1 Metodo del gradiente per l'ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$

Exercise 1.1. Si consideri $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile. Scrivere una function Python che implementi il metodo di discesa del gradiente per risolvere il problema di minimo:

$$\arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Utilizzare una flag per scegliere se utilizzare:

- step size $\alpha > 0$ costante, passato in input;
- step size α_k variabile, calcolato secondo la procedura di backtracking ad ogni iterazione k-esima.

```
def minimize(f,grad_f,x0,step,maxit,tol,xTrue,fixed=True):
  x_list=np.zeros((len(x0),maxit+1))
  norm_grad_list=np.zeros(maxit+1)
  function_eval_list=np.zeros(maxit+1)
  error_list=np.zeros(maxit+1)

  x_last = x0
  x_list[:,0] = x_last
  k=0

  function_eval_list[k]=f(x0)
  error_list[k]=np.linalg.norm(x_last-xTrue)
  norm_grad_list[k]=np.linalg.norm(grad_f(x0))

  while (np.linalg.norm(grad_f(x_last))>tol and k < maxit ):
    k=k+1
    grad = grad_f(x_last)

    if fixed:
        step = step
    else
        step = next_step(x_last, grad)

    if(step==-1):
      print('non convergente')
      return (k) #no convergence

    x_last=x_last-(step*grad)
    x_list[:,k] = x_last

    function_eval_list[k]=f(x_last)
    error_list[k]=np.linalg.norm(x_last-xTrue)
    norm_grad_list[k]=np.linalg.norm(grad_f(x_last))

  function_eval_list = function_eval_list[:k+1]
  error_list = error_list[:k+1]
  norm_grad_list = norm_grad_list[:k+1]

  print('iterations=',k)
  print('last guess: x=(%f,%f)'%(x_list[0,k],x_list[1,k]))

  return (x_last,norm_grad_list, function_eval_list, error_list, x_list, k)
```

```
def next_step(x,grad): # backtracking procedure for the choice of the steplength
 alpha=1.1
 rho = 0.5
 c1 = 0.25
 p=-grad
 j=0
 jmax=10

 while ((f(x+alpha*p) > f(x)+c1*alpha*np.dot(grad,p)) and j<jmax ):
  alpha= rho*alpha
  j+=1
 if (j>jmax):
  return -1
 else:
  print('alpha=',alpha)
  return alpha
```

Exercise 1.2. Si consideri la seguente funzione

$$f(x,y) = 3(x-2)^2 + (y-1)^2$$

che ha un minimo globale in $(2,1)$ dove $f(2,1) = 0$.

- plottare la superficie $f(x,y)$ con il comando `plot_surface` nel dominio $[-1.5, 3.5] \times [-1, 5]$.

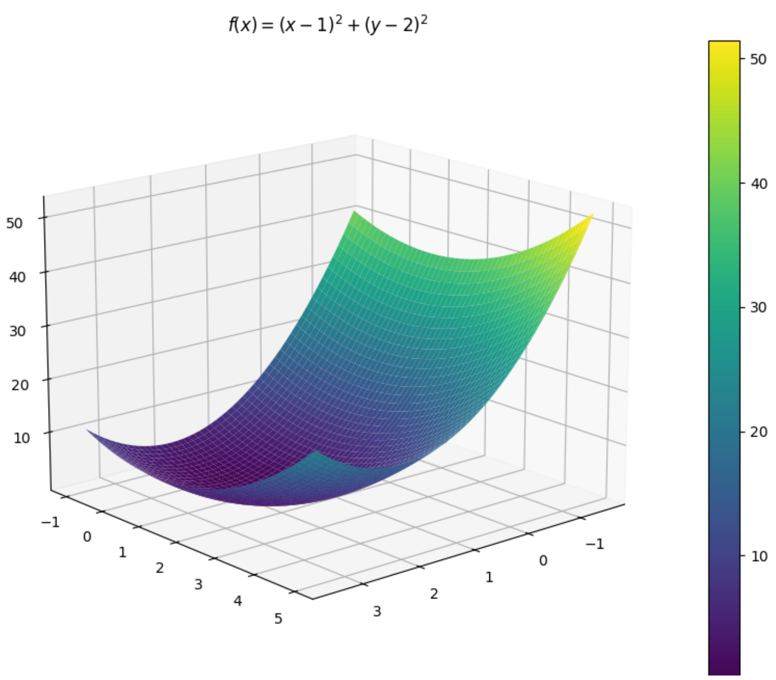
Rappresento la funzione come funzione Python e implemento anche il suo gradiente:

```
def f(vec):
  x, y = vec
  fout = 3*((x-2)**2) +(y-1)**2
  return fout

def grad_f(vec):
  x, y = vec
  dfdx = 3*((2*x)-4)
  dfdy = 2*y-2
  return np.array([dfdx,dfdy])
```

Svolgo il •

```
x = np.linspace(-1.5, 3.5)
y = np.linspace(-1, 5, 100)

X, Y = np.meshgrid(x, y)
vec = np.array([X,Y])
Z=f(vec)

fig = plt.figure(figsize=(15, 8))

ax = plt.axes(projection='3d')
ax.set_title('$f(x)=(x-1)^2 + (y-2)^2$')
ax.view_init(elev=50., azim=30)
s = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')
fig.colorbar(s)
plt.show()
```

Output:



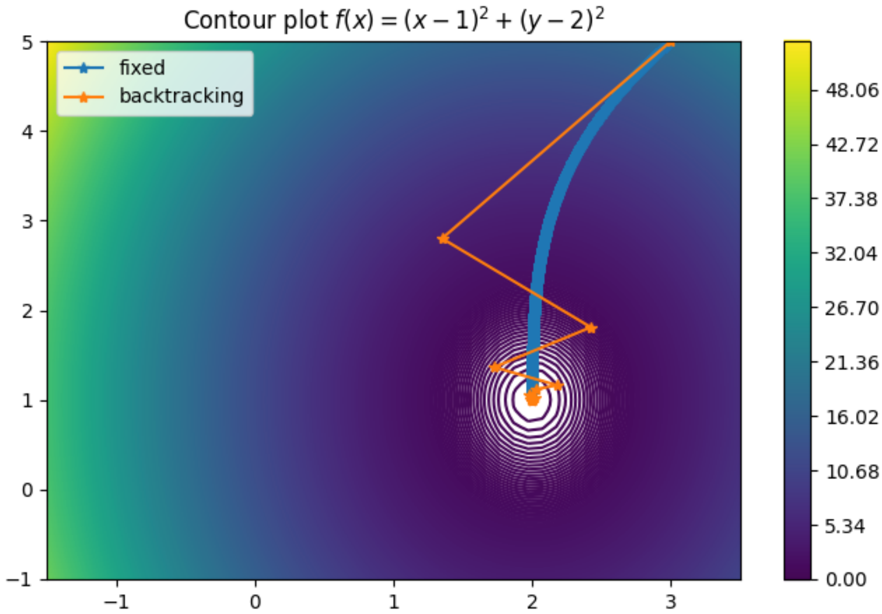
• Plottare le curve di livello di f(x,y) con il comando contour nello stesso dominio.

```
fig = plt.figure(figsize=(8, 5))
contours = plt.contour(X, Y, Z, levels=1000)
plt.title('Contour plot $f(x)=(x-1)^2 + (y-2)^2$')
fig.colorbar(contours)
```

• Determinare il punto di minimo di f (x, y) utilizzando la funzione precedentemente scritta (sia con passo fisso che con passo variabile) usando come punto iniziale (3, 5).

```
step = 0.002
maxitS=1000
tol=1.e-5
x0 = np.array([3, 5])
xTrue = np.array([2, 1]) #soluzione esatta della funzione
(x_last,norm_grad_listf, function_eval_listf, error_listf, xlist, k)= minimize(f,grad_f,x0,step,maxitS,tol,xTrue,fixed=True)
plt.plot(xlist[0, :k], xlist[1, :k], '*-')
(x_last,norm_grad_list, function_eval_list, error_list, xlist, k) = minimize(f,grad_f,x0,step,maxitS,tol,xTrue,fixed=False)
plt.plot(xlist[0, :k], xlist[1, :k],'*-')
plt.legend(['fixed', 'backtracking'])
plt.show()
```

Output:



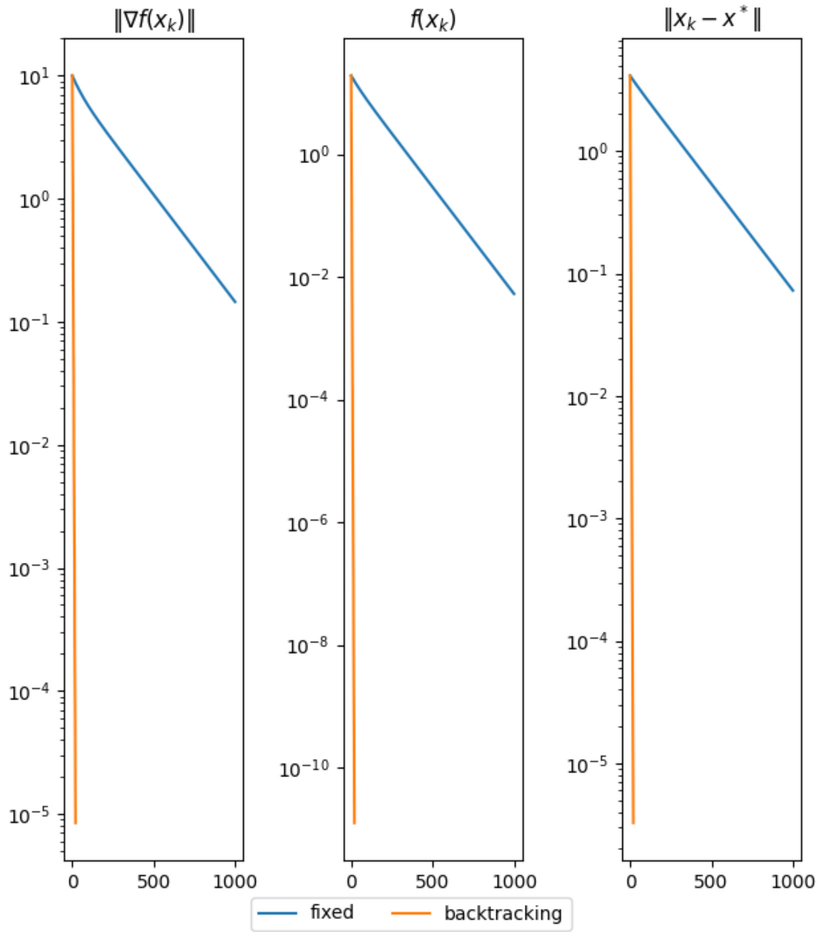
• Si analizzino i risultati in entrambi i casi.

```
fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3)
ax1.semilogy(norm_grad_listf)
ax1.semilogy(norm_grad_list)
ax1.set_title('$\|\\nabla f(x_k)\|$')
ax2.semilogy(function_eval_listf)
ax2.semilogy(function_eval_list)
ax2.set_title('$f(x_k)$')
ax3.semilogy(error_listf)
ax3.semilogy(error_list)
ax3.set_title('$\|x_k-x^*\|$')
fig.tight_layout()
fig.legend(['fixed', 'backtracking'], loc='lower center', ncol=4)
plt.show()
```

Output:

iterations= 1000
last guess: x=(2.000006,1.072677)

alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.1375
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.1375
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.1375
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.275
alpha= 0.1375
alpha= 0.275
iterations= 20
last guess: x=(2.000001,1.000003)



Exercise 1.3. Si consideri la seguente funzione detta funzione di Rosenbrock:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

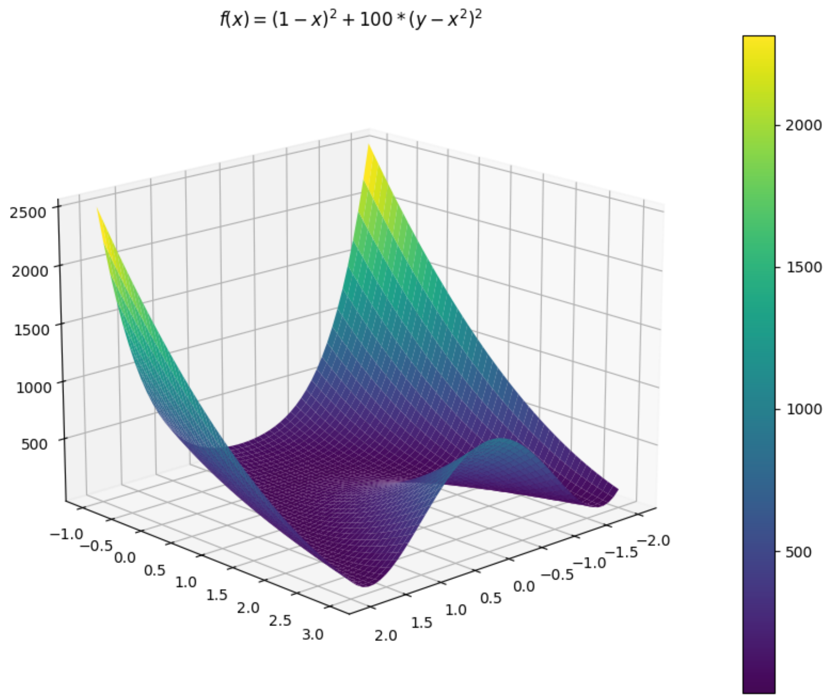
che ha un minimo globale in $(1, 1)$ dove $f(1, 1) = 0$. Si eseguano le richieste dell'esercizio precedente nel dominio $[-2, 2] \times [-1, 3]$, usando come punto iniziale $(-0.5, 1)$.

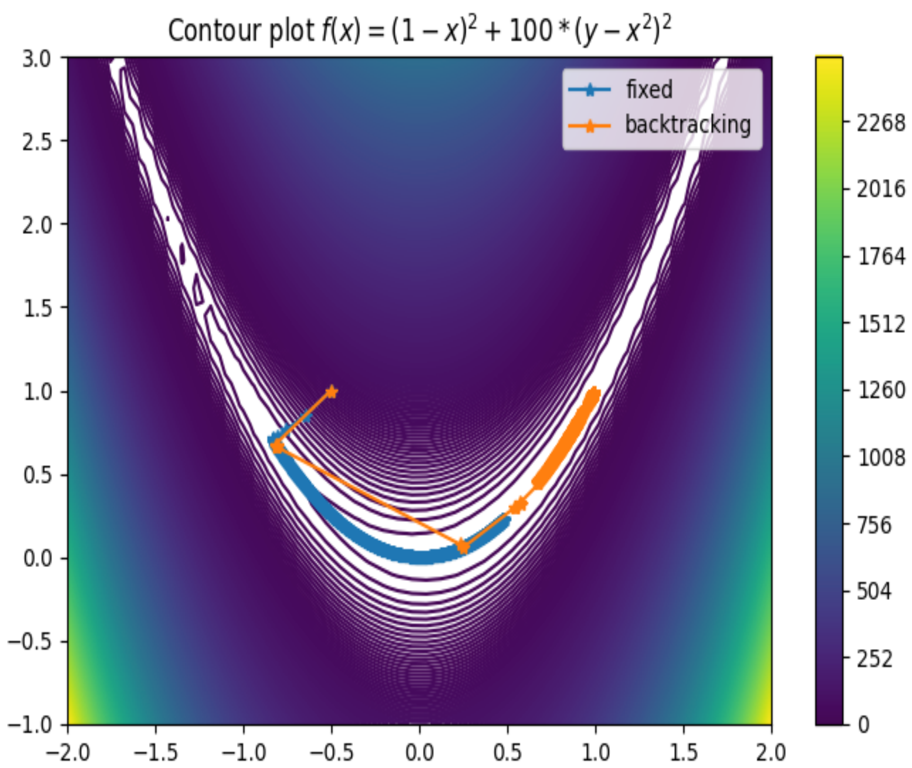
Suggerimento per l'analisi dei risultati: confrontare l'accuratezza e il numero di iterazioni dei metodi al variare del punto iniziale,dei parametri per i criteri di arresto, dei valori α quando il passo è costante e nel caso del passo variabile. Spiegare il comportamento dei metodi nei diversi casi

```
def f(vec):
   x, y = vec
   fout = 100*((y - x**2)**2) + ((1 - x)**2)
   return fout

def grad_f(vec):
   x, y = vec
   dfdx = 100*(4*(x**3)- 4*x*y) + 2*x - 2
   dfdy = 100*(2*y- 2*(x**2))
   return np.array([dfdx,dfdy])

x = np.linspace(-2, 2)
y = np.linspace(-1, 3)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

vec = np.array([X,Y])
Z=f(vec)
fig = plt.figure(figsize=(15, 8))
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.set_title('$f(x)=(1-x)^2+100*(y-x^2)^2$')
ax.view_init(elev=50., azim=30)
s = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')
fig.colorbar(s)
plt.show()

fig = plt.figure(figsize=(8, 5))
contours = plt.contour(X, Y, Z, levels=1000)
plt.title('Contour plot $f(x)=(1-x)^2+100*(y-x^2)^2$')
fig.colorbar(contours)

step = 0.001
maxitS=1000
tol=1.e-5
x0 = np.array([-0.5, 1])
xTrue = np.array([1,1])

(x_last,norm_grad_listf, function_eval_listf, error_listf, xlist, k)= minimize(f,grad_f,x0,step,maxitS,tol,xTrue,fixed=True)
plt.plot(xlist[0, :k], xlist[1, :k],'*-')

(x_last,norm_grad_list, function_eval_list, error_list, xlist, k)= minimize(f,grad_f,x0,step,maxitS,tol,xTrue,fixed=False)
plt.plot(xlist[0, :k], xlist[1, :k],'*-')
plt.legend(['fixed', 'backtracking'])
plt.show()
```

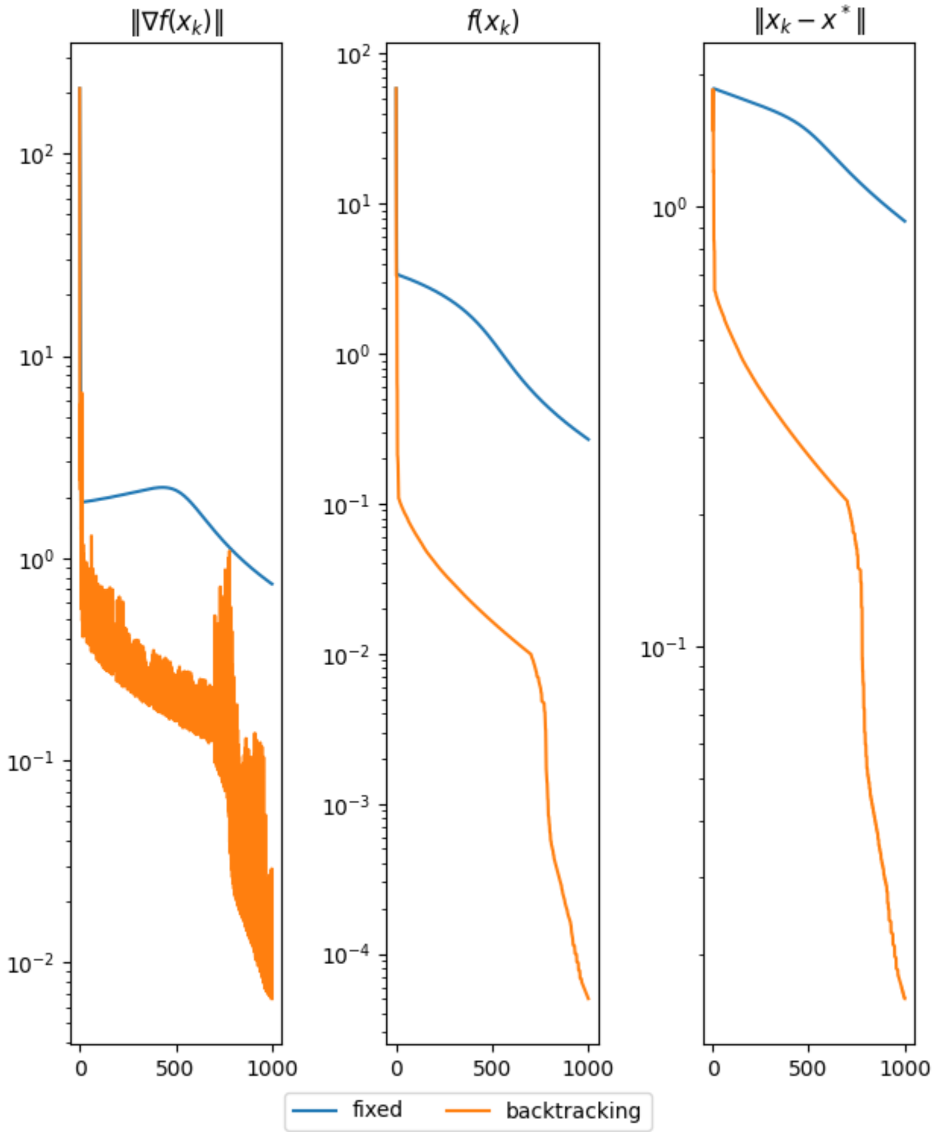
```
fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3)
ax1.semilogy(norm_grad_listf)
ax1.semilogy(norm_grad_list)
ax1.set_title('$\|\\nabla f(x_k)\|$')
ax2.semilogy(function_eval_listf)
ax2.semilogy(function_eval_list)
ax2.set_title('$f(x_k)$')
ax3.semilogy(error_listf)
ax3.semilogy(error_list)
ax3.set_title('$\|x_k-x^*\|$')

fig.legend(['fixed', 'backtracking'], loc='lower
center', ncol=4)

fig.tight_layout()
plt.show()
```

Output:





iterations= 1000
last guess: x=(0.482604,0.230313)
...
alpha= 0.0171875
alpha= 0.00107421875
alpha= 0.0171875
alpha= 0.00107421875
alpha= 0.0171875
alpha= 0.00107421875
alpha= 0.0171875
alpha= 0.00107421875
iterations= 1000
last guess: x=(0.992916,0.985849)



$\|\nabla f(x_k)\|$
$f(x_k)$
$\|x_k - x^*\|$
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0
500
1000
fixed
backtracking