Московский физико-технический институт (МФТИ-Физтех)

Лабораторная работа 1.2.5:
Исследование прецессии уравновешенного гироскопа

Иванов Артём, Б05-409

22 мая 2025 г.

1 Цель работы:

исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующий на ось гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

2 В работе используются:

гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенсциркуль, линейка.

3 Теория

В этой работе исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа подвешиваются грузы. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага воеруг вертикальной оси и времни, которое на это ушло, определяемоу секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует преподнять на 5-6 градусов. Опять надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

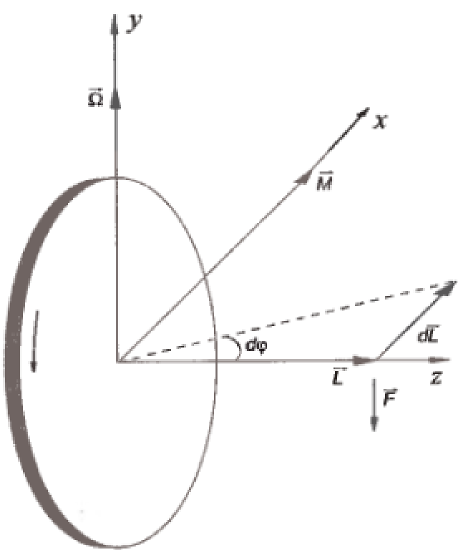

Рис. 1. Маховик

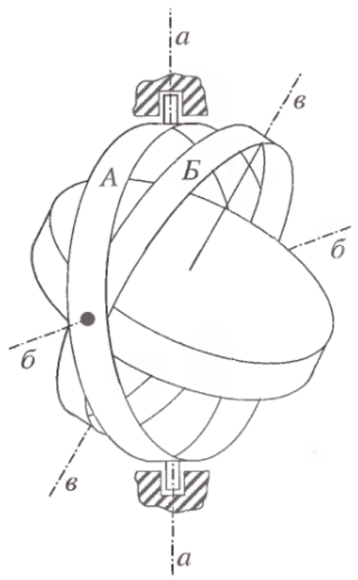

Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \tag{1}$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа, I_z – момент инерции гироскопа по его главной оси вращения. ω_0 – частота его вращения относительно главной оси, Ω – частота прецессии.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на десткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{f}}. \tag{2}$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_ц$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_ц\frac{T_0^2}{T_ц^2}, \tag{3}$$

Здесь $T_ц$ – период крутильных колебаний цилиндра.

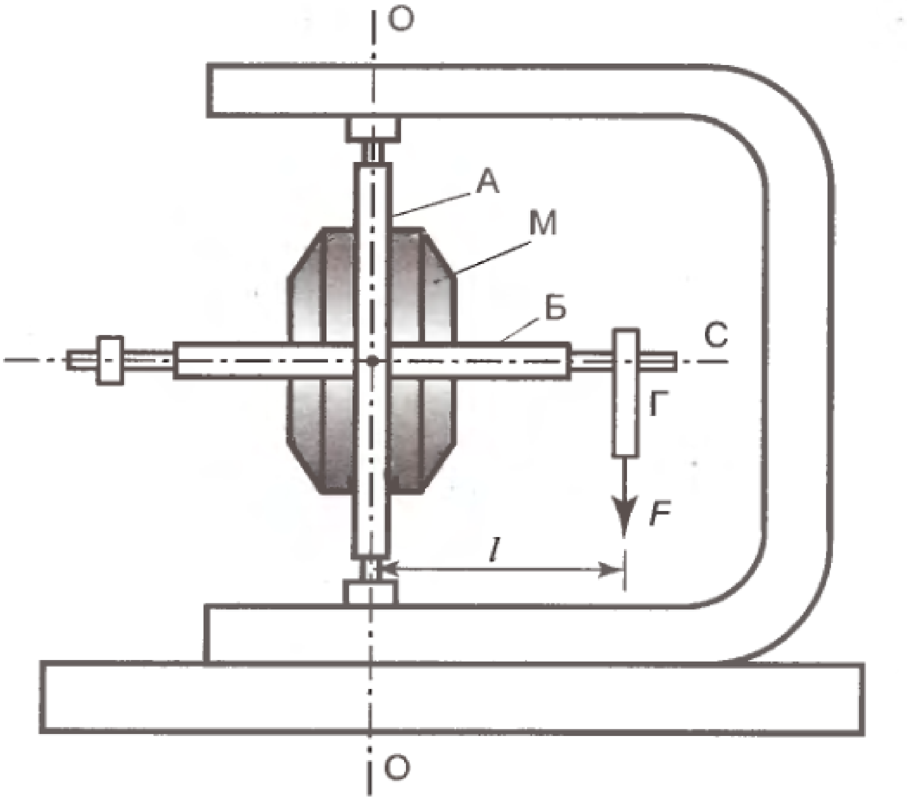

Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку искользубт для раскрутки гироскопа, а вторую – для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте врещения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой – переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на эеране получаем эллипс.

4 Ход работы и результаты измерений

Отклоним рычаг С на 5-6 градусов вверх от горизонтальной плоскости. Подвесим к нему груз Г и с помощью секундомера найдем угловую скорость регулярной прецессии (по числу оборотов и времени прецессии). Измерения необходимо продолжать до тех пор, пока рычаг С не опустится на 5-6 градусов ниже горизонтальной плоскости, сделав целое число оборотов относительно вертикальной оси. Повторим этот опыт не менее трех раз. Усредним полученные результаты. Проделаем всю серию экспериментов, при 7 значениях момента силы F относительно центра масс гироскопа (длина плеча $l = 120$мм).

$m_{\text{гр}}$, г	N	t, с	$\frac{N}{t}$, Гц	Ω, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$
74.2	1	133	0.0075	0.0472
92.4	1	109	0.0092	0.0576
115.2	2	173	0.0116	0.0726
130.0	2	145	0.0138	0.0867
173.8	2	117	0.0171	0.1074
213.3	2	95	0.0211	0.1323
269.0	3	112	0.0268	0.1684
338.5	3	90	0.0333	0.2094

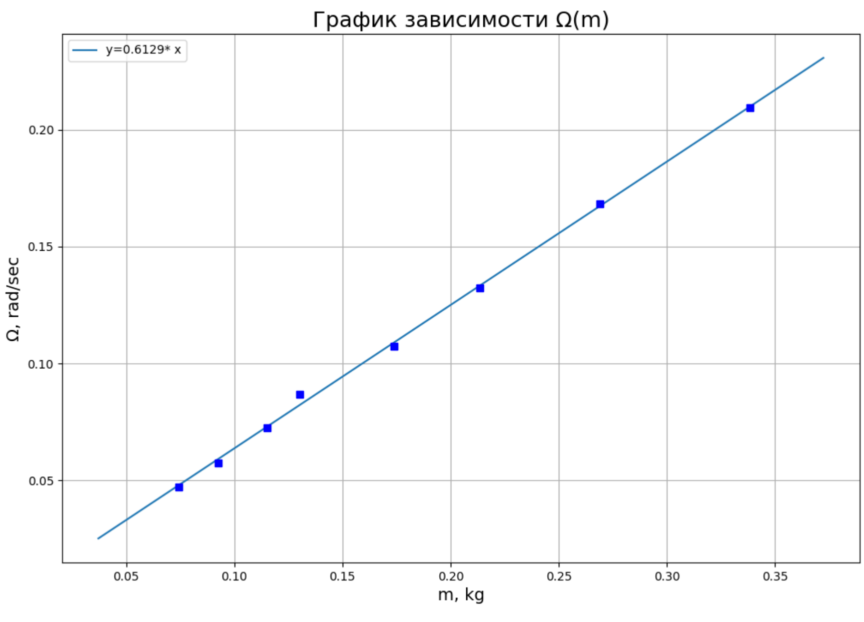

Рис. 1: График зависимости $\Omega(m)$

Вывод уравнения для графика:

$$\Omega = \frac{m_{gl}}{I_0\omega_0}, \quad y = kx \quad \rightarrow \quad k = \frac{gl}{I_0\omega_0}$$

Найдём коэффициенты наилучшей прямой по методу наименьших квадратов (МНК). Для простоты погрешности всех точек будем считать приблизительно одинаковыми. Воспользуемся встроенными функциями языка программирования Python и библиотекой

Numpy:

$$k \approx 0.613 \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{кг}}$$

Получили $k = (6.13 \pm 0.02) \cdot 10^{-1} \frac{\text{рад}}{\text{с}\cdot\text{кг}}$, $\mathcal{E}_k = 3 \cdot 10^{-3}$

Измерим момент инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии I_0. Для этого подвесим ротор, извлеченный из такого же гироскопа, к концу вертикально висящей проволоки так, чтобы ось симметрии гироскопа была вертикальна, и измерьте период крутильных колебаний получившегося маятника. Заменим ротор гироскопа цилиндром, для которого известны или легко могут быть измерены радиус и масса, и определим для него период крутильных колебаний. Пользуясь формулой (10), вычислим момент инерции ротора гироскопа I_0.

Известный цилиндр				Ротор			
	N	t, c	σ_t, c		N	t, c	σ_t, c
1	10	40.06	0.6	1	10	31.84	0.6
$T_c = (4.01 \pm 0.06)c$				$T_0 = (3.18 \pm 0.06)c$			

Параметры цилиндра					
M, кг	σ_M, кг	D, м	σ_D, м	I_c, кг $\cdot$ м^2	σ_{I_c}, кг $\cdot$ м^2
1,6162	$1 \cdot 10^{-4}$	0,078	$1 \cdot 10^{-4}$	$12.2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-6}$

$$I_0 = I_c \frac{T_0^2}{T_c^2} = \left(\frac{MD^2}{8}\right) \frac{T_0^2}{T_c^2} = 7.73 \cdot 10^{-4} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Оценим погрешности в определении Ω и I_0:

$$\sigma_{I_c} = I_c \sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2} = 12.2 \cdot 10^{-4} \sqrt{\left(\frac{0.0001}{1.616}\right)^2 + 4\left(\frac{0.0001}{0.078}\right)^2} = 3 \cdot 10^{-6} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{4\left(\frac{\sigma_{T_c}}{T_c}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_c}}{I_c}\right)^2} = 3.7 \cdot 10^{-5} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Отсюда получаем: $I_0 = (7.73 \pm 0.37) \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2, $\mathcal{E}_{I_0} = 0.047$

Рассчитаем с помощью частоту вращения ω ротора гироскопа.

$$\Omega = \frac{2\pi N}{t}, \quad \sigma_\Omega = \Omega \frac{\sigma_t}{t}$$

$m, text$	Ω, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	ω, $\frac{1}{\text{с}}$
338.5	0.2094	390.3
269.0	0.1684	395.7
213.3	0.1323	388.7
173.8	0.1074	388.9
130.0	0.0867	382.0
115.2	0.0726	382.4
92.4	0.0576	387.3
74.2	0.0472	379.6

$$\omega = \frac{mgl}{I_0 \Omega}, \quad \omega = \frac{1}{N} \sum \omega_i = 387 \ c^{-1}$$

$$\sigma_\omega = \omega \sqrt{\left(\frac{\sigma_\Omega}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0}\right)^2} = \omega \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0}\right)^2} =$$

$$= 387 \sqrt{(0.005)^2 + \left(\frac{3.7 \cdot 10^{-5}}{7.73 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = 17.9 \ c^{-1}, \quad \mathcal{E}_\omega = \frac{\sigma_\omega}{\omega} = 0.046$$

Таким образом:

$\omega = (387.0 \pm 17.9)$Гц, $\quad \mathcal{E}_\omega = 0.046$

4.1 Фигуры Лиссажу

Определим частоту вращения ротора гироскопа по фигурам Лиссажу. Получение на экране осциллографа эллипса означает, что частота сигнала генератора равна частоте вращения ротора гироскопа. Получаем $\omega \approx 395$ Гц.

5 Вывод

1. В ходе выполнения работы были определены физические величины, описывающие регулярную прецессию гироскопа, закрепленного в карданном подвесе, а именно:

    - Была экспериментально определена угловая скорость регулярной прецессии гироскопа.
    - Был определен момент инерции ротора гироскопа: $I_0 = (7,73 \pm 0,37) \cdot 10^{-4}$ кг$\cdot$м^2; Точность определения: $\varepsilon_{I_0} = 0.047$; Основной вклад – погрешность измерения периода колебаний.
    - Измеренная частота мотора с помощью фигур Лиссажу совпадает с измеренной с помощью косвенных измерений в рамках погрешностей.

2. На практике были подтверждены теоретические зависимости, используемые в данной работе.