

Лабораторная работа 1.2,3:
Определение моментов инерции твердых тел с помощью
трифилярного подвеса

Иванов Артём, Б05-409

22 мая 2025 г.

1 Цель работы

Измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

2 Оборудование

Трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и др.).

3 Теоретическая часть

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции вычисляется по формуле

$$I = \int r^2 dm. \quad (1)$$

Здесь r - расстояние элемента массы тела dm от оси вращения.

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и простой форме момент инерции можно вычислить. Для неоднородных тел сложной формы момент инерции можно определить экспериментально. Для этого можно использовать трифилярный подвес (рис. 1).

Платформа P укреплена на кронштейне и снабжена рычагом, при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно нижней P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия. Но в положении равновесия платформа не останавливается. В результате платформа совершает колебания.

Если пренебречь потерями энергии, уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E. \quad (2)$$

Здесь I - момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m - масса платформы с телом, φ - угол поворота платформы от положения равновесия системы, z - координата по вертикали центра нижней платформы

Рис. 1: Трифилярный подвес

Из геометрии рисунка при условии $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ нетрудно вывести соотношение

$$z \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0}. \quad (3)$$

Подставляя в уравнение (2), получаем

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E. \quad (4)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0, \quad (5)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right). \quad (6)$$

Период крутильных колебаний системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}. \quad (6)$$

Из (6) находим формулу для определения момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0}. \quad (10)$$

Полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний.

В данной работе рекомендуется период колебаний определять с относительной погрешностью 0,5%.

4 Ход работы

4.1 Проверяем пригодность установки для проведения эксперимента

Устройство для возбуждения колебаний исправно функционирует, продольных колебаний платформы не возникает, счетчик числа колебаний работает.

4.2 Проверяем, можно ли считать колебания незатухающими

За 60 полных колебаний амплитуда уменьшается с 30° до 15°. Предположение верно с хорошей точностью.

4.3 Проверим, как зависит время, за которое подвес совершает 10 колебаний, от начальной амплитуды

Все полученные значения отличаются не более чем на несколько процентов, поэтому можно считать, что весь диапазон амплитуд является рабочим. Для всех измерений брал $A = 15^\circ$

N	A°	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_{\text{ср}}, \text{с}$
1	5	4,40	4,35	4,375
2	10	4,42	4,36	4,390
3	15	4,39	4,40	4,395
4	20	4,43	4,40	4,415

4.4 Выпишем параметры установки

	Значение
R	$(115,4 \pm 0,5) \text{ мм}$
r	$(30,5 \pm 0,3) \text{ мм}$
m_0	$(993,5 \pm 0,5) \text{ г}$
z_0	$(2174 \pm 2) \text{ мм}$

$$z_0 = \sqrt{l^2 - R^2};$$

$$l = (2176 \pm 2) \text{ мм};$$

$$\sigma(z_0) = z_0 \cdot \frac{l\sigma(l) + R\sigma(R)}{l^2 - R^2}.$$

Константа установки:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0};$$

$$\sigma(k) = k \cdot \sqrt{\varepsilon(R)^2 + \varepsilon(r)^2 + \varepsilon(z_0)^2};$$

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2$$

$$k = (4,02 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$$

4.5 Вычислим момент инерции ненагруженной платформы

$$I_0 = kmT^2;$$

$$\sigma(I_0) = I_0 \cdot \sqrt{(\varepsilon(k))^2 + \varepsilon(m)^2 + 2\varepsilon(T)^2}$$

$T = 4,395 \text{ с}$ - усредняем значения из п. 3;

$$\sigma(T) = \sqrt{\sigma_{\text{пр}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2};$$

$$\sigma_{\text{пр}} = 0,001 \text{ с};$$

$$\sigma_{\text{сл}} = t_{c1} \cdot \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 6} \sum_{n=1}^6 (T - T_N)^2};$$

$$t_{c1} = 1,13;$$

$$T = (4,41 \pm 0,01) \text{ с}$$

$$I_0 = (7,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

4.6 Измерим моменты инерции тел по отдельности и вместе с помощью подвеса, а затем рассчитаем значения теоретически

Тело	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$\sigma(T), \text{с}$
кольцо	82,99	4,1495	0,0005
крышка	78,83	3,9415	0,0005
вместе	78,5	3,9250	0,0005

$$T = \frac{t}{20};$$

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_{\text{приб}}}{20};$$

$$\sigma_{\text{приб}} = 0,01\text{с};$$

Теоретические значения моментов инерции кольца:

$$I_1 = m_1 \frac{d_{\min}^2 + d_{\max}^2}{8};$$

$$m_1 = (1049,5 \pm 0,5)\text{г}$$

$$d_{\min} = (14,49 \pm 0,01)\text{см}$$

$$d_{\max} = (16,25 \pm 0,01)\text{см}$$

крышки:

$$I_2 = \frac{1}{8}m_2d_2^2.$$

$$m_2 = (584,4 \pm 0,5)\text{г}$$

$$d_2 = (17,01 \pm 0,01)\text{см}$$

Экспериментальное значение:

$$I_i = k(m_i + m_0)T_i^2 - I_0.$$

$$\sigma(I_i) = \sqrt{(I_i^2 \cdot (\varepsilon(k))^2 + \varepsilon(m_i + m_0)^2 + 2\varepsilon(T_i)^2) + \sigma(I_0)^2}$$

Заносим результаты в таблицу:

Тело	$I_{\text{т}}, \text{г} \cdot \text{м}^2$	$I_{\text{э}}, \text{г} \cdot \text{м}^2$	$\sigma(I_{\text{э}}), \text{г} \cdot \text{м}^2$
кольцо	6,2	6,1	0,3
крышка	2,1	2,0	0,2
вместе	8,3	8,1	0,5

Из таблицы видно, что значения различаются в пределах погрешности. Так подтверждаем аддитивность моментов инерции.

$h, \text{ см}$	$t, \text{ с}$	$h^2, \text{ см}^2$	$\sigma(h^2), \text{ см}^2$	$t^2, \text{ с}^2$	$\sigma(t^2), \text{ с}^2$
0,0	60,70	0,0	0,0	3684	1
0,5	60,94	0,3	0,1	3713	1
1,0	61,38	1,0	0,1	3767	1
1,5	62,03	2,3	0,2	3847	1
2,0	62,87	4,0	0,2	3952	1
2,5	63,89	6,3	0,3	4081	1
3,0	64,77	9,0	0,3	4195	1
3,5	66,27	12,3	0,4	4391	1
4,0	67,70	16,0	0,4	4583	1
4,5	69,24	20,3	0,5	4794	1
5,0	71,25	25,0	0,5	5076	1
5,5	73,12	30,3	0,6	5346	1
6,0	75,71	36,0	0,6	5732	2

4.7 Зависимость периода крутильных колебаний от расстояния каждой из половинок до оси вращения

Помещаем на платформу диск, разрезанный по диаметру. Снимаем зависимость периода крутильных колебаний от расстояния каждой из половинок до оси вращения.

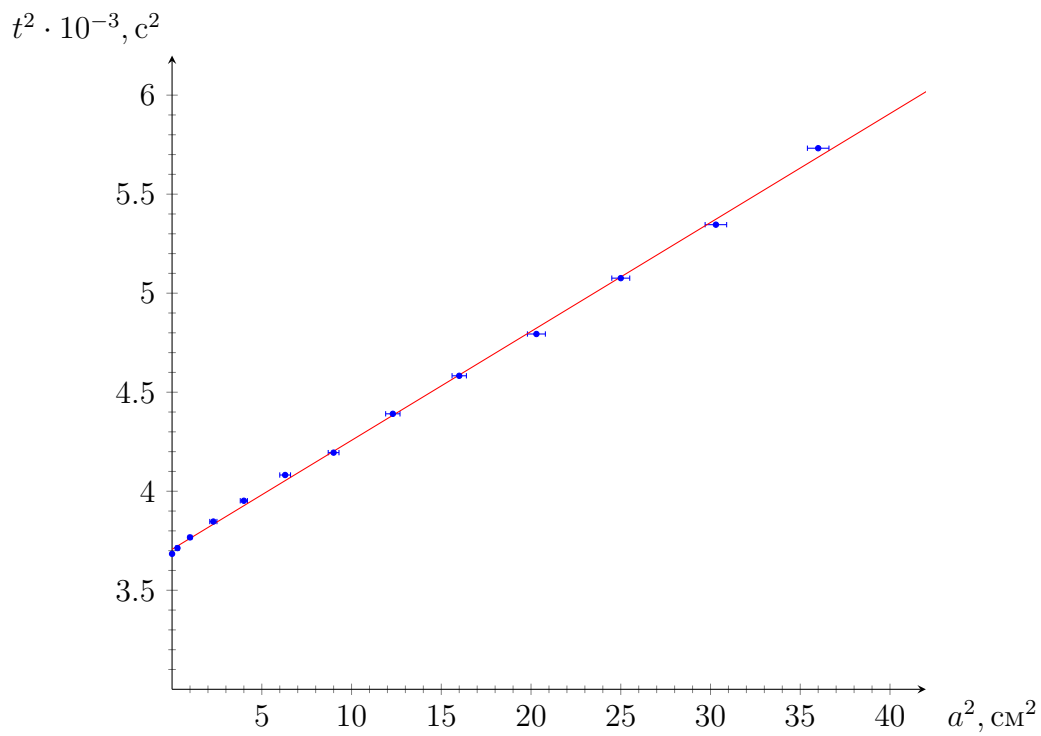
$$\sigma(t^2) = 2t\sigma(t);$$

$$\sigma(t) = 0,01\text{с.}$$

$$\sigma(h^2) = 2h\sigma(h);$$

$$\sigma(h) = 0,1\text{см.}$$

Строим график зависимости $t^2(h^2)$



По МНК получаем:

$$\alpha = (55,0 \pm 0,4)\text{c}^2/\text{cm}^2;$$

$$\beta = (3707 \pm 10)\text{c}^2.$$

Момент инерции системы:

$$I(h) = I_0 + I + (m_{d1} + m_{d2})h^2,$$

где I - момент инерции целого диска.

$$k(m_{d1} + m_{d2} + m_0)T^2(h) = I_0 + I + (m_{d1} + m_{d2})h^2;$$

$$T^2(h) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m_{d1} + m_{d2}}} h^2 + (T^2)'.$$

$$t^2(h) = \frac{400}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m_{d1} + m_{d2}}} h^2 + (T^2)''.$$

$$\alpha = \frac{400}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m_{d1} + m_{d2}}};$$

$$1 + \frac{m_0}{m_{d1} + m_{d2}} = \frac{400}{k\alpha};$$

$$m_{d1} + m_{d2} = m_0 \left(\frac{400}{k\alpha} - 1 \right)^{-1} = (1500 \pm 30)\text{г};$$

Измерим массы половинок на весах:

$$m_{d1} = (763,7 \pm 0,5)\text{г};$$

$$m_{d2} = (764,2 \pm 0,5)\text{г};$$

$$m_{d1} + m_{d2} = (1528 \pm 1)\text{г};$$

Таким образом, полученное из графика значение отличается от измеренного на весах в пределах погрешности.

При $h = 0$:

$$I(0) = I_0 + I;$$

$$I = I(0) - I_0;$$

$$R = (4,40 \pm 0,01)\text{см};$$

$$I(0) = k(m_{d1} + m_{d1} + m_0) \frac{T(0)^2}{400} = (9,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I = (1,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

5 Вывод

В данной работе мы познакомились с понятием момента инерции твердого тела относительно некоторой оси, изучили теорему Гюйгенса-Штейнера, измерили с помощью трифилярного подвеса моменты инерции некоторых тел, подтвердили аддитивность момента инерции, а также сравнили полученные экспериментально результаты с выведенными теоретически.