Московский физико-технический институт (МФТИ-Физтех)

Лабораторная работа 1.4.2: Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

Иванов Артём, Б05-409

22 мая 2025 г.

1 Теоретические сведения

1.1 Общие сведения

Физическим маятником называют твердое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, подвешенное за одну из своих точек.

При малых колебаниях для периода колебания физического маятника справедлива формула:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \tag{1}$$

где J - момент инерции маятника относительно оси качания, l - расстояние от оси качания до центра масс маятника

Проводя аналогию с математическим маятником, можно ввести приведенную длину физического маятника $l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}$ - длину математического маятника, при которой период его колебаний будет совпадать периодом колебаний с физического.

1.2 Теорема Гюйгенса для физического маятника

Пусть O_1 - точка подвеса маятника, C - его центр масс, O_2 - точка, лежащая на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от O_1 за точкой С (т.к. всегда выполняется $l_{\text{пр}} > l$).

Докажем, что период колебаний маятника при подвешивании за O_1 и O_2 одинаков (точки O_1 и O_2 - сопряженные). Для этого покажем, что $\frac{T_2}{T_1} = 1$

Из (1):

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2} \tag{2}$$

По построению:

$$l_{\text{пр}} = l_1 + l_2 = \frac{J_1}{ml_1} \tag{3}$$

По теореме Гюгенса-Штейнера:

$$J_1 = J_C + ml_1^2,\ J_2 = J_C + ml_2^2 \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что $J_2 = J_1\frac{l_2}{l_1}$

Подставляя в (4), получаем $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1$. Т.к. T_1 и T_2 очевидно положительны, отсюда следует что $\frac{T_2}{T_1} = 1$, ч.т.д.

1.3 Определение g

Пусть точки O_1 и O_2 на расстоянии L - сопряженные. Тогда $L = l_1 + l_2 = l_{\text{пр}}$. В реальности точного совпадения периодов не будет, но точно можно сказать, что $T_1 = T$ и $T_2 = T + \Delta T$. Тогда из (1) и (4) получаем:

$$g = (2\pi)^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2} \tag{5}$$

Сделав замену $g_0 = (2\pi)^2\frac{L}{T^2}$ и $\lambda = l_1/l_2$, можем переписать это уравнение как:

$$g = g_0\frac{\lambda - 1}{\lambda - \frac{T_2^2}{T_1^2}} \tag{6}$$

Отметим, что если $T_1 = T_2 = T$, то $g = g_0$

Оценим, насколько отличается величина g_0 от g. Пусть $\varepsilon = \Delta T/T << 1$. Тогда пользуясь малостью ε можем записать:

$$g = g_0 \frac{\lambda - 1}{\lambda - (1+\varepsilon)^2} \approx g_0 \frac{1}{1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda - 1}} \tag{7}$$

Обозначив $\beta = \frac{1}{\lambda-1} = \frac{l_2}{l_1 - l_2}$ преобразуем к виду:

$$g = g_0 \cdot (1 + 2\beta\varepsilon) \tag{8}$$

Таким образом поправка $\Delta g \approx 2\beta\varepsilon g$ мала, только если мала величина β. Отметим, что при $l_1 \to l_2$ β неограниченно возрастает и стремится к ∞. На практике достаточно, чтобы выполнялось $l_1 > 2.5 l_2$

2 Описание установки

В нашем случае физический матник будет представлен стержнем, с закрепленными на нем призмами и грузами в форме сплюснутых сфероидов. Ребра призм будут задавать оси качания матника. Регистрация времени колебаний осуществляется электронными счетчиками, причем чтобы груз или призма не задевали счетчик, призмы должны быть расположены на определенном расстоянии от концов стержня (в нашем случае 26.7 см)

2.1 Определние положений призм и грузов

Для определения g мы дожны найти такое положение призм и грузов, чтобы точки крепления призм были оборотными и при этом выполнялось полученное соотношение для l_1/l_2.

Задав наперед отношение l_1/l_2 (в нашем случае 3) и измерив расстояние L между призмами, можно однозначно определить l_1 и l_2.

Чтобы найти положение грузов, воспользуемся методом расчета с использованием моментов инерции относительно подвеса.

Пусть $b_1(2)$ - расстояние от 1(2) груза до 1(2) призмы. Тогда, относительно 2 призмы можем записать:

- момент инерции тонкого стержня длиной $l_{\text{ст}}$ с призмами:

$$J_{\text{ст}} = m_{\text{ст}} \left(\left(\frac{l_{\text{ст}}^2}{12} \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right)$$

- момент инерции грузов на стержне:

$$J_{\text{гр}} = m_1 (L - b_1)^2 + m_2 b_2^2 \tag{9}$$

- суммарный момент инерции всего маятника: $J_{\Pi} = M L l_2 = J_{\text{стр}} + J_{\text{гр}}$

  Величины b_1 и b_2 определяются уравнением:

$$M l_1 = m_{\text{ст}} \frac{L}{2} + m_{\mathbf{пр}_2} L + m_1 b_1 + m_2 (b_2 + L) \tag{10}$$

Тогда искомую величину b_2 можно найти как точку пересечения графика $J_{\text{гр}}(b_2)$ с горизонтальной прямой $J_{\text{гр}} = J_{\Pi} - J_{\text{ст}}$.

В нашем случае получились следующие значения:

l_1, см	l_2, см	b_1, см	b_2, см
34.9	11.6	7.0	24.4

3 Результаты измерений и обработка данных

3.1 Рассчет g

Занесем полученные результаты измерений в таблицу

№	n	A	t_1, с	T_1, с	t_2, с	T_2, с
1	100	5°	136.7	1.367	137.3	1.373

Рассчитаем g_0 и g.
$g_0 = (2 \cdot 3.141)^2 \frac{0.465\text{м}}{(1.37\text{с})^2} = 9.781 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
$\beta = \frac{1}{3.0-1} = 0.5$
$g = g_0 \cdot (1 + 2\beta \cdot \frac{0.006\text{с}}{1.367\text{с}}) = 9.824 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

3.2 Рассчет погрешностей

$\sigma_L = 0.1\text{мм}$
$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{L} = 0.02\%$
$\sigma_t = 0.1\text{с}$
$\sigma_T = \sigma_t / n = 0.001\text{с}$
$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{T} = 0.07\%$

$$\frac{\sigma_{g_0}}{g_0} = \sqrt{\varepsilon_L^2 + 4\varepsilon_T^2} = 0.14\% \tag{11}$$

$\frac{\sigma_l}{l} = 0.08\%$
$\frac{\Delta T}{T} = 0.4\%$
$\beta = 0.5$

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\varepsilon_L^2 + 4\varepsilon_T^2 + 8\beta^2\varepsilon_T^2 + 8\left(\beta \frac{\Delta T}{T} \frac{\sigma_l}{l}\right)^2} = 0.2\% \tag{12}$$

3.3 Итоговое значение

$\underline{g_0 = 9.781 \pm 0.014 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon = 0.14\%}$
$\underline{g = 9.824 \pm 0.020 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon = 0.2\%}$

4 Вывод

Нам удалось успешно измерить ускорение свободного падения с высокой точностью (погрешность порядка 0.2%), причем полученное значение с учетом погрешности попадает в табличное.