot e^{-8\pi\kappa}. \quad (3.6.13)$$

Für die letzte von PUCHER in seinem Tafelwerk noch dargestellte Höhenlinie gilt

$$\max \kappa = \frac{8}{8\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Für den Wert r_0 hat er eine Länge in der Größenordnung der Stützweite gewählt. Damit ergibt sich für das Volumen oberhalb von $\max \kappa$

$$V(\max \kappa) \approx 0,0214 \cdot \ell^2 \cdot e^{-8} \approx 0,7 \cdot 10^{-5} \cdot \ell^2. \quad (3.6.14)$$

Dieses Volumen ist vernachlässigbar klein, wie an einem Beispiel in Abschnitt 3.6.4.3 gezeigt werden soll. Es genügt also, in der Praxis nur die von PUCHER [3.4] dargestellten Höhenlinien zu benutzen und den Inhalt des oberhalb von $\max \kappa$ liegenden Teils der Einflußfläche unberücksichtigt zu lassen.

3.6.2.3

Der reguläre Anteil des Feldmoments m_x

Der reguläre Lösungsanteil $\eta_1(x,y)$ der Einflußfläche entspricht einer Randbelastung der Platte, die bewirkt, daß die Gesamtlösung die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt. Er muß der homogenen Plattengleichung $\Delta\Delta\eta_1 = 0$ genügen und kann beispielsweise mit einem Reihenansatz bestimmt werden. PUCHER hat $\eta_1(x,y)$ numerisch mit dem Differenzenverfahren berechnet (siehe Abschnitt 3.8.3.1). Darauf wird hier nicht weiter eingegangen.

Die Ordinaten des regulären Anteils der Einflußfläche für ein Feldmoment sind im Bereich des Aufpunkts klein im Vergleich zu denen des singulären Anteils. Deshalb weisen die Höhenlinien der endgültigen Einflußfläche, unabhängig von der Form des Plattenrandes und der Lagerungsbedingungen der Platte, auch die in Bild 3.6-4 dargestellte, charakteristische Form auf, wie z.B. in Bild 3.6-5 zu erkennen ist.

3.6.3

Ausgewählte Einflußflächen

In Abschnitt 3.6.2 wurde lediglich die Einflußfläche für ein Feldmoment behandelt. Außer dieser werden im folgenden Beispiele für die Einflußfläche eines Spannungsmoments, eines Drillmoments und einer Querkraft ohne weitere Angaben zu ihrer Ermittlung gezeigt.

3.6.3.1

Einflußfläche für ein Feldmoment

In Bild 3.6-5 ist die Einflußfläche für m_x isometrisch und als Höhenlinienplan dargestellt. Dort sind die Ordinaten 8π -fach angegeben. Die höchste noch eingezeichnete Höhenlinie ist mit + 8 bezeichnet. Die maximale Einflußordinate beträgt demnach $\max \kappa = + 8/8\pi = 1/\pi$. Der Teil der Einflußfläche oberhalb der Ebene $\max \kappa$ wird vernachlässigt.

Die Einflußordinaten sind dimensionslos, so daß die Auswertung mit einer Einzelast P [kN] für m_x die Dimension [kNm/m] liefert.

In den Höhenlinienplänen von PUCHER werden die Ordinaten der Momente grundsätzlich 8π -fach angegeben. Sie sind unabhängig von der Stützweite. Von Einfluß dagegen sind Berandungsform, Seitenverhältnis und die Lagerungsbedingungen.

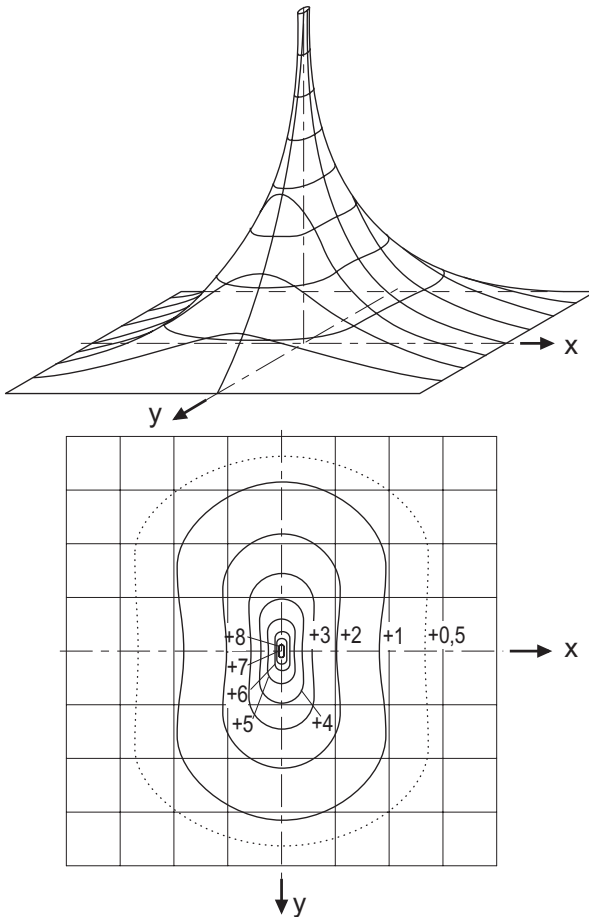


Bild 3.6-5: Einflußfläche (8π -fach) für das Biegemoment m_x im Mittelpunkt einer allseitig gelenkig gelagerten, quadratischen Platte (nach GIRKMANN [1.1])

3.6.3.2

Einflußfläche für ein Einspannmoment

Wie Bild 3.6-6 zeigt, ist die Ordinate der Einflußfläche für ein Einspannmoment im Aufpunkt, anders als beim Feldmoment, endlich. Sie beträgt $\kappa = -8/8\pi = -1/\pi$.

Wie bereits zur Einflußfläche für ein Feldmoment bemerkt, sind die Ordinaten dimensionslos und von der Stützweite unabhängig.

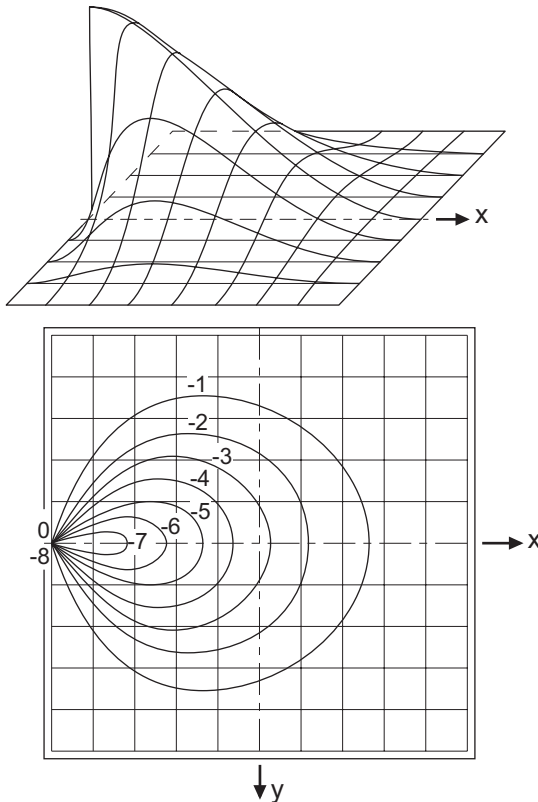


Bild 3.6-6: Einflußfläche (8π -fach) für das Einspannmoment m_x in Randmitte einer allseitig eingespannten, quadratischen Platte (nach GIRKMANN [1.1])

3.6.3.3

Einflußfläche für ein Drillmoment

Die in Bild 3.6-7 dargestellte Einflußfläche für das Drillmoment in Feldmitte ist antisymmetrisch bezüglich beider Plattenachsen, da eine achsensymmetrische Belastung der Platte dort keine Drillmomente hervorruft. Im Aufpunkt ist eine Unstetigkeitsstelle, an der die Einflußordinate $\max \kappa = 1/8\pi$ das Vorzeichen wechselt.

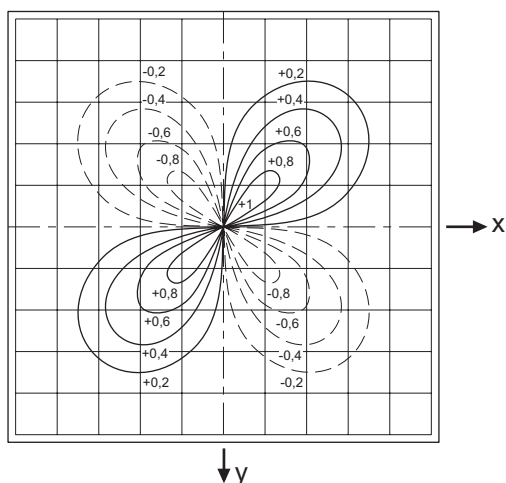


Bild 3.6-7: Einflußfläche (8π -fach) für das Drillmoment im Mittelpunkt einer allseitig eingespannten, quadratischen Platte (nach GIRKMANN [1.1])

3.6.3.4

Einflußfläche für eine Querkraft

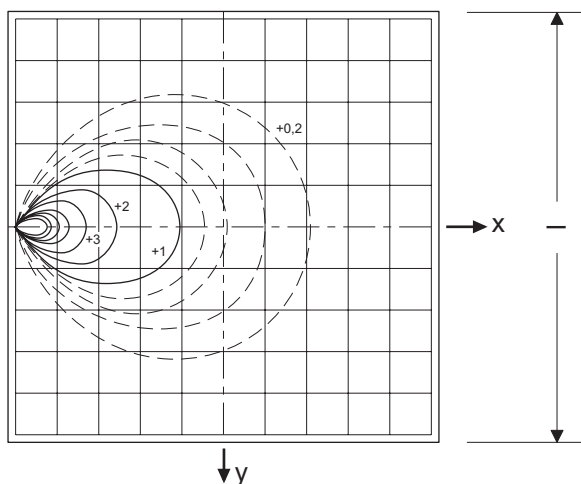


Bild 3.6-8: Einflußfläche (1 -fach) für die Querkraft q_x in Randmitte einer allseitig eingespannten, quadratischen Platte (nach PUCHER [3.4])

Die Einflußordinaten für Querkräfte sind längenbezogen. Im Beispiel nach Bild 3.6-8 sind die an den Höhenlinien angegebenen Zahlen durch die Spannweite ℓ zu dividieren. Die Querkraft in Randmitte infolge einer Einzellast verhält sich demnach reziprok zur Spannweite. Unter Gleichlast, z.B. infolge Eigengewicht, ist sie proportional zu ℓ .

Die Aufpunktordinate ist unendlich, das Volumen unter der Einflußfläche hat jedoch wie beim Feldmoment einen endlichen Wert.

3.6.3.5

Einflußflächen für die Schnittgrößen von Kreisplatten

Das Tafelwerk von PUCHER [3.4] enthält auch Einflußflächen für die Schnittgrößen von Kreisplatten. Sie verlaufen, abgesehen von der Berandungsform, ähnlich wie bei quadratischen Platten. Insbesondere ist auch die Einflußfläche für das Biegemoment in Plattenmitte nicht rotationssymmetrisch.

3.6.4

Auswertung von Einflußflächen

3.6.4.1

Lastverteilung in Platten

In Abschnitt 3.5.6.5 wurde darauf hingewiesen, daß die Feldmomente von Platten unter Einzellasten stark von der Größe der Lastverteilungsfläche abhängen. Diese darf nach DIN 1045 [4.1], Abschnitt 20.1.4, ermittelt werden (siehe Bild 3.6-9), wo zwischen Lastaufstandsbreite b_0 und Lasteintragungsbreite t unterschieden wird.

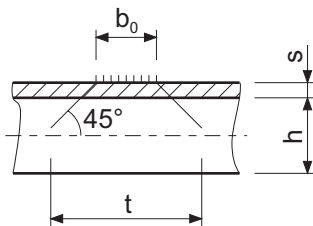


Bild 3.6-9: Ermittlung der Lasteintragungsbreite nach DIN 1045

Bei einer Lastausbreitung unter 45° bis zur Plattenmittelfläche und unter Berücksichtigung einer lastverteilenden Deckschicht der Dicke s ergeben sich die für die Berechnung maßgebenden Lasteintragungsbreiten zu

$$t_x = b_{0x} + 2s + h \quad \text{und} \quad t_y = b_{0y} + 2s + h . \quad (3.6.15)$$

Nach DIN 1075 [4.4], Abschnitt 9.1.2, dürfen bei Massivbrücken anstelle der Aufstandsflächen der Radlasten nach DIN 1072 (siehe Abschnitt 3.6.1) vereinfachend flächengleiche Ersatzflächen in Quadrat- oder Kreisform verwendet werden.

3.6.4.2

Auswertungsformeln

Die Einflußordinate $\eta(x,y)$ stellt die Zustandsgröße $Z(x_n, y_n)$ infolge einer Einzelast $P = 1$ dar, die am Ort (x,y) wirkt. Den Wert von Z infolge einer vorgegebenen Belastung erhält man deshalb, indem man die einzelnen Lasten mit den zugehörigen Einflußordinaten multipliziert und die Produkte aufsummiert. Bei Flächenlasten erfolgt die Auswertung der Einflußfläche dementsprechend durch Integration des Produkts aus Belastung $p(x,y)$ und Einflußordinate $\eta(x,y)$ über die Lastfläche A . Somit gilt bei Vorhandensein von Einzel- und Flächenlasten die Auswertungsformel

$$Z(x_n, y_n) = \sum P_i \cdot \eta(x_i, y_i) + \int_A p(x, y) \cdot \eta(x, y) dA . \quad (3.6.16)$$

Falls nur eine konstante Flächenlast p wirkt, ergibt sich hieraus z.B. für das Biegemoment m_x

$$m_x(x_n, y_n) = p \cdot \int_A \eta(x, y) dA .$$

Das Integral gibt das Volumen unter der Einflußfläche im Lastbereich A an. Mit η_m als mittlerer Einflußordinate im Lastbereich und mit der Resultierenden $R=p \cdot A$ gilt dann

$$m_x(x_n, y_n) = p \cdot A \cdot \eta_m = R \cdot \eta_m . \quad (3.6.17)$$

Die Integration wird zweckmäßig numerisch durchgeführt, wobei sich die doppelte Anwendung der SIMPSONschen Regel empfiehlt. Dies soll anhand des Bildes 3.6-10 gezeigt werden.

Es sind die rechteckige Lastfläche $A = 2 \Delta x \cdot 2 \Delta y$ und der Schnitt durch die Einflußfläche in Achse 1 dargestellt. Nach SIMPSON gilt

$$F_1 = \frac{\Delta x}{3} (\eta_{1a} + 4\eta_{1b} + \eta_{1c}) = 2\Delta x \cdot \eta_{1m}$$

mit η_{1m} als mittlerer Einflußordinate in Achse 1. Für diese ergibt sich danach

$$\eta_{1m} = \frac{1}{6} (\eta_{1a} + 4\eta_{1b} + \eta_{1c}) . \quad (3.6.18)$$

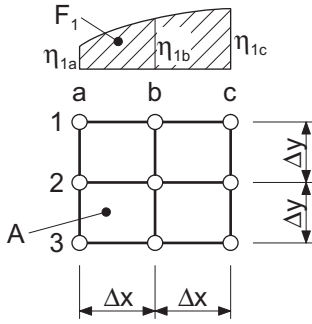


Bild 3.6-10: Beispiel für eine numerische Integration nach SIMPSON

Dementsprechend lautet die Gleichung der mittleren Einflußordinate im Bereich A

$$\eta_m = \frac{1}{6}(\eta_{1m} + 4\eta_{2m} + \eta_{3m}). \quad (3.6.19)$$

Für die Integration über eine größere, gerade Anzahl n von Intervallen wird die Formel mehrfach angewandt. Sie nimmt dann die Form

$$\eta_m = \frac{1}{3n} \sum_{r=1}^{n+1} \kappa_r \cdot \eta_{rm} \quad \text{mit} \quad \kappa_r = 1, 4, 2, 4 \dots 2, 4, 1 \quad (3.6.20)$$

an. Die praktische Durchführung wird im folgenden an einem Beispiel gezeigt.

3.6.4.3

Beispiel 1: Maximale Feldmomente infolge einer Einzellast

Es sollen die maximalen Feldmomente einer allseitig gelenkig gelagerten, quadratischen Platte infolge einer zentrischen Radlast P ermittelt werden. Die entsprechende Einflußfläche ist in Bild 3.6-11 als Höhenlinienplan gegeben.

Die Lasteintragungsbreiten t_x und t_y betragen ein Fünftel der Stützweite. Aus Symmetriegründen kann die mittlere Einflußordinate an einem Viertel der Lastfläche ermittelt werden. Nach Augenmaß liest man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Ordinaten ab. Werte oberhalb der Höhenlinie 8 werden nicht berücksichtigt.

	a	b	c
1	2,6	3,7	4,3
2	2,55	3,9	5,8
3	2,5	3,8	8

$$\Delta m_x = \Delta m_y = p \cdot V(\max \kappa) \approx \frac{P}{(0,2\ell)^2} \cdot 0,7 \cdot 10^{-5} \cdot \ell^2 = 0,000175 P$$

gebracht, was etwa 0,1 % von m_x ausmacht. Die Bedeutung von Δm_x wächst mit der Lastkonzentration. Für $t_x = t_y = 0,1$ l und 0,05 l beträgt der relative Fehler $\Delta m_x/m_x$ ca. 0,3 bzw. 1,0 %, ist also in der Regel auch bei kleinen Lastflächen vernachlässigbar.

Wäre eine zweite Radlast gleicher Größe an der Stelle A im Abstand 0,3 l zu berücksichtigen, so könnte deren Einflußordinate η_A im Lastschwerpunkt direkt abgelesen werden, denn dort kann die Einflußfläche für die Auswertung mit ausreichender Genauigkeit durch eine Tangentialebene ersetzt werden. Wegen der Doppelsymmetrie gilt bei dieser Laststellung für m_y die Einflußordinate η_B . Mit den Werten 1,78 bzw. 0,64 für diese beiden Ordinaten wird

$$\begin{aligned} \max m_x &= \left(0,1584 + \frac{1,78}{8\pi} \right) P = 0,2292 P, \\ \text{zug } m_y &= \left(0,1584 + \frac{0,64}{8\pi} \right) P = 0,1839 P. \end{aligned}$$

Da im Massivbrückenbau mit der Querdehnzahl $\mu = 0,2$ zu rechnen ist, sollen auch die entsprechenden Plattenmomente angegeben werden, die man unter Verwendung von (3.2.31) erhält:

$$\begin{aligned} \max m_x &= (0,2292 + 0,2 \cdot 0,1839) P = 0,2660 P, \\ \text{zug } m_y &= (0,1839 + 0,2 \cdot 0,2292) P = 0,2297 P. \end{aligned}$$

Die Stützweite l der Platte geht in die Berechnung nur insoweit ein, wie sie benötigt wird, um die Lasteintragungsfläche und den Radabstand im richtigen Maßstab zu zeichnen. Anders ist das bei Flächenlasten, deren Wirkungsfläche nicht begrenzt ist. Wäre z.B. bei der oben betrachteten Platte der Bereich der Einzellast P mit einer konstanten flächenbezogenen Verkehrslast p umgeben, so würde man die Platte für die Vollast p und die Überlast

$$\Delta P = P - p t_x t_y$$

berechnen. Ohne Berücksichtigung der Querdehnung erhielte man für die resultierenden Mittenmomente nach Tafel 2

$$\max m_x = \max m_y = \frac{p\ell^2}{27,2} + 0,1584 \Delta P.$$

Das Ergebnis ist von der Stützweite abhängig, weil das auch für die Gesamtlast gilt.

3.6.4.4

Beispiel 2: Minimales Stützmoment infolge einer wandernden Teilflächenlast

Es soll das minimale Stützmoment m_{xs} in der Seitenmitte einer allseitig eingespannten, quadratischen Platte ermittelt werden (siehe Bild 3.6-12). Die entsprechende 8π -fache Einflußfläche ist in Bild 3.6-6 dargestellt.

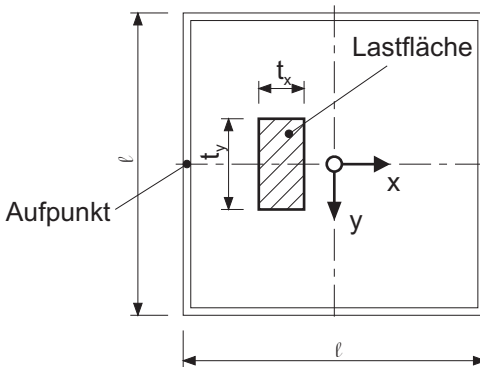


Bild 3.6-12: Quadratische, eingespannte Platte mit wandernder Teilflächenlast

Die Stützweite der Platte wird mit ℓ bezeichnet, die Last mit p . Die Lastfläche ist rechteckig und hat die Abmessungen $t_x = 0,2 \ell$ und $t_y = 0,4 \ell$. Man erkennt sofort, daß die Resultierende

$$R = p \cdot t_x \cdot t_y = 0,08p\ell^2$$

auf der x -Achse wirken muß, damit m_{xs} minimal wird. Deshalb und aus Symmetriegründen werden nur die Einflußordinaten im Bereich $0 \leq y/\ell \leq 0,2$ benötigt. Die x -Koordinate des Schwerpunkts der Lastfläche ist unbekannt.

$\xi = \frac{x}{\ell}$	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	+0,1
$\eta(\xi;0)$	-7,5	-6,7	-5,7	-4,4	-3,2	-2,2
$\eta(\xi;0,1)$	-3,5	-5,1	-4,8	-3,9	-2,9	-2,0
$\eta(\xi;0,2)$	-1,2	-2,7	-3,1	-2,7	-2,2	-1,5
$\eta_m(\xi)$	-3,78	-4,97	-4,67	-3,78	-2,83	-1,95

Zunächst werden nach Gleichung (3.6.18) die mittleren Einflußordinaten des Bereichs ermittelt, in dem die Lastfläche wandert. Die aus Bild 3.6-6 abgelesenen

Ordinaten und die zugehörigen Mittelwerte sind in der vorstehenden Tabelle zusammengestellt.

In Bild 3.6-13 sind die berechneten Mittelwerte über der x-Achse aufgetragen.

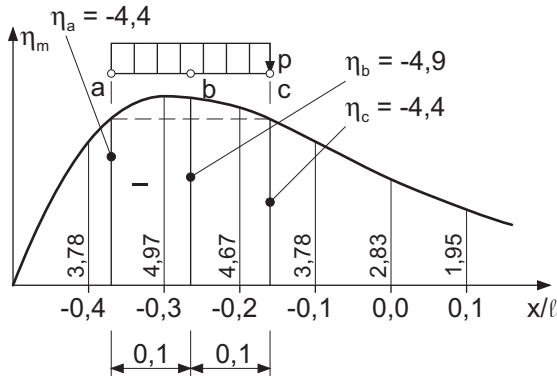


Bild 3.6-13: Verlauf der mittleren Einflußordinaten im Bereich $-0,2 \leq y/\ell \leq +0,2$

Das minimale Einspannmoment ergibt sich, wenn die Ordinaten an den beiden Rändern der Lastfläche gleich sind. Aus Bild 3.6-13 liest man im Abstand $0,2 \ell$ die Ordinaten $\eta_a = \eta_c = -4,4$ ab. In der Mitte dazwischen wird $\eta_b = -4,9$. Damit lautet die minimale mittlere Einflußordinate im Lastbereich

$$\eta_m = \frac{1}{6} (-4,4 - 4 \cdot 4,9 - 4,4) = -4,73.$$

Schließlich erhält man nach (3.6.17) das minimale Einspannmoment

$$\min m_{xs} = -\frac{1}{8\pi} \cdot 4,73 \cdot 0,08 p \ell^2 = -0,0151 p \ell^2.$$

3.7 Orthogonale Mehrfeldplatten

3.7.1 Allgemeines

In der Baupraxis kommen selten Einfeldplatten vor. Meist verwendet man Mehrfeldplatten, die an den inneren Stützungen durchlaufen, so daß sich die einzelnen

Felder gegenseitig beeinflussen. Dabei treten häufig Unregelmäßigkeiten auf (siehe Bild 3.7-1) wie z.B. schiefe Ränder (a), unterbrochene Stützungen (b), dreiseitige Knoten (c) und Aussparungen (d).

Hier sollen nur feldweise gleichmäßig belastete, orthogonale Mehrfeldplatten mit regelmäßigem Raster ohne die vorgenannten Anomalien behandelt werden. Für diese ist Spezialliteratur heranzuziehen, z.B. STIGLAT/WIPPEL [2.12].

Im folgenden werden an den Zwischenstützungen Schneidenlagerungen ohne Verdrehungswiderstand angenommen. Zur Berechnung der Mehrfeldplatten werden die mit Hilfe der Plattentheorie gewonnenen Ergebnisse für die einzelnen Rechteckplatten verwendet.

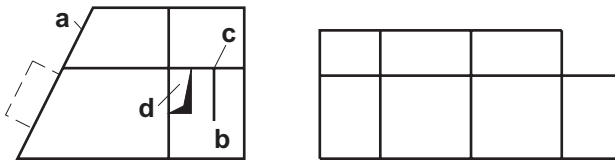


Bild 3.7-1: Mehrfeldplatten mit und ohne Unregelmäßigkeiten

Hier werden nur das Belastungsumordnungsverfahren und das Verfahren von PIEPER/MARTENS [2.11] zur Ermittlung der Plattenmomente behandelt. Beide stellen Näherungsverfahren dar und setzen $\mu = 0$ voraus. Der Einfluß der Querdehnzahl kann bei Bedarf nach (3.2.31) und (3.2.32) erfaßt werden.

3.7.2

Das Belastungsumordnungsverfahren

Das Verfahren beruht auf Symmetriebetrachtungen für orthogonale Plattensysteme mit konstanter Plattendicke und mit näherungsweise gleichen Stützweiten je Richtung. Es erlaubt, sich auf die Betrachtung der Einzelfelder zu beschränken, und ist auch bei unterschiedlichen Stützweiten je Richtung noch ausreichend genau und nach DIN 1045, Abschnitt 20.1.5 (4), anwendbar, wenn die Bedingungen

$$\min \ell_x / \max \ell_x \geq 0,75 \quad \text{und} \quad \min \ell_y / \max \ell_y \geq 0,75 \quad (3.7.1)$$

eingehalten werden. Bei der Anwendung des Verfahrens ist zwischen Feld- und Stützmomenten zu unterscheiden.

3.7.2.1

Ermittlung der Feldmomente

Die maximalen und minimalen Feldmomente treten bei schachbrettartiger Anordnung der Verkehrslast p auf. Die Gesamtbelastung der Platte $q = g + p$ wird in den symmetrischen Anteil q' und den antimetrischen Anteil q'' aufgeteilt. Hierfür gilt

$$q' = g + p/2 \quad \text{und} \quad q'' = \pm p/2. \quad (3.7.2)$$

Für den symmetrischen Lastfall q' darf an den Zwischenstützungen volle Einspannung angenommen werden, da sich die Platte dort nicht oder kaum verdreht. Für den antimetrischen Lastfall q'' herrscht an den Zwischenstützungen eine freie Verdrehbarkeit. Dem entspricht eine gelenkige Lagerung der angrenzenden Platten.

Als Beispiel soll hier die in Bild 3.7-2 im Grundriß dargestellte Platte behandelt werden. Gesucht seien die maximalen Feldmomente in Feld 1 und die minimalen in Feld 2. Als Belastung wird $g = 5,0 \text{ kN/m}^2$ und $p = 2,0 \text{ kN/m}^2$ angenommen.

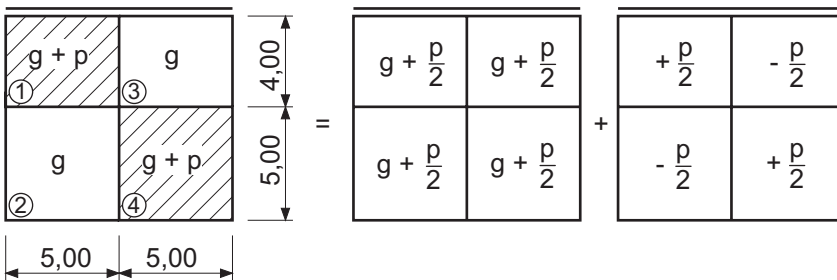


Bild 3.7-2: Beispiel zur Ermittlung von Feldmomenten mit Lastaufteilung

Die Bedingungen (3.7.1) sind erfüllt. Die Verkehrsbelastung ist schachbrettartig angeordnet und in die Anteile q' und q'' zerlegt. Mit den Festwerten

$$q' = 5,0 + 1,0 = 6,0 \text{ kN/m}^2, \quad q'' = \pm 1,0 \text{ kN/m}^2$$

erhält man für Feld 1

$$q' \ell_x \ell_y = 6,0 \cdot 5,00 \cdot 4,00 = 120 \text{ kN}, \quad q'' \ell_x \ell_y = 1,0 \cdot 5,00 \cdot 4,00 = 20 \text{ kN},$$

für Feld 2

$$q' \ell_x \ell_y = 6,0 \cdot 5,00 \cdot 5,00 = 150 \text{ kN}, \quad q'' \ell_x \ell_y = 1,0 \cdot 5,00 \cdot 5,00 = 25 \text{ kN}.$$

Nach den obigen Ausführungen bezüglich der Lagerung der Einzelplatten erhält man die maximalen Feldmomente in Feld 1 nach Bild 3.7-3.

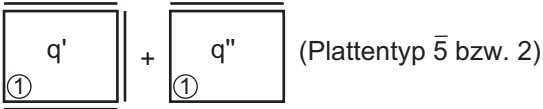


Bild 3.7-3: Ersatzsysteme zur Ermittlung der maximalen Feldmomente in Feld 1

Der Querstrich bei der Bezeichnung des Plattentyps bedeutet, daß die Platte vor einer Anwendung der Tafel 2 in Gedanken gedreht werden muß. Das Seitenverhältnis beträgt $\ell_y/\ell_x = 4,00/5,00 = 0,80$ bzw. $\ell_x/\ell_y = 1,25$. Die Momentenbeiwerte nach Tafel 2 lauten

$$\text{für Plattentyp } \bar{5}: \alpha_{xf} = \frac{1}{2}(78,2 + 89,6) = 83,9, \quad \alpha_{yf} = \frac{1}{2}(40,6 + 40,3) = 40,45;$$

$$\text{für Plattentyp 2:} \quad \alpha_{xf} = 63,1, \quad \alpha_{yf} = 28,4.$$

Damit erhält man für Feld 1

$$\max m_x = \frac{120}{83,9} + \frac{20}{63,1} = 1,75 \text{ kNm/m},$$

$$\max m_y = \frac{120}{40,45} + \frac{20}{28,4} = 3,67 \text{ kNm/m}.$$

Zur Ermittlung der minimalen Feldmomente in Feld 2 wird nach Bild 3.7-4 vorgegangen. Das Seitenverhältnis beträgt 1,0.

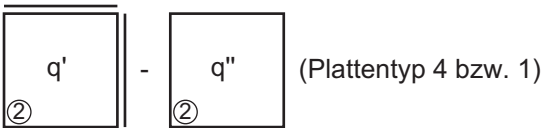


Bild 3.7-4: Ersatzsysteme zur Ermittlung der minimalen Feldmomente in Feld 2

Die Momentenbeiwerte nach Tafel 2 lauten

$$\text{für Plattentyp 4:} \quad \alpha_{xf} = \alpha_{yf} = 40,2,$$

$$\text{für Plattentyp 1:} \quad \alpha_{xf} = \alpha_{yf} = 27,2.$$

Damit erhält man für Feld 2

$$\min m_x = \min m_y = \frac{150}{40,2} - \frac{25}{27,2} = 2,81 \text{ kNm/m}.$$

3.7.2.2

Ermittlung der Stützmomente

Beim Belastungsumordnungsverfahren werden die Stützmomente näherungsweise als Mittel der Festeinspannmomente benachbarter Platten berechnet. Hierfür wird die Belastung wie bei den Feldmomenten in die Anteile q' und q'' zerlegt.

Das Vorgehen soll an der in Bild 3.7-5 dargestellten Platte gezeigt werden, für die das minimale Stützmoment zwischen den Feldern 1 und 2 gesucht sei. Belastung, Abmessungen und die Art der Lagerung stimmen mit denen des oben behandelten Beispiels überein.

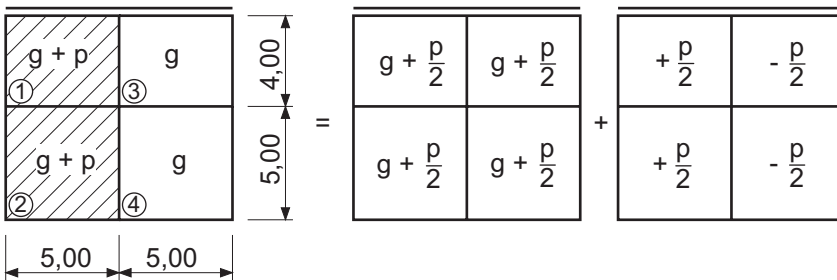


Bild 3.7-5: Beispiel zur Ermittlung eines Stützmoments mit Lastaufteilung

Verkehrslast befindet sich nur in den Feldern 1 und 2, da Lasten in den Feldern 3 und 4 ein positives Stützmoment $m_{1,2}$ erzeugen würden. Die Lagerung der Einzelplatten ersieht man aus Bild 3.7-6.

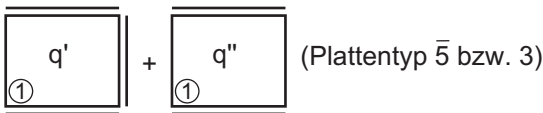


Bild 3.7-6: Ersatzsysteme zur Ermittlung des minimalen Stützmoments $m_{1,2}$

Für den Lastfall q' herrscht an allen Zwischenstützungen volle Einspannung. An den Stützungen, wo q'' das Vorzeichen wechselt, sind die Einzelplatten als gelenkig gelagert anzusehen.

Die Seitenverhältnisse betragen wie zuvor 0,80 bzw. 1,25 bei Feld 1 und 1,0 bei Feld 2. Hierfür erhält man aus Tafel 2 folgende Momentenbeiwerte:

$$\text{Plattentyp } \bar{5}: \quad \alpha_{ys} = -\frac{1}{2}(16,7 + 17,2) = -16,95$$

$$\text{Plattentyp } 3: \quad \alpha_{ys} = -16,0$$

$$\text{Plattentyp } 4: \quad \alpha_{ys} = -14,3$$

$$\text{Plattentyp } 2: \quad \alpha_{ys} = -11,9$$

Die Festeinspannmomente der beiden Platten ergeben sich damit zu

$$\min m_{s1} = -\frac{120}{16,95} - \frac{20}{16,0} = -8,33 \text{ kNm/m},$$

$$\min m_{s2} = -\frac{150}{14,3} - \frac{25}{11,9} = -12,59 \text{ kNm/m},$$

und das minimale Stützmoment lautet

$$\min m_{1,2} = (\min m_{s1} + \min m_{s2})/2 = -\frac{8,33 + 12,59}{2} = -10,46 \text{ kNm/m}.$$

3.7.3

Das Verfahren von PIEPER/MARTENS

Dieses Verfahren beruht auf den Gedanken des Belastungsumordnungsverfahrens und erweitert dieses sowohl auf beliebig unterschiedliche Stützweiten als auch auf Plattensysteme mit dreiseitigen Knoten (siehe Bild 3.7-1). Für Verkehrslasten $p \leq 2g$ liefert das Verfahren auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse, d.h. im Gültigkeitsbereich des Belastungsumordnungsverfahrens entsprechend (3.7.1) deutlich größere Feldmomente als dieses. Der Rechenaufwand ist jedoch beträchtlich geringer.

3.7.3.1

Ermittlung der Feldmomente

Als Bemessungsmomente werden mit Ausnahme des unten erwähnten Sonderfalles die Momente bei halber Einspannung verwendet, also das Mittel aus den Feldmomenten bei gelenkiger Lagerung und bei Festeinspannung an den Innenstützungen. Diese Mittelwerte sind mit Hilfe von Tafel 3 aus

$$m_{xf} = \frac{q \ell_x^2}{f_x} \quad \text{und} \quad m_{yf} = \frac{q \ell_y^2}{f_y} \quad (3.7.3)$$

zu berechnen. Eine Sonderregelung ist erforderlich für den Fall, daß auf zwei kleine Felder ein großes Feld folgt. Darauf wird hier nicht eingegangen. Die Anwendung des Verfahrens wird an dem in Bild 3.7-7 dargestellten Beispiel für die Felder 1 und 2 gezeigt.

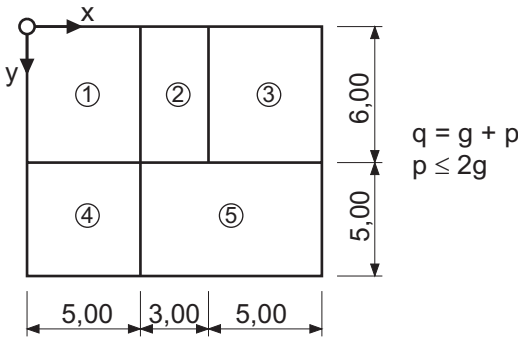




Bild 3.7-7: Mehrfeldplatte als Beispiel zum Verfahren von PIEPER/MARTENS

Die Ergebnisse lauten:

Feld 1:  $\frac{\ell_y}{\ell_x} = 1,2, \quad m_{xf} = \frac{q \cdot 5,00^2}{23,3}, \quad m_{yf} = \frac{q \cdot 5,00^2}{35,5},$

Feld 2:  $\frac{\ell_y}{\ell_x} = 2,0, \quad m_{xf} = \frac{q \cdot 3,00^2}{14,6}, \quad m_{yf} = \frac{q \cdot 3,00^2}{56,9}.$

Für Feld 1 der Platte nach Bild 3.7-2 würde man nach PIEPER/MARTENS

$$m_{xf} = \frac{7,00 \cdot 4,00^2}{(40,4 + 42,7)/2} = 2,70 \text{ kNm/m} > 1,75$$

$$m_{yf} = \frac{7,00 \cdot 4,00^2}{(24,4 + 21,8)/2} = 4,85 \text{ kNm/m} > 3,67$$

erhalten. Der geringere Rechenaufwand wurde mit einer starken Überschätzung der Feldmomente erkauft.

3.7.3.2 Ermittlung der Stützmomente

Bei der Ermittlung der Stützmomente sind drei Fälle zu unterscheiden:



1. Für den Normalfall, daß das Verhältnis der Spannweiten benachbarter Felder kleiner als 5 ist, ergeben sich die Stützmomente als Mittel der Festeinspannmomente beider Felder, dürfen jedoch betragsmäßig nicht kleiner als 75 % des kleineren Wertes sein.
2. Bei einem Verhältnis der Spannweiten größer als 5 ist das Einspannmoment des größeren Feldes als Stützmoment anzunehmen.
3. Auch an dreiseitigen Knoten gilt das Festeinspannmoment.


Die Festeinspannmomente sind mit Hilfe von Tafel 3 aus


$$m_{xs} = -\frac{q\ell_x^2}{s_x} \quad \text{und} \quad m_{ys} = -\frac{q\ell_y^2}{s_y} \quad (3.7.4)$$

zu berechnen, können jedoch auch aus Tafel 2 gewonnen werden. Hierfür gilt dann Gleichung (3.3.14).

Als Beispiele werden für die Platte nach Bild 3.7-7 die minimalen Stützmomente $m_{1,4}$, $m_{1,2}$ und $m_{2,5} = m_{3,5}$ berechnet. Hierfür werden die Festeinspannmomente m_{xs1} , m_{ys1} , m_{xs2} , m_{ys4} und m_{ys5} benötigt. Diese lauten

Feld 1:		$\frac{\ell_y}{\ell_x} = 1,2$	$m_{xs1} = -\frac{q \cdot 5,00^2}{11,5} = -2,174 q$
			$m_{ys1} = -\frac{q \cdot 5,00^2}{13,1} = -1,908 q$
Feld 2:		$\frac{\ell_y}{\ell_x} = 2,0$	$m_{xs2} = -\frac{q \cdot 3,00^2}{12,0} = -0,750 q$

Feld 4:  $\frac{\ell_y}{\ell_x} = 1,0 \quad m_{ys4} = -\frac{q \cdot 5,00^2}{14,3} = -1,748 \text{ q}$

Feld 5:  $\frac{\ell_y}{\ell_x} = 1,6 \quad m_{ys5} = -\frac{q \cdot 5,00^2}{9,2} = -2,717 \text{ q}$

Damit erhält man die Stützmente


$$\min m_{1,4} = -\frac{1}{2}(1,908 + 1,748)q = -1,828 \text{ q} \quad (\text{Fall 1})$$


$$\min m_{1,2} = -0,75 \cdot 2,174 \text{ q} = -1,630 \text{ q}, \quad (\text{Fall 1, modifiziert})$$

da $\frac{1}{2}(m_{xs1} + m_{xs2}) = -\frac{1}{2}(2,174 + 0,750)q = -1,462 \text{ q}$

$$\min m_{2,5} = \min m_{3,5} = m_{ys5} = -2,717 \text{ q}. \quad (\text{Fall 3})$$

Für das minimale Stützment zwischen den Feldern 1 und 2 der in Bild 3.7-5 dargestellten Platte hätte das Verfahren von PIEPER/MARTENS

Feld 1:  $\frac{\ell_x}{\ell_y} = 1,25 \quad m_{ysl} = -\frac{7,0 \cdot 4,00^2}{(13,9 + 13,2)/2} = -8,27 \text{ kNm/m}$

Feld 2:  $\frac{\ell_y}{\ell_x} = 1,0 \quad m_{ys2} = -\frac{7,0 \cdot 5,00^2}{14,3} = -12,24 \text{ kNm/m}$

$$\min m_{1,2} = -\frac{1}{2}(8,27 + 12,24) = -10,25 \text{ kNm/m} \approx -10,46$$

geliefert. Das stimmt gut mit dem Ergebnis nach dem Belastungsumordnungsverfahren überein.

3.8

Näherungslösungen der Scheiben- und der Plattengleichung (Übersicht)

3.8.1

Allgemeines

Zum Ende der beiden Kapitel über Scheiben und Platten soll ein systematischer Überblick über Näherungslösungen für die beiden entsprechenden, biharmonischen Differentialgleichungen gegeben werden.

Die geschlossene Lösung der Scheibengleichung $\Delta\Delta F = 0$ und der Plattengleichung $\Delta\Delta w = p/K$ unter exakter Erfüllung der Randbedingungen ist nur in einfachen Fällen möglich, z.B. bei Rotationssymmetrie. In der Praxis ist man meist auf Näherungslösungen angewiesen. Hierbei sind analytische und numerische Lösungsverfahren zu unterscheiden.

Noch vor einigen Jahrzehnten standen die analytischen Verfahren im Vordergrund, bei denen die zu lösenden Aufgaben weitgehend idealisiert werden mußten. Heute geht man in aller Regel numerisch vor, da entsprechende Verfahren und Rechner leicht zugänglich und anwendbar sind. Die Rechenprogramme basieren oft auch, wie z.B. bei der Methode der finiten Elemente, auf einer Kombination von analytischen und numerischen Lösungen.

Analytische Verfahren weisen den Vorteil auf, daß man bei Verwendung geeigneter Funktionen, meist trigonometrischer Reihen, eine geschlossene Lösung erhält, aus der sich die gesuchten Schnitt- und Verformungsgrößen durch Einsetzen der entsprechenden Ortskoordinaten an beliebigen Stellen ergeben. Der Nachteil besteht darin, daß sich Unstetigkeiten in Geometrie und Belastung sowie Singularitäten nur schlecht erfassen lassen.

Bei den numerischen Verfahren wird die Erfüllung der Differentialgleichung und der Randbedingungen nur an ausgewählten Punkten verlangt. Die Genauigkeit der Lösung reicht aus, wenn diese sogenannten Stützpunkte nahe genug beieinander liegen. Man erhält auch die Lösung nur für diese Punkte. Dazwischen ist zu interpolieren. Die oben genannten Unstetigkeiten lassen sich problemlos erfassen. Nachteilig ist dagegen, daß man keine allgemeine Lösung erhält, aus der sich z.B. der Einfluß einer bestimmten Größe, z.B. des Verhältnisses von Höhe zu Stützweite einer Einfeldscheibe, erkennen ließe.

3.8.2

Analytische Näherungen

Die Näherung kann zum einen darin bestehen, daß der Ansatz die Differentialgleichung exakt erfüllt, die Randbedingungen jedoch nur näherungsweise. Es besteht jedoch auch die umgekehrte Möglichkeit. Beide Varianten werden im folgenden näher behandelt.

3.8.2.1

Der Ansatz erfüllt die Differentialgleichung

Der Ansatz setzt sich gemäß

$$f(x, y) = \sum_n a_n \cdot f_n(x, y) \quad (3.8.1)$$

aus einer Summe biharmonischer Funktionen zusammen. Jede der Funktionen erfüllt die Differentialgleichung, die Randbedingungen werden jedoch durch $f(x,y)$ nicht exakt befriedigt. Die Freiwerte a_n sind so zu bestimmen, daß die Summe S der Fehlerquadrate am Rand ein Minimum annimmt.

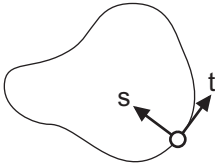


Bild 3.8-1: Scheibe mit Randkoordinaten

Als Beispiel wird die in Bild 3.8-1 dargestellte Scheibe mit den Randkoordinaten s und t gewählt.

Die Differentialgleichung lautet $\Delta\Delta F = 0$, der Ansatz entsprechend (3.8.1)

$$f(x, y) = \sum_n a_n \cdot F_n(x, y). \quad (3.8.2)$$

Als Randbedingungen seien am gesamten Rand die Spannungen σ_s und τ_{st} vorgegeben. Die Näherungswerte der Randspannungen ergeben sich nach (2.2.7) aus

$$\bar{\sigma}_s = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right|_{\text{Rand}}, \quad \bar{\tau}_{st} = - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} \right|_{\text{Rand}}. \quad (3.8.3)$$

Damit erhält man als Summe der Fehlerquadrate

$$S = \int_{\text{Rand}} \left[(\sigma_s - \bar{\sigma}_s)^2 + (\tau_{st} - \bar{\tau}_{st})^2 \right] dt. \quad (3.8.4)$$

Beim Minimum von S verschwinden die partiellen Ableitungen von S nach sämtlichen Konstanten a_n . Diese ergeben sich demnach aus dem linearen Gleichungssystem

$$\frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \quad (3.8.5)$$

Das beschriebene Verfahren entspricht dem Vorgehen in Abschnitt 2.6.2, wo bei einer Rechteckscheibe statt der wirklichen Randbelastung deren Näherung in Form einer FOURIER-Reihe berücksichtigt wurde.

Als weiteres Beispiel wird eine fest eingespannte Platte betrachtet. Der Grundriß mit seinen Randkoordinaten entspreche Bild 3.8-1. Der Ansatz für die Differentialgleichung $\Delta\Delta w = p/K$ lautet entsprechend (3.8.1)

$$w(x, y) = \sum_n a_n \cdot w_n(x, y) + w_p(x, y). \quad (3.8.6)$$

Dabei mußte die partikuläre Lösung $w_p(x, y)$ hinzugefügt werden. Die Näherungswerte der Randverformungen lauten

$$\bar{w} = w|_{\text{Rand}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{\text{Rand}}. \quad (3.8.7)$$

Daraus ergibt sich für die Summe der Fehlerquadrate

$$S = \int_{\text{Rand}} \left[(\bar{w} / w_0)^2 + (\bar{\varphi} / \varphi_0)^2 \right] dt. \quad (3.8.8)$$

Da \bar{w} und $\bar{\varphi}$ unterschiedliche Dimensionen aufweisen, muß hier mit bezogenen Werten gerechnet werden. Als Bezugsgrößen w_0 und φ_0 sind sinnvoll gewählte Vergleichsgrößen zu wählen, z.B. die Mittendurchbiegung und die Randverdrehung einer flächengleichen, gelenkig gelagerten Kreisplatte. Für die Konstanten a_n gilt auch hier das Gleichungssystem (3.8.5).

3.8.2.2

Der Ansatz befriedigt die Randbedingungen

Der Ansatz setzt sich gemäß

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \sum_n a_n \cdot f_n(x, y) \quad (3.8.9)$$

aus zwei Termen zusammen. Die Funktion $f_0(x, y)$ befriedigt diejenigen Randbedingungen, die ungleich Null sind, während die Funktionen $f_n(x, y)$ einer Nullrandbelastung entsprechen. Weder $f_0(x, y)$ noch die $f_n(x, y)$ erfüllen die Differentialgleichung. Die Freiwerte a_n ergeben sich aus der Bedingung, daß die Summe der Fehlerquadrate in der gesamten Scheibe oder Platte minimal wird.

Für eine Platte wäre beispielsweise entsprechend (3.8.9) der Ansatz

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_n a_n \cdot w_n(x, y) \quad (3.8.10)$$

zu wählen. Wenn die Platte voll mit $p = \text{const.}$ belastet ist, wird

$$S = \int_{\text{Platte}} \left(\Delta\Delta w - \frac{p}{K} \right)^2 dA \quad (3.8.11)$$

Die Konstanten a_n ergeben sich aus (3.8.5).

In Abschnitt 3.3.2 wurde eine Rechteckplatte mit dem Ansatz (3.8.10) behandelt, wobei jedoch die Werte a_n wegen der gelenkigen Lagerung gleich Null wurden.

3.8.3

Numerische Lösungen

Zur Anwendung numerischer Rechenverfahren wird das Kontinuum der Scheibe oder Platte durch eine Schar diskreter Punkte ersetzt, die in einem Raster angeordnet sind. Dieses ist so fein zu wählen, daß bei der Lösung eine ausreichende Genauigkeit erzielt wird.

3.8.3.1

Differenzenverfahren

Beim gewöhnlichen Differenzenverfahren werden die Differentialquotienten in der Differentialgleichung näherungsweise durch Differenzenquotienten ersetzt, z.B.

$$w'(x) = \frac{1}{2\Delta x} [w(x + \Delta x) - w(x - \Delta x)] \quad (3.8.12)$$

Darin ist Δx die äquidistante Rasterweite in x-Richtung. Das erste Fehlerglied von (3.8.12) lautet

$$-\frac{1}{6}(\Delta x)^2 \cdot w'''(x).$$

Der Näherungsausdruck ist demnach für quadratische Funktionen genau. (3.8.12) mit seinem ersten Fehlerglied läßt sich auch in der anschaulicheren Form

$$w' = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & \boxed{0} & 1 \end{bmatrix} w - \frac{1}{6} h^2 w''' \quad (3.8.13)$$

schreiben, wobei $\Delta x = h$ gesetzt wurde und die Stellung der Koeffizienten der Lage der entsprechenden Stützstellen entspricht. Der eingerahmte Koeffizient gilt für dieselbe Stelle wie der Differenzenquotient.

Die höheren eindimensionalen Differenzenquotienten lauten z.B. nach COLLATZ [1.18] und SZILARD [1.10]

$$w'' = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{-2} & 1 \end{bmatrix} w - \frac{1}{12} h^2 w''', \quad (3.8.14)$$

$$w''' = \frac{1}{2h^3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & \boxed{0} & -2 & 1 \end{bmatrix} w - \frac{1}{4} h^2 w^{IV}, \quad (3.8.15)$$

$$w'''' = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} w - \frac{1}{6} h^2 w^{VI}. \quad (3.8.16)$$

Zur Berechnung zweidimensionaler Kontinua wie Scheiben und Platten werden auch die gemischten Ableitungen

$$w' = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} w \quad \text{und} \quad w'' = \frac{1}{a^2 b^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} w \quad (3.8.17)$$

benötigt. Darin ist $a = \Delta x$ und $b = \Delta y$. Für $a = b$ erhält man mit (3.8.16) und (3.8.17)

$$\Delta \Delta w = w'''' + 2w'' + w = \frac{1}{a^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} w. \quad (3.8.18)$$

Indem man für jeden Rasterpunkt unter Verwendung dieser Differenzenausdrücke und der Differentialgleichung eine Differenzengleichung aufstellt, erhält man ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Funktionswerte F bzw. w . Die aus den Funktionen F und w durch Differentiation herzuleitenden Größen, wie z.B. σ_x und m_x , ergeben sich auch mittels der angegebenen Differenzenquotienten.

Als Beispiel wird hier eine quadratische, allseitig gelenkige Platte unter Gleichlast behandelt. Die Rasterweite soll $a = b = \ell/4$ betragen. Die Querdehnzahl wird gleich Null gesetzt. Die Anordnung der Stützstellen ist aus Bild 3.8-2 zu sehen. Die Doppelsymmetrie wurde durch entsprechende Numerierung der Rasterpunkte berücksichtigt.

Die Randbedingungen werden bereits bei der Aufstellung der Differenzengleichungen eingearbeitet. Nach (3.2.13) gilt beispielsweise am linken Rand mit (3.8.14)

$$m_x(0) = -K \cdot w''(0) = -K [w(-a) - 2w(0) + w(a)] = 0.$$

Da w auf dem Rand verschwindet, folgt aus vorstehender Gleichung, daß die Funktionswerte w in den Außenpunkten denen der entsprechenden Innenpunkte negativ gleich sind.

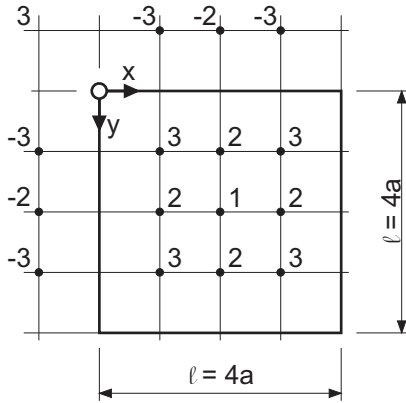


Bild 3.8-2: Quadratische Platte mit Stützstellenraster

Für die Punkte 1 bis 3 erhält man mit (3.8.18) die Differenzengleichungen

$$20w_1 - 8 \cdot 4w_2 + 2 \cdot 4w_3 = pa^4 / K$$

$$20w_2 - 8(2w_3 + w_1) + 2 \cdot 2w_2 + 1(-w_2 + w_2) = pa^4 / K$$

$$20w_3 - 8 \cdot 2w_2 + 2 \cdot w_1 + 1(2w_3 - 2w_3) = pa^4 / K$$

mit der Lösung

$$w_1 = 1,031 pa^4 / K, \quad w_2 = 0,750 pa^4 / K, \quad w_3 = 0,547 pa^4 / K.$$

Die Mittendurchbiegung beträgt demnach

$$\max w = w_1 = \frac{1,031}{4^4} p\ell^4 / K = 0,00403 p\ell^4 / K$$

und weicht kaum vom genauen Wert $0,00406 p\ell^4 / K$ ab (vgl. Abschnitt 3.3.2.4). Des weiteren ergeben sich nach (3.2.13) und (3.2.15) unter Verwendung der entsprechenden Differenzenausdrücke (3.8.14) und (3.8.17) die maximalen Feld- und Drillmomente für $\mu = 0$ zu

$$\max m_x = -K \cdot \frac{1}{a^2} (2w_2 - 2w_1) = \frac{p\ell^2}{28,4} \quad \text{statt} \quad \frac{p\ell^2}{27,2},$$

$$\max m_{xy} = +K \cdot \frac{1}{4a^2} \cdot 4w_3 = \frac{p\ell^2}{29,3} \quad \text{statt} \quad \frac{p\ell^2}{21,6}.$$

Wie man aus den Abweichungen von den genauen Werten (siehe Tafel 2) erkennt, wäre eine feinere Rasterteilung erforderlich gewesen, um verwertbare Ergebnisse zu erhalten.

Eine Verbesserung des gewöhnlichen Differenzenverfahrens stellt das Mehrstellenverfahren dar, bei dem statt der Differenzenquotienten sogenannte Mehrstellenausdrücke verwendet werden. Diese fassen die Ableitungen an mehreren Rasterpunkten zusammen und drücken sie durch die Funktionswerte benachbarter Punkte aus. Die genannten Ableitungen werden mit Hilfe der Differentialgleichung eliminiert. Deshalb erfüllt jede Mehrstellengleichung die Differentialgleichung an mehreren Stellen. Die Genauigkeit ist größer als beim gewöhnlichen Differenzenverfahren. Hier wird nicht weiter auf diese Methode eingegangen. Sie ist im einzelnen z.B. in [1.10] beschrieben.

Nach dem Mehrstellenverfahren hätte man für das oben behandelte Beispiel mit ebenfalls drei Gleichungen die Lösung

$$w_1 = 1,038 \text{ pa}^4 / \text{K}, \quad w_2 = 0,750 \text{ pa}^4 / \text{K}, \quad w_3 = 0,544 \text{ pa}^4 / \text{K}$$

gefunden. Daraus folgen

$$\max w = 0,00405 \text{ pa}^4 / \text{K}, \quad \max m_x = \frac{p\ell^2}{27,8}, \quad \max m_{xy} = \frac{p\ell^2}{29,4}.$$

Man erkennt den Gewinn an Genauigkeit in Feldmitte gegenüber den Ergebnissen nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren.

3.8.3.2

Die Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente stellt das wichtigste Näherungsverfahren zur Lösung von Kontinuumsproblemen dar. Sie geht von dem Grundgedanken aus, das Gesamttragwerk in einzelne, endliche Teile einfacher Geometrie, die sogenannten finiten Elemente, zu unterteilen, die in Knotenpunkten miteinander verbunden sind. Diese Elemente, die z.B. Dreieck- oder Viereckform haben, sind – auch in ihrer Kombination – einfacher zu behandeln als das Tragwerk als Ganzes.

Das Verfahren geht nicht von der Differentialgleichung des zu behandelnden Problems aus, sondern vom Minimum der Formänderungsarbeit. Auf dieser Grundlage werden die Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Elementtypen entwickelt. Die Näherung besteht darin, daß an den Elementrändern zwischen den Knoten die Verletzung des Gleichgewichts oder der geometrischen Verträglichkeit zugelassen wird.

Innerhalb der Elemente wird mit Funktionen gearbeitet. Zur Berechnung der Formänderungen an den Knoten dient ein Gleichungssystem. Insofern stellt das Verfahren eine Kombination von analytischer und numerischer Berechnung dar.

Die Grundgleichung des Verfahrens lautet

$$\underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{d} . \quad (3.8.19)$$

Darin ist \underline{F} der Lastvektor, \underline{K} die Steifigkeitsmatrix und \underline{d} der Verformungsvektor. Da bei Scheiben zwei und bei Platten mindestens drei unbekannte Formänderungen je Knoten zu berechnen sind, entstehen große Gleichungssysteme.

Die Methode der finiten Elemente wird in einer großen Anzahl von Lehrbüchern und praxisorientierten Werken ausführlich dargestellt. Empfohlen seien HAHN [1.13] und ZIENKIEWICZ [1.11].

3.8.3.3

Die Methode der Randelemente

Die Methode der Randelemente geht von einer analytischen Lösung für ein unendlich großes Kontinuum aus und formuliert ein Gleichungssystem zur Erfüllung der Randbedingungen in ausgewählten Knoten. Es braucht also nicht das gesamte Kontinuum diskretisiert zu werden, sondern lediglich der Rand. Deshalb wird das zu lösende Gleichungssystem wesentlich kleiner als bei der Methode der finiten Elemente. Ebenso wie diese ist die Methode der Randelemente auf Stäbe, Scheiben, Platten und Körper anwendbar.

Zur Einarbeitung in das Verfahren eignet sich besonders HARTMANN [1.15].