

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τηλεπικοινωνιών



Παλάσκος Αχιλλέας (8493)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μετάδοση Η/Μ κύματος στο υλικό διασποράς RAICU με τη
χρήση της μεθόδου FDTD

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Ρέκανος

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2021

© Παλάσκος Αχιλλέας

© Α.Π.Θ.

Μετάδοση Η/Μ κύματος στο υλικό διασποράς RAICU με τη χρήση της μεθόδου FDTD

«Η έγκριση της παρούσης διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέως»

(Ν. 5343/1932, άρθρο 202, παρ. 2)

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια, η μελέτη των υλικών διασποράς, στα πλαίσια της έρευνας των H/M υλικών, έχει αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω των ποικίλων εφαρμογών τους στους τομείς της Ιατρικής και της Βιοιατρικής, καθώς τα υλικά αυτά αποτελούν ακριβή αναπαράσταση των ιστών του ανθρώπινου σώματος. Η έρευνα στον τομέα αυτό έχει αποδείξει ότι το απλούστερο μοντέλο Debye δεν δίνει ικανοποιητική προσέγγιση των βιολογικών ιστών του ανθρώπου. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν κυρίως τα μοντέλα Cole-Cole και Davidson-Cole, τα οποία δίνουν ακριβή προσέγγιση σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων, ενώ παρατηρήθηκε ότι το μοντέλο Havriliak-Negami, που αποτελεί συνδυασμό των δύο προηγούμενων, παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία στην μοντελοποίηση. Ωστόσο, το 1999 προτάθηκε από τον βιοφυσικό Valerică Raicu το μοντέλο Raicu, το οποίο αποτελεί τη γενικότερη μορφή των προαναφερθέντων μοντέλων. Αν και έχει μελετηθεί σε μικρότερο βαθμό στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, είναι πιο ευέλικτο, διότι πειραματικά δεδομένα αποδεικνύουν ότι «συμφωνεί» με τις περισσότερες παρατηρούμενες καμπύλες. Η παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζει το μονοδιάστατο πρόβλημα της μετάδοσης του H/M κύματος στο υλικό αυτό. Το παραπάνω εγχείρημα παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες, καθώς οι μη ακέραιες δυνάμεις του όρου $j\omega$ που εμφανίζονται στη μιγαδική έκφραση της σχετικής διαπερατότητας στο πεδίο της συχνότητας οδηγούν σε ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις μη ακέραιας τάξης στο πεδίο του χρόνου, οι οποίες περιπλέκουν την ανάλυση. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού εφαρμόζεται μια καινοτόμος τεχνική που προτάθηκε πρόσφατα και συνδυάζει τις μεθόδους Fast Inverse Laplace Transform (FILT) και Prony. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται αρχικά η μέθοδος FILT για τον υπολογισμό της χρονικής απόκρισης του υλικού διασποράς Raicu, η οποία στη συνέχεια προσεγγίζεται με άθροισμα αποσβενύμενων εκθετικών βάσει της μεθόδου Prony. Έπειτα, οι παράμετροι του παραπάνω αναπτύγματος ενσωματώνονται και τροποποιούν κατάλληλα τις εξισώσεις του Maxwell, ενώ η μονοδιάστατη μετάδοση του H/M κύματος υλοποιείται με τη μέθοδο Finite Discrete Time Domain (FDTD). Η σύγκριση του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης που υπολογίζεται βάσει του FDTD με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή του αποτελεί το κριτήριο ορθότητας των αποτελεσμάτων.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία σηματοδοτεί την ολοκλήρωση των σπουδών μου στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Α.Π.Θ. . Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Ιωάννη Ρέκανο όχι μόνο για την επιλογή ενός θέματος απόλυτα συνυφασμένου με τα ενδιαφέροντά μου, αλλά επίσης για την μεθοδευμένη καθοδήγησή του και τις πολύ εύστοχες επισημάνσεις του σε καίρια σημεία της εκπόνησής της. Επιπλέον, οφείλω να ευχαριστήσω τον αδερφό μου Μάριο Παλάσκο για την πολύτιμη βοήθειά του ώστε να γραφεί η παρούσα εργασία στο πρόγραμμα L^AT_EX. Ωστόσο, η αμέριστη συμπαράσταση της οικογένειάς μου αποτέλεσε το σημαντικότερο εφόδιο μου καθ' όλη τη διάρκεια της διαδρομής αυτής, την οποία η παρουσία των φίλων μου κατέστησε ιδιαίτερα καρποφόρα.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Ευχαριστίες	ii
Περιεχόμενα	iii
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Διηλεκτρικά Υλικά Διασποράς	1
1.2 Το μοντέλο RAICU	3
1.3 Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου RAICU	6
1.3.1 Το μοντέλο Debye	6
1.3.2 Το μοντέλο Cole-Cole(C-C)	8
1.3.3 Το μοντέλο Davidson-Cole(D-C)	9
1.3.4 Το μοντέλο Havriliak-Negami(H-N)	11
1.4 «Ειδικές» δυσκολίες των μοντέλων	12
1.5 Μια διαφορετική προσέγγιση	15
2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟ- ΝΤΕΛΟ RAICU	16
2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ Α: Εύρεση αναλυτικής λύσης	16
2.1.1 1η απόδειξη: μέσω του πεδίου του χρόνου	16
2.1.2 2η απόδειξη: μέσω του πεδίου της συχνότητας	18
2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ Β: Η μέθοδος FILT (F ast I nverse L aplace T ransform)	21
2.2.1 1ο βήμα : Προσέγγιση του ολοκληρώματος Bromwich	22
2.2.2 2ο βήμα : Χρήση του μετασχηματισμού Euler	26
2.2.3 Τελικό αποτέλεσμα του FILT και Διαγράμματα	32
2.3 Σύγκριση των μεθόδων Α και Β	35
3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ	38
3.1 Η μέθοδος Prony	39
3.2 Αποτελέσματα - Διαγράμματα	44

4	ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FDTD	46
4.1	Διακριτοποίηση των εξισώσεων του Maxwell	46
4.2	Μονοδιάστατο πρόβλημα (1D-problem)	50
4.3	Ανάλυση ευστάθειας και επιλογή των Δt και Δz	51
4.4	Συνάρτηση προσπίπτοντος κύματος	55
4.5	Τελικός Αλγόριθμος FDTD	56
4.6	Συντελεστής Ανάκλασης (Γ) και Διαγράμματα	58
	Βιβλιογραφία	62

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Διηλεκτρικά Υλικά Διασποράς

Υλικά διασποράς ονομάζονται τα υλικά εκείνα, των οποίων η σχετική διηλεκτρική διαπερατότητα δεν είναι σταθερή, αλλά συνάρτηση της συχνότητας. Η μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και η προσομοίωση της μετάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού (H/M) κύματος στα συγκεκριμένα υλικά έχει προσελκύσει, τις τελευταίες δεκαετίες, ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι πολλά υλικά, όπως τα μέταλλα, οι υγροί κρύσταλλοι, τα υγρά διηλεκτρικά και οι βιολογικοί ιστοί παρουσιάζουν διηλεκτρικές ιδιότητες που εξαρτώνται από τη συχνότητα. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (FDTD) έχει αποδειχθεί, ότι αποτελεί αξιόπιστη και ακριβή μέθοδο για την προσομοίωση της μετάδοσης H/M κύματος στα υλικά αυτά.

Στα σχήματα FDTD που εφαρμόζονται στα υλικά διασποράς, οι διακριτοποιημένες εξισώσεις στροφής του Maxwell συνοδεύονται από τη διακριτοποιημένη, στο πεδίο του χρόνου, σχέση πόλωσης, η οποία συνδέει το πεδίο πόλωσης με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Η σχέση πόλωσης μπορεί να εκφραστεί είτε με τη μορφή του συνελικτικού ολοκληρώματος (convolution integral) του ηλεκτρικού πεδίου με τη χρονική απόκριση της διαπερατότητας του υλικού είτε με τη μορφή μιας βοηθητικής διαφορικής εξίσωσης (auxiliary differential equation - ADE). Δεδομένης της μιγαδικής μορφής της σχετικής διαπερατότητας, υπάρχουν 2 βασικοί τρόποι για την εξαγωγή της σχέσης ενημέρωσης του πεδίου πόλωσης. Η πρώτη βασίζεται στη διακριτοποίηση στο πεδίο του χρόνου του συνελικτικού ολοκληρώματος, ενώ στη δεύτερη η ADE διακριτοποιείται με τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, σκοπός είναι η δημιουργία αναδρομικών σχέσεων για την ενημέρωση τόσο του πεδίου πόλωσης όσο και του ηλεκτρικού πεδίου.

Στην περίπτωση που η μιγαδική μορφή της σχετικής διαπερατότητας είναι συνάρτηση α-κέραιων δυνάμεων του $j\omega$ (όπου ω : η γωνιακή συχνότητα), όπως συμβαίνει με τα μοντέλα των υλικών Drude, Debye και Lorentz, η χρονική απόκριση της διαπερατότητας μπορεί εύκολα να βρεθεί και να χρησιμοποιηθεί στο παραπάνω συνελικτικό ολοκλήρωμα με σκοπό

τη δημιουργία αναδρομικής σχέσης για το πεδίο πόλωσης. Επιπλέον στην περίπτωση αυτή, η χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier (Inverse Fourier Transform - IFT) στη σχέση πόλωσης καταλήγει στη δημιουργία της βοηθητικής διαφορικής εξίσωσης (ADE), η οποία περιλαμβάνει μόνο παραγώγους ακέραιας τάξης και συνεπώς είναι εύκολη η εφαρμογή των πεπερασμένων διαφορών για την εξαγωγή αναδρομικής σχέσης στην ενημέρωση του πεδίου πόλωσης.

Ωστόσο, πειράματα που έγιναν στα μοντέλα Drude, Debye και Lorentz έδειξαν ότι τα παραπάνω μοντέλα δεν καταφέρνουν να περιγράψουν ικανοποιητικά την εξάρτηση στη συχνότητα της διαπερατότητας αρκετών υλικών όπως οι βιολογικοί ιστοί, τα πολυμερή, τα υγρά διηλεκτρικά και οι διόλες. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση της γενικής σχέσης του Jonscher, η οποία, όπως παρατήρησε ο ίδιος, αποτελεί το γενικό μοτίβο που θα πρέπει να ακολουθεί η διασπορά διαφόρων υλικών, κυρίως στερεών.

Από όλα τα παραπάνω υλικά, οι βιολογικοί ιστοί, οι οποίοι παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην παρούσα διπλωματική εργασία και η ανάλυση των οποίων έχει βρει πλήθος εφαρμογών στην ιατρική έρευνα, αποτελούν ιδιαίτερα σύνθετα υλικά και παρουσιάζουν μεγάλη διασπορά ιδιαίτερα στις μικροκυματικές συχνότητες. Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα στην περίπτωση που είναι επιθυμητή η εξαγωγή αποτελεσμάτων σε ένα πολύ μικρό εύρος συχνοτήτων. Παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών (narrow frequency band applications) αποτελούν η πρόβλεψη του ειδικού ρυθμού απορρόφησης (specific absorption rate - SAR) στο εσωτερικό του εγκεφάλου για την εξέταση της έκθεσης στην ακτινοβολία των κινητών τηλεφώνων και η ανάλυση των βιο-ιατρικών κεραιών (biomedical antennas) που χρησιμοποιούνται στις εμφυτευμένες συσκευές.

Ωστόσο, υπάρχουν και ευρυζωνικές εφαρμογές (broadband applications), όπου η διασπορά που παρουσιάζουν οι ιστοί θα πρέπει να ληφθεί υπόψη. Η μικροκυματική ραδιομετρία (microwave radiometry), που αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της συγκεκριμένης κατηγορίας, χρησιμοποιείται σε εφαρμογές, όπως η παρακολούθηση της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της υποθερμικής θεραπείας (hypothermia treatment) του καρκίνου. Επίσης, ένα ακόμη σημαντικό παράδειγμα ευρυζωνικής εφαρμογής είναι η διερεύνηση της αλληλεπίδρασης υπερ-ευρυζωνικών (ultra-wideband , UWB) παλμών με βιολογικά υλικά, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της εξέτασης του καρκίνου του μαστού, λόγω της σημαντικής διαφοράς στις διηλεκτρικές ιδιότητες που παρουσιάζουν οι φυσιολογικοί και οι κακοήθεις ιστοί. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάλυση των βιολογικών υλικών και η εφαρμογή των H/M κυμάτων έχει αποκτήσει μεγάλο ενδιαφέρον ιδιαίτερα στην περίπτωση των μη-επεμβατικών μεθόδων διάγνωσης, λόγω της χαμηλής απαιτούμενης ισχύος και της μη ιονίζουσας ακτινοβολίας τους, σε αντίθεση με την περίπτωση των ακτίνων-X, οι οποίες είναι πολύ πιθανόν να έχουν ιονίζουσες επιδράσεις και να εγχυμονούν κινδύνους.

Είναι σημαντική, λοιπόν, η ακριβής αναπαράσταση των διηλεκτρικών ιδιοτήτων των βιολογικών αυτών υλικών. Για τον λόγο αυτό έχουν προταθεί διάφορες εμπειρικές σχέσεις για την πιο ακριβή περιγραφή της σχετικής διαπερατότητάς τους. Οι πιο γνωστές είναι η

Cole-Cole (C-C), Davidson-Cole (D-C) και Havriliak-Negami (H-N). Ωστόσο, το μοντέλο Raicu αποτελεί την γενικότερη και πιο ευέλικτη επιλογή.

Το κοινό χαρακτηριστικό των τεσσάρων αυτών μοντέλων είναι η ύπαρξη ΜΗ-ακέραιων δυνάμεων του όρου $j\omega$ στη μιγαδική έκφραση της σχετικής διαπερατότητάς τους. Συνεπώς, στην προσπάθεια εξαγωγής της αντίστοιχης χρονικής απόκρισης υπάρχουν δυσκολίες, διότι η σχέση πόλωσης στο πεδίο του χρόνου αποτελεί, ουσιαστικά, μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση μη ακέραιας τάξης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του βαθμού πολυπλοκότητας της μεθόδου FDTD.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά τα παραπάνω προβλήματα και θα δούμε με ποιον τρόπο μπορούμε να τα αποφύγουμε με σκοπό τη διευκόλυνση της ανάλυσης.

1.2 Το μοντέλο RAICU

Το συγκεκριμένο μοντέλο προτάθηκε τον Οκτώβριο του 1999 από τον βιοφυσικό Valerică Raicu, όταν διετέλεσε ερευνητής του τμήματος Φυσιολογίας της Ιατρικής σχολής του Kochi, στην Ιαπωνία. Το μοντέλο RAICU αποτελεί το γενικότερο μοντέλο της κατηγορίας των διηλεκτρικών υλικών διασποράς, στην οποία ανήκουν τα: Debye, Cole-Cole, Davidson-Cole και το Havriliak-Negami, καθώς τα παραπάνω αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του. Επιπλέον, αποτελεί και το πιο ευέλικτο μοντέλο, όπως αποδεικνύουν τα πειραματικά δεδομένα, διότι «συμφωνεί» με τις περισσότερες παρατηρούμενες καμπύλες.

Ο τύπος του μοντέλου RAICU είναι:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{\left((j\omega\tau_R)^{\alpha} + (j\omega\tau_R)^{\gamma}\right)^{\beta}} \quad (1.1)$$

όπου:

- $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$
- $\Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}$
- $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon_{\infty}$ για $\omega \rightarrow \infty$
- $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon_s$ για $\omega \rightarrow 0$

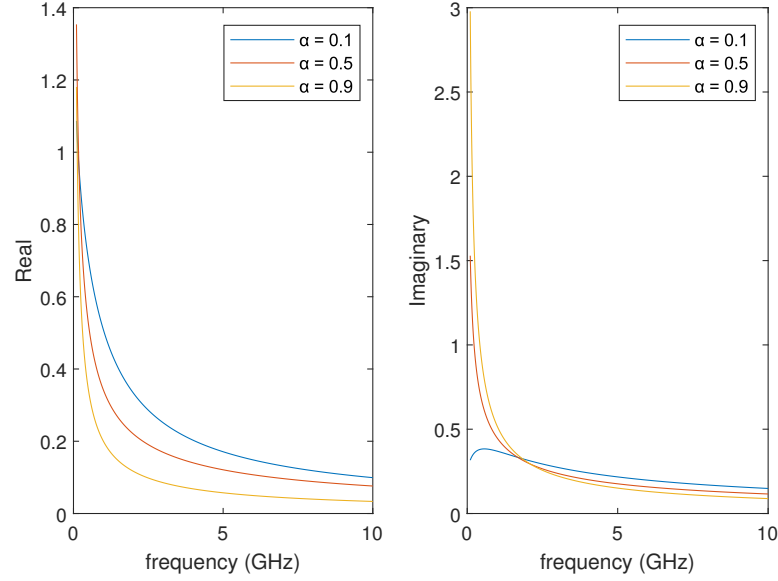
Από την (1.1) είναι φανερό ότι η $\varepsilon(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση. Θεωρώντας ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $\varepsilon_{real}(\omega)$ και $\varepsilon_{imag}(\omega)$ αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $\varepsilon(\omega)$ αντίστοιχα, τότε η (1.1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{real}(\omega) - j\varepsilon_{imag}(\omega) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty}{\Delta\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{real}(\omega) - \varepsilon_\infty}{\Delta\varepsilon} - j \frac{\varepsilon_{imag}(\omega)}{\Delta\varepsilon} = \frac{1}{\left((j\omega\tau_R)^\alpha + (j\omega\tau_R)^\gamma\right)^\beta} \quad (1.2)$$

Η γραφική αναπαράσταση του πραγματικού και φανταστικού μέρους, που περιγράφονται από την εξίσωση (1.2), απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

RAICU model: Real and Imaginary parts



Σχήμα 1.1: Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μοντέλου Raicu($\beta = 0.9, \gamma = 0.8$) στο εύρος συχνοτήτων 0.1 – 10 GHz, για $\tau_R = 153$ ps.

Στο σχήμα (1.1) παρουσιάζεται μόνο η επιρροή του παράγοντα α , διότι ο τρόπος που επηρεάζουν τη συνάρτηση διαπερατότητας οι παράγοντες β και γ του μοντέλου θα μελετηθεί παρακάτω. Στο παραπάνω σχήμα, για $\alpha \rightarrow 0$ η συμπεριφορά του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μοντέλου Raicu τείνει να γίνει ίδια με εκείνη του Havriliak-Negami, για τις ίδιες τιμές των β και γ . Επίσης, είναι φανερό ότι, καθώς αυξάνεται η τιμή του α , οι καμπύλες του πραγματικού και φανταστικού μέρους «πέφτουν» πιο απότομα.

Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις τύπου non-Debye, στις οποίες ανήκει το μοντέλο Raicu, μπορούν να εκφραστούν ως υπέρθεση συναρτήσεων τύπου Debye, χωρίς ωστόσο αυτό να σημαίνει ότι υπάρχει αντίστοιχη μοριακή αναπαράσταση των non-Debye υλικών από ανεξάρτητα υλικά τύπου Debye, παρά μόνο σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Με άλλα λόγια αποδεικνύεται ότι το δεξί μέλος της παραπάνω τριμελούς ισότητας μπορεί να γραφεί σε ολοκληρωτική μορφή, σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty}{\Delta\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(\tau)}{1 + j\omega\tau} d\ln \tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(y)}{1 + j\omega\tau} d\ln y \quad (1.3)$$

με $\tau = y\tau_*$, όπου τ_* η χαρακτηριστική τιμή χαλάρωσης του αντίστοιχου υλικού και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\tau) d \ln \tau = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) d \ln y = 1$$

Στην περίπτωση του μοντέλου Raicu η συνάρτηση $F(y)$ που ικανοποιεί την (1.3) είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{y^{(\alpha+\gamma)\frac{\beta}{2}}}{2^{\frac{\beta}{2}}\pi} \frac{|\sin(\beta\theta(y))|}{\left(\cosh((\gamma-\alpha)\ln y) + \cos(\pi(\gamma-\alpha))\right)^{\frac{\beta}{2}}} = \dots = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{y^{\beta(\alpha+\gamma)}|\sin(\beta\theta(y))|}{\left(y^{2\alpha} + 2y^{\alpha+\gamma}\cos(\pi(\gamma-\alpha)) + y^{2\gamma}\right)^{\frac{\beta}{2}}} \\ \theta(y) &= \arctan\left(\frac{y^\alpha\sin(\pi\gamma) + y^\gamma\sin(\pi\alpha)}{y^\alpha\cos(\pi\gamma) + y^\gamma\cos(\pi\alpha)}\right) \\ y &= \frac{\tau}{\tau_R} \end{aligned}$$

1.3 Ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου RAICU

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν τα μοντέλα Debye, Cole-Cole, Davidson-Cole και το Havriliak-Negami, τα οποία προκύπτουν από το μοντέλο RAICU για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων α, β και γ . Αφού αναφερθούν ορισμένες πληροφορίες για το εκάστοτε υλικό, θα παρουσιαστούν σε διαγράμματα το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνάρτησης διηλεκτρικού και θα απεικονιστούν σε πίνακα:

1. Η συνάρτηση διηλεκτρικού (Dielectric Function)
2. Το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος (Real and Imaginary part)
3. Η κατανομή χρόνου χαλάρωσης (Relaxation Time distribution)

1.3.1 Το μοντέλο Debye

Το μοντέλο Debye προκύπτει αν θέσουμε στην (1.1):

$$\alpha = 0 \text{ και } \beta = \gamma = 1$$

οπότε προκύπτει:

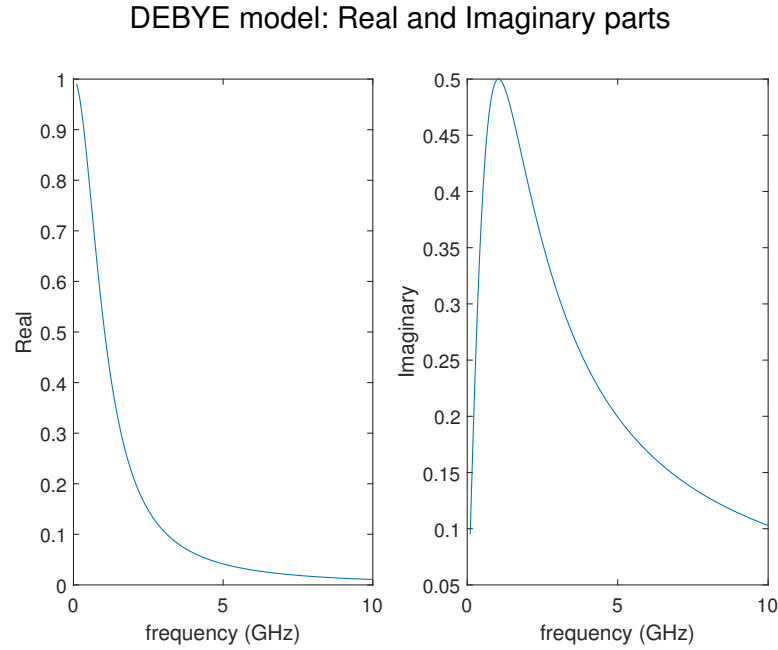
$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + j\omega\tau_D}$$

Το μοντέλο αυτό προσφέρει περιορισμένες δυνατότητες μοντελοποίησης υλικών, λόγω της απουσίας σχεδιαστικών παραμέτρων στον τύπο του, όπως φαίνεται από την τελευταία σχέση. Περιορίζεται κυρίως στη μοντελοποίηση ασθενών διαλυμάτων πολικών υγρών (polar liquids) σε μη-πολικούς διαλύτες (nonpolar solvents). Το νερό σε υγρή μορφή αποτελεί την καλύτερη περίπτωση υλικού τύπου Debye και παρουσιάζει ενδιαφέρον λόγω της απλής μοριακής του δομής.

Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά του μοντέλου αυτού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση Διηλεκτρικού	$\frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_{\infty}}{\Delta\varepsilon}$	$\frac{1}{1 + j\omega\tau_D}$
Πραγματικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{real}(\omega) - \varepsilon_{\infty}}{\Delta\varepsilon}$	$\frac{1}{1 + (\omega\tau_D)^2}$
Φανταστικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{imag}(\omega)}{\Delta\varepsilon}$	$\frac{\omega\tau_D}{1 + (\omega\tau_D)^2}$
Κατανομή Χρόνου Χαλάρωσης	$F(y)$	$\delta(y - 1) \quad y = \frac{\tau}{\tau_D}$

Η γραφική αναπαράσταση των αντίστοιχων σχέσεων του πραγματικού και φανταστικού μέρους του παραπάνω πίνακα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.2: Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μοντέλου Debye στο εύρος συχνοτήτων 0.1 – 10 GHz, για $\tau_D = 153$ ps.

Ωστόσο, λόγω της απλότητάς του, το μοντέλο Debye δεν χρησιμοποιείται συχνά. Συνήθως οι συναρτήσεις διαπερατότητας στο πεδίο της συχνότητας παρουσιάζουν μεγαλύτερη διεύρυνση σε σχέση με εκείνη που προβλέπει το συγκεκριμένο μοντέλο και η οποία φαίνεται στο σχήμα (1.2). Μάλιστα, οι περισσότερες συναρτήσεις διαπερατότητας είναι ασύμμετρες, το οποίο σημαίνει ότι η συμπεριφορά τους στις υψηλές συχνότητες είναι πιο έντονη σε σχέση με την αντίστοιχη στις χαμηλές συχνότητες, δηλαδή παρουσιάζουν μία «ουρά» στις υψηλές συχνότητες.

1.3.2 Το μοντέλο Cole-Cole(C-C)

Το μοντέλο C-C προκύπτει αν θέσουμε στην (1.1):

$$\alpha = 0 \text{ και } \beta = 1$$

οπότε προκύπτει:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + (j\omega\tau_{CC})^{\gamma}}$$

Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά του μοντέλου αυτού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

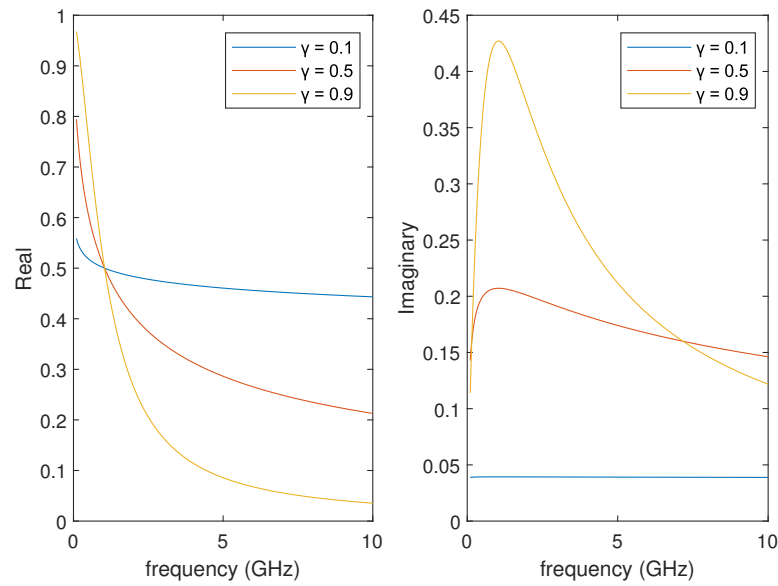
Συνάρτηση Διηλεκτρικού	$\frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty}{\Delta\varepsilon}$	$\frac{1}{1 + (j\omega\tau_{CC})^\gamma} \quad 0 < \gamma < 1$
Πραγματικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{real}(\omega) - \varepsilon_\infty}{\Delta\varepsilon}$	$(1 + \omega\tau_{CC})^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) r^{-1}(\omega)$
Φανταστικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{imag}(\omega)}{\Delta\varepsilon}$	$(\omega\tau_{CC})^\gamma \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) r^{-1}(\omega)$
Κατανομή Χρόνου Χαλάρωσης	$F(y)$	$\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi\gamma)}{y + 2\sin(\pi\gamma) + y^{-1}} \quad y = \frac{\tau}{\tau_D}$

όπου:

$$r(\omega) = 1 + 2(\omega\tau_{CC})^\gamma \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) + (\omega\tau_{CC})^{2\gamma}$$

Η γραφική αναπαράσταση των αντίστοιχων σχέσεων του πραγματικού και φανταστικού μέρους του παραπάνω πίνακα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

COLE-COLE model: Real and Imaginary parts



Σχήμα 1.3: Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μοντέλου Cole-Cole στο εύρος συχνοτήτων 0.1 – 10 GHz, για $\tau_{CC} = 153$ ps.

Το συγκεκριμένο μοντέλο, στο οποίο ο παράγοντας γ οδηγεί σε συμμετρική διεύρυνση της μιγαδικής διηλεκτρικής συνάρτησης, προσομοιώνει με μεγάλη ακρίβεια τη συμπεριφορά των βιολογικών ιστών σε ένα πολύ μεγάλο εύρος συχνοτήτων. Από το σχήμα (1.3) παρατηρούμε ότι:

1. Για $\gamma \rightarrow 1$, όπως είναι αναμενόμενο, η συμπεριφορά του πραγματικού και φανταστικού μέρους του μοντέλου C-C τείνει να ταυτιστεί με την αντίστοιχη του μοντέλου Debye, όπως φαίνεται από το σχήμα (1.2).

2. Καθώς μειώνεται η τιμή του γ , η συμπεριφορά τόσο του πραγματικού όσο και του φανταστικού μέρους γίνεται λιγότερο απότομη με αποτέλεσμα να «απλώνουν» περισσότερο. Με άλλα λόγια επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι η διαπερατότητα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι πιο διευρυμένη σε σύγκριση με εκείνη του μοντέλου Debye.

1.3.3 Το μοντέλο Davidson-Cole(D-C)

Το μοντέλο D-C προκύπτει αν θέσουμε στην (1.1):

$$\alpha = 0 \text{ και } \gamma = 1$$

οπότε προκύπτει

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{(1 + j\omega\tau_{DC})^{\beta}}$$

Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά του μοντέλου αυτού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση Διηλεκτρικού	$\frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_{\infty}}{\Delta\varepsilon}$	$\frac{1}{(1 + j\omega\tau_{DC})^{\beta}} \quad 0 < \beta < 1$
Πραγματικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{real}(\omega) - \varepsilon_{\infty}}{\Delta\varepsilon}$	$\cos(\Phi(\omega))^{\beta} \cos(\beta\Phi(\omega))$
Φανταστικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{imag}(\omega)}{\Delta\varepsilon}$	$\cos(\Phi(\omega))^{\beta} \sin(\beta\Phi(\omega))$
Κατανομή Χρόνου Χαλάρωσης	$F(y)$	$\begin{cases} \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \left(\frac{y}{1-y} \right)^{\beta}, & y \leq 1 \\ 0 & , y > 1 \end{cases}$

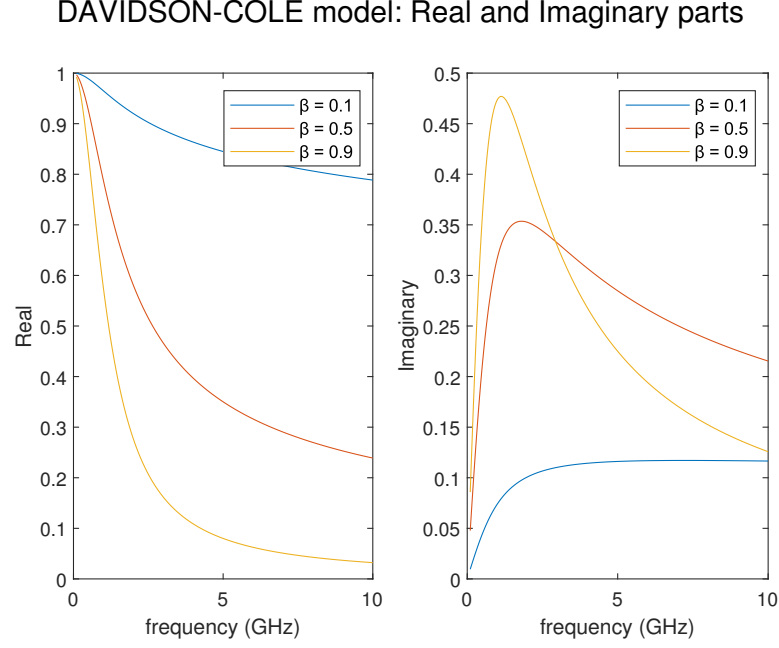
όπου:

$$y = \frac{\tau}{\tau_{DC}}$$

$$\tan \Phi = \omega\tau_{DC}$$

Ένα παράδειγμα υλικού που ανήκει στη συγκεκριμένη κατηγορία είναι η γλυκερόλη (σημείο βρασμού: 143-144 °C), ενώ με αυτόν τον τρόπο μοντελοποιούνται ικανοποιητικά και οι μίξεις νερού και εθανόλης σε διάφορες ποσοτικές αναλογίες των δύο υγρών, αν και το υλικό Debye μπορεί να εφαρμοστεί επίσης σε αυτήν την περίπτωση όταν δεν είναι απαραίτητη η επίτευξη υψηλής ακρίβειας στην προσέγγισή τους.

Η γραφική αναπαράσταση των αντίστοιχων σχέσεων του πραγματικού και φανταστικού μέρους του παραπάνω πίνακα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.4: Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μοντέλου Davidson-Cole στο εύρος συχνοτήτων 0.1 – 10 GHz, για $\tau_{DC} = 153$ ps.

Από το σχήμα (1.4) παρατηρούμε ότι:

1. Για $\beta \rightarrow 1$, όπως είναι αναμενόμενο, η συμπεριφορά του πραγματικού και φανταστικού μέρους του μοντέλου D-C τείνει να ταυτιστεί με την αντίστοιχη του μοντέλου Debye, όπως φαίνεται από το σχήμα (1.2).
2. Καθώς, όμως, μειώνεται η τιμή του β , η συμπεριφορά τόσο του πραγματικού όσο και του φανταστικού μέρους γίνεται λιγότερο απότομη με αποτέλεσμα να «απλώνει» περισσότερο. Με άλλα λόγια επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι η διασπορά στα υλικά D-C είναι πιο διευρυμένη από την αντίστοιχη των υλικών Debye και την ασύμμετρη αυτή διεύρυνση καθορίζει ο παράγοντας β του μοντέλου αυτού.

1.3.4 Το μοντέλο Havriliak-Negami(H-N)

Το μοντέλο H-N προκύπτει αν θέσουμε στην (1.1):

$$\alpha = 0$$

και προκύπτει:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{\left(1 + (j\omega\tau_{HN})^{\gamma}\right)^{\beta}}$$

Το H-N αποτελεί ουσιαστικά έναν συνδυασμό των δύο προηγούμενων μοντέλων C-C και D-C, όπου οι παράμετροι γ και β περιγράφουν την συμμετρική και την ασύμμετρη διεύρυνση

της παραπάνω μιγαδικής διηλεκτρικής συνάρτησης αντίστοιχα.

Χρησιμοποιείται συνήθως για την προσέγγιση της διηλεκτρικής συμπεριφοράς πιο πολύπλοκων μοριακών δομών, όπως είναι τα πολυμερή υλικά. Και αυτό διότι το συγκεκριμένο μοντέλο, λόγω της ύπαρξης 2 σχεδιαστικών παραμέτρων β, γ στον τύπο του, οι οποίες αποτελούν απλώς μαθηματικές βοηθητικές μεταβλητές χωρίς να έχουν κάποιο φυσικό νόημα, παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία καθώς προσφέρει καλύτερη παραμετροποίηση των αυθαίρετων ιδιοτήτων των υλικών διασποράς. Συνεπώς, τα πολυμερή, των οποίων η διασπορά είναι αρκετά διευρυμένη, προσεγγίζονται ικανοποιητικά με τη χρήση του μοντέλου αυτού.

Τα μαθηματικά χαρακτηριστικά του μοντέλου αυτού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση Διηλεκτρικού	$\frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_{\infty}}{\Delta\varepsilon}$	$\frac{1}{(1 + (j\omega\tau_{DC})^{\gamma})^{\beta}} \quad 0 < \beta, \gamma < 1$
Πραγματικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{real}(\omega) - \varepsilon_{\infty}}{\Delta\varepsilon}$	$r(\omega) \cos(\beta\Psi(\omega))$
Φανταστικό Μέρος	$\frac{\varepsilon_{imag}(\omega)}{\Delta\varepsilon}$	$r(\omega) \sin(\beta\Psi(\omega))$
Κατανομή Χρόνου Χαλάρωσης	$F(y)$	$\frac{1}{\pi} \frac{y^{\beta\gamma} \sin(\beta\theta(y)) }{(y^{2\gamma} + 2y^{\gamma} \cos(\pi\gamma) + 1)^{\frac{\beta}{2}}} \quad y = \frac{\tau}{\tau_{HN}}$

όπου:

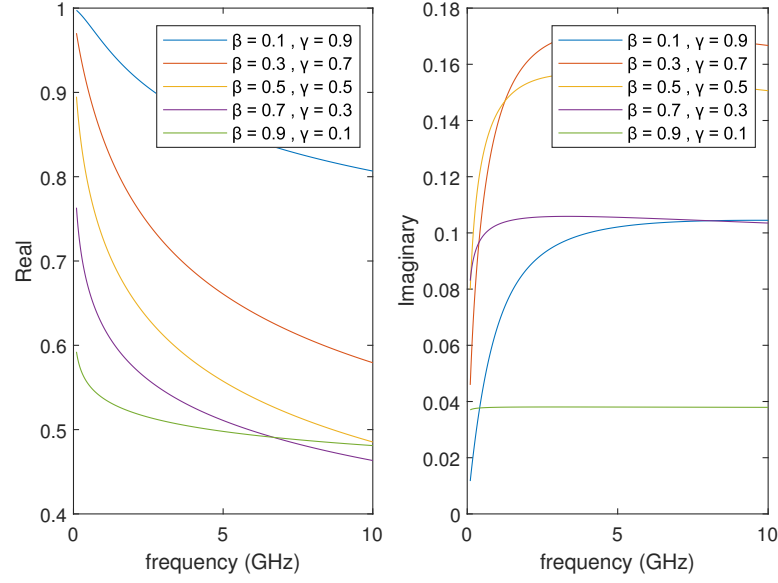
$$\theta(y) = \arctan\left(\frac{\sin(\pi\gamma)}{y^{\gamma} + \cos(\pi\gamma)}\right)$$

$$r(\omega) = \left(1 + 2(\omega\tau_{HN})^{\gamma} \cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) + (\omega\tau_{HN})^{2\gamma}\right)^{-\frac{\beta}{2}}$$

$$\Psi(\omega) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)}{(\omega\tau_{HN})^{-\gamma} + \cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)}\right)$$

Η γραφική αναπαράσταση των αντίστοιχων σχέσεων του πραγματικού και φανταστικού μέρους του παραπάνω πίνακα απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

HAVRILIAC-NEGAMI model: Real and Imaginary parts



Σχήμα 1.5: Πραγματικό και φανταστικό μέρος του μοντέλου H-N στο εύρος συχνοτήτων 0.1 – 10 GHz, για $\tau_{HN} = 153$ ps.

Από το σχήμα (1.5) παρατηρούμε ότι:

1. Για $\beta \leq 0.5$ και $\gamma \geq 0.5$, η μείωση της τιμής του β με ταυτόχρονη αύξηση του γ οδηγεί σε διεύρυνση του πραγματικού μέρους. Αντιθέτως για $\beta \geq 0.5$ και $\gamma \leq 0.5$, η αύξηση της τιμής του β με ταυτόχρονη μείωση του γ οδηγεί σε διεύρυνση του πραγματικού μέρους.
2. Η μείωση της τιμής του β με ταυτόχρονη αύξηση του γ οδηγεί σε πιο «απότομη» κλίση του φανταστικού μέρους. Ωστόσο, για $\beta \leq 0.3$ και $\gamma \geq 0.7$, η κλίση αυξάνεται.

1.4 «Ειδικές» δυσκολίες των μοντέλων

Ο λόγος που τα παραπάνω μοντέλα χρήζουν ειδικής μεταχείρισης είναι ότι εισάγουν ορισμένες μαθηματικές δυσκολίες. Για να φανούν πιο καθαρά οι δυσκολίες αυτές θα δωθούν 2 παραδείγματα.

1^ο παράδειγμα: μοντέλο Cole-Cole

Ας θεωρήσουμε το υλικό C-C του οποίου το διηλεκτρικό δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + (j\omega\tau)^{\gamma}} \quad (1.4)$$

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τον τρόπο με τον οποίο η (1.4) επηρεάζει τις εξισώσεις του

Maxwell, θεωρούμε τη γνωστή σχέση που συνδέει τη διηλεκτρική μετατόπιση $D(\cdot)$ με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $E(\cdot)$, η οποία φαίνεται παρακάτω:

$$D(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) E(\omega) \quad (1.5)$$

στην οποία για λόγω ευκολίας έχουμε θεωρήσει βαθμωτά μεγεθ D και E . Αντικαθιστώντας την (1.4) στην (1.5) προκύπτει:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E(\omega) + \frac{\varepsilon_0 \Delta \varepsilon}{1 + (j\omega\tau)^\gamma} E(\omega) \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E(\omega) + P(\omega) \end{aligned}$$

όπου:

$$P(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \Delta \varepsilon}{1 + (j\omega\tau)^\gamma} E(\omega) \quad (1.6)$$

το ρεύμα πόλωσης.

Η υιοθέτηση της επιπλέον μεταβλητής P είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση H/M προβλημάτων με τη χρήση της μεθόδου FDTD. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι επειδή από την σχέση (1.6) μπορούμε να δημιουργήσουμε μία βοηθητική χρονική διαφορική εξίσωση, όπως θα φανεί στην επόμενη σχέση.

Κάνοντας, λοιπόν, πράξεις στην (1.6) εύκολα προκύπτει ότι:

$$\tau^\gamma (j\omega)^\gamma P(\omega) + P(\omega) = \varepsilon_0 \Delta \varepsilon E(\omega) \quad (1.7)$$

Λαμβάνοντας τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Fourier στην (1.7) προκύπτει η παρακάτω χρονική διαφορική εξίσωση:

$$\tau^\gamma \frac{\partial^\gamma P(t)}{\partial t^\gamma} + P(t) = \varepsilon_0 \Delta \varepsilon E(t) \quad (1.8)$$

διότι από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathfrak{F}(D^\alpha f(t)) = \mathfrak{F}\left(\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha}\right) = (j\omega)^\alpha \mathfrak{F}(f(t)) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

όπου για την μερική παράγωγο $D^\alpha(\cdot) = \frac{\partial^\alpha(\cdot)}{\partial t^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του Letnikov, ο οποίος αποτελεί μια ειδική περίπτωση του γενικότερου ορισμού Riemann-Liouville, τότε η μερική παράγωγος μιας συνεχούς συνάρτησης $f(t)$ θα δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$D^\alpha f(t) = \frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} \triangleq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-u)^{-\alpha} f(u) du \quad (1.10)$$

$$\triangleq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t u^{-\alpha} f(t-u) du \quad (1.11)$$

όπου α η τάξη διαφορίσης, με:

$$\alpha \in (-\infty, 1) \quad (1.12)$$

και $\Gamma(\cdot)$ η συνάρτηση Γάμμα.

Από την (1.11), η οποία είναι ουσιαστικά η πρώτη παράγωγος της συνέλιξης: $f(t) * g(t)$, με $g(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$, είναι φανερό ότι η μερική παράγωγος τάξης α ΔΕΝ εξαρτάται από την συμπεριφορά της $f(t)$ ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟ στην περιοχή του t αλλά από την συμπεριφορά της $f(t)$ σε ΟΛΟΚΛΗΡΟ το διάστημα $[0, t]$. Με άλλα λόγια, η μερική παράγωγος $D^\alpha(\cdot) = \frac{\partial^\alpha(\cdot)}{\partial t^\alpha}$ $\alpha \notin \mathbb{N}$ αποτελεί έναν ΜΗ-ΤΟΠΙΚΟ τελεστή, σε αντίθεση με την μερική παράγωγο ακέραιας τάξης.

Η παραπάνω ιδιότητα της μερικής παραγώγου μη-ακέραιας τάξης μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα μνήμης κατά την επίλυση Η/Μ προβλημάτων με τη μέθοδο FDTD, διότι στην περίπτωση της μη σωστής διαχείρισης του συγκεκριμένου τελεστή θα είναι απαραίτητη η αποθήκευση όλων των τιμών της εκάστοτε συνάρτησης $f(t)$, που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι η $P(t)$. Συνεπώς θα πρέπει να βρεθεί κάποιος τρόπος, ώστε αφού γίνει διακριτοποίηση στις σχέσεις (1.10) και (1.11), μία από τις δύο να γραφεί αναδρομικά, το οποίο δυσκολεύει περαιτέρω την ανάλυση.

2ο παράδειγμα: μοντέλο Havriliak-Negami

Στην περίπτωση του μοντέλου H-N τα πράγματα γίνονται ακόμη πιο δύσκολα. Το διηλεκτρικό του υλικού αυτού δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon}{\left(1 + (j\omega\tau_{HN})^\gamma\right)^\beta} \quad (1.13)$$

Η (1.5) λόγω της (1.13) γίνεται:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E(\omega) + \frac{\varepsilon_0 \Delta\varepsilon}{\left(1 + (j\omega\tau_{HN})^\gamma\right)^\beta} E(\omega) \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E(\omega) + P(\omega) \end{aligned}$$

όπου:

$$P(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \Delta\varepsilon}{\left(1 + (j\omega\tau_{HN})^\gamma\right)^\beta} E(\omega) \quad (1.14)$$

το ρεύμα πόλωσης. Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα και τον Αντίτροφο Μετασχηματισμό Fourier στην (1.14) προκύπτει:

$$\left(1 + \tau^\gamma D_t^\gamma\right)^\beta P(t) = D_t^{b,c} P(t) = \varepsilon_0 \Delta\varepsilon E(t) \quad (1.15)$$

όπου D_t^γ η μερική παράγωγος τάξης γ που δίνεται από την (1.10) και

$$D_t^{b,c} = \left(1 + \tau^\gamma D_t^\gamma\right)^\beta \quad (1.16)$$

Κάνοντας χρήση του γενικευμένου θεωρήματος Riemann-Liouville που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$D^k f(t) = \frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k} \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu - k)} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \int_0^t (t - u)^{\nu - k - 1} f(u) du \quad \nu - 1 \leq k \leq \nu$$

αποδεικνύεται ότι η (1.15) γράφεται:

$$D_t^{b,c} P(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^\infty u^{-\beta - 1} e^{-u(1 + \tau^\gamma D_t^\gamma)} P(u) du = \varepsilon_0 \Delta \varepsilon E(t) \quad (1.17)$$

Είναι φανερό ότι ο υπολογισμός της τελευταίας σχέσης αναδρομικά περιπλέκει την ανάλυση πολύ περισσότερο.

1.5 Μια διαφορετική προσέγγιση ...

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, προκειμένου να αποφευχθεί η χρήση των «κλασματικών παραγώγων» (fractional derivatives) που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα και οι οποίες αυξάνουν σημαντικά το βαθμό πολυπλοκότητας της ανάλυσης, θα χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι FILT και Prony. Συγκεκριμένα, για να μοντελοποιήσουμε τη μετάδοση του H/M κύματος, με βάση των εξισώσεις του Maxwell, στο υλικό διασποράς Raicu θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω 3 βήματα:

1. Στο πρώτο βήμα θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο FILT για να υπολογίσουμε τη χρονική απόκριση του υλικού διασποράς Raicu. Επιπλέον, στο βήμα αυτό θα υπολογίσουμε και την αναλυτική λύση της χρονικής αυτής απόκρισης και θα δικαιολογήσουμε τον λόγο για τον οποίο η πρώτη μέθοδος είναι συμφερότερη.
2. Στο δεύτερο βήμα θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Prony προκειμένου να προσεγγιστεί η απόκριση του πρώτου βήματος με ένα πεπερασμένο άθροισμα αποσβενύμενων εκθετικών.
3. Τέλος, στο τρίτο βήμα, θα τροποποιηθούν οι εξισώσεις του Maxwell, ώστε να ενσωματωθούν σε αυτές οι παράμετροι του αναπτύγματος Prony του δεύτερου βήματος και να μοντελοποιηθεί η μετάδοση του H/M κύματος στο υλικό Raicu με τη μέθοδο FDTD. Η σύγκριση του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης που υπολογίζεται βάσει του FDTD με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή του θα αποτελέσει το κριτήριο ορθότητας των αποτελεσμάτων.

Κεφάλαιο 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ RAICU

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί την υλοποίηση του πρώτου βήματος της συνολικής διαδικασίας και στόχος του είναι ο υπολογισμός της χρονικής απόκρισης του μοντέλου RAICU. Υπάρχουν 2 τρόποι για να το πετύχουμε αυτό. Στην μέθοδο A η χρονική απόκριση υπολογίζεται μέσω της θεωρητικής αντιστροφής της σχέσης (1.1) κατά Laplace και η οποία θα υλοποιηθεί με δύο τρόπους, ενώ στην μέθοδο B η χρονική απόκριση λαμβάνεται υπολογιστικά, μέσω του FILT.

2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ A: Εύρεση αναλυτικής λύσης

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier της $\varepsilon(\omega)$ στη σχέση (1.1) και θα βρούμε την αναλυτική λύση:

$$\varepsilon(t) = \mathfrak{F}^{-1}(\varepsilon(\omega))$$

και μάλιστα με 2 τρόπους.

2.1.1 1η απόδειξη: μέσω του πεδίου του χρόνου

Στην (1.1) θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι:

$$\gamma > \alpha \tag{2.1}$$

Από την (2.1) σε συνδυασμό με την πρώτη συνθήκη της (1.1) προκύπτει:

$$0 < \gamma - \alpha < 1 \tag{2.2}$$

Ορίζουμε:

$$F(\omega) = \frac{1}{\left((j\omega\tau_R)^\alpha + (j\omega\tau_R)^\gamma\right)^\beta} \quad (2.3)$$

Θέτοντας όπου τ_R το τ , η (1.1) λόγω της (2.3) γίνεται:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon F(\omega) \quad (2.4)$$

Η (2.3) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{(j\omega\tau)^\alpha} \frac{1}{\left(1 + (j\omega\tau)^{\gamma-\alpha}\right)^\beta} \\ &= \frac{1}{(j\omega\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \left((j\omega\tau)^{\gamma-\alpha}\right)^{-\beta-n} \\ &= \frac{1}{(j\omega\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{1}{\tau^{(\gamma-\alpha)(\beta+n)}} \frac{1}{(j\omega)^{(\gamma-\alpha)(\beta+n)}} \\ &= \frac{1}{\tau^{\alpha\beta+\gamma\beta-\alpha\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{1}{\tau^{n(\gamma-\alpha)}} \frac{1}{(j\omega)^{\alpha\beta+\gamma\beta-\alpha\beta+n(\gamma-\alpha)}} \\ &= \frac{1}{\tau^{\gamma\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{1}{\tau^{n(\gamma-\alpha)}} \frac{1}{(j\omega)^{n(\gamma-\alpha)+\gamma\beta}} \Leftrightarrow \\ f(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} \\ &= \frac{1}{\tau^{\beta\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{1}{\tau^{n(\gamma-\alpha)}} \frac{t^{n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma-1}}{\Gamma[n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma]} u(t) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{n(\gamma-\alpha)}}{\Gamma[n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma]} u(t) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma(\beta)} \frac{\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma-\alpha}\right)^n}{\Gamma[n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma]} u(t) \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma-1} E_{\gamma-\alpha, \beta\gamma}^\beta \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma-\alpha}\right] u(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

όπου:

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{n! \Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha n + \beta)} z^n \quad (2.6)$$

η συνάρτηση Mittag - Leffler τριών παραμέτρων.

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην (2.4) και κάνοντας χρήση της (2.5) λαμβάνουμε την αναλυτική σχέση της χρονικής αποκρίσης του RAICU μοντέλου, η οποία φαίνεται παρακάτω:

$$\varepsilon(t) = \mathfrak{F}^{-1} \{ \varepsilon(\omega) \} = \varepsilon_{\infty} \delta(t) + \frac{\Delta \varepsilon}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\beta\gamma-1} E_{\beta-\alpha, \beta\gamma}^{\beta} \left[- \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\gamma-\alpha} \right] u(t) \quad (2.7)$$

όπου: $\delta(\cdot)$ η συνάρτηση Δέλτα και $u(\cdot)$ η Βηματική συνάρτηση.

2.1.2 2η απόδειξη: μέσω του πεδίου της συχνότητας

Και εδώ κάνουμε την υπόθεση της (2.1) και επομένως προκύπτει η συνθήκη (2.2). Επιπλέον ορίζουμε την $F(\omega)$ να δίνεται και πάλι από τη σχέση (2.3), οπότε προκύπτει η (2.4). Η (2.3) γράφεται ισοδύναμα:

$$F(\omega) = (j\omega\tau)^{-\alpha\beta} \frac{1}{\left(1 + (j\omega\tau)^{\gamma-\alpha}\right)^{\beta}} \quad (2.8)$$

όπου, λόγω της πρώτης συνθήκης της (1.1) ισχύει:

$$0 \leq \alpha\beta \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\alpha\beta \leq 0 \Leftrightarrow m \triangleq -\alpha\beta \in [-1, 0] \subset (-\infty, 1] \quad (2.9)$$

Ορίζω:

$$\bullet \quad F_0(\omega) = (j\omega\tau)^m, \text{ όπου το } m \text{ ικανοποιεί την (2.9)} \quad (2.10)$$

$$\bullet \quad F_{HN}(\omega) = \frac{1}{\left(1 + (j\omega\tau)^{\nu}\right)^{\beta}} \quad \nu = \gamma - \alpha, \quad 0 \leq \nu \leq 1, \text{ λόγω της (2.2)} \quad (2.11)$$

Το μοντέλο της (2.11) αντιστοιχεί σε υλικό Havriliak-Negami, του οποίου η χρονική απόκριση είναι γνωστή και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} f_{HN}(t) &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\nu\beta-1} E_{\nu, \nu\beta}^{\beta} \left[- \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\nu} \right] \stackrel{(2.6)}{=} \\ &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\nu\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma(\beta) \Gamma[\nu(\beta+n)]} \left[- \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\nu} \right]^n \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Άρα λόγω των (2.10) και (2.11) η (2.8) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_0(\omega)F_{HN}(\omega) \stackrel{(2.10)}{=} \tau^m(j\omega)^m F_{HN}(\omega) = \tau^m(j\omega)^m \mathfrak{F}\{f_{HN}(t)\} \stackrel{(1.10)}{=} \\ &= \tau^m \mathfrak{F}\{D^m f_{HN}(t)\} \Leftrightarrow \mathfrak{F}\{f(t)\} = \mathfrak{F}\{\tau^m D^m f_{HN}(t)\} \Leftrightarrow \\ f(t) &= \tau^m D^m f_{HN}(t) \stackrel{(1.10)}{=} \frac{\tau^m}{\Gamma(1-m)} \frac{d}{dt} \int_0^t u^{-m} f_{HN}(t-u) du \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ορίζω:

$$I(t) = \int_0^t u^{-m} f_{HN}(t-u) du \stackrel{(2.12)}{=} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t u^{-m} \left[\frac{1}{\tau \Gamma(\beta)} \left(\frac{t-u}{\tau} \right)^{\nu\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma[\nu(\beta+n)]} \left(\frac{t-u}{\tau} \right)^{\nu n} \right] du \\ &= \frac{1}{\tau \Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma[\nu(\beta+n)]} \int_0^t u^{-m} \left(\frac{t-u}{\tau} \right)^{\nu(\beta+n)-1} du \end{aligned} \quad (2.15)$$

Θέτω:

$$g_n = \nu(\beta+n) - 1 \quad (2.16)$$

Και ορίζω:

$$I_n(t) = \int_0^t u^{-m} \left(\frac{t-u}{\tau} \right)^{g_n} du \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \tau^{-g_n} \int_0^t u^{-m} (t-u)^{g_n} du \stackrel{x=u/t}{=} \tau^{-g_n} \int_0^t x^{-m} t^{-m} (t-xt)^{g_n} t dx \\ &= \tau^{-g_n} t^{-m+g_n+1} \int_0^1 x^{-m} (1-x)^{g_n} dx = \tau^{-g_n} t^{-m+g_n+1} B(-m+1, g_n+1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

όπου $B(\cdot, \cdot)$ η συνάρτηση Βήτα με τύπο:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2.19)$$

με $x, y \in \mathbb{C}$ και $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$.

Η (2.14) λόγω των (2.17) και (2.18) γίνεται:

$$I(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma[\nu(\beta+n)]} \tau^{-g_n-1} t^{-m+g_n+1} B(-m+1, g_n+1)$$

$$= \frac{\tau^{-m}}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma[\nu(\beta+n)]} B(-m+1, g_n+1) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-m+g_n+1} \quad (2.20)$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την 1^n παράγωγο της $I(t)$ ως προς t :

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{\tau^{-m}}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma[\nu(\beta+n)]} B(-m+1, g_n+1) \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-m+g_n+1} \right] \\ &= \frac{\tau^{-m}}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma[\nu(\beta+n)]} \frac{(-m+g_n+1)}{\tau} B(-m+1, g_n+1) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-m+g_n} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Η (2.13) λόγω της (2.17) γράφεται:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\tau^m}{\Gamma(1-m)} \frac{dI(t)}{dt} \stackrel{(2.21)}{=} \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-m+g_n+1) \Gamma(\beta+n) B(-m+1, g_n+1)}{n! \Gamma(\beta) \Gamma(1-m) \Gamma[\nu(\beta+n)]} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-m+g_n} \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n K_n}{n! \Gamma(\beta)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-m+g_n} \end{aligned} \quad (2.22)$$

όπου:

$$K_n = \frac{(-m+g_n+1) \Gamma(\beta+n) B(-m+1, g_n+1)}{\Gamma(1-m) \Gamma[\nu(\beta+n)]} \quad (2.23)$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

έχουμε :

$$B(-m+1, g_n+1) = \frac{\Gamma(-m+1) \Gamma(g_n+1)}{\Gamma(-m+g_n+2)} \quad (2.24)$$

Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ $z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0$. Λόγω των (2.9), (2.11) και (2.16) ισχύει:

$$z = -m+g_n+1 = \alpha\beta + (\gamma-\alpha)(\beta+n) - 1 + 1 = \alpha\beta + (\gamma-\alpha)(\beta+n) > 0 \quad \text{για } n > 0$$

επομένως:

$$\Gamma(-m+g_n+2) = \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-m + g_n + 1)\Gamma(-m + g_n + 1) \\
 &= (-m + g_n + 1)\Gamma[\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\beta + (\gamma - \alpha)n] \\
 &= (-m + g_n + 1)\Gamma[\beta\gamma + (\gamma - \alpha)n]
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

και λόγω της (2.16):

$$\Gamma(1 + g_n) = \Gamma[\nu(\beta + n)] \tag{2.26}$$

Η (2.23) απλοποιείται λόγω των (2.24), (2.25) και (2.26) ως εξής:

$$\begin{aligned}
 K_n &= \frac{(-m + g_n + 1)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(1 - m)\Gamma[\nu(\beta + n)]} \frac{\Gamma(1 - m)\Gamma[\nu(\beta + n)]}{(-m + g_n + 1)\Gamma[\beta\gamma + n(\gamma - \alpha)]} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + n)}{\Gamma[\beta\gamma + n(\gamma - \alpha)]}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Αντικαθιστώντας την (2.27) καθώς και τις τιμές των m και g_n στην (2.22), τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta + n)}{n! \Gamma(\beta) \Gamma[\beta\gamma + n(\gamma - \alpha)]} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma + n(\gamma - \alpha) - 1} \\
 &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + n)}{n! \Gamma(\beta) \Gamma[\beta\gamma + n(\gamma - \alpha)]} \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma - \alpha}\right]^n \\
 &= \frac{1}{\tau} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma - 1} E_{\gamma - \alpha, \beta\gamma}^{\beta} \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma - \alpha}\right] \quad t > 0
 \end{aligned}$$

όπου: $E_{\alpha, \beta}^{\gamma}$ η συνάρτηση Mittag-Leffler τριών παραμέτρων και δίνεται από τη σχέση (2.6). Καταλήξαμε, δηλαδή, στο αποτέλεσμα της (2.5).

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ B: Η μέθοδος **FILT** (Fast Inverse Laplace Transform)

Η μέθοδος **FILT** εφευρέθηκε στις αρχές τις δεκαετίας του '80 από τον Ιάπωνα Καθηγητή Toshio Hosono και αποτελεί μια υπολογιστική, αλλά ταυτόχρονα, γρήγορη μέθοδο υπολογισμού του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace.

Η παρουσίαση της συγκεκριμένης μεθόδου, λόγω της εκτεταμένης ανάλυσής της, θα γίνει σε 2 βήματα. Στο 1ο βήμα θα αποδείξουμε ότι το ολοκληρώμα Bromwich μπορεί να προσεγγιστεί με ένα απειρο-άθροισμα. Στο 2ο βήμα, με σκοπό τη γρηγορότερη σύγκλισή του, θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Euler και το αρχικό απειρο-άθροισμα θα πάρει μια νέα μορφή. Τέλος, θα αποδείξουμε ότι το νέο απειρο-άθροισμα που έχει προκύψει μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά.

2.2.1 1ο βήμα : Προσέγγιση του ολοκληρώματος Bromwich

Θεωρούμε την παρακάτω μιγαδική συνάρτηση που αποτελεί την γενικευμένη μορφή της (2.3) στο πεδίο της συχνότητας:

$$F(s) = \frac{1}{\left((sT)^\alpha + (sT)^\gamma\right)^\beta} \quad \begin{cases} s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 0 \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Η $F(s)$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. η $F(s)$ δεν έχει ανώμαλα σημεία
2. $|s| \rightarrow \infty \implies |F(s)| \rightarrow 0$
3. $F^*(s) = F(s^*)$, όπου z^* ο συζυγής του $z \in \mathbb{C}$

Από την $F(s)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική απόκριση $f(t)$ για $t > 0$ με χρήση του Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace (Inverse Laplace Transform - ILT) που ορίζεται από το ολοκλήρωμα Bromwich ως εξής:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\phi \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-j\phi}^{\gamma+j\phi} F(s) e^{st} ds \quad (2.29)$$

όπου: $\gamma \in \Re$ τέτοιο ώστε η διαδρομή του περιγράμματος του ολοκληρώματος να βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης της $F(s)$.

Γενικότερα, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος Bromwich στην (2.29) είναι δύσκολος. Η βασική ιδέα του FILT είναι η εισαγωγή μιας επιπλέον παραμέτρου a (πρώτη σχεδιαστική παράμετρος της μεθόδου FILT) και η προσέγγιση του εκθετικού e^{st} μέσω της:

$$\begin{aligned} E_{est}(st, \alpha) &\triangleq \frac{e^\alpha}{2 \cosh(\alpha - st)} = \frac{e^\alpha}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{st - \alpha + j(n - 0.5)\pi} \\ &= \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{s - \frac{\alpha + j(n - 0.5)\pi}{t}} = \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{s - \lambda_n(\alpha, t)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

όπου:

$$\lambda_n(\alpha, t) = \frac{\alpha}{t} + j \frac{n - 0.5}{t} \pi \quad (2.31)$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε την προσέγγιση $f_{est}(t, \alpha)$ της $f(t)$ για $t > 0$ ως εξής:

$$f_{est}(t, \alpha) \triangleq \frac{1}{2\pi j} \lim_{\phi \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-j\phi}^{\gamma+j\phi} F(s) E_{est}(st, \alpha) ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{\phi \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-j\phi}^{\gamma+j\phi} F(s) \left[\frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{s - \lambda_n(\alpha, t)} \right] ds \stackrel{(2.30)}{=} \\
 &= \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j(-1)^n \frac{1}{2\pi j} \lim_{\phi \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-j\phi}^{\gamma+j\phi} \frac{F(s)}{s - \lambda_n(\alpha, t)} ds \\
 &= \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j(-1)^n I_n(\alpha, t)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

όπου:

$$I_n(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\phi \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-j\phi}^{\gamma+j\phi} \frac{F(s)}{s - \lambda_n(\alpha, t)} ds \tag{2.33}$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Bromwich της (2.33) θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποτελεί εφαρμογή του γενικότερου θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Θεώρημα: Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace $F(s)$ (μιας συνάρτησης $f(t)$, $t > 0$) είναι αναλυτική στο \mathbb{C} , εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος ανώμαλων σημείων s_1, s_2, \dots, s_n και έστω $\gamma + j\phi$ ($|\phi| \leq R$) είναι κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα, έτσι ώστε το $\gamma > 0$ να είναι αρκετά μεγάλο ώστε όλα τα ανώμαλα σημεία της F να περιέχονται εξ' αριστερών του τμήματος αυτού. Αν $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$, τότε ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace f της συνάρτησης F υπολογίζεται από την ισότητα:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-jR}^{\gamma+jR} e^{st} F(s) ds = - \sum_{k=1}^n \mathfrak{Res}(e^{st} F(s), s_k), \quad t > 0$$

όπου $\mathfrak{Res}(G(s), s_k)$ είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της G στο σημείο s_k και αν το s_k είναι πόλος τάξης N , τότε ισχύει:

$$\mathfrak{Res}(G(s), s_k) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \left[\left((s - s_k)^N G(s) \right)^{N-1} \right]$$

Σημείωση: Το «-» στο δεξί μέλος της ισότητας του ορισμού οφείλεται στο γεγονός ότι στην εφαρμογή του Θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων η φορά της διαδρομής-ημικύκλιου που ορίζει το χωρίο αριστερά της ευθείας $\gamma + j\phi$ ($|\phi| \leq R$) και στο οποίο βρίσκονται τα ανώμαλα σημεία της $F(z)$, θεωρήθηκε αρνητική.

Για να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα τροποποιούμε την (2.33) ως εξής:

$$I_n(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\phi \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-j\phi}^{\gamma+j\phi} \frac{F(s)e^{-st}}{s - \lambda_n(\alpha, t)} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\phi \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-j\phi}^{\gamma+j\phi} G_n(s) e^{st} ds \quad (2.34)$$

όπου:

$$G_n(s) = \frac{F(s)e^{-st}}{s - \lambda_n(\alpha, t)} \quad (2.35)$$

Επίσης θα πρέπει να ικανοποιούνται και τα κριτήρια του παραπάνω θεωρήματος.

- Σύμφωνα με το κριτήριο (1) της $F(s)$ (σχέση 2.28) προκύπτει ότι η $G_n(s)$ έχει έναν απλό πόλο τον:

$$s = \lambda_n(\alpha, t) \stackrel{(2.31)}{=} \frac{\alpha}{t} + j \frac{n - 0.5}{t} \pi$$

Βάση του Θεωρήματος θα πρέπει:

$$\gamma > \max [\Re\{s\}] = \max [\Re\{\lambda_n(\alpha, t)\}] = \max \left[\frac{\alpha}{t} \right]$$

- πρέπει να ισχύει: $\lim_{s \rightarrow +\infty} G_n(s) = 0$

Είναι:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} G_n(s) \stackrel{(2.35)}{=} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)e^{-st}}{s - \lambda_n(\alpha, t)} \stackrel{(2.28)}{=} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{e^{-st}}{[s - \lambda_n(\alpha, t)][(s\tau)^\alpha + (s\tau)^\gamma]^\beta} = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα η (2.34) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} I_n(\alpha, t) &= -\Re s \left(e^{st} G_n(s), \lambda_n(\alpha, t) \right) \\ &= - \lim_{s \rightarrow \lambda_n(\alpha, t)} \left[(s - \lambda_n(\alpha, t)) e^{st} \frac{e^{-st} F(s)}{s - \lambda_n(\alpha, t)} \right] \\ &= -F(\lambda_n(\alpha, t)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Με βάση την (2.36), η (2.32) γίνεται:

$$f_{est}(t, \alpha) = \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)(-1)^n F(\lambda_n(\alpha, t)) \quad (2.37)$$

Επιπλέον, από την (2.31) προκύπτει η εξής σημαντική ιδιότητα των λ_n , η οποία θα φανεί χρήσιμη παρακάτω:

$$\lambda_n(\alpha, t) = \lambda_{-n+1}^*(\alpha, t) \quad (2.38)$$

Η (2.37) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{2t}{e^\alpha} f_{est}(t, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)(-1)^n F(\lambda_n(\alpha, t))$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{aligned} &(-j)(-1)^0 F(\lambda_0(\alpha, t)) &+& (-j)(-1)^1 F(\lambda_1(\alpha, t)) \\ &+ (-j)(-1)^{-1} F(\lambda_{-1}(\alpha, t)) &+& (-j)(-1)^2 F(\lambda_2(\alpha, t)) \\ &\vdots \\ &+ (-j)(-1)^{-k+1} F(\lambda_{-k+1}(\alpha, t)) &+& (-j)(-1)^k F(\lambda_k(\alpha, t)) \\ &\vdots \end{aligned} \\
 &\stackrel{(2.38)}{=} \begin{aligned} &(-j)(+1) F(\lambda_1^*(\alpha, t)) &+& (-j)(-1)^1 F(\lambda_1(\alpha, t)) \\ &+ (-j)(-1) F(\lambda_2^*(\alpha, t)) &+& (-j)(+1) F(\lambda_2(\alpha, t)) \\ &\vdots \\ &+ (-j)(-1)^{-k+1} F(\lambda_k^*(\alpha, t)) &+& (-j)(-1)^k F(\lambda_k(\alpha, t)) \\ &\vdots \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-j)(-1)^n \left[F(\lambda_n(\alpha, t)) - F(\lambda_n^*(\alpha, t)) \right] \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f_{est}(t, \alpha) = \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=1}^{\infty} (-j)(-1)^n \left[F(\lambda_n(\alpha, t)) - F(\lambda_n^*(\alpha, t)) \right]
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το 3^ο κριτήριο της F (2.28), η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}
 f_{est}(t, \alpha) &= \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=1}^{\infty} (-j)(-1)^n \left[F(\lambda_n(\alpha, t)) - F^*(\lambda_n(\alpha, t)) \right] \\
 &= \frac{e^\alpha}{2t} \sum_{n=1}^{\infty} (-j)(-1)^n \left[j2\Im \left\{ F(\lambda_n(\alpha, t)) \right\} \right] \\
 &= \frac{e^\alpha}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Im \left\{ F(\lambda_n(\alpha, t)) \right\} \\
 &= \frac{e^\alpha}{t} \sum_{n=1}^{\infty} F_n
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

όπου:

$$F_n = (-1)^n \Im \left\{ F(\lambda_n(\alpha, t)) \right\} \tag{2.40}$$

και:

- η $F(\cdot)$ δίνεται από την (2.28)
- η $\lambda_n(\alpha, t)$ δίνεται από την (2.31)

2.2.2 2ο βήμα : Χρήση του μετασχηματισμού Euler

Ο μετασχηματισμός Euler αποτελεί έναν γραμμικό μετασχηματισμό που εφαρμόζεται σε ακολουθίες, οι όροι των οποίων παρουσιάζουν διαδοχικές εναλλαγές προσήμου, και έχει ως στόχο να βελτιώσει την ταχύτητα σύγκλισής τους. Ακολουθεί ο ορισμός του μετασχηματισμού Euler.

Ορισμός (Μετασχηματισμός Euler) : Έστω η ακολουθία α_n , $n \in [0, +\infty)$, τότε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n \alpha_0}{2^{n+1}}$$

όπου:

$$\Delta^n \alpha_0 \triangleq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \alpha_{n-k}$$

Συνολικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \alpha_{n-k} \quad (2.41)$$

Η (2.40) δείχνει ότι το πρόσημο των όρων F_n εναλλάσσεται και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$F_n = (-1)^n \Im \left\{ F \left[\frac{\alpha + j(n - 0.5)\pi}{t} \right] \right\} = (-1)^n \alpha_n \quad (2.42)$$

Στο σημείο αυτό θεωρούμε τη δεύτερη σχεδιαστική παράμετρο K της μεθόδου FILT και επομένως το άθροισμα της (2.39) γράφεται λόγω της (2.42):

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^K F_n + \sum_{n=K+1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n = A + \sum_{n=1}^K F_n \quad (2.43)$$

όπου:

$$A \triangleq \sum_{n=K+1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n = \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^{u+K+1} \alpha_{u+K+1}$$

με: $u = n - (K + 1)$. Επίσης θεωρώ:

$$b_u = \alpha_{u+K+1} \quad (2.44)$$

οπότε η τελευταία σχέση γίνεται:

$$A = (-1)^{K+1} \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u b_u = (-1)^{K+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Euler (2.41) στο απειρο-άθροισμα της τελευταίας σχέσης και έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (-1)^{K+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k b_{n-k} \stackrel{(2.44)}{=} \\ &= (-1)^{K+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \alpha_{(n-k)+K+1} \stackrel{(-1)^k = (-1)^{-k}}{=} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{(n-k)+K+1} \alpha_{(n-k)+K+1} \stackrel{(2.42)}{=} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{(n-k)+K+1} \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό εισάγουμε την τρίτη σχεδιαστική παράμετρο N_p της μεθόδου FILT και θεωρώντας ότι $n \in [0, N_p]$ προσεγγίζουμε το απειρο-άθροισμα της τελευταίας ισότητας με άθροισμα $N_p + 1$ όρων. Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{N_p} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{(n-k)+K+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} F_{(0-k)+K+1} + \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} F_{(1-k)+K+1} + \cdots + \\ &\quad + \frac{1}{2^{N_p+1}} \sum_{k=0}^{N_p} \binom{N_p}{k} F_{(N_p-k)+K+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} F_{k+K+1} + \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^1 \binom{1}{1-k} F_{k+K+1} + \cdots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2^{N_p+1}} \sum_{k=0}^{N_p} \binom{N_p}{N_p-k} F_{k+K+1} \\
& = \frac{1}{2^{N_p+1}} \binom{N_p}{0} F_{K+N_p+1} \\
& \quad + \frac{1}{2^{N_p}} \binom{N_p-1}{0} F_{K+N_p} + \frac{1}{2^{N_p+1}} \binom{N_p}{1} F_{K+N_p} \\
& \quad \vdots \\
& \quad + \frac{1}{2^2} \binom{1}{0} F_{K+2} + \frac{1}{2^3} \binom{2}{1} F_{K+2} + \cdots + \frac{1}{2^{N_p+1}} \binom{N_p}{N_p-1} F_{K+2} \\
& \quad + \frac{1}{2} \binom{0}{0} F_{K+1} + \frac{1}{2^2} \binom{1}{1} F_{K+1} + \cdots + \frac{1}{2^{N_p+1}} \binom{N_p}{N_p} F_{K+1} \\
& = F_{K+1} \sum_{m=0}^{N_p} \binom{m}{m} \frac{1}{2^{m+1}} + F_{K+2} \sum_{m=1}^{N_p} \binom{m}{m-1} \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \\
& \quad + F_{K+N_p} \sum_{m=N_p-1}^{N_p} \binom{m}{m-(N_p-1)} \frac{1}{2^{m+1}} + F_{K+N_p+1} \binom{m}{0} \frac{1}{2^{N_p+1}}
\end{aligned}$$

Θέτουμε στη σχέση που προέκυψε:

$$N_p = p - 1 \quad (2.45)$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
A & = F_{K+1} \sum_{m=0}^{p-1} \binom{m}{m} \frac{1}{2^{m+1}} + F_{K+2} \sum_{m=1}^{p-1} \binom{m}{m-1} \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \\
& \quad + F_{K+p-1} \sum_{m=p-2}^{p-1} \binom{m}{m-(p-2)} \frac{1}{2^{m+1}} + F_{K+p} \binom{m}{0} \frac{1}{2^p} \\
& = \sum_{q=1}^p \sum_{m=q-1}^{p-1} \binom{m}{m-(q-1)} \frac{1}{2^{m+1}} F_{q+K} \\
& = 2^{-p} \sum_{q=1}^p \sum_{m=q-1}^{p-1} \binom{m}{m-(q-1)} 2^{(p-1)-m} F_{q+K}
\end{aligned}$$

$$= 2^{-p} \sum_{q=1}^p A_{p,q} F_{q+K} \quad (2.46)$$

όπου:

$$A_{p,q} = \sum_{m=q-1}^{p-1} \binom{m}{m-(q-1)} 2^{(p-1)-m} \quad q = 1, 2, \dots, p \quad (2.47)$$

Όμως ισχύει:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , 0 \leq k \leq n \quad (2.48)$$

Στην περίπτωση της σχέσης (2.47) είναι: $n = m$ και $k = m - q + 1$ και θέλουμε να ισχύει:

$$0 \leq m - q + 1 \leq m \Leftrightarrow -m \leq 1 - q \leq 0 \Leftrightarrow q \geq 1 \text{ (ισχύει) ΚΑΙ } m \geq q - 1 \text{ (ισχύει).}$$

Συνεπώς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της σχέσης (2.48) και άρα:

$$\binom{m}{m-(q-1)} = \binom{m}{q-1}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση που προέκυψε στην (2.47) και έχουμε:

$$A_{p,q} = \sum_{m=q-1}^{p-1} \binom{m}{q-1} 2^{(p-1)-m} \quad q = 1, 2, \dots, p \quad (2.49)$$

με

$$A_{p,p} = \binom{p-1}{p-1} 2^{(p-1)-(p-1)} = 1 \quad (2.50)$$

Η σχέση (2.49) για όπου q το $p - q + 1$ γίνεται:

$$\begin{aligned} A_{p,p-q+1} &= \sum_{m=p-q}^{p-1} \binom{m}{p-q} 2^{(p-m)-1} \stackrel{w=p-m}{=} \\ &= \sum_{w=1}^q \binom{p-w}{p-q} 2^{w-1} \quad q = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (2.51)$$

Θέλουμε να γράψουμε την τελευταία σχέση αναδρομικά ως εξής: $A_{p,p-1} = f_1(A_{p,p})$, $A_{p,p-2} = f_2(A_{p,p-1})$ κλπ. Για να το πετύχουμε αυτό θεωρούμε ότι το q λαμβάνει τιμές από 1 έως $p-1$ και άρα έχουμε:

$$A_{p,p-q+1} = 2^{q-1} + \sum_{w=1}^{q-1} \binom{p-w}{p-q} 2^{w-1} \quad q = 1, 2, \dots, p-1 \quad (2.52)$$

Όμως ισχύει:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad 0 < k < n \quad (2.53)$$

Στην περίπτωση της σχέσης (2.52) είναι: $n = p - w$ και $k = p - q$ και θέλουμε να ισχύει:

$$0 < p - q < p - w \Leftrightarrow \Leftrightarrow q < p \text{ ΚΑΙ } w < q \text{ που ισχύουν λόγω της (2.52)}$$

Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της σχέσης (2.53) και λαμβάνουμε:

$$\binom{p-w}{p-q} = \binom{p-w-1}{p-q-1} + \binom{p-w-1}{p-q}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση που προέκυψε στην (2.52) και έχουμε:

$$\begin{aligned} A_{p,p-q+1} &= 2^{q-1} + \sum_{w=1}^{q-1} \binom{p-w-1}{p-q-1} 2^{w-1} + \sum_{w=1}^{q-1} \binom{p-w-1}{p-q} 2^{w-1} \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \bullet A_1 &= 2^{q-1} + \sum_{w=1}^{q-1} \binom{p-w-1}{p-q-1} 2^{w-1} = \sum_{w=1}^q \binom{p-w-1}{p-(q+1)} 2^{w-1} \stackrel{w'=w+1}{=} \\ &= \sum_{w'=2}^{q+1} \binom{p-w'}{p-(q+1)} 2^{w'-2} = \frac{1}{2} \sum_{w'=1}^{q+1} \binom{p-w'}{p-(q+1)} 2^{w'-1} - \frac{1}{2} \binom{p-1}{p-(q+1)} \stackrel{(2.51)}{=} \\ &= \frac{1}{2} A_{p,p-q} - \frac{1}{2} \binom{p-1}{p-(q+1)} \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \bullet A_2 &= \sum_{w=1}^{q-1} \binom{p-w-1}{p-q} 2^{w-1} \stackrel{w'=w+1}{=} \sum_{w'=2}^q \binom{p-w'}{p-q} 2^{w'-2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{w'=1}^q \binom{p-w'}{p-q} 2^{w'-1} - \frac{1}{2} \binom{p-1}{p-q} \stackrel{(2.51)}{=} \\ &= \frac{1}{2} A_{p,p-q+1} - \frac{1}{2} \binom{p-1}{p-q} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Επομένως η (2.54), λόγω των (2.55) και (2.56) γίνεται:

$$\begin{aligned} A_{p,p-q+1} &= \frac{1}{2}A_{p,p-q} - \frac{1}{2}\binom{p-1}{p-(q+1)} + \frac{1}{2}A_{p,p-q+1} - \frac{1}{2}\binom{p-1}{p-q} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_{p,p-q} &= A_{p,p-q+1} + \left[\binom{p-1}{p-(q+1)} + \binom{p-1}{p-q} \right] \quad q = 1, 2, \dots, p-1 \quad (2.57) \\ \text{και } A_{p,p} &= 1 \quad (2.50) \end{aligned}$$

Θέλουμε να απλοποιήσουμε περαιτέρω την τελευταία σχέση, συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} \binom{p-1}{p-q} &= \frac{(p-1)!}{(p-q)!(q-1)!} \stackrel{q \geq 1}{=} \frac{1}{(q-1)!} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-q-1)(p-q) \cdot \dots \cdot (p-1)}{(p-q)!} \\ &= \frac{1}{(q-1)!} \frac{(p-q)!(p-q+1) \cdot \dots \cdot (p-1)}{(p-q)!} = \frac{1}{(q-1)!} \prod_{k=1}^{q-1} (p-k) \quad (2.58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{p-1}{p-(q+1)} &= \frac{(p-1)!}{q!(p-q-1)!} \stackrel{q \geq 1}{=} \\ &= \frac{1}{q!} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-q-2)(p-q-1)(p-q)(p-q+1) \cdot \dots \cdot (p-1)}{(p-q-1)!} \\ &= \frac{1}{q!} \frac{(p-q-1)!(p-q)(p-q+1) \cdot \dots \cdot (p-1)}{(p-q-1)!} \\ &= \frac{1}{q(q-1)!} \prod_{k=1}^q (p-k) \quad (2.59) \end{aligned}$$

Ορίζω:

$$B_{p,q} \triangleq \binom{p-1}{p-(q+1)} + \binom{p-1}{p-q} \stackrel{(2.58), (2.59)}{=} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(q-1)!} \prod_{k=1}^{q-1} (p-k) \left(1 + \frac{p-q}{q} \right) = \frac{p}{q(q-1)!} \prod_{k=1}^{q-1} (p-k) \\ &= \frac{1}{q!} \prod_{k=0}^{q-1} (p-k) \quad (2.61) \end{aligned}$$

$$= \frac{p-(q-1)}{q} \frac{1}{(q-1)!} \prod_{k=0}^{q-2} (p-k) \stackrel{(2.61)}{\Longleftrightarrow}$$

$$B_{p,q} = \frac{p-q+1}{q} B_{p,q-1} = C_{p,q} B_{p,q-1} \quad , \quad q = 2, \dots, p-1 \quad (2.62)$$

$$\mu\epsilon \quad B_{p,1} = \frac{1}{1!} \prod_{k=0}^{1-1} (p-k) = p \quad (2.63)$$

$$\kappa\alpha\iota \quad C_{p,q} \triangleq \frac{p-q+1}{q} \quad (2.64)$$

Συνεπώς από τις (2.39), (2.43) και (2.46) προκύπτει:

$$f_{est}(t, \alpha) = \frac{e^\alpha}{t} \left\{ \sum_{n=1}^K F_n + 2^{-p} \sum_{q=1}^p A_{p,q} F_{q+K} \right\} \quad (2.65)$$

2.2.3 Τελικό αποτέλεσμα του FILT και Διαγράμματα

Αποτέλεσμα FILT : Έστω η μιγαδική συνάρτηση $F(s)$, $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 0$ που ικανοποιεί τις 3 συνθήκες που ακολουθούν τον ορισμού (2.28). Τότε, ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} f_{est}^{\alpha,K,p}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\varepsilon_\infty] + \Delta\varepsilon \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \varepsilon_\infty \delta(t) + \Delta\varepsilon \frac{e^\alpha}{t} \left\{ \sum_{n=1}^K F_n + 2^{-p} \sum_{q=1}^p A_{p,q} F_{q+K} \right\} u(t) \end{aligned}$$

λόγω της σχέσης (2.65), όπου:

- $\alpha, K, p \rightarrow$ σχεδιαστικές παράμετροι
- $F_n = (-1)^n \Im \left\{ F \left[\frac{\alpha + j(n-0.5)\pi}{t} \right] \right\}$ σχέση (2.42)

και οι συντελεστές $A_{p,q}$ υπολογίζονται αναδρομικά με βάση τις παρακάτω σχέσεις:

- $A_{p,p-q} = A_{p,p-q+1} + B_{p,q} \quad , \quad q = 1, 2, \dots, p-1$ σχέση (2.57)
- $B_{p,q} = C_{p,q} B_{p,q-1} \quad , \quad q = 2, \dots, p-1$ σχέση (2.62)
- $A_{p,p} = 1$ σχ.(2.50) $B_{p,1} = p$ σχ.(2.63) $C_{p,q} = \frac{p-q+1}{q}$ σχ.(2.64)

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα των χρονικών αποκρίσεων των μοντέλων που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους §1.2 και §1.3, υπολογισμένες με τη χρήση της μεθόδου FILT.

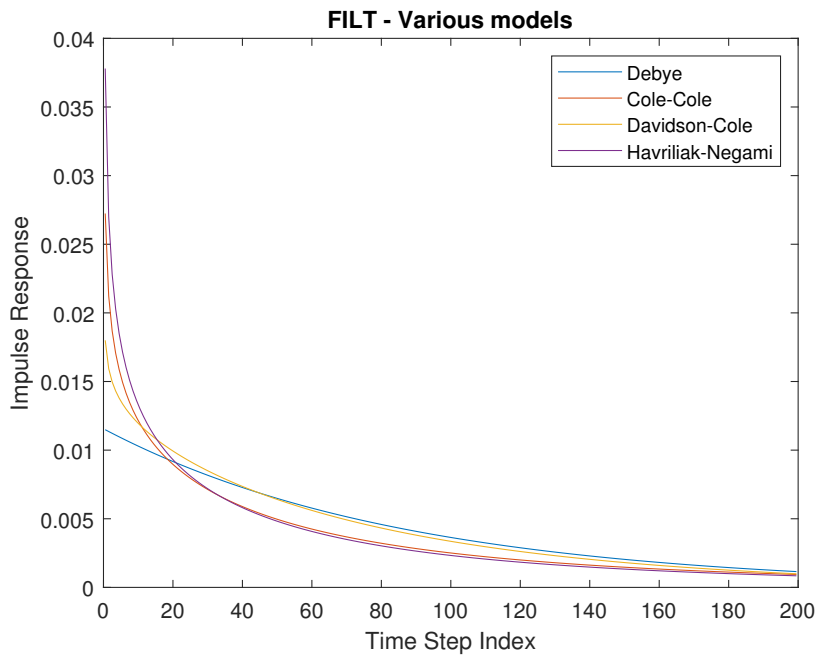
Για τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω τιμές:

- $\Delta t = 1.768ps$, $N_t = 50000$, $n = \frac{t}{\Delta t} = 0.5, 1.5, \dots, N_t + 0.5$
- $K = 21$, $\alpha_{FILT} = 5$

Οι τιμές για τα διάφορα υλικά παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

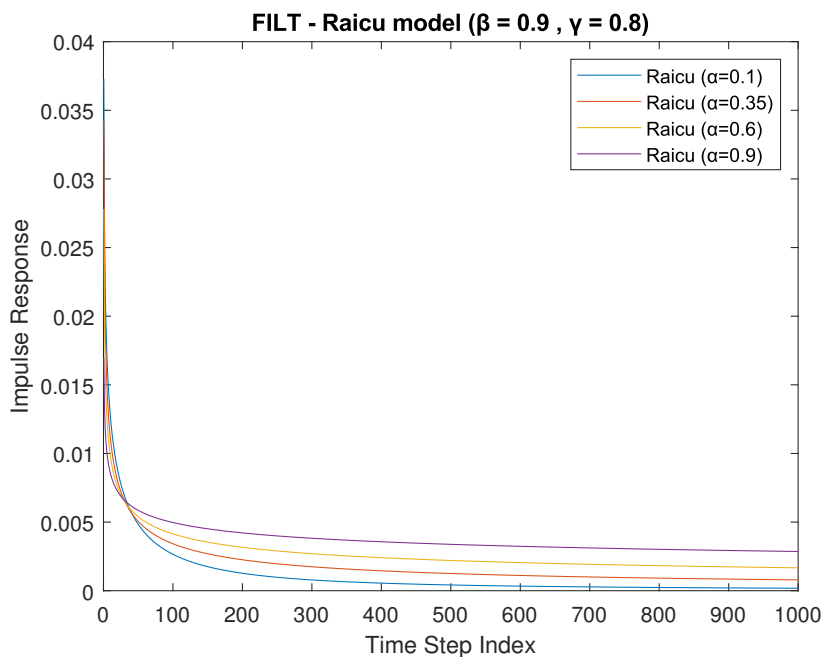
Medium	p	τ (ps)	α	β	γ
Debye	5	153	0	1	1
Cole-Cole	6	153	0	1	0.8
Davidson-Cole	7	153	0	0.9	1
Havriliak-Negami	8	153	0	0.9	0.8
Raicu 1	8	153	0.1	0.9	0.8
Raicu 2	8	153	0.35	0.9	0.8
Raicu 3	8	153	0.6	0.9	0.8
Raicu 4	8	153	0.9	0.9	0.8

Με βάση τις παραπάνω τιμές προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα χρονικών αποκρίσεων:



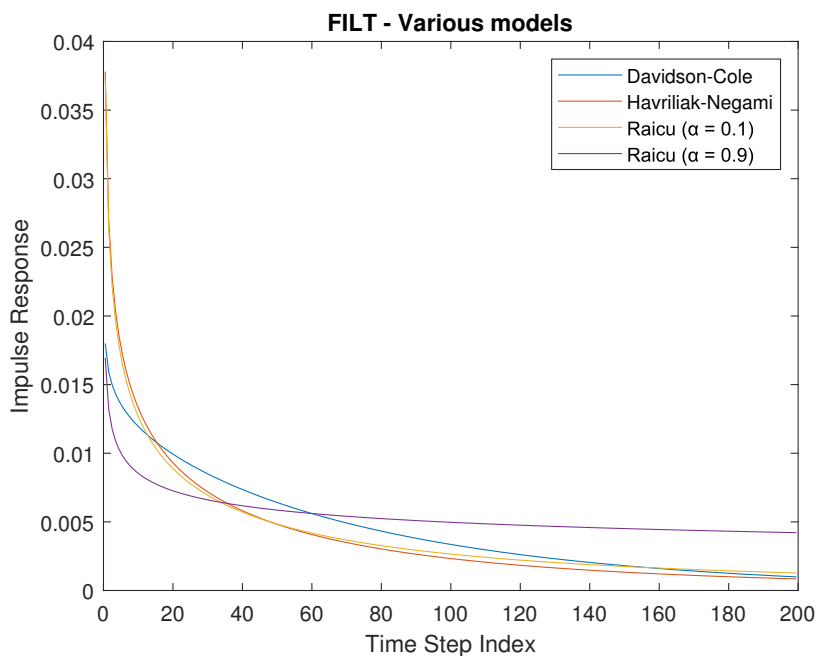
Σχήμα 2.1: Χρονική απόκριση των μοντέλων Debye, C-C, D-C και H-N με χρήση της μεθόδου FILT.

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι για τις τιμές των μοντέλων του πίνακα, οι χρονικές αποκρίσεις των μοντέλων Cole-Cole και Havriliak-Negami «πέφτουν» πιο γρήγορα σε σχέση με τις αντίστοιχες των μοντέλων Debye και Davidson-Cole.



Σχήμα 2.2: Χρονική απόκριση για 4 διαφορετικά μοντέλα Raicu με χρήση της μεθόδου FILT.

Από το παραπάνω διάγραμμα είναι φανερό ότι η αύξηση της τιμής α του μοντέλου Raicu οδηγεί στην λιγότερο «απότομη συμπεριφορά» του μοντέλου.



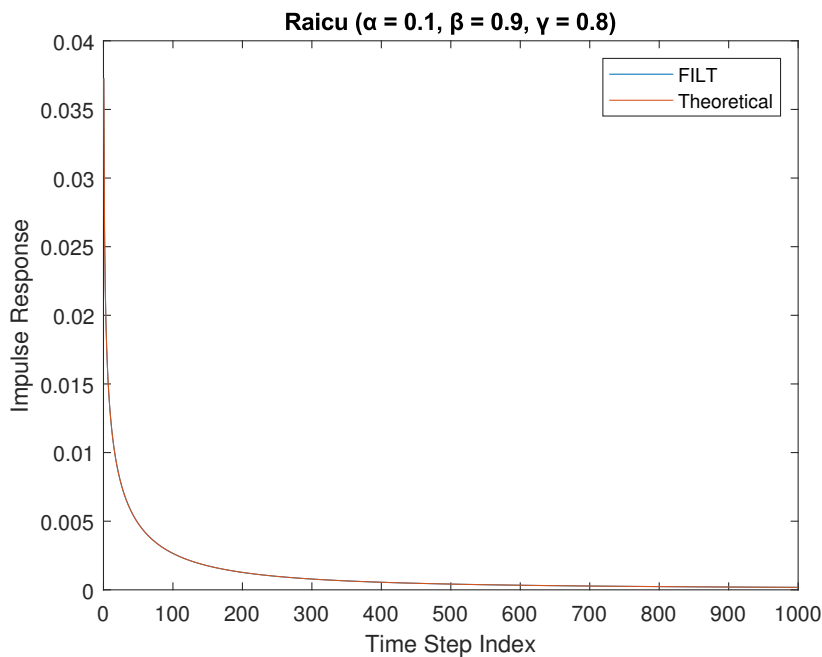
Σχήμα 2.3: Σύγκριση χρονικών αποκρίσεων, που προέκυψαν με χρήση της μεθόδου FILT, 2 διαφορετικών μοντέλων Raicu με τα μοντέλα D-C και H-N.

Από το τελευταίο διάγραμμα προκύπτει ότι τα μοντέλα Havriliak-Negami και Raicu($\alpha = 0.1$) παρουσιάζουν σχεδόν την ίδια συμπεριφορά, το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού το πρώτο

είναι ουσιαστικά το Raicu($\alpha = 0$). Επίσης να σημειωθεί ότι το Raicu($\alpha = 0.9$) ένω αρχικώς ($n < 20$) παρουσιάζει την πιο «απότομη» κλίση, στη συνέχεια «πέφτει» πιο αργά από όλα τα υπόλοιπα μοντέλα.

2.3 Σύγκριση των μεθόδων Α και Β

Στην ενότητα αυτή θέλουμε να εξετάσουμε την αξιοπιστία της μεθόδου FILT. Για τον σκοπό αυτό θα παρουσιάσουμε, σε κοινό διάγραμμα, τη χρονική απόκριση του μοντέλου Raicu ($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$), όπως αυτή προκύπτει με τη χρήση της αναλυτικής σχέσης (2.7) καθώς και με τη χρήση της μεθόδου FILT.



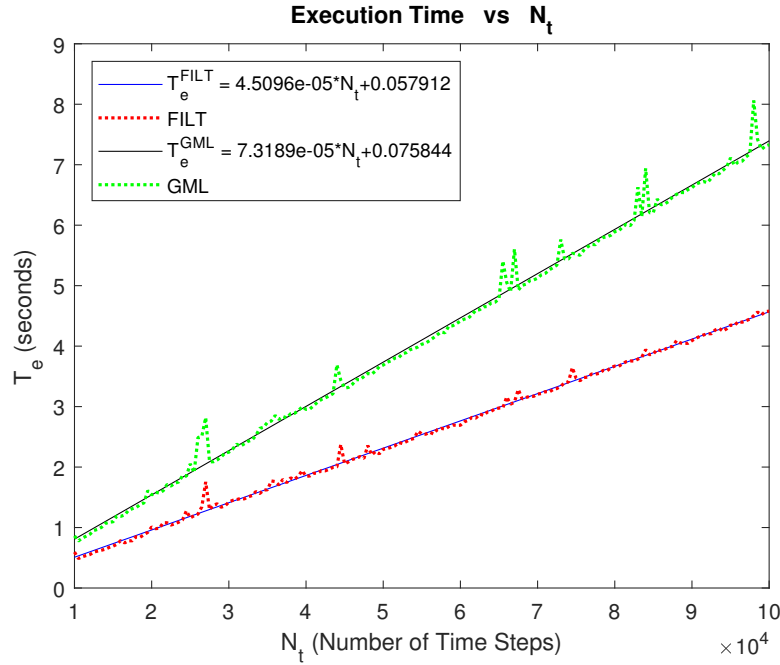
Σχήμα 2.4: Σύγκριση χρονικών αποκρίσεων, που προέκυψαν με τη χρήση της αναλυτικής σχέσης (2.7) καθώς και με τη χρήση της μεθόδου FILT.

Στο παραπάνω διαγράμμα με τον όρο «Theoretical» αναφερόμαστε στην αναλυτική λύση. Από τα αποτελέσματα είναι φανερό η «συμφωνία» των 2 μεθόδων, καθώς η ακρίβεια που επιτυγχάνεται (της τάξης του 10^{-8}) είναι εξαιρετική.

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει στο σημείο αυτό είναι το εξής: εφόσον τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης «συμφωνούν» σε εξαιρετικό βαθμό με τα αποτελέσματα της μεθόδου FILT και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η ανάλυση της 2^{ης} μεθόδου (παράγραφοι §2.2.1 και §2.2.2) είναι όχι μόνο πιο περίπλοκη αλλά και σαφώς εκτενέστερη σε σχέση με την αντίστοιχη της 1^{ης} μεθόδου (παράγραφος §2.1.1 ή §2.1.2), τότε πώς δικαιολογείται η ανάγκη χρήσης του FILT στη συγκεκριμένη περίπτωση;

Η απάντηση είναι ότι παρόλο που η χρήση του FILT ΔΕΝ είναι ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ, είναι

ΠΙΟ ΓΡΗΓΟΡΗ! Η διαπίστωση αυτή γίνεται πιο ξεκάθαρη με τη βοήθεια του παρακάτω διαγράμματος, όπου απεικονίζονται οι χρόνοι υπολογισμού $T_e(sec)$ της χρονικής απόκρισης του μοντέλου Raicu ($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$) για τις δύο μεθόδους A και B ως συνάρτηση του αριθμού χρονικών βημάτων N_t .



Σχήμα 2.5: Χρόνοι υπολογισμού $T_e(sec)$ της χρονικής απόκρισης του μοντέλου Raicu ($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$) για τις δύο μεθόδους A και B ως συνάρτηση του αριθμού χρονικών βημάτων N_t

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Στο παραπάνω διάγραμμα:

1. η μεταβλητή T_e^{GML} αναφέρεται στο χρόνο υπολογισμού της χρονικής απόκρισης με τη μέθοδο A. Συγκεκριμένα για τον υπολογισμό της γενικευμένης συνάρτησης Mittag-Leffler (2.6) στη σχέση (2.7) χρησιμοποιήθηκε η υλοποίηση του καθηγητή Roberto Garrappa (version 1.3.0.0).
2. η μεταβλητή T_e^{FILT} αναφέρεται στο χρόνο υπολογισμού της χρονικής απόκρισης με τη μέθοδο B, όπου χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα της παραγράφου §2.2.3.
3. με διακεκομμένες γραμμές απεικονίζονται οι υπολογιστικοί χρόνοι των 2 αλγορίθμων, ενώ οι συνεχείς γραμμές απεικονίζουν τα γραμμικά μοντέλα που έχουν προσαρμοστεί στους υπολογιστικούς χρόνους. Με βάση τα μοντέλα αυτά παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές T_e^{GML} και T_e^{FILT} αποτελούν γραμμικές αύξουσες συναρτήσεις του αριθμού χρονικών βημάτων N_t .

4. η μέθοδος B είναι πιο γρήγορη από τη μέθοδο A, χωρίς ωστόσο οι χρόνοι υπολογισμού να διαφέρουν πολύ. Παρ' όλα αυτά, όσο μεγαλύτερο το N_t τόσο μεγαλύτερη γίνεται και η διαφορά $\Delta T = T_e^{GML} - T_e^{FILT}$.

Κεφάλαιο 3

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Στο δεύτερο βήμα θα προσεγγίσουμε την χρονική απόκριση $\varepsilon_r(t)$ της σχετικής διαπερατότητας του διηλεκτρικού υλικού Raicu, που έχει προκύψει από το πρώτο βήμα, με ένα πεπερασμένο άθροισμα αποσβενύμενων εκθετικών. Για αρχή, μοντελοποιούμε το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε.

Πρόβλημα

Για δεδομένη φθίνουσα συνάρτηση $f(t)$, η οποία ανήκει στην κατηγορία των «Πλήρως Μονότονων Συναρτήσεων», να προσδιοριστούν οι μεταβλητές:

$$\bullet \quad M \in \mathbb{N}^* \quad (3.1)$$

$$\bullet \quad w_m, v_m \in \mathbb{R}_+ \quad \forall m = 1, \dots, M \quad (3.2)$$

ώστε:

$$f(t) = \sum_{m=1}^M w_m e^{-v_m t} \quad t > 0 \quad (3.3)$$

Επιλυσιμότητα Προβλήματος

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει από το παραπάνω πρόβλημα είναι αν η επίλυσή του είναι πράγματι δυνατή. Τοποθετώντας λίγο διαφορετικά το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχει κάποιο «στοιχείο» που να «σηματοδοτεί» ότι μπορούν να βρεθούν μεταβλητές M (**αριθμός αποσβενύμενων εκθετικών**), w_m (**συντελεστές «βάρους»**), v_m (**συντελεστές εκθετικών**) που ικανοποιούν τις σχέσεις (3.1) και (3.2) αντίστοιχα, ώστε να ικανοποιείται η ισότητα της (3.3) ;

Το «κλειδί» για την απάντηση του ερωτήματος αυτού είναι το γεγονός ότι αποδεικνύεται

ότι η συνάρτηση χρονικής απόκρισης για τα μοντέλα τύπου Raicu ανήκει στην κατηγορία των «Πλήρως Μονότονων Συναρτήσεων» των οποίων ο ορισμός φαίνεται παρακάτω:

Ορισμός (Πλήρως Μονότονες Συναρτήσεις)

Μία συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται Πλήρως Μονότονη στο $(0, +\infty)$, αν υπάρχουν όλες οι παράγωγοι της f και ισχύει $(-1)^k f^{(k)}(t) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ και $t > 0$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση

$$g(t) = \sum_{m=1}^M w_m e^{-v_m t} \quad t > 0$$

ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό, το οποίο αποτελεί «δυνατό στοιχείο» για την επιλυσιμότητα του αρχικού προβλήματος.

3.1 Η μέθοδος Prony

Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος στην αρχή του κεφαλαίου αυτού είναι η μέθοδος του Prony. Αρχικά, να σημειωθεί ότι ο τρόπος επιλογής του M θα περιγραφεί παρακάτω. Επομένως, για τυχόν M , που ικανοποιεί την (3.1), θεωρούμε $N_t + 1$ δείγματα της f στις χρονικές στιγμές:

$$t_k = k\Delta t \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_t \quad (3.4)$$

όπου Δt η σταθερά δειγματοληψίας, την οποία επιλέγουμε εμείς. Συνεπώς, τα δείγματα που λαμβάνουμε είναι τα:

$$f_k = f(t_k) = f(t) \Big|_{t=t_k} \quad (3.5)$$

Δειγματοληπτώντας την (3.3) στα σημεία που υποδηλώνει η (3.4) και λαμβάνοντας υπόψη την (3.5) έχουμε:

$$f_k = \sum_{m=1}^M w_m e^{-kv_m \Delta t} = \sum_{m=1}^M w_m x_m^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_t \quad (3.6)$$

όπου:

$$x_m = e^{-v_m \Delta t} \quad m = 1, \dots, M \quad (3.7)$$

Στην (3.6) εισάγουμε τους συντελεστές Prony p_j , $j = 0, 1, \dots, M$, επομένως $\forall k = 0, 1, \dots, N_t$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
 f_{k+j}p_j &= p_j \sum_{m=1}^M w_m x_m^{k+j} \Leftrightarrow \\
 \sum_{j=0}^M f_{k+j}p_j &= \sum_{j=0}^M p_j \sum_{m=1}^M w_m x_m^{k+j} = \sum_{m=1}^M w_m x_m^k \sum_{j=0}^M p_j x_m^j \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^M f_{k+j}p_j &= \sum_{m=1}^M w_m x_m^k P(x_m)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

όπου:

$$P(x) = \sum_{j=0}^M p_j x^j \tag{3.9}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο Prony.

Στο σημείο αυτό απαιτούμε:

$$\sum_{j=0}^M f_{k+j}p_j = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, N_t \tag{3.10}$$

Λόγω της (3.10), η (3.8) δίνει:

$$\sum_{m=1}^M w_m x_m^k P(x_m) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, N_t \tag{3.11}$$

Εφόσον, λόγω της (3.2), ισχύει ότι $w_m, x_m \neq 0 \quad \forall m = 1, \dots, M$, για να ισχύει η (3.11) $\forall k = 0, 1, \dots, N_t$ θα πρέπει:

$$P(x_m) = \sum_{j=0}^M p_j x_m^j = 0 \quad \forall m = 1, \dots, M \tag{3.12}$$

Παρατηρούμε ότι η (3.12), η οποία είναι ανεξάρτητη του k , αποτελεί ουσιαστικά μία εξίσωση εύρεσης ριζών πολυωνύμου βαθμού- M . Επομένως για την εύρεση των συντελεστών $w_m, x_m \quad \forall m = 1, \dots, M$ θα χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (3.10)→(3.12)→(3.6) με αυτήν τη σειρά. Άρα έχουμε:

ΒΗΜΑ 1: προσδιορισμός των συντελεστών Prony

Η (3.10) γράφεται σε μορφή συστήματος εξισώσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} f_0 p_0 + \dots + f_M p_M &= 0 \\ f_1 p_0 + \dots + f_{M+1} p_M &= 0 \\ &\vdots \\ f_k p_0 + \dots + f_{M+k} p_M &= 0 \end{aligned}$$

Από το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι φανερό ότι αρκεί $\max[k] = M$ ώστε να λυθεί το σύστημα ως προς p_0, p_1, \dots, p_M , οπότε αντίστοιχα χρειάζονται μόνο οι πρώτες $2M + 1$ τιμές της f : f_0, f_1, \dots, f_{2M} .

Ωστόσο, επειδή συνήθως $N_t \gg M$, με τον παραπάνω τρόπο δεν λαμβάνουμε επαρκή αριθμό δειγμάτων της f με αποτέλεσμα η επίλυση του συστήματος να μην δώσει ικανοποιητικές τιμές στους συντελεστές Prony, αφού για τον υπολογισμό τους θα ληφθεί υπόψη μόνο ένα μικρό «κομμάτι» της f , διότι $2M + 1 \ll N_t$.

Για τον λόγο αυτό είναι σωστότερο και πιο ακριβές να επιλέξουμε πλήθος δειγμάτων αρκετά μεγαλύτερο από M . Στην περίπτωση που στον υπολογισμό των παραμέτρων Prony λάβουμε υπόψη όλα τα δείγματα της f , θα προκύψει το παρακάτω υπερπροσδιορισμένο γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} f_0 p_0 + f_1 p_1 + \dots + f_M p_M &= 0 \\ f_1 p_0 + f_2 p_1 + \dots + f_{M+1} p_M &= 0 \\ &\vdots \\ f_{N_t-M} p_0 + f_{N_t-M+1} p_1 + \dots + f_{N_t} p_M &= 0 \end{aligned}$$

Επιλέγουμε:

$$p_0 = 1 \tag{3.13}$$

και το σύστημα των εξισώσεων τροποποιείται στο παρακάτω:

$$\begin{aligned} f_1 p_1 + \dots + f_M p_M &= -f_0 \\ f_2 p_1 + \dots + f_{M+1} p_M &= -f_1 \\ &\vdots \\ f_{N_t-M+1} p_1 + \dots + f_{N_t} p_M &= -f_{N_t-M} \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{b} \tag{3.14}$$

με:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_M & f_{M-1} & \cdots & f_1 \\ f_{M+1} & f_M & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N_t} & f_{N_t-1} & \cdots & f_{N_t-M+1} \end{bmatrix}}_{(N_t-M+1) \times M} \quad \tilde{\mathbf{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_M \\ p_{M-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{bmatrix}}_{M \times 1} \quad \mathbf{b} = - \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N_t-M} \end{bmatrix}}_{(N_t-M+1) \times 1} \quad (3.15)$$

όπου κάτω από τους πίνακες αναγράφονται οι διαστάσεις τους. Επιλύοντας το σύστημα (3.14), με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (LMS, Least Mean Squares) (3.24), προκύπτει:

$$\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} \quad (3.16)$$

όπου $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ ο ψευδο-αντίστροφος πίνακας του \mathbf{A} . Επομένως, από τις (3.13) και (3.16), λαμβάνουμε τους συνολικά $M + 1$ συντελεστές Prony:

$$\mathbf{p} = [\tilde{\mathbf{p}}^T p_0] \quad (3.17)$$

ΒΗΜΑ 2: προσδιορισμός των εκθετικών συντελεστών

Από τη σχέση (3.12) είναι φανερό ότι τα x_m , $m = 1, \dots, M$ αποτελούν τις M -ρίζες της εξίσωσης:

$$P(x) = \sum_{j=0}^M p_j x^j = p_M x^M + p_{M-1} x^{M-1} + \dots + p_1 x + p_0 = 0 \quad (3.18)$$

και από την (3.7) λαμβάνουμε τους εκθετικούς συντελεστές:

$$v_m = -\frac{\ln x_m}{\Delta t} \quad m = 1, \dots, M \quad (3.19)$$

ΒΗΜΑ 3: προσδιορισμός των συντελεστών «βάρους»

Όπως και στο ΒΗΜΑ 1, προκειμένου να ληφθεί υπόψη ολόκληρη η συμπεριφορά της f και να υπολογιστούν οι σωστοί συντελεστές βάρους, θα χρησιμοποιηθούν όλες οι τιμές της f . Συνεπώς, από την (3.6) προκύπτει το παρακάτω υπερπροσδιορισμένο γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} w_1 x_1^0 &+ w_2 x_2^0 + \dots + w_M x_M^0 &= f_0 \\ w_1 x_1^1 &+ w_2 x_2^1 + \dots + w_M x_M^1 &= f_1 \\ &\vdots & \\ w_1 x_1^{N_t} &+ w_2 x_2^{N_t} + \dots + w_M x_M^{N_t} &= f_{N_t} \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (3.20)$$

με:

$$\mathbf{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N_t} & x_2^{N_t} & \cdots & x_M^{N_t} \end{bmatrix}}_{(N_t+1) \times M} \quad \mathbf{w} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}}_{M \times 1} \quad \mathbf{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N_t} \end{bmatrix}}_{(N_t+1) \times 1} \quad (3.21)$$

όπου κάτω από τους πίνακες αναγράφονται οι διαστάσεις τους. Επιλύοντας το σύστημα (3.20), με χρήση της μεθόδου LMS (3.24), προκύπτει:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{f} = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{f} \quad (3.22)$$

όπου $\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ ο ψευδο-αντίστροφος πίνακας του \mathbf{X} .

ΒΗΜΑ 4: προσδιορισμός του αριθμού των αποσβενύμενων εκθετικών (M)

Έπειτα από δοκιμές στο Matlab συμπεραίνουμε ότι:

1. υπάρχει μία μέγιστη τιμή του M , η $M_{max}^{(1)}$, καθώς για $M > M_{max}^{(1)}$ δεν είναι δυνατή η επίλυση του συστήματος (3.20) με τη μέθοδο LMS, διότι δεν μπορεί να γίνει ο υπολογισμός του SVD του πίνακα \mathbf{X} .
2. επίσης υπάρχει μία ακόμη μέγιστη τιμή του M , η $M_{max}^{(2)}$, καθώς για $M > M_{max}^{(2)}$ $\exists m \in \mathbb{N}^*$ με $m \leq M : w_m < 0$, το οποίο δεν ικανοποιεί την (3.2).
3. ισχύει ότι $M_{max}^{(1)} > M_{max}^{(2)}$
4. για μικρές τιμές του M (πχ. $M = 1, 2$ ή 3) η προσέγγιση της $f(t)$ δεν είναι καλή.

Λαμβάνοντας υπόψη τις 4 παραπάνω παρατηρήσεις το M επιλέγεται ώστε να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$M \leq \min [M_{max}^{(1)}, M_{max}^{(2)}] = M_{max}^{(2)} \quad (3.23)$$

Συνήθως, για τον καθορισμό του M δοκιμάζουμε τις τιμές: $M_{max}^{(2)}$, $M_{max}^{(2)} - 1$ ή $M_{max}^{(2)} - 2$ και κρατάμε εκείνη που πετυχαίνει την καλύτερη προσέγγιση της f .

Σημείωση: η μέθοδος LMS

Προτού παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της μεθόδου Prony, θα γίνει μία σύντομη αναφορά στην μέθοδο LMS, που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως. Έστω το παρακάτω overdetermined γραμμικό σύστημα:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

όπου \mathbf{A} , \mathbf{x} και \mathbf{b} πίνακες με διαστάσεις $(N \times M)$, $(M \times 1)$ και $(N \times 1)$ αντίστοιχα, με $N > M$. Η συγκεκριμένη μέθοδος, προκειμένου να λύσει το παραπάνω σύστημα, ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα. Συγκεκριμένα, αν

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$$

το απόλυτο σφάλμα, τότε η LMS ελαχιστοποιεί την $2^{\text{η}}$ νόρμα του διανύσματος \mathbf{e} , δηλαδή:

$$\mathbf{x} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \left\{ |\mathbf{e}|^2 \right\} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \left\{ |\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \right\}$$

Είναι:

$$|\mathbf{e}|^2 = \sum_{i=1}^N \left(b_i - \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} x_j \right)^2$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \min \{|\mathbf{e}|\}^2 &\Leftrightarrow \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, M \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N 2 \left(b_i - \sum_{j=1}^M \alpha_{ij} x_j \right) \alpha_{ij} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, M \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.24)$$

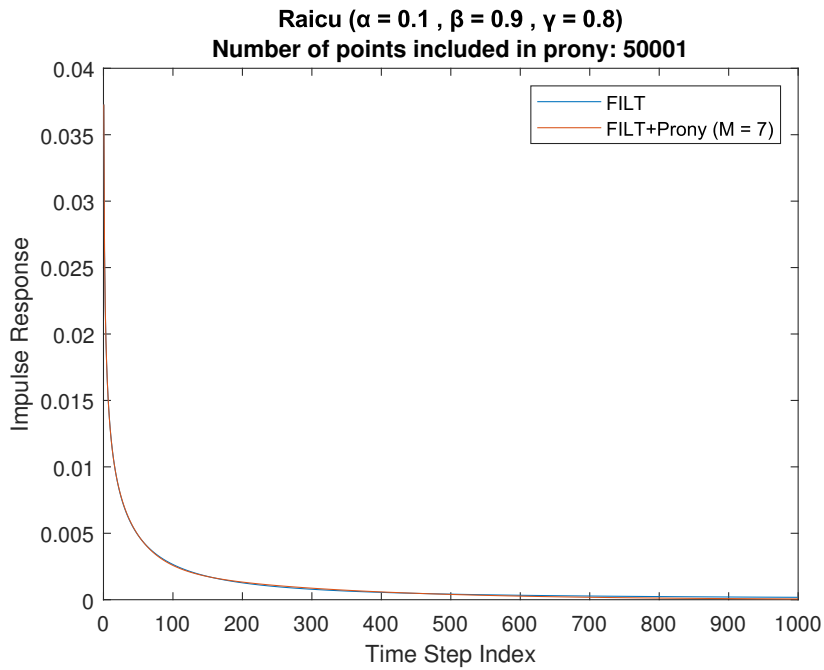
όπου:

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

ο ψευδο-αντίστροφος του \mathbf{A} .

3.2 Αποτελέσματα - Διαγράμματα

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Prony στο μοντέλο Raicu ($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$) και επιλέγοντας $\mathbf{M} = 7$ προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 3.1: Προσέγγιση της χρονικής απόκρισης του μοντέλου Raicu ($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$) με χρήση της μεθόδου Prony.

Στο παραπάνω διάγραμμα η καμπύλη χρώματος μπλέ αντιστοιχεί στη χρονική απόκριση του μοντέλου Raicu ($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$) υπολογισμένη με χρήση του FILT, σύμφωνα με την αντίστοιχη ανάλυση του κεφαλαίου 2, ενώ η καμπύλη με κόκκινο χρώμα προέκυψε με εφαρμογή της μεθόδου Prony στη συνάρτηση που αναπαριστά η μπλέ καμπύλη.

Η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι της τάξης του 10^{-4} και είναι καλή, ενώ οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών βάρους (\mathbf{w}) και των συντελεστών (\mathbf{x}), που προέκυψαν, παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

	\mathbf{w}	\mathbf{x}
1.	0.002777	0.99610
2.	0.009010	0.97463
3.	0.006813	0.89879
4.	0.008353	0.73185
5.	0.001880	0.48307
6.	0.007451	0.21699
7.	0.000993	0.03276

Οι μεταβλητές αυτές θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο κεφάλαιο για την υλοποίηση της μεθόδου FDTD.

Κεφάλαιο 4

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FDTD

4.1 Διακριτοποίηση των εξισώσεων του Maxwell

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις στροφής του Maxwell δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r(t) * \mathbf{E} \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου \mathbf{D} , \mathbf{E} και \mathbf{H} τα χρονικά διανύσματα της διηλεκτρικής μετατόπισης (Cb/m^2), της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (V/m) και της έντασης του μαγνητικού πεδίου (A/m) αντίστοιχα.

Επίσης, η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί να γραφεί και στο πεδίο της συχνότητας ως: $\mathbf{D}(s) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(s) \mathbf{E}(s)$, με $s = j\omega$, όπου ω η γωνιακή συχνότητα (rad/s). Στην περίπτωση του υλικού Raicu ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$) ισχύει ότι:

$$\varepsilon_r(s) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_s}{\left((s\tau)^\alpha + (s\tau)^\gamma\right)^\beta} = \varepsilon_\infty + \varepsilon_R(s) \Delta\varepsilon\tag{4.2}$$

όπου:

$$\varepsilon_R(s) = \frac{1}{\left((s\tau)^\alpha + (s\tau)^\gamma\right)^\beta}\tag{4.3}$$

Κανονικοποιούμε τις (4.1) θεωρώντας:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} \quad , \quad \tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \mathbf{D} \quad , \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\tag{4.4}$$

και λαμβάνοντας τον Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace στην 2η σχέση από τις (4.1), προκύπτουν οι παρακάτω κανονικοποιημένες εξισώσεις στροφής του Maxwell

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(t) = \varepsilon_r(t) * \tilde{\mathbf{E}}(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \quad (4.7)$$

Στο κεφάλαιο 2 αποδείχθηκε, ότι από την $\varepsilon_R(s)$ (σχέση 4.3) μπορεί να βρεθεί μέσω του FILT η χρονική απόκριση $\varepsilon_R(t)$, η οποία, όπως αποδείχθηκε στο κεφάλαιο 3, μπορεί να προσεγγιστεί με ένα πεπεραμένο άθροισμα αποσβενύμενων εκθετικών ως εξής:

$$\varepsilon_R(t) = \sum_{i=1}^M \hat{w}_i e^{-v_i t} \quad (4.8)$$

Αντιστρέφοντας την (4.2) κατά Laplace και λαμβάνοντας υποψη τις (4.3) και (4.8) προκύπτει:

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_\infty \delta(t) + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M \hat{w}_i e^{-v_i t} \quad (4.9)$$

Αντικαθιστούμε την (4.9) στην (4.6) και έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}(t) &= \left\{ \varepsilon_\infty \delta(t) + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M \hat{w}_i e^{-v_i t} \right\} * \tilde{\mathbf{E}}(t) \\ &= \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}(t) + \Delta\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}(t) * \sum_{i=1}^M \hat{w}_i e^{-v_i t} \\ &= \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}(t) + \Delta\varepsilon \mathbf{S}(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &\triangleq \tilde{\mathbf{E}}(t) * \sum_{i=1}^M \hat{w}_i e^{-v_i t} \\ &= \int_0^t \left(\sum_{i=1}^M \hat{w}_i e^{-v_i(t-t')} \right) \tilde{\mathbf{E}}(t') dt' \\ &= \sum_{i=1}^M \hat{w}_i \int_0^t e^{-v_i(t-t')} \tilde{\mathbf{E}}(t') dt' \end{aligned} \quad (4.11)$$

Διακριτοποιούμε την τελευταία σχέση και το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται με άθροισμα:

$$\mathbf{S}^n = \sum_{i=1}^M \hat{w}_i \Delta t \sum_{j=0}^n e^{-v_i \Delta t(n-j)} \tilde{\mathbf{E}}^j = \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i^n \quad (4.12)$$

όπου για:

$$w_i \triangleq \hat{w}_i \Delta t \quad (4.13)$$

είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^n &\triangleq w_i \sum_{j=0}^n e^{-v_i \Delta t(n-j)} \tilde{\mathbf{E}}^j \\ &= w_i \left(\tilde{\mathbf{E}}^n + e^{-v_i \Delta t} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-v_i \Delta t(n-1-j)} \tilde{\mathbf{E}}^j \right) \\ &= w_i \tilde{\mathbf{E}}^n + e^{-v_i \Delta t} w_i \sum_{j=0}^{n-1} e^{-v_i \Delta t(n-1-j)} \tilde{\mathbf{E}}^j \quad \stackrel{(4.14)}{\Longleftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{A}_i^n = e^{-v_i \Delta t} \mathbf{A}_i^{n-1} + w_i \tilde{\mathbf{E}}^n \quad i = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.14)$$

Για:

$$x_i = e^{-v_i \Delta t} \quad (4.15)$$

προκύπτει:

$$\mathbf{A}_i^{n+1} = x_i \mathbf{A}_i^n + w_i \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} \quad i = 1, \dots, M \quad (4.16)$$

Διακριτοποιώντας την (4.10) και λόγω της (4.12) προκύπτουν:

- $\tilde{\mathbf{D}}^n = \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}^n + \Delta \varepsilon \mathbf{S}^n = \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}^n + \Delta \varepsilon \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i^n$
- $\tilde{\mathbf{D}}^{n+1} = \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} + \Delta \varepsilon \mathbf{S}^{n+1} = \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} + \Delta \varepsilon \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i^{n+1}$

Αφαιρώντας τις 2 παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{D}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{D}}^n &= \varepsilon_\infty \left(\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{E}}^n \right) + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M \left(\mathbf{A}_i^{n+1} - \mathbf{A}_i^n \right) \stackrel{(4.16)}{=} \\
 &= \varepsilon_\infty \left(\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{E}}^n \right) + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M \left((x_i - 1)\mathbf{A}_i^n + w_i \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} \right) \\
 &= \left(\varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M w_i \right) \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} - \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}^n + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M (x_i - 1)\mathbf{A}_i^n \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Διακριτοποιούμε την (4.5) και έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{\mathbf{D}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{D}}^n}{\Delta t} &= c_0 \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \Big|^{n+\frac{1}{2}} \stackrel{(4.17)}{\Longleftrightarrow} \\
 \left(\varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M w_i \right) \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} - \varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}^n + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M (x_i - 1)\mathbf{A}_i^n &= c_0 \Delta t \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \Big|^{n+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} = \frac{\varepsilon_\infty \tilde{\mathbf{E}}^n + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M (1 - x_i)\mathbf{A}_i^n + c_0 \Delta t \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \Big|^{n+\frac{1}{2}}}{\varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^M w_i} \quad (4.18)$$

Τέλος, διακριτοποιώντας την (4.7) έχουμε:

$$\frac{\tilde{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -c_0 \Delta t \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \Big|^n \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}} - c_0 \Delta t \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \Big|^n \quad (4.19)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Στον αλγόριθμο FDTD απαιτούνται ΜΟΝΟ οι σχέσεις: (4.16),(4.18) και (4.19) για την ενημέρωση των $\mathbf{A}_i, i = 1, \dots, M$, $\tilde{\mathbf{E}}$ και $\tilde{\mathbf{H}}$.

4.2 Μονοδιάστατο πρόβλημα (1D-problem)

Στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο κατά \mathbf{x} , οπότε το μαγνητικό πεδίο θα είναι πολωμένο κατά \mathbf{y} , δηλαδή:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_x \hat{\mathbf{x}} \quad \text{και} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{H}_y \hat{\mathbf{y}}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αν q ο χωρικός δείκτης, οι τελεστές στροφής προσεγγίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\bullet \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} \Big|_q^{n+\frac{1}{2}} = -\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} \Big|_q^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\tilde{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(q+1/2) - \tilde{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(q-1/2)}{\Delta z} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.20)$$

$$\bullet \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \Big|_{q+\frac{1}{2}}^{n+1} = \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} \Big|_{q+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{\tilde{E}_x^{n+1}(q+1) - \tilde{E}_x^{n+1}(q)}{\Delta z} \hat{\mathbf{y}} \quad (4.21)$$

Θεωρούμε τους εξής συμβολισμούς:

$$\tilde{E}_x^n(q) \equiv \mathcal{E}_q^n \quad \text{και} \quad \tilde{H}_y^n(q) \equiv \mathcal{H}_q^n \quad (4.22)$$

Λόγω της μονοδιάστατης μορφής του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου και των σχέσεων (4.20)-(4.22), οι (4.16),(4.18) και (4.19) γίνονται αντίστοιχα:

$$A_{q,i}^{n+1} = x_i A_{q,i}^n + w_i \mathcal{E}_q^{n+1} \quad i = 1, \dots, M \quad (4.23)$$

$$\mathcal{E}_q^{n+1} = \frac{\varepsilon_\infty}{L} \mathcal{E}_q^n + \frac{\Delta \varepsilon}{L} \sum_{i=1}^M (1 - x_i) A_{q,i}^n - \frac{c_0 \Delta t}{L \Delta z} \left(\mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} - \mathcal{H}_{q-1/2}^{n+1/2} \right) \quad (4.24)$$

$$\mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{H}_{q+1/2}^{n-1/2} - \frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} \left(\mathcal{E}_{q+1}^n - \mathcal{E}_q^n \right) \quad (4.25)$$

όπου:

$$L = \varepsilon_\infty + \Delta \varepsilon \sum_{i=1}^M w_i \quad (4.26)$$

Οι σχέσεις (4.23),(4.24) και (4.26) ισχύουν όταν το κύμα διαδίδεται μέσα στο υλικό διασποράς. Στην περίπτωση διάδοσης στον κενό χώρο, η σχέση ενημέρωσης του μαγνητικού πεδίου παραμένει η ίδια, ενώ του ηλεκτρικού πεδίου απλοποιείται στην παρακάτω:

$$\mathcal{E}_q^{n+1} = \mathcal{E}_q^n - \frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} \left(\mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} - \mathcal{H}_{q-1/2}^{n+1/2} \right) \quad (4.27)$$

4.3 Ανάλυση ευστάθειας και επιλογή των Δt και Δz

Για την ανάλυση της ευστάθειας του σχήματος FDTD των εξισώσεων (4.23)-(4.26) θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος von Neumann. Έστω η μιγαδική σειρά Fourier για το μέγεθος \mathcal{V} :

$$\mathcal{V}(z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_m(z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(t) e^{jk_m z}$$

όπου $C_m(t)$ συντελεστές που εξαρτώνται αποκλειστικά από τον χρόνο και $k_m = 2\pi/\lambda_m$ ο κυματικός αριθμός που αντιστοιχεί στο μήκος κύματος λ_m . Μια γενική συνιστώσα της σειράς αυτής είναι η:

$$\mathcal{V}_m(z, t) = C_m(t) e^{jk_m z} \quad (4.28)$$

η οποία μπορεί να διακριτοποιηθεί ως:

$$\mathcal{V}_q^n = C(t^n) e^{jkq\Delta z}$$

και τότε οι τιμές \mathcal{V}_{q+1}^n και \mathcal{V}_q^n στο πλέγμα σχετίζονται στο πεδίο Fourier με τη διαφορά φάσης:

$$\mathcal{V}_{q+1}^n = C(t^n) e^{jk(q+1)\Delta z} = C(t^n) e^{jkq\Delta z} e^{jk\Delta z} = \mathcal{V}_q^n e^{jk\Delta z}$$

ενώ οι τιμές $\mathcal{V}_{q+1/2}^n$ και $\mathcal{V}_{q-1/2}^n$ στο πλέγμα σχετίζονται στο πεδίο Fourier με τη διαφορά φάσης:

$$\mathcal{V}_{q-1/2}^n = C(t^n) e^{jk(q-1/2)\Delta z} = C(t^n) e^{jk(q+1/2)\Delta z} e^{-jk\Delta z} = \mathcal{V}_{q+1/2}^n e^{-jk\Delta z}$$

Δεδομένου ότι η (4.28) εκφράζει τη μεταβολή τόσο του ηλεκτρικού όσο και του μαγνητικού πεδίου, εφαρμόζοντας τις 2 τελευταίες σχέσεις για τα μεγέθη \mathcal{E} και \mathcal{H} αντίστοιχα, προκύπτουν:

$$\mathcal{E}_{q+1}^n = \mathcal{E}_q^n e^{jk\Delta z} \quad (4.29)$$

$$\mathcal{H}_{q-1/2}^{n+1/2} = \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} e^{-jk\Delta z} \quad (4.30)$$

Η (4.29) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{q+1}^n - \mathcal{E}_q^n &= \mathcal{E}_q^n (e^{jk\Delta z} - 1) = e^{jk\Delta z/2} \mathcal{E}_q^n (e^{jk\Delta z/2} - e^{-jk\Delta z/2}) \\ &= 2j e^{jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) \mathcal{E}_q^n \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση που προέκυψε στην (4.25) λαμβάνουμε:

$$\mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} - j \frac{2c_0 \Delta t}{\Delta z} e^{jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) \mathcal{E}_q^n$$

$$= c_{he} \mathcal{E}_q^n + 1 \cdot \mathcal{H}_{q+1/2}^{n-1/2} + 0 \quad (4.31)$$

όπου:

$$c_{he} = -j \frac{2c_0 \Delta t}{\Delta z} e^{jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) \quad (4.32)$$

Επιπλέον, οι (4.23) και (4.30) γράφονται αντίστοιχα:

$$A_{q,i}^n = x_i A_{q,i}^{n-1} + w_i \mathcal{E}_q^n \quad i = 1, \dots, M$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} - \mathcal{H}_{q-1/2}^{n+1/2} &= \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} (1 - e^{-jk\Delta z}) = \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} e^{-jk\Delta z/2} (e^{jk\Delta z/2} - e^{-jk\Delta z/2}) \\ &= 2j e^{-jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις στην (4.24) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^{n+1} &= \frac{\varepsilon_\infty}{L} \mathcal{E}_q^n + \frac{\Delta \varepsilon}{L} \sum_{i=1}^M (1 - x_i) (x_i A_{q,i}^{n-1} + w_i \mathcal{E}_q^n) - j \frac{2c_0 \Delta t}{L \Delta z} e^{-jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} \\ &= \left(\frac{\varepsilon_\infty}{L} + \frac{\Delta \varepsilon}{L} \sum_{i=1}^M w_i (1 - x_i) \right) \mathcal{E}_q^n - j \frac{2c_0 \Delta t}{L \Delta z} e^{-jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} \\ &\quad + \frac{\Delta \varepsilon}{L} \sum_{i=1}^M x_i (1 - x_i) A_{q,i}^{n-1} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση που προέκυψε το $\mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2}$ από την (4.31) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^{n+1} &= \left(\frac{\varepsilon_\infty}{L} + \frac{\Delta \varepsilon}{L} \sum_{i=1}^M w_i (1 - x_i) - j \frac{2c_0 \Delta t}{L \Delta z} e^{-jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) c_{he} \right) \mathcal{E}_q^n \\ &\quad - j \frac{2c_0 \Delta t}{L \Delta z} e^{-jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right) \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta \varepsilon}{L} \sum_{i=1}^M x_i (1 - x_i) A_{q,i}^{n-1} \\ &= (c'_{ee} + c_{eh} c_{he}) \mathcal{E}_q^n + c_{eh} \mathcal{H}_{q+1/2}^{n-1/2} + c_e \end{aligned} \quad (4.33)$$

όπου:

$$\bullet \quad c'_{ee} = \frac{1}{L} \left\{ \varepsilon_\infty + \Delta \varepsilon \sum_{i=1}^M w_i (1 - x_i) \right\} \quad (4.34)$$

- $c_{eh} = -j \frac{2c_0 \Delta t}{L \Delta z} e^{-jk\Delta z/2} \sin\left(\frac{k\Delta z}{2}\right)$ (4.35)

- c_{he} : δίνεται από τη σχέση (4.32)

- $c_e = \frac{\Delta \varepsilon}{L} \sum_{i=1}^M x_i (1 - x_i) A_{q,i}^{n-1}$ (4.36)

και επίσης, λόγω των (4.32) και (4.35) ισχύει:

$$c_{eh}c_{he} = -\frac{4}{L} \left(\frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right) \quad (4.37)$$

Οι εξισώσεις (4.31) και (4.33) μπορούν να γραφούν με τη μορφή πινάκων όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_q^{n+1} \\ \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c'_{ee} + c_{eh}c_{he} & c_{eh} \\ c_{he} & 1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{C}]} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_q^n \\ \mathcal{H}_{q+1/2}^{n-1/2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για την ευστάθεια της μεθόδου θα πρέπει οι ιδιοτιμές ζ του $[\mathbf{C}]$ να είναι φραγμένες από την 1. Οι ζ υπολογίζονται εάν η ορίζουσα του πίνακα $\{[\mathbf{C}] - \zeta[\mathbf{I}]\}$ τεθεί ίση με 0. Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} c'_{ee} + c_{eh}c_{he} - \zeta & c_{eh} \\ c_{he} & 1 - \zeta \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (c'_{ee} + c_{eh}c_{he} - \zeta)(1 - \zeta) - c_{eh}c_{he} = 0 \\ \Leftrightarrow & (c'_{ee} - \zeta)(1 - \zeta) + c_{eh}c_{he} - \zeta c_{eh}c_{he} = c_{eh}c_{he} \\ \Leftrightarrow & c_{eh}c_{he} = \frac{(c'_{ee} - \zeta)(1 - \zeta)}{\zeta} \xleftrightarrow{(4.37)} \\ \Leftrightarrow & -\frac{4}{L} \left(\frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right) = \frac{(c'_{ee} - \zeta)(1 - \zeta)}{\zeta} \\ \Leftrightarrow & \frac{L(\zeta - c'_{ee})(1 - \zeta)}{4\zeta} = \left(\frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\Delta z}{2} \right) \leq \left(\frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & f(\zeta) \leq \mathcal{C}_{\Delta t, \Delta z}^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

όπου:

- $f(\zeta) = \frac{L(\zeta - c'_{ee})(1 - \zeta)}{4\zeta}$ (4.39)

- $\mathcal{C}_{\Delta t, \Delta z} = \frac{c_0 \Delta t}{\Delta z}$ (4.40)

Να σημειωθεί ότι η f είναι συνάρτηση μόνο του ζ , διότι οι L και c'_{ee} είναι σταθερές για συγκεκριμένο υλικό, όπως εύκολα φαίνεται από τις σχέσεις (4.26) και (4.34) αντίστοιχα. Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει, όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, να ισχύει $0 < \zeta < 1$, ενώ η επιλογή της τιμής $\zeta = 1$, για την οποία το σύστημα είναι οριακά ευσταθές, συνήθως αποφεύγεται κατά τη διαδικασία επιλογής των Δt και Δz .

Για το μοντέλο Raicu($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$) που μελετάμε, προκύπτει $c'_{ee} = 0.6663$. Συνεπώς, όπως εύκολα προκύπτει από την (4.39) θα ισχύει: $f(\zeta) > 0$ για $\zeta \in (0.667, 1)$. Για αυτές τις τιμές του ζ έχει νόημα η $\sqrt{f(\zeta)}$ και επομένως η (4.38) γράφεται ισοδύναμα:

$$C_{\Delta t, \Delta z} \geq \sqrt{f(\zeta)} \stackrel{(4.40)}{\Leftrightarrow} \frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} \geq \sqrt{f(\zeta)} \Leftrightarrow \Delta z \leq \frac{c_0 \Delta t}{\sqrt{f(\zeta)}} \quad , \zeta \in (0.667, 1) \quad (4.41)$$

Επιπλέον, έπειτα από δοκιμές στο Matlab, βρίσκουμε ότι:

$$\max_{\zeta \in (0.667, 1)} \left\{ \sqrt{f(\zeta)} \right\} = 0.1788 \quad (4.42)$$

Επομένως, το σύστημα FDTD των σχέσεων (4.23)-(4.26) είναι ευσταθές $\forall \zeta \in (0.667, 1)$ όταν:

$$\Delta z < \frac{c_0 \Delta t}{\max_{\zeta \in (0.667, 1)} \left\{ \sqrt{f(\zeta)} \right\}} \quad (4.43)$$

Για να υπάρχει «συμφωνία» στη δειγματοληψία των μεθόδων FILT, Prony και του σχήματος FDTD θα πρέπει να επιλέξουμε το ΙΔΙΟ Δt , δηλαδή:

$$\Delta t_{FDTD} = \Delta t_{FILT} = 1.768 ps \quad (4.44)$$

Τότε η (4.43) δίνει: $\Delta z < 0.003m = 3mm$. Επιλέγουμε:

$$\frac{c_0 \Delta t}{\Delta z} = 0.5 \Leftrightarrow \Delta z = 0.011 = 1.1mm < 3mm \quad (4.45)$$

4.4 Συνάρτηση προσπίπτοντος κύματος

Θεωρούμε επίπεδο H/M κύμα, το οποίο διαδίδεται κατά τα θετικά z , με το ηλεκτρικό πεδίο, όπως ήδη έχουμε θεωρήσει στην προηγούμενη ενότητα, να είναι πολωμένο κατά τον άξονα x . Θεωρούμε επίσης, ότι το προσπίπτον κύμα είναι ένας διαμορφωμένος Γκαουσιανός παλμός (Modulated Gaussian Pulse) και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{inc}(t) = e^{-\alpha^2(t-4/\alpha)^2} \sin\left(2\pi f_e(t - 4/\alpha)\right) u(t) \hat{\mathbf{x}} \quad (4.46)$$

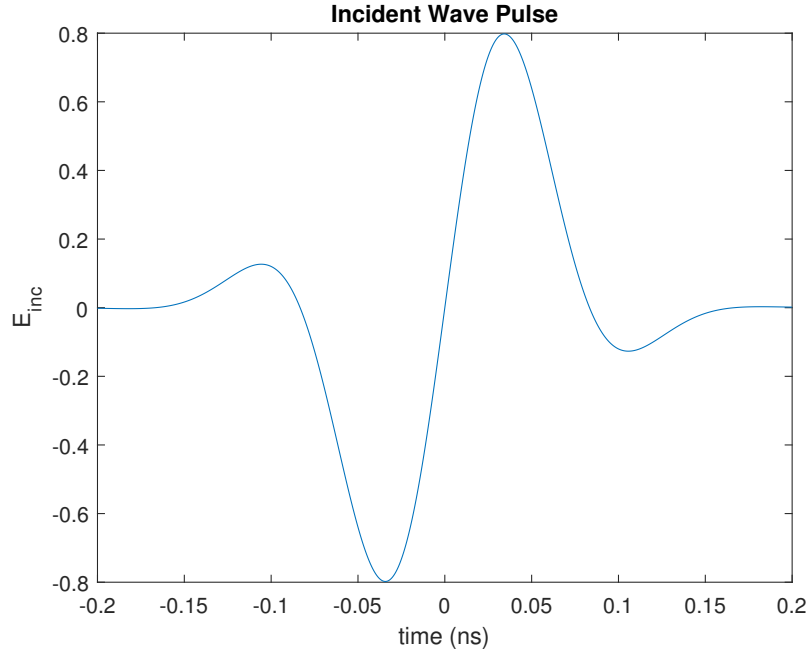
όπου:

- $\alpha = 1.26 \times 10^{10} \text{sec}^{-1}$
- $f_e = 6 \text{ GHz}$, η κεντρική συχνότητα

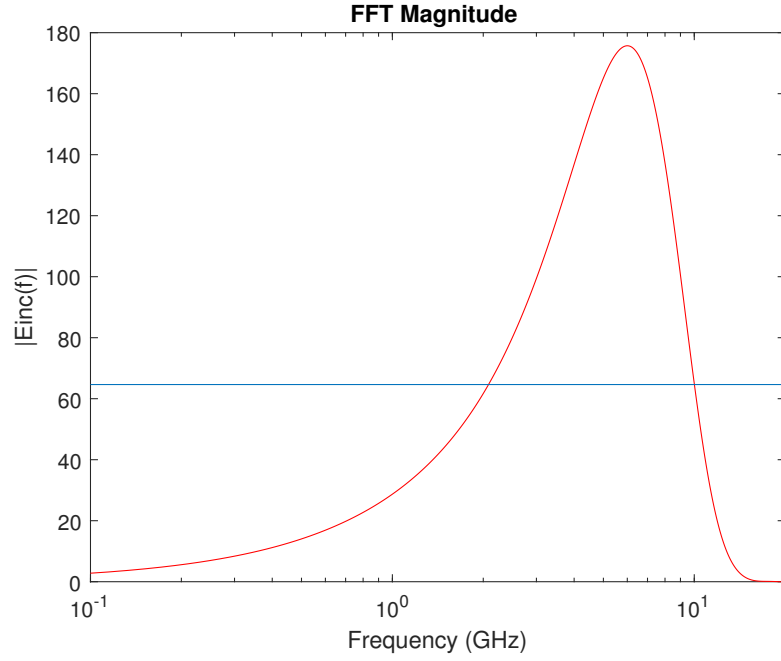
Η διακριτή μορφή της (4.46) και η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην υλοποίηση του FDTD είναι η εξής:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{inc}^n = \tilde{\mathbf{E}}_{inc}(t) \Big|_{t=n\Delta t} = e^{-\alpha^2(n\Delta t - 4/\alpha)^2} \sin\left(2\pi f_e(n\Delta t - 4/\alpha)\right) u(n) \hat{\mathbf{x}} \quad (4.47)$$

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα του Γκαουσιανού παλμού της (4.46) τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας.



Σχήμα 4.1: Το προσπίπτον κύμα στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 4.2: Το προσπίπτον κύμα στο πεδίο της συχνότητας.

4.5 Τελικός Αλγόριθμος FDTD

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν οι τελικοί αλγόριθμοι FDTD στον κενό χώρο καθώς και στο υλικό διασποράς.

FDTD Algorithm: FREE SPACE

- 1) Set: Q (number of space cells) and N (number of time steps)
- 2) Set: Δt (time step) and Δz (cell size) according to Courant's condition
- 3) Initialization: $\mathcal{E}^{1 \times Q}$, $\mathcal{H}^{1 \times Q}$
- 4) START LOOP ($n = 1, 2, \dots, N$)
 - a. Update $\mathcal{E} \rightarrow$ use of (4.27)
 - b. Calculate incident wave $\mathcal{E}|_{k=k_{inc}} \rightarrow$ use of (4.47)
 - c. Update $\mathcal{H} \rightarrow$ use of (4.25)

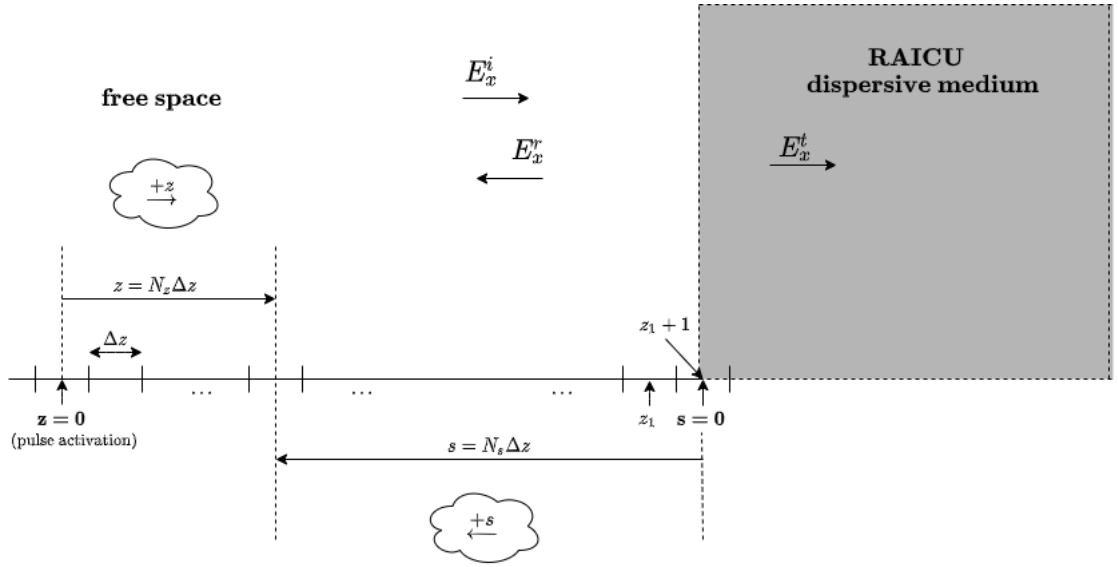
END LOOP

FDTD Algorithm: FREQUENCY DEPENDENT MEDIUM

- 1) Set: Q (number of space cells) and N (number of time steps)
- 2) Set: Δt (time step) \longrightarrow use of (4.44)
 Δz (cell size) \longrightarrow use of (4.45)
- 3) Read parameters: M , $\mathbf{w}^{M \times 1}$, $\mathbf{x}^{M \times 1}$ \longrightarrow derived from Prony
- 4) Initialization: $\mathcal{E}^{1 \times Q}$, $\mathcal{H}^{1 \times Q}$, $\mathbf{A}^{M \times Q}$
- 5) Calculate L \longrightarrow use of (4.26)
- 6) START LOOP ($n = 1, 2, \dots, N$)
 - a. Update \mathcal{H} \longrightarrow use of (4.25)
 - b. Update \mathcal{E} \longrightarrow use of (4.24)
 - c. Calculate incident wave $\mathcal{E} \Big|_{q=q_{inc}} \longrightarrow$ use of (4.47)
 - d. Update \mathbf{A} \longrightarrow use of (4.23)
- END LOOP

4.6 Συντελεστής Ανάκλασης (Γ) και Διαγράμματα

Το μέγεθος που χρησιμοποιείται, κατά κύριο λόγο, στη βιβλιογραφία για τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων του αλγορίθμου FDTD είναι το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης $|\Gamma(\omega)|$. Στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος με κύμα που διαδίδεται κατά τα θετικά z , την οποία αναλύουμε, θεωρούμε ότι το υλικό διασποράς αρχίζει στο χωρικό κελί $z_1 + 1$. Η παραπάνω θεώρηση αποτυπώνεται πιο καθαρά και αναλυτικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.3: Σχηματική αναπαράσταση του μονοδιάστατου προβλήματος της πρόσπτωσης κύματος από τον κενό χώρο στο υλικό διασποράς Raicu.

Συνολικά εκτελούμε 2 προσομοιώσεις του αλγορίθμου FDTD. Τα βήματα που ακολουθούμε για την εξαγωγή του συντελεστή ανάκλασης είναι τα παρακάτω:

1. Στην 1η προσομοίωση το κύμα διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο. Καταγράφουμε το προσπίπτον πεδίο στο χωρικό κελί z_1 , οπότε έχουμε το:

$$\tilde{E}_x^i(z_1, t) \quad (4.48)$$

2. Στην 2η προσομοίωση το κύμα «ξεκινάει» στον ελεύθερο χώρο και προσπίπτει στο υλικό διασποράς. Καταγράφουμε το πεδίο στο χωρικό κελί z_1 . Στο πεδίο αυτό συνεισφέρουν τόσο το προσπίπτον όσο και το ανακλώμενο (εφόσον αυτό υπάρχει) και συνεπώς καταγράφουμε το συνολικό πεδίο, δηλαδή το:

$$\tilde{E}_x^{tot}(z_1, t) = \tilde{E}_x^r(z_1, t) + \tilde{E}_x^i(z_1, t) \quad (4.49)$$

3. Από τα πεδία των σχέσεων (4.48) και (4.49) υπολογίζουμε το ανακλώμενο κύμα:

$$\tilde{E}_x^r(z_1, t) = \tilde{E}_x^{tot}(z_1, t) - \tilde{E}_x^i(z_1, t) \quad (4.50)$$

4. Προκειμένου να υπολογίσουμε τον συντελεστή ανάκλασης ΔEN μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\tilde{E}_x^r(z_1, t)/\tilde{E}_x^i(z_1, t)$, διότι ο συντελεστής ανάκλασης είναι μέγεθος που ορίζεται στο πεδίο της συχνότητας. Επομένως, πρώτα θα πρέπει να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier του προσπίπτοντος (4.48) και ανακλώμενου πεδίου (4.50) με χρήση του αλγορίθμου FFT:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x^i(z_1, \omega) &= \mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^i(z_1, t)\right\} \\ \tilde{E}_x^r(z_1, \omega) &= \mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^r(z_1, t)\right\} \end{aligned}$$

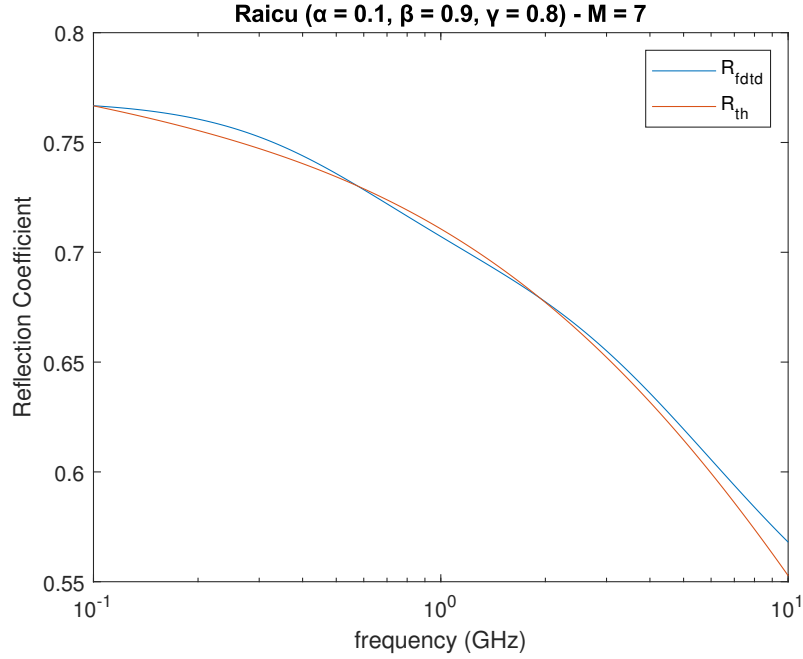
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής ανάκλασης δίνεται από:

$$\Gamma(s, \omega) = \frac{\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^i(z_1, t)\right\}}{\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^r(z_1, t)\right\}} e^{-j2\frac{\omega}{c_0}N_s\Delta z} \quad (4.51)$$

όπου N_s ο αριθμός των κελιών αριστερά της διαχωριστικής επιφάνειας κενού χώρου - υλικού διασποράς, ξεκινώντας την μέτρηση από την επιφάνεια αυτή. Τέλος, να σημειωθεί ότι συνήθως δεν χρησιμοποιείται η σχέση (4.51), αλλά το μέτρο της, δηλαδή:

$$|\Gamma(\omega)| = |\Gamma(s, \omega)| = \frac{\left|\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^i(z_1, t)\right\}\right|}{\left|\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^r(z_1, t)\right\}\right|} \quad (4.52)$$

Τα αποτελέσματα του αλγορίθμου FDTD, στο εύρος συχνοτήτων 0.1 – 10, GHz παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 4.4: Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης $|\Gamma(\omega)|$ για το υλικό Raicu ($\alpha = 0.1, \beta = 0.9, \gamma = 0.8$) στο εύρος συχνοτήτων 0.1 – 10 GHz.

όπου:

- για τον υπολογισμό του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης μέσω του FDTD (R_{fdtd} - μπλέ καμπύλη του διαγράμματος) χρησιμοποιήθηκε η σχέση (4.52).
- για τον υπολογισμό της θεωρητικής τιμής του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης (R_{th} - κόκκινη καμπύλη του διαγράμματος) έγινε χρήση της παρακάτω σχέσης, η οποία είναι γνωστή από τη θεωρία, :

$$|\Gamma_{th}(\omega)| = \frac{|1 - \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}|}{|1 + \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}|} \quad (4.53)$$

όπου η $\varepsilon_r(\omega)$ δίνεται από την (4.2) για όπου s το $j\omega$.

Από το σχήμα (4.4) παρατηρούμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης προσεγγίζεται καλά στο εύρος 0.6 – 6 GHz. Αντίθετα, σε συχνότητες μικρότερες των 0.6 GHz ή μεγαλύτερες των 6 GHz οι δύο καμπύλες αρχίζουν να αποκλίνουν μεταξύ τους περισσότερο. Ένας από τους λόγους που συμβαίνει αυτό είναι ότι η ισχύς του προσπίπτοντος κύματος στις συχνότητες αυτές είναι πολύ μικρή, όπως φαίνεται και από το σχήμα (4.2).

Σημείωση: Απόδειξη της σχέσης (4.51)

Προκειμένου να αποδείξουμε τη σχέση (4.51), που είναι γνωστή στα πλαίσια της εφαρμογής του FDTD για τον έλεγχο της ορθότητας του αλγορίθμου, θα φανεί χρήσιμο το σχήμα (4.3).

Επομένως για τυχόν $z = N_z \Delta z$ ισχύει:

$$\tilde{E}_x^i(z, t) = \tilde{E}_x^i(t) e^{-j\beta z}$$

$$\tilde{E}_x^r(z, t) = \tilde{E}_x^i(t) e^{+j\beta z}$$

Αλλάζοντας συντεταγμένες από z σε s , τότε για $s = N_s \Delta z$ και $\beta = \omega/c_0$, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ισοδύναμα:

$$\tilde{E}_x^i(s, t) = \tilde{E}_x^i(t) e^{+j\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z}$$

$$\tilde{E}_x^r(s, t) = \tilde{E}_x^i(t) e^{+j\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z}$$

Εφαρμόζοντας τον μεταχηματισμό Fourier στις χρονικές μεταβολές των δύο κυμάτων, λαμβάνουμε:

$$\tilde{E}_x^i(s, \omega) = \mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^i(t)\right\} e^{+j\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z}$$

$$\tilde{E}_x^r(s, \omega) = \mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^r(t)\right\} e^{-j\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z}$$

Η σχέση (4.51) προκύπτει εύκολα διαιρώντας κατά μέλη τις 2 τελευταίες σχέσεις ως εξής:

$$\begin{aligned} \Gamma(s, \omega) &= \frac{\tilde{E}_x^i(s, \omega)}{\tilde{E}_x^r(s, \omega)} = \frac{\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^i(t)\right\} e^{+j\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z}}{\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^r(t)\right\} e^{-j\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z}} \\ &= \frac{\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^r(t)\right\}}{\mathfrak{F}\left\{\tilde{E}_x^i(t)\right\}} e^{-j2\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z} \quad (\text{σχέση 4.51}) \\ &= \Gamma(\omega) e^{-j2\frac{\omega}{c_0} N_s \Delta z} \end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Chakarothai, J. (2018). *Novel FDTD Scheme for Analysis of Frequency-Dependent Medium Using Fast Inverse Laplace Transform and Prony's Method*. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1–1.
- [2] Raicu, V. (1999). *Dielectric dispersion of biological matter: Model combining Debye-type and ((universal)) responses*. *Physical Review E*, 60(4), 4677–4680.
- [3] Hosono, T. (1981). *Numerical inversion of Laplace transform and some applications to wave optics*. *Radio Science*, Volume 16, Number 6, pages 1015–1019.
- [4] Sauer, T. (2018). *Prony's method: an old trick for new problems*. *Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach №4*.
- [5] Rekanos, I. T. (2012). *FDTD Schemes for Wave Propagation in Davidson-Cole Dispersive Media Using Auxiliary Differential Equations*. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 60(3), 1467–1478.
- [6] Tofighi, M.-R. (2009). *FDTD Modeling of Biological Tissues Cole–Cole Dispersion for 0.5–30 GHz Using Relaxation Time Distribution Samples—Novel and Improved Implementations*. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 57(10), 2588–2596.
- [7] Torres, F., Vaudon, P., Jecko, B. (1996). *Application of fractional derivatives to the FDTD modeling of pulse propagation in a Cole–Cole dispersive medium*. *Microwave and Optical Technology Letters*, 13(5), 300–304. .
- [8] Rekanos, I. T. (2012). *Semi-Local Approximation of Fractional Derivatives in FDTD Modeling of Cole–Cole Media: A Questionable Approach*. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 11, 740–743.
- [9] Garrappa, R. , Mainardi, F. , Guido, M. (2016). *Models of dielectric relaxation based on completely monotone functions*. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 19(5).
- [10] Sullivan D.M. , Houle J. E. (2020). *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method with Python*. *Publisher: Wiley-IEEE Press*.

- [11] Kremer, F. , Schönhals, A. (2003). *Broadband Dielectric Spectroscopy*. Publisher: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [12] Gorur, G. Raju (2016). *Dielectrics in electric fields*. Publisher: Taylor & Francis, CRC.
- [13] Schneider, J. B. (2010). *Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method* (see link).
- [14] Atreas, N. (Θεσσαλονίκη 2012) Σημειώσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι: Εισαγωγή στη μιγαδική ανάλυση. Τομέας Τηλεπικοινωνιών, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- [15] Σημειώσεις Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού: Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου (*Finite-Difference Time-Domain - FDTD*). Εργαστήριο Τηλεπικοινωνιών, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- [16] Υλοποίηση σε κώδικα Matlab της συνάρτησης Mittag-Leffler τριών παραμέτρων από τον Roberto Garrappa (see link).
- [17] Μετασχηματισμός Euler για ταχύτερη σύγκλιση απειροσειρών (see link).