Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τηλεπικοινωνιών

Παλάσκος Αχιλλέας (8493)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μετάδοση Η/Μ κύματος στο υλικό διασποράς Raicu

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Ρέκανος

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2021

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- ✓ Διηλεκτρικά υλικά διασποράς → σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα (ε_r) → <u>εξάρτηση</u> από τη ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
- ✓ Ιατρική, Βιοιατρική → ακριβής αναπαράσταση των ιστών του ανθρώπινου σώματος
- ✓ **Debye** → μη ικανοποιητική προσέγγιση
- ✓ **Davidson-Cole** και **Cole-Cole** → ακριβής προσέγγιση σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων
- ✓ **Havriliak-Negami** → συνδυασμός των 2 προηγούμενων , μεγαλύτερη ευελιξία
- ✓ **<u>RAICU</u>** → Valerică Raicu (1999) → η γενικότερη μορφή των παραπάνω μοντέλων → τη μεγαλύτερη ευελιξία

<u>RAICU</u>

$$\varepsilon_R(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\left((j\omega\tau_R)^{\alpha} + (j\omega\tau_R)^{\gamma}\right)^{\beta}}$$

- $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1$
- $\Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_\infty$
- $\varepsilon(\omega) \to \varepsilon_\infty$ για $\omega \to \infty$
- $\varepsilon(\omega) \to \varepsilon_s$ για $\omega \to 0$

→

Debye $(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1})$	$\varepsilon_D(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau}$
Cole – Cole $(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1})$	$\varepsilon_{CC}(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (j\omega\tau_{CC})^{\gamma}}$
Davidson – Cole $(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{1})$	$\varepsilon_{DC}(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + j\omega\tau_{DC})^{\beta}}$
Havriliak – Negami $(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0})$	$\varepsilon_{HN}(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + (j\omega\tau_{HN})^{\gamma})^{\beta}}$

ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ – ΜΕΔΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- ✓ **Δυσκολίες**: οι ΜΗ-ακέραιες δυνάμεις του όρου $j\omega$

  ↓

  ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου

- ✓ **ΒΗΜΑΤΑ επίλυσης προβλήματος**

1. Εύρεση χρονικής απόκρισης → $\varepsilon_r(t)$
   a) αναλυτική λύση → **θεωρητική** υλοποίηση του αντίστροφου μετ/μού Fourier της $\varepsilon_r(\omega)$
   b) προσεγγιστική λύση → μέθοδος **FILT** (**F**ast **I**nverse **L**aplace **T**ransform) στην $\varepsilon_r(s)$

2. Προσέγγιση χρονικής απόκρισης με *άθροισμα αποσβενύμενων εκθετικών* → μέθοδος **Prony** → εξαγωγή παραμέτρων

3. Ενσωμάτωση παραμέτρων και τροποποίηση των εξισώσεων του Maxwell → επίλυση προβλήματος – 1D → μέθοδος **FDTD** (**F**inite **D**iscrete **T**ime **D**omain)

4. Κριτήριο ορθότητας αποτελεσμάτων → μέτρο του συντελεστή ανάκλασης

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ - ΜΕΘΟΔΟΣ Α: Εύρεση αναλυτικής λύσης

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon F(\omega) \quad \text{με} \quad F(\omega) = \frac{1}{\left((j\omega\tau)^\alpha + (j\omega\tau)^\gamma\right)^\beta} \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_\infty$$

Θεωρούμε: $\gamma > \alpha \xRightarrow{\gamma,\alpha<1} 0 < \gamma - \alpha < 1$

$$F(\omega) = \frac{1}{(j\omega\tau)^{\alpha\beta}} \boxed{\frac{1}{(1 + (j\omega\tau)^{\gamma-\alpha})^\beta}} = \frac{1}{(j\omega\tau)^{\alpha\beta}} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \left((j\omega\tau)^{\gamma-\alpha}\right)^{-\beta-n}} = \dots = \frac{1}{\tau^{\beta\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{1}{\tau^{n(\gamma-\alpha)}} \boxed{\frac{1}{(j\omega)^{n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma}}}$$

$\downarrow$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{\tau^{\beta\gamma}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{1}{\tau^{n(\gamma-\alpha)}} \boxed{\frac{t^{n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma-1}}{\Gamma[n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma]}} u(t) = \dots =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)}{n!\,\Gamma(\beta)} \frac{\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma-\alpha}\right)^n}{\Gamma[n(\gamma-\alpha)+\beta\gamma]} u(t) \Leftrightarrow \boxed{f(t) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta\gamma-1} \mathrm{E}^{\beta}_{\gamma-\alpha,\beta\gamma}\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma-\alpha}\right] u(t)}$$

όπου:

$$\mathrm{E}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{n!\,\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha n+\beta)} z^n$$

$\longrightarrow$ Συνάρτηση **Mittag–Leffler** τριών παραμέτρων

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ - ΜΕΘΟΔΟΣ Β: Η μέθοδος FILT (Fast Inverse Laplace Transform)

Βήμα 1ο : Προσέγγιση ολοκληρώματος Bromwich

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\left((\boldsymbol{s\tau})^{\alpha} + (\boldsymbol{s\tau})^{\gamma}\right)^{\beta}} \quad \begin{cases} s \in \mathbb{C}, \boldsymbol{\mathcal{Re}}(s) > 0 \\ 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1 \end{cases}$$

Συνθήκες - $F(s)$:

1. η $F(s)$ δεν έχει ανώμαλα σημεία
2. $|s| \to \infty \;\Rightarrow\; |F(s)| \to 0$
3. $F^*(s) = F(s^*)$, *όπου* z^* *ο συζυγής του* z

$$\text{Για} \quad f(t) > 0: \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \triangleq \frac{1}{2\pi j} \lim_{\varphi\to\infty} \int_{\gamma-j\varphi}^{\gamma+j\varphi} F(s) e^{st}\, ds$$

όπου: $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η διαδρομή του περιγράμματος του ολοκληρώματος να βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης της F(s).

- υπολογισμός ολοκληρώματος Bromwich → δύσκολος
- Η **βασική ιδέα** FILT → προσέγγιση του εκθετικού $\boldsymbol{e^{st}}$ → εισαγωγή παραμέτρου **α** (1η σχεδιαστική παράμετρος του FILT)

$$E_{est}(st, \alpha) \triangleq \frac{e^{\alpha}}{2\cosh(\alpha - st)} = \frac{e^{\alpha}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{st - \alpha + j(n-0.5)\pi} = \frac{e^{\alpha}}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{s - \boldsymbol{\lambda_n(\alpha, t)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_n(\alpha, t)} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{n} - \mathbf{0.5}}{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{\pi}}$$

$$f_{est}(t,\alpha) \triangleq \frac{1}{2\pi j} \lim_{\varphi\to\infty} \int_{\gamma-j\varphi}^{\gamma+j\varphi} F(s) E_{est}(st,\alpha)\, ds = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\varphi\to\infty} \int_{\gamma-j\varphi}^{\gamma+j\varphi} F(s) \left[\frac{e^{\alpha}}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{s-\lambda_n(\alpha,t)}\right] ds$$

$$= \frac{e^{\alpha}}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j(-1)^n \frac{1}{2\pi j} \lim_{\varphi\to\infty} \int_{\gamma-j\varphi}^{\gamma+j\varphi} \frac{F(s)}{s-\lambda_n(\alpha,t)} = \frac{e^{\alpha}}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j(-1)^n I_n(\alpha,t)$$

όπου:

$$\boxed{I_n(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\varphi\to\infty} \int_{\gamma-j\varphi}^{\gamma+j\varphi} \frac{F(s)}{s-\lambda_n(\alpha,t)}}$$

Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων $\Longrightarrow$ Θεώρημα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος Bromwich

$$\Longrightarrow \boldsymbol{I_n(\alpha,t) = -F(\lambda_n(\alpha,t))}$$

Αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση:

$$f_{est}(t,\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)(-1)^n F\big(\lambda_n(\alpha,t)\big) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{f_{est}(t,\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} F_n}}$$

όπου:

$$\boxed{F_n = (-1)^n \boldsymbol{\mathcal{Im}}\{F(\lambda_n(\alpha,t)\} = (-1)^n \boldsymbol{\mathcal{Im}}\left\{F\left[\frac{\alpha + j(n-0.5)\pi}{t}\right]\right\} = (-1)^n \alpha_n}$$

Βήμα 2º *: Χρήση του μετασχηματισμού Euler*

Ορισμός (Μετασχηματισμός Euler)

Έστω η ακολουθία α_n, $n \in [0, +\infty)$, τότε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \alpha_{n-k}$$

Εισαγωγή 2ης σχεδιαστικής παραμέτρου $\boldsymbol{K}$ της μεθόδου FILT $\Longrightarrow$ προσέγγιση το απειρο-αθροίσματος:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{K} F_n + \boxed{\sum_{n=K+1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n} = \sum_{n=1}^{K} F_n + \boldsymbol{A}$$

Εφαρμογή μετασχηματισμού Euler $\Longrightarrow \boldsymbol{A} = \sum_{n=K+1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{(n-k)+K+1}$

Εισαγωγή 3ης σχεδιαστικής παραμέτρου $\boldsymbol{p}$ της μεθόδου FILT $\Longrightarrow n \in [0, p-1] \Longrightarrow$ προσέγγιση το απειρο-αθροίσματος με άθροισμα $p -$ όρων :

$$\boldsymbol{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{(n-k)+K+1} \cong \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{(n-k)+K+1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 2^{-p} \sum_{q=1}^{p} A_{p,q} F_{q+K}}}$$

όπου:

$$\boldsymbol{A_{p,q}} = \sum_{\boldsymbol{m=q-1}}^{\boldsymbol{p-1}} \binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m-(q-1)}} \boldsymbol{2^{(p-1)-m}} \qquad \boldsymbol{q = 1, 2, \ldots, p} \qquad \mathrm{A}_{p,p} = 1$$

Αποδεικνύεται ότι: $A_{p,p-q} = A_{p,p-q+1} + B_{p,q} \quad q = 1,2, \dots ,p-1$

όπου: $B_{p,q} = \binom{p-1}{p-(q+1)} + \binom{p-1}{p-q} \xRightarrow{recursive} B_{p,q} = \frac{p-q+1}{q} B_{p,q-1} \quad q = 2, \dots ,p-1 \quad B_{p,1} = p$

<u>Αποτέλεσμα FILT</u>: Έστω η μιγαδική συνάρτηση $\mathrm{F(s)}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{C}, \mathcal{Re}(\mathrm{s}) > 0$, που ικανοποιεί τις 3 συνθήκες που έχουν αναφερθεί παραπάνω. Τότε, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f_{est}^{\alpha,K,p}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\varepsilon_\infty\} + \Delta\varepsilon\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \varepsilon_\infty\delta(t) + \Delta\varepsilon\frac{e^\alpha}{t}\left\{\sum_{n=1}^{K} F_n + 2^{-p}\sum_{q=1}^{p} A_{p,q}F_{q+K}\right\}u(t)$$

όπου:

- $\alpha, K, p \rightarrow$ οι σχεδιαστικές παράμετροι της μεθόδου
- $F_n = (-1)^n \mathcal{Im}\left\{F\left[\frac{\alpha+j(n-0.5)\pi}{t}\right]\right\}$

και οι συντελεστές $A_{p,q}$ υπολογίζονται αναδρομικά με βάση τις παρακάτω σχέσεις:

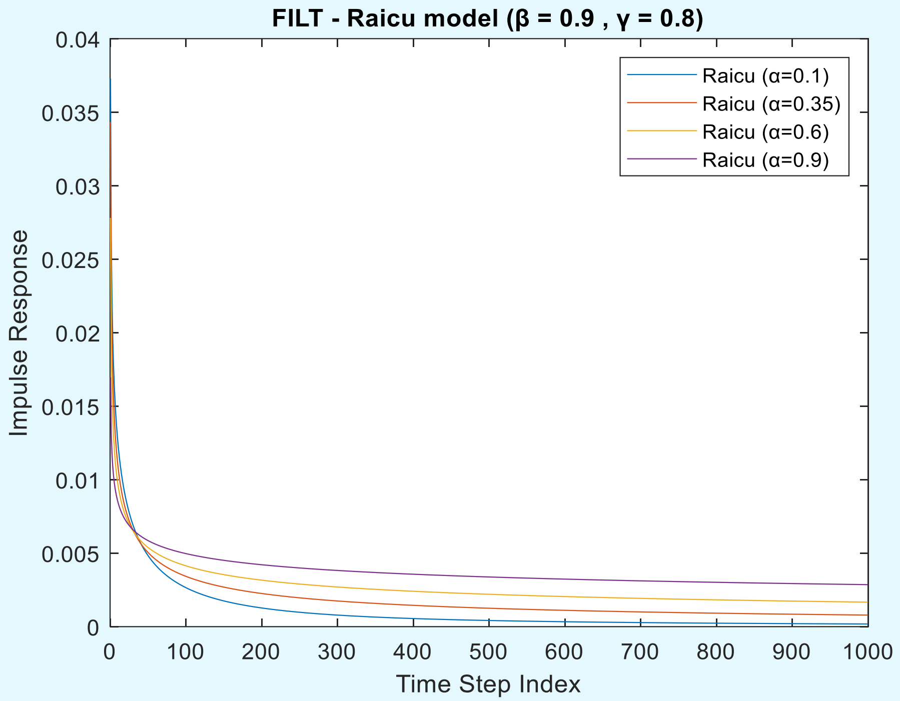
- $A_{p,p-q} = A_{p,p-q+1} + B_{p,q} \quad q = 1,2, \dots ,p-1$
- $B_{p,q} = C_{p,q}B_{p,q-1} \quad q = 2, \dots ,p-1$
- $A_{p,p} = 1 \qquad B_{p,1} = p \qquad C_{p,q} = \frac{p-q+1}{q}$

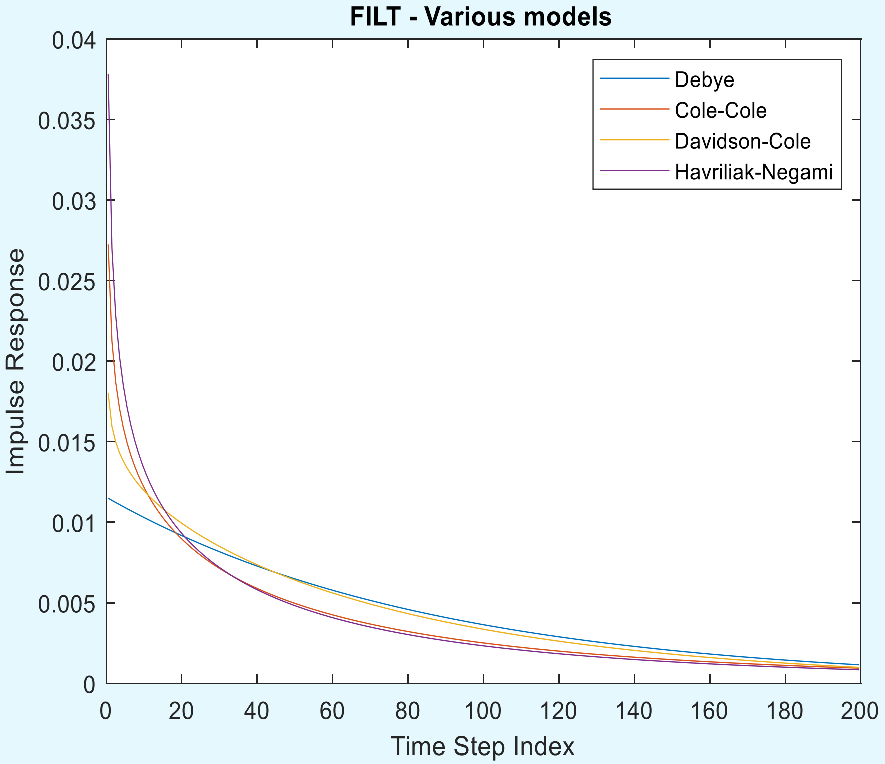
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ FILT

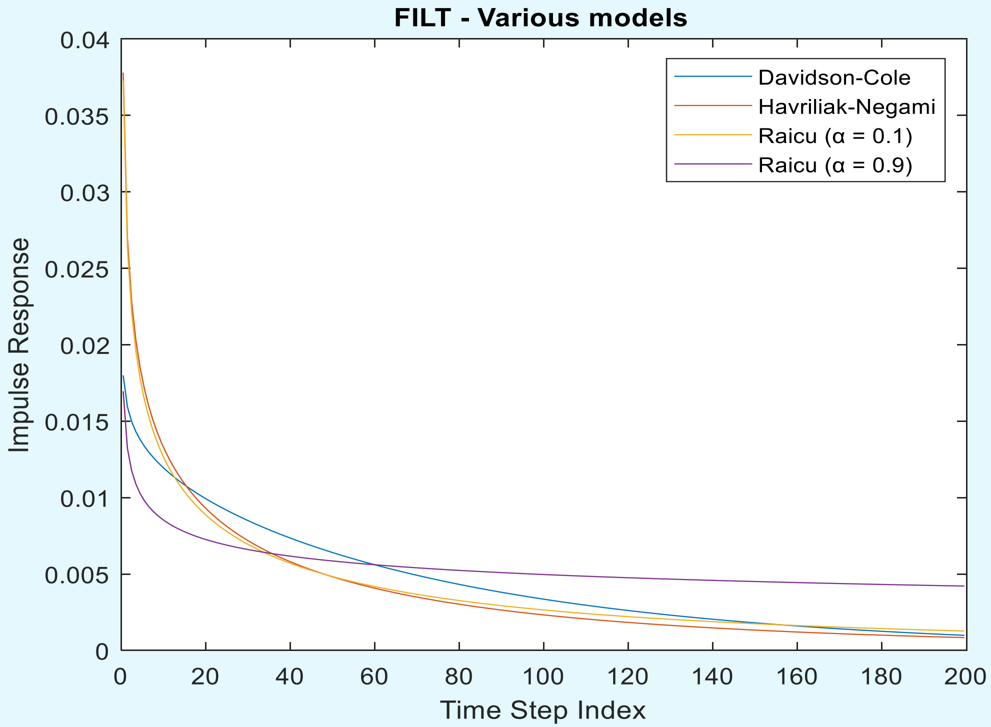
$Medium$	p	$\tau(ps)$	a	β	γ
Debye	5	153	0	1	1
Cole – Cole	6	153	0	1	0.8
Davidson – Cole	7	153	0	0.9	1
Havriliak – Negami	8	153	0	0.9	0.8
Raicu 1	8	153	0.1	0.9	0.8
Raicu 2	8	153	0.35	0.9	0.8
Raicu 3	8	153	0.6	0.9	0.8
Raicu 4	8	153	0.9	0.9	0.8

Μέθοδος FILT

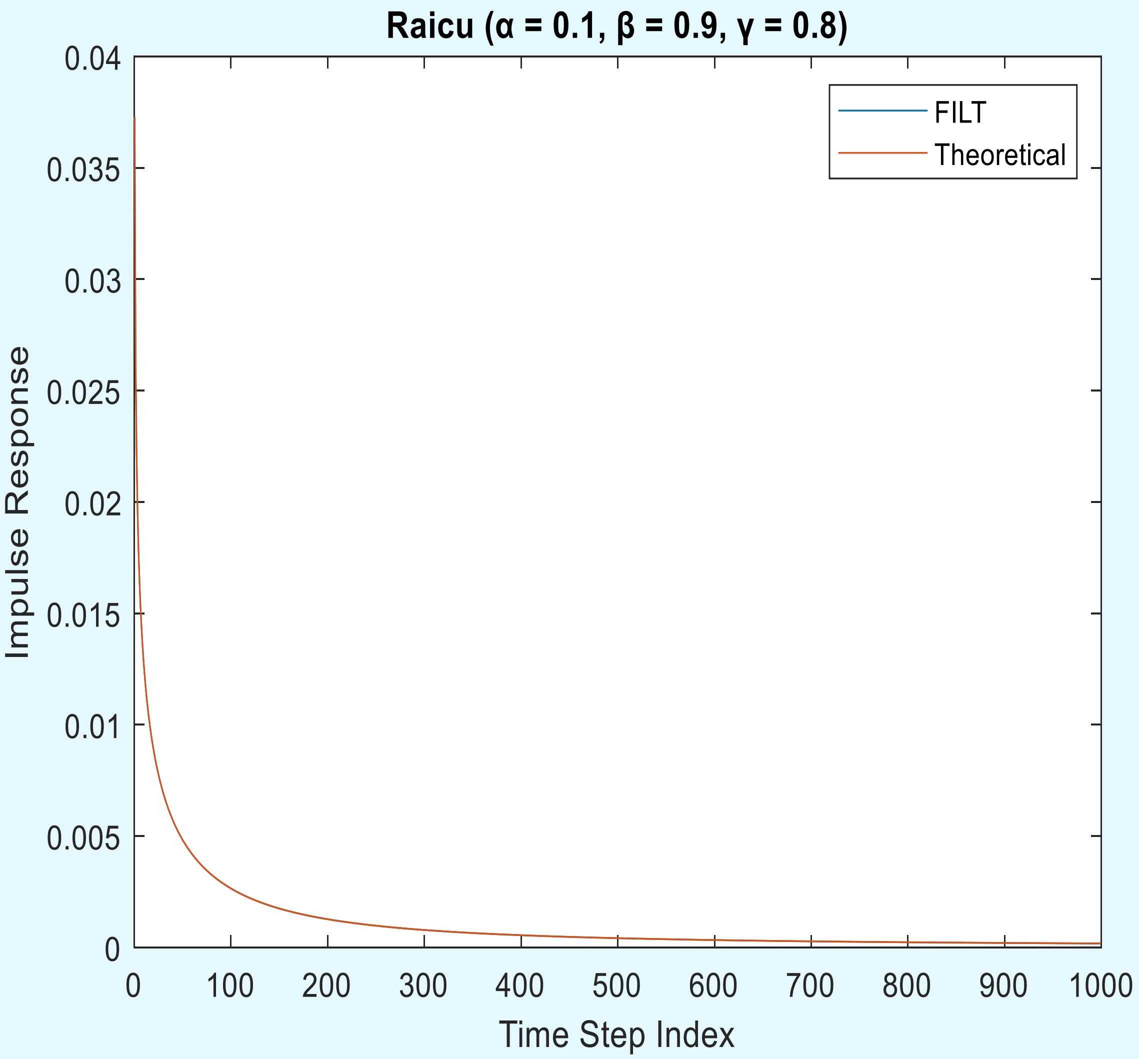
- $\Delta t = 1.768ps$
- $N_t = 50000$
- $n = \dfrac{t}{\Delta t} = 0.5, \dots, N_t + 0.5$
- $K = 21$
- $a_{FILT} = 5$





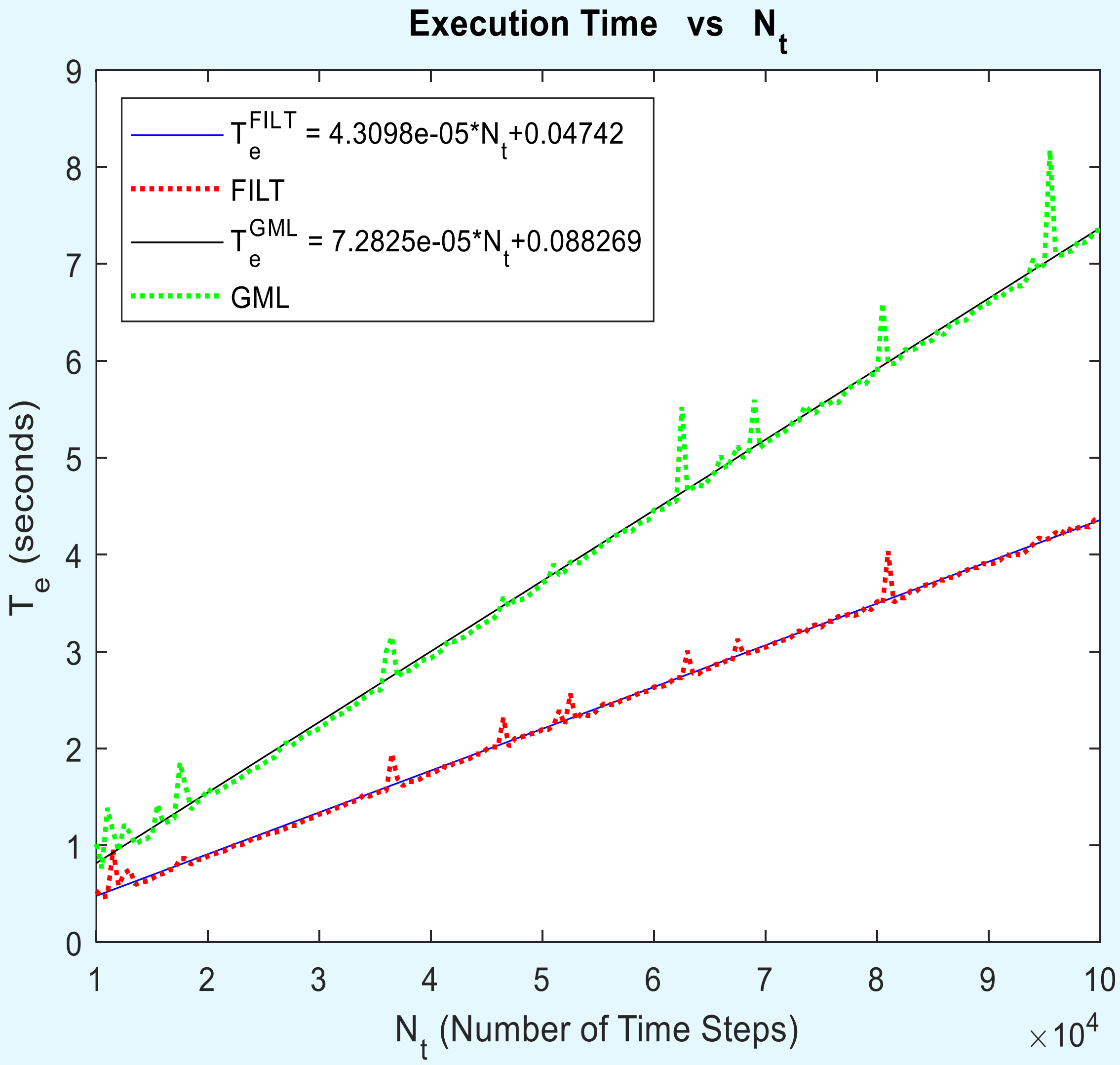


ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΔΟΔΩΝ Α και Β



↓

ακρίβεια της τάξης του 10^{-7}!



↓

FILT πιο ΓΡΗΓΟΡΗ!

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Πρόβλημα: Δεδομένης φθίνουσας συνάρτησης f(t), η οποία ανήκει στην κατηγορία των «Πλήρως Μονότονων Συναρτήσεων» να προσδιοριστούν οι μεταβλητές:

- $M \in \mathbb{N}^* \rightarrow$ οι σχεδιαστικές παράμετροι της μεθόδου
- $w_m, v_m \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, m = 1, \dots, M$

$$\text{ώστε:} \quad f(t) = \sum_{m=1}^{M} w_m\, e^{-v_m t} \quad t > 0$$

«κλειδί» επιλυσιμότητας προβλήματος

↓

f(t): Πλήρως Μονότονη Συνάρτηση

Ορισμός (Πλήρως Μονότονες Συναρτήσεις):

Μία συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται Πλήρως Μονότονη στο $(0, +\infty)$, αν υπάρχουν όλες οι παράγωγοι της f και ισχύει: $(-1)^k f^{(k)}(t) \geq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ και $t > 0$.

$$g(t) = \sum_{q=1}^{p} w_m\, e^{-v_m t} \quad t > 0$$

Πλήρως Μονότονη Συνάρτηση

Επίλυση → μέθοδος **Prony**! $\xrightarrow{\delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha\tau o\lambda\eta\psi\iota\alpha} t_k = k\Delta t \quad k = 0,1,\dots,N_t \quad (N_t \gg M) \rightarrow f_k = f(t_k) = f(t)|_{t=t_k}$

ΒΗΜΑ 1: προσδιορισμός των συντελεστών Prony (p)

$$\boldsymbol{A\widetilde{p} = b} \overset{LMS}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\widetilde{p} = A^{\dagger} b} \qquad \mu\varepsilon \quad \boldsymbol{A^{\dagger} = (A^T A)^{-1} A^T} \longrightarrow \quad p = [\boldsymbol{\widetilde{p}}^T p_0]\ , p_0 = 1$$

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_M & f_{M-1} & & \cdots & f_1 \\ f_{M+1} & f_M & & \cdots & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ f_{N_t} & f_{N_t-1} & \cdots & & f_{N_t-M+1} \end{bmatrix}}_{(N_t-M+1)\times M} \qquad \boldsymbol{\widetilde{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_M \\ p_{M-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{bmatrix}}_{M\times 1} \qquad \boldsymbol{b} = -\underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N_t-M} \end{bmatrix}}_{(N_t-M+1)\times 1}$$

ΒΗΜΑ 2: προσδιορισμός των εκθετικών συντελεστών Prony (v_m)

Εξίσωση M-βαθμού ως προς x: $p_M x^M + p_{M-1} x^{M-1} + \cdots + p_1 x + p_0 = 0 \longrightarrow v_m = -\frac{ln(x_m)}{\Delta t} \qquad m = 1, \dots, M$

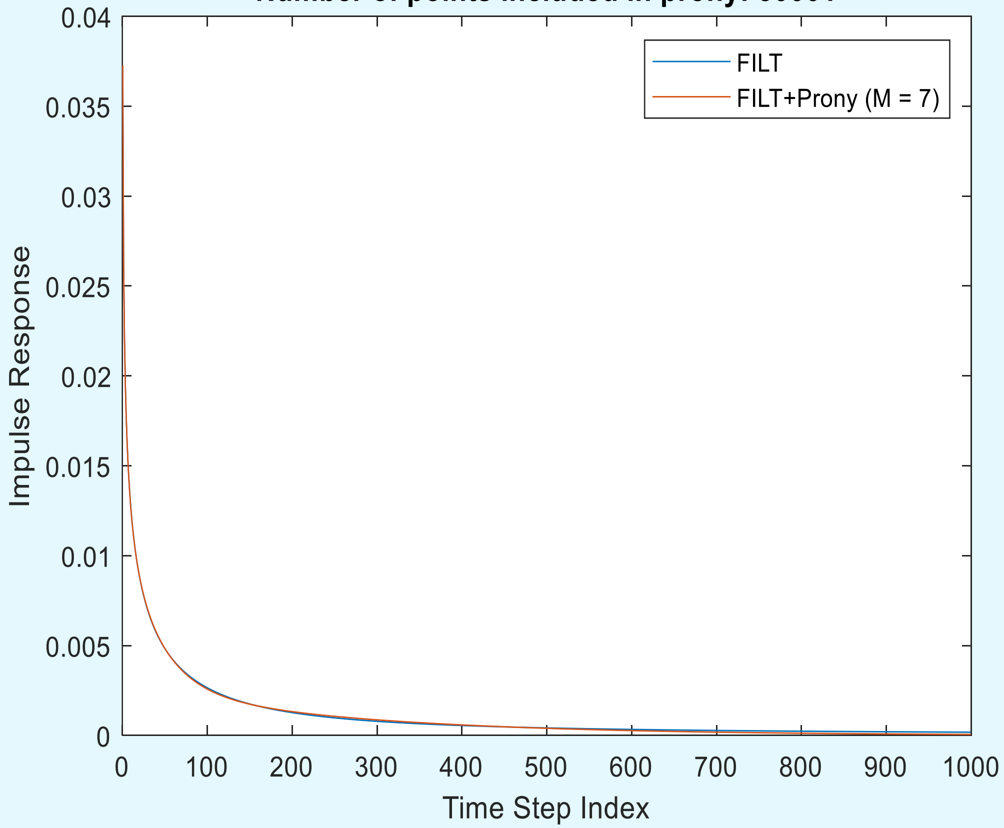
ΒΗΜΑ 3: προσδιορισμός συντελεστών "βάρους" (w_m)

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \overset{LMS}{\Longrightarrow} \boldsymbol{w} = \boldsymbol{X}^{\dagger}\boldsymbol{f}$$

$$\mu\varepsilon \quad \boldsymbol{X}^{\dagger} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T$$

$$\boldsymbol{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N_t} & x_2^{N_t} & \cdots & x_M^{N_t} \end{bmatrix}}_{(N_t+1)\times M} \qquad \boldsymbol{w} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}}_{M\times 1} \qquad \boldsymbol{f} = -\underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N_t} \end{bmatrix}}_{(N_t+1)\times 1}$$

Raicu (α = 0.1 , β = 0.9 , γ = 0.8)
Number of points included in prony: 50001



	w	x
1	0.002777	0.99610
2	0.009010	0.97463
3	0.006813	0.89879
4	0.008353	0.73185
5	0.001880	0.48307
6	0.007451	0.21699
7	0.000993	0.03276

$\longrightarrow$ **ακρίβεια της τάξης του 10^{-4}**

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FDTD

Κανονικοποιημένες εξισώσεις στροφής του Maxwell:

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{D}}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \widetilde{\boldsymbol{H}}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \varepsilon_r(t) * \widetilde{\boldsymbol{E}}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{H}}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \widetilde{\boldsymbol{E}}$$

κανονικοποιημένα χρονικά διανύσματα $\longrightarrow$ $\widetilde{\boldsymbol{E}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{E}$, $\widetilde{\boldsymbol{D}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}\boldsymbol{D}$, $\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H}$

FILT + PRONY $\longrightarrow$

Χρονική απόκριση

$$\boldsymbol{\varepsilon_r(t)} = \varepsilon_\infty \delta(t) + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^{M} \widehat{w}_i \, e^{-v_i t}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}(t) = \left\{ \varepsilon_\infty \delta(t) + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^{M} \widehat{w}_i \, e^{-v_i t} \right\} * \widetilde{\boldsymbol{E}}(t) = \cdots = \varepsilon_\infty \widetilde{\boldsymbol{E}}(t) + \Delta\varepsilon \boldsymbol{S}(t)$$

όπου: $\boldsymbol{S}(t) \triangleq \widetilde{\boldsymbol{E}}(t) * \sum_{i=1}^{M} \widehat{w}_i \, e^{-v_i t}$

$$\boldsymbol{S}^n = \cdots = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{A}_i^n$$

$$\boxed{\boldsymbol{A}_i^{n+1} = x_i \boldsymbol{A}_i^n + w_i \widetilde{\boldsymbol{E}}^n \quad i = 1,2,\ldots,M}$$

όπου για: $\begin{cases} \boldsymbol{w_i} = \widehat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{\Delta t} \\ \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{e}^{-v_i \Delta t} \end{cases}$

Επίσης: $$\widetilde{\boldsymbol{D}}^{n+1}-\widetilde{\boldsymbol{D}}^{n}=\cdots=\left(\varepsilon_\infty+\Delta\varepsilon\sum_{i=1}^{M}w_i\right)\widetilde{\boldsymbol{E}}^{n+1}-\varepsilon_\infty\widetilde{\boldsymbol{E}}^{n}+\Delta\varepsilon\sum_{i=1}^{M}(x_i-1)\boldsymbol{A}_i^n$$

1η εξίσωση Maxwell $\longrightarrow$ διακριτοποίηση $\longrightarrow$ $$\frac{\widetilde{\boldsymbol{D}}^{n+1}-\widetilde{\boldsymbol{D}}^{n}}{\Delta t}=\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}\Big|^{\mathrm{n+1/2}}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow$$

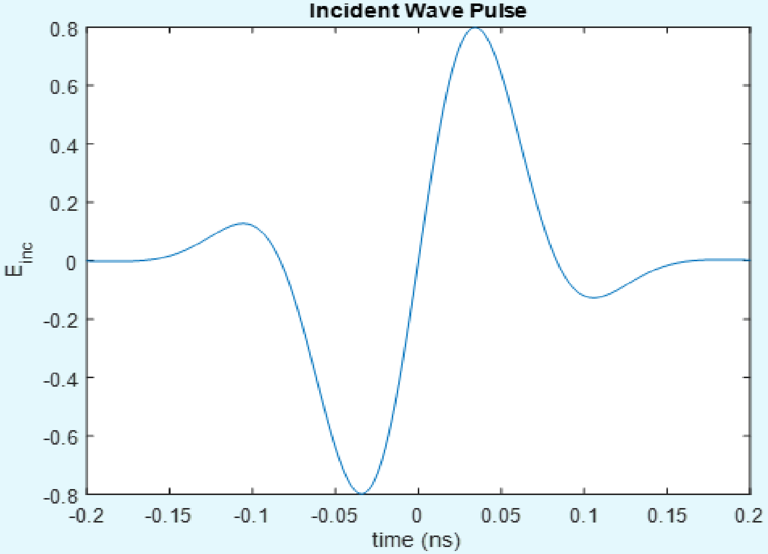
$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{E}}^{n+1}=\frac{1}{L}\left\{\varepsilon_\infty\widetilde{\boldsymbol{E}}^{n}+\Delta\varepsilon\sum_{i=1}^{M}(1-x_i)\boldsymbol{A}_i^n+c_0\Delta t\,\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{H}}\Big|^{\mathrm{n+1/2}}\right\},\quad L=\varepsilon_\infty+\Delta\varepsilon\sum_{i=1}^{M}w_i}$$

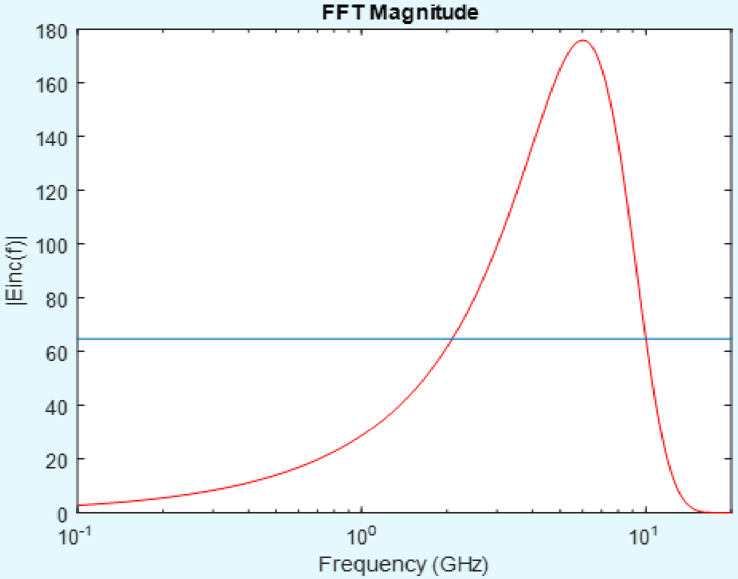
3η εξίσωση Maxwell $\longrightarrow$ διακριτοποίηση $\longrightarrow$ $$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{H}}^{n+1/2}=\widetilde{\boldsymbol{H}}^{n-1/2}-c_0\Delta t\,\nabla\times\widetilde{\boldsymbol{E}}\Big|^{\mathrm{n}}}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΡΟΣΠΙΠΤΟΝΤΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{inc}(t) = e^{-a^2(t-4/a)^2}\sin[2\pi f_e(t-4/a)]\,u(t)\hat{\boldsymbol{x}}$$

$$a = 1.26\times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1} \qquad f_e = 6\,GHz$$





ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Μέθοδος Von Neumann $\longrightarrow \quad \mathcal{E}_{q+1}^{n} = \mathcal{E}_{q}^{n}\,e^{jk\Delta z}$ και $\mathcal{H}_{q-1/2}^{n+1/2} = \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2}\,e^{-jk\Delta z}$

$$\begin{bmatrix}\mathcal{E}_q^{n+1}\\ \mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}c'_{ee}+c_{eh}c_{he} & c_{eh}\\ c_{he} & 1\end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{C}]}\begin{bmatrix}\mathcal{E}_q^{n}\\ \mathcal{H}_{q+1/2}^{n-1/2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_e\\ 0\end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{C}-\zeta\boldsymbol{I}| = 0 \Leftrightarrow \cdots \overset{\zeta<1}{\Longleftrightarrow} f(\zeta) = \frac{L}{4}\frac{(\zeta-c'_{ee})(1-\zeta)}{\zeta} \le \left(\frac{c_0\Delta t}{\Delta z}\right)^2$$

Όπου: $\quad c'_{ee} = \dfrac{1}{L}\left\{\varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon\sum_{i=1}^{M} w_i(1-x_i)\right\} \xrightarrow{RAICU} c'_{ee} = 0.667$

Αποδεικνύεται ότι: $\forall\,\zeta\in(0.667,1) \longrightarrow ΕΥΣΤΑΘΕΣ$, όταν:

$$\Delta z < \frac{c_0\Delta t}{\max\limits_{\zeta\in(0.667,1)}\left\{\sqrt{f(\zeta)}\right\}}\,, \qquad \max_{\zeta\in(0.667,1)}\left\{\sqrt{f(\zeta)}\right\} = 0.1788$$

Επιλογή: $\begin{cases}\Delta t_{FDTD} = \Delta t_{FILT} = 1.768\,ps\\[2ex] \dfrac{c_0\Delta t}{\Delta z} = 0.5 \Leftrightarrow \Delta z = 1.1mm\end{cases}$

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: εξισώσεις – τελικός αλγόριθμος

Θεωρούμε: $\widetilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{E}_x \widehat{\boldsymbol{x}}$ $\quad και \quad$ $\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{H}_y \widehat{\boldsymbol{y}}$ **Συμβολισμός**: $\tilde{E}_x{}^n(q) \equiv \mathcal{E}_q^n$ $\quad και \quad$ $\widetilde{H}_y{}^n(q) \equiv \mathcal{H}_q^n$

FDTD – Algorithm – dispersive medium

1) Set: Q $(number\ of\ space\ cells)$ and N $(number\ of\ time\ steps)$
2) Set: $\Delta t_{FDTD} = \Delta t_{FILT} = 1.768\,ps$ and $\Delta z = 1.1mm$
3) Read parameters: M, $\boldsymbol{w}^{M\times 1}$, $\boldsymbol{x}^{M\times 1}$ $\longrightarrow$ derived from Prony
4) Initialization: $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{1\times Q}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{1\times Q}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{M\times Q}$
5) $L = \varepsilon_\infty + \Delta\varepsilon \sum_{i=1}^{M} w_i$
6) START LOOP

   a. **Update $\mathcal{H}$**

$$\mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{H}_{q+1/2}^{n-1/2} - \frac{c_0 \Delta t}{\Delta z}\left(\mathcal{E}_{q+1}^n - \mathcal{E}_q^n\right)$$

   b. **Update $\mathcal{E}$**

$$\mathcal{E}_q^{n+1} = \frac{\varepsilon_\infty}{L}\mathcal{E}_q^n + \frac{\Delta\varepsilon}{L}\sum_{i=1}^{M}(1-x_i)\mathcal{A}_{q,i}^n - \frac{c_0\Delta t}{L\Delta z}\left(\mathcal{H}_{q+1/2}^{n+1/2} - \mathcal{H}_{q-1/2}^{n+1/2}\right)$$

   c. **Calculate incident wave**

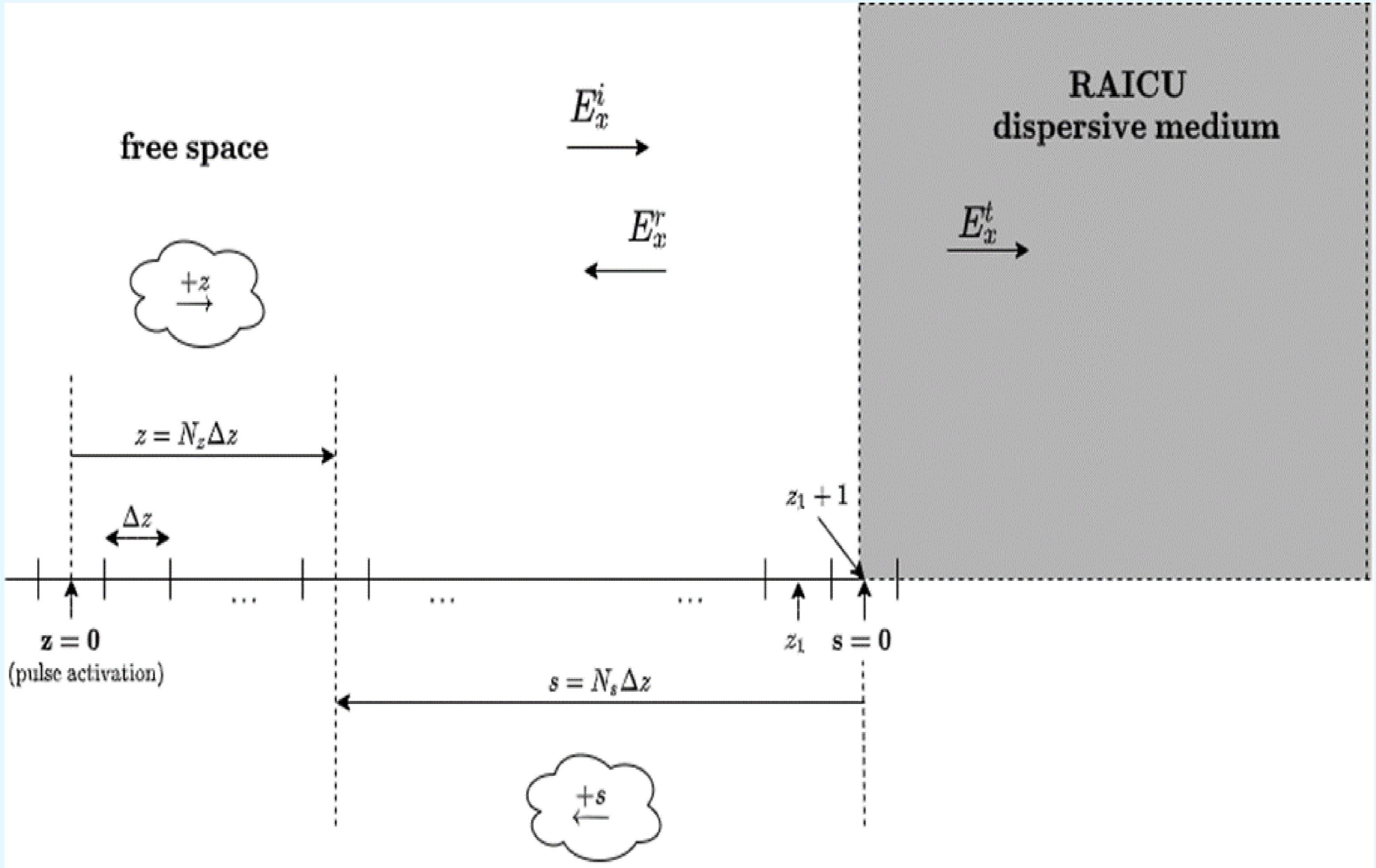
$$\mathcal{E}_{q=q_{inc}}^{n+1} = e^{-a^2(n\Delta t - 4/a)^2}\sin[2\pi f_e(n\Delta t - 4/a)]\,u[n]\,\widehat{\boldsymbol{x}}$$

   d. **Update $\mathcal{A}$**

$$\mathcal{A}_{q,i}^{n+1} = x_i \mathcal{A}_{q,i}^n + w_i \mathcal{E}_q^{n+1} \quad i = 1, \dots, M$$

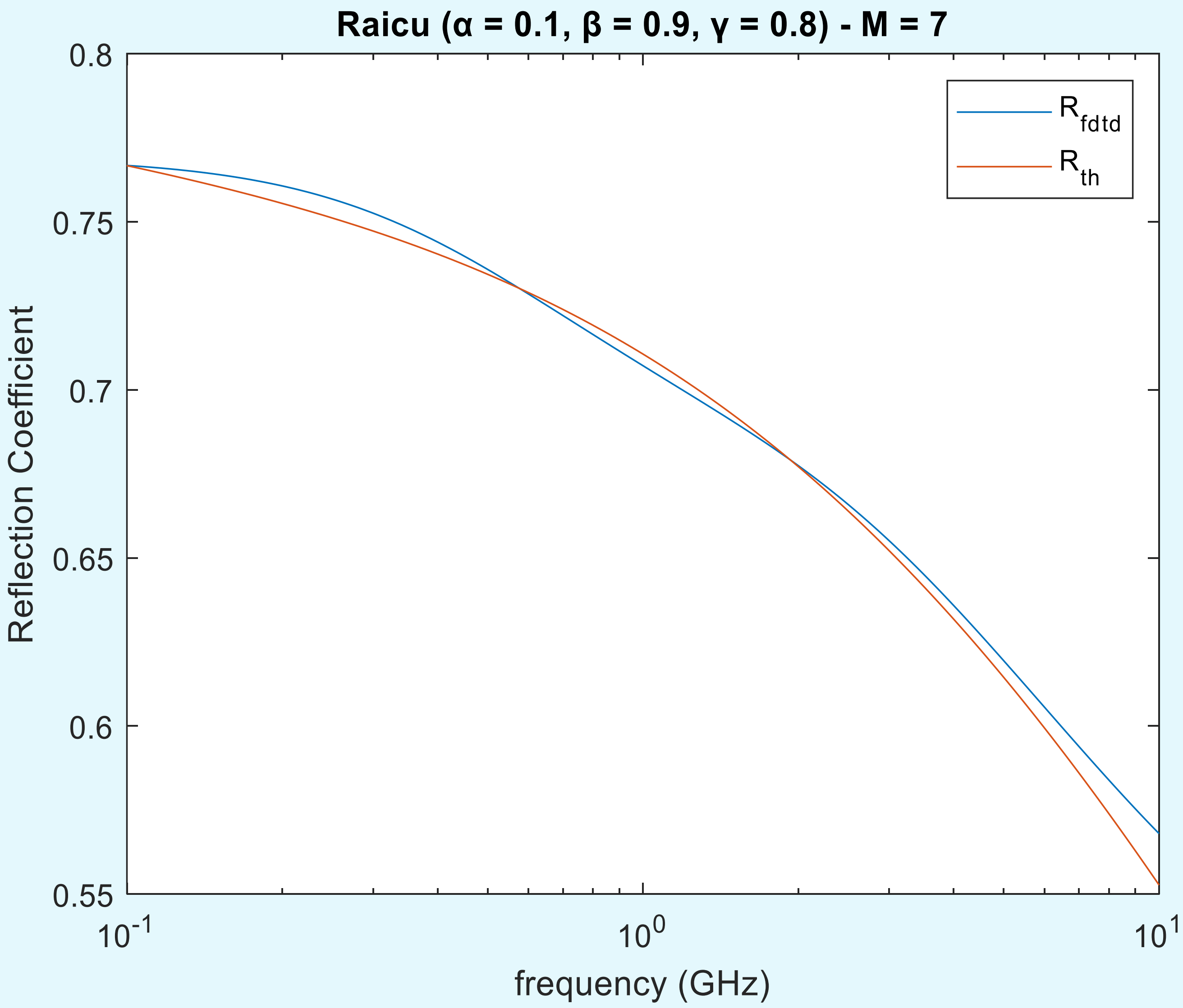
END LOOP

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ



ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Ελεύθερος χώρος $\longrightarrow \ \tilde{E}_x{}^{i}(z_1, t)$
2. Πρόσπτωση στο υλικό RAICU $\longrightarrow$
   $$\tilde{E}_x{}^{tot}(z_1, t) = \tilde{E}_x{}^{r}(z_1, t) + \tilde{E}_x{}^{i}(z_1, t)$$
3. $\tilde{E}_x{}^{r}(z_1, t) = \tilde{E}_x{}^{tot}(z_1, t) - \tilde{E}_x{}^{i}(z_1, t)$
4. $\tilde{E}_x{}^{i}(z_1, \omega) = \boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{\tilde{E}_x{}^{i}(z_1, t)\right\}$
5. $\tilde{E}_x{}^{r}(z_1, \omega) = \boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{\tilde{E}_x{}^{r}(z_1, t)\right\}$
6. $\Gamma_{fdtd}(s, \omega) = \dfrac{\boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{\tilde{E}_x{}^{r}(z_1,t)\right\}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{\tilde{E}_x{}^{i}(z_1,t)\right\}} e^{-j2\frac{\omega}{c_0}N_s \Delta z}$
7. $\left|\Gamma_{fdtd}(\omega)\right| = \dfrac{\boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{\tilde{E}_x{}^{r}(z_1,t)\right\}}{\boldsymbol{\mathcal{F}}\left\{\tilde{E}_x{}^{i}(z_1,t)\right\}}$
8. $\Gamma_{th}(\omega) = \dfrac{\left|1-\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\right|}{\left|1+\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}\right|}$


Raicu (α = 0.1, β = 0.9, γ = 0.8) - M = 7
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
Reflection Coefficient
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
frequency (GHz)
R_{fdtd}
R_{th}

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ