Image Transforms
انتقال‌های تصاویر

گردآورنده
علی صفرپور دهکردی
Ali Safarpoor Dehkordi
بهار ۱۴۰۱
April 2022

فهرست مطالب مرتبط بر اساس اسلایدهای دکتر کسایی:

Transforms:
1. Basis vectors
2. Unitary transforms
3. DFT
   a. Spherical harmonies
4. DCT
5. Hadamart transform (HT)
6. Haar transform (HrT)
7. Slant transform (ST)
8. Karhunen-Loeve transform (KLT)

More topics:
1. PCA
2. LDA
3. Fundamental Decomposition
4. SVD
5. Zonal Filter
6. Sinusoidal Family

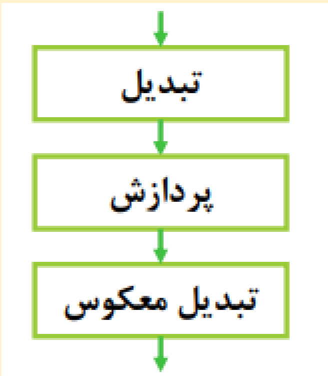
اغلب مطالب مربوط به جلسات ۵ تا ۹ دکتر محمدرضا محمدی و اسلایدهای درس پردازش تصویر رقمی ایشان:
منبع: https://www.aparat.com/v/9UCyV?playlist=1304262
منبع اسلایدهای درس: https://drive.iust.ac.ir/index.php/s/Gp29bbxLFzCHj5y

---

براساس تدریس آقای دکتر محمدی:

- تبدیل‌های تصویر، تصویر را به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه بازنمایی می‌کنند و با استفاده از ابزارهای جبر خطی تحلیل می‌شوند
- در تمام تبدیل‌های تصویر، اطلاعات و انرژی کل تصویر حفظ می‌شود
- در نتیجه، تمام آنها معکوس‌پذیر هستند اما توزیع اطلاعات و انرژی در ضرایب تبدیل‌ها متفاوت است

پس هدف چیه و چکار قراره بکنیم؟



برای تبدیل معکوس کافی است کانجوگیت محاسبه گردد و عبارات فوق بر قرار است. توجه شود شرط این امکان تعامد بردارها است که در تبدیل‌های موجود برقرار است.

توابع پایه را با $s(x,u)$ و ضرایب تبدیل را با $T(u)$ نشان می‌دهیم

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)s(x,u)$$

اگر مجموعه $s(x,u)$ متعامد باشند:

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)r(x,u)$$

$$T(u) = \langle f(x), s(x,u) \rangle$$

$$r(x,u) = s^*(x,u)$$

تبدیل فوریه گسسته یا همان DFT

معرفی روابط تبدیل فوریه

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)s(x,u)$$

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)r(x,u)$$

$$s(x,u) = e^{+j\frac{2\pi}{N}xu}$$

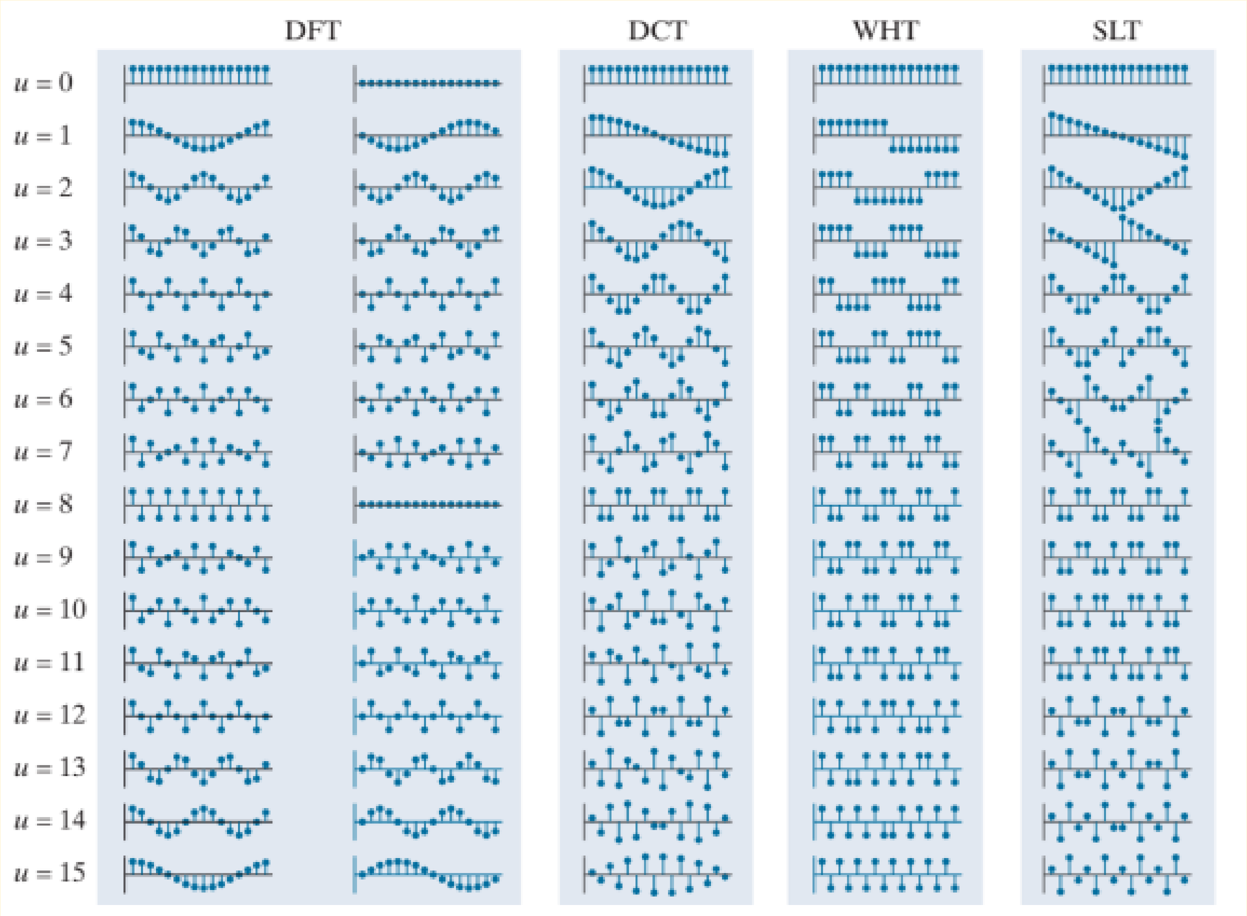
$$r(x,u) = e^{-j\frac{2\pi}{N}xu}$$

یک تبدیل خطی با فضای متعامد است. توان r و s نسبت به هم عمود تغییر علامت داده که همان کانجوگیت شدن هست.

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)s(x,u) \qquad f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} T(u,v)s(x,y,u,v)$$

$$T(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x)r(x,u) \qquad T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)r(x,y,u,v)$$

تبدیل استاندارد کاملا لوکال هست و فقط به یک نقطه نگاه میکند. درحالی که DCT به همه تصویر نگاه می‌کند. HAAR و DB4 ترکیبی از این دو می‌باشد. از طرفی DFT قسمت imaginary دارد اما بقیه فقط real دارند.



دو ویژگی خوب در کرنل‌ها:

کرنل تبدیل تفکیک‌پذیر:

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u) r_2(y, v)$$

کرنل تبدیل تفکیک‌پذیر متقارن:

$$r(x, y, u, v) = r_1(x, u) r_1(y, v)$$

از تفکیک پذیری رابطه اول میتوان فهمید که مثلا میشه هر سطر را یک سیگنال یک بعدی بگیریم و مثلا اگر تبدیل فوریه باشد یک تبدیل فوریه یک بعدی بگیریم و پس از اعمال بر همه سطرها، اکنون بر اعداد واقع شده که یک ستون شده‌اند تبدیل عمودی که اینجا تبدیل فوریه یک بعدی است اعمال گردد.

مثال: تبدیل فوریه

$$r(x,y,u,v) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$r(x,y,u,v) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)}e^{-j2\pi\left(\frac{vy}{N}\right)}$$

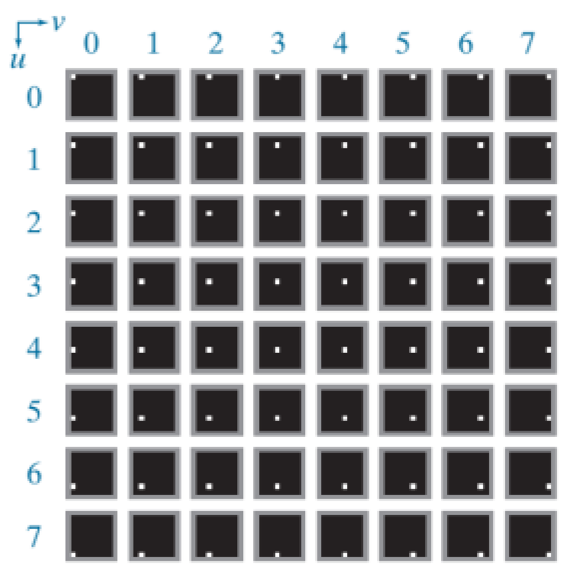
$$r_1(x,u) = e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)}$$

یک نمونه از توابع پایه:

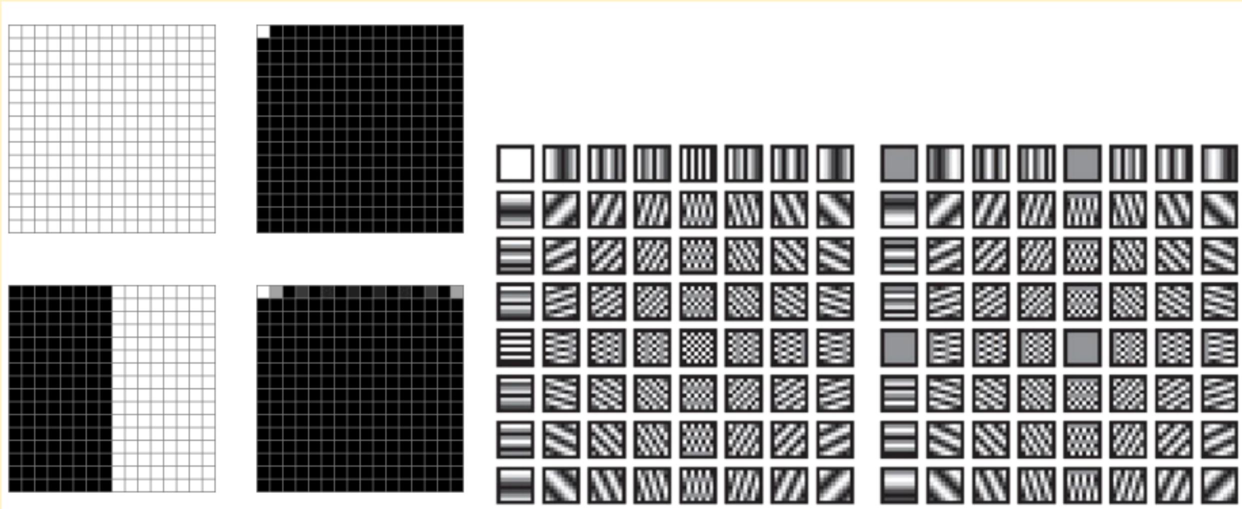
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

توابع پایه فضای استاندارد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

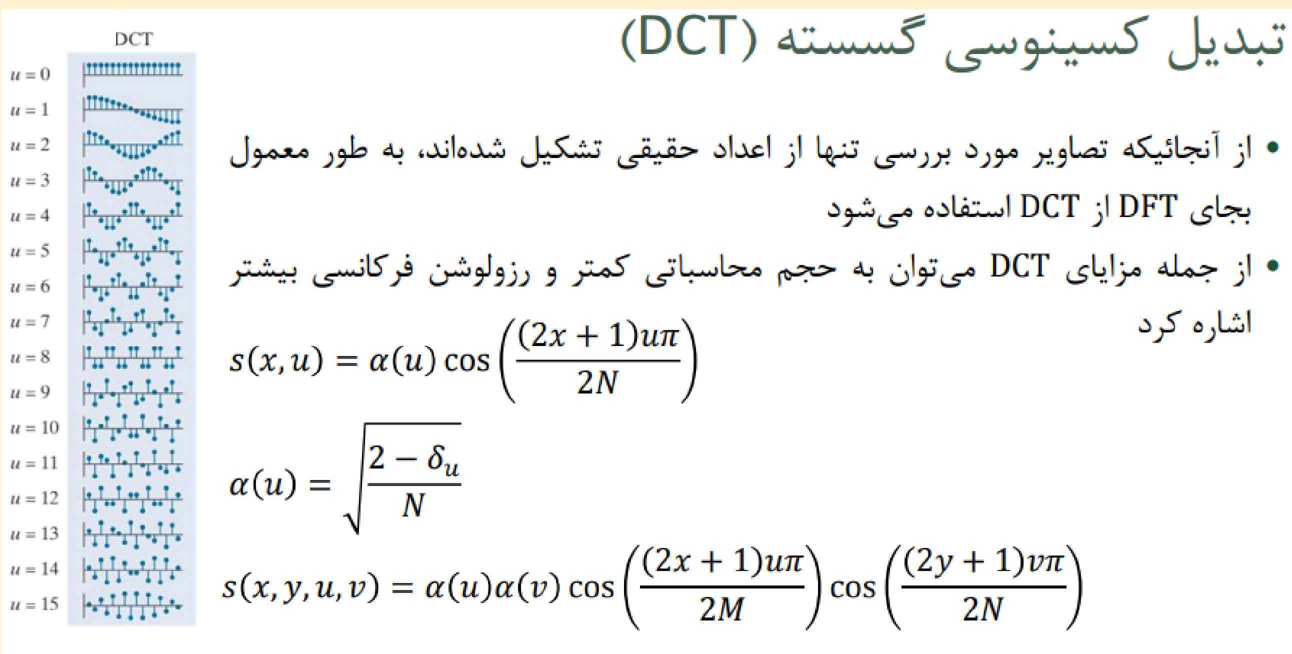


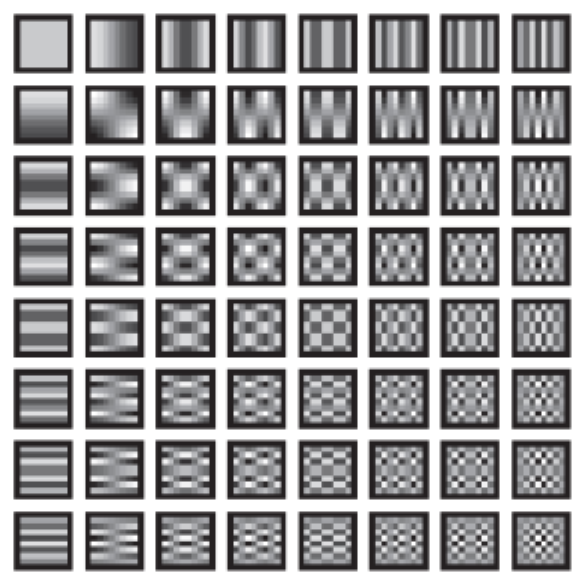
توابع پایه فضای تبدیل فوریه و یک نمونه از آن:



تبدیل کسینوسی گسسته یا همان DCT

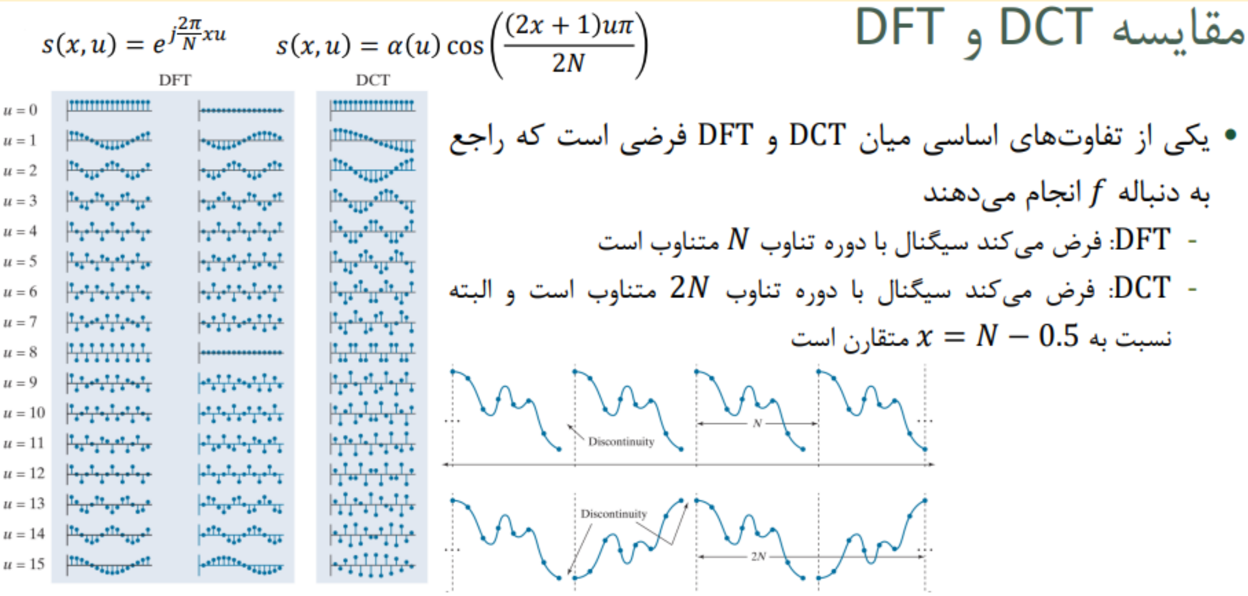
مانند این است که قسمت موهومی DFT استفاده نگردد.





پس فرق این دو تا چی شد؟

تفاوت اساسی این‌ها اینه که هر دو میخواهند باز سازی کنند هر دو هم فرمول متناوب دارند.



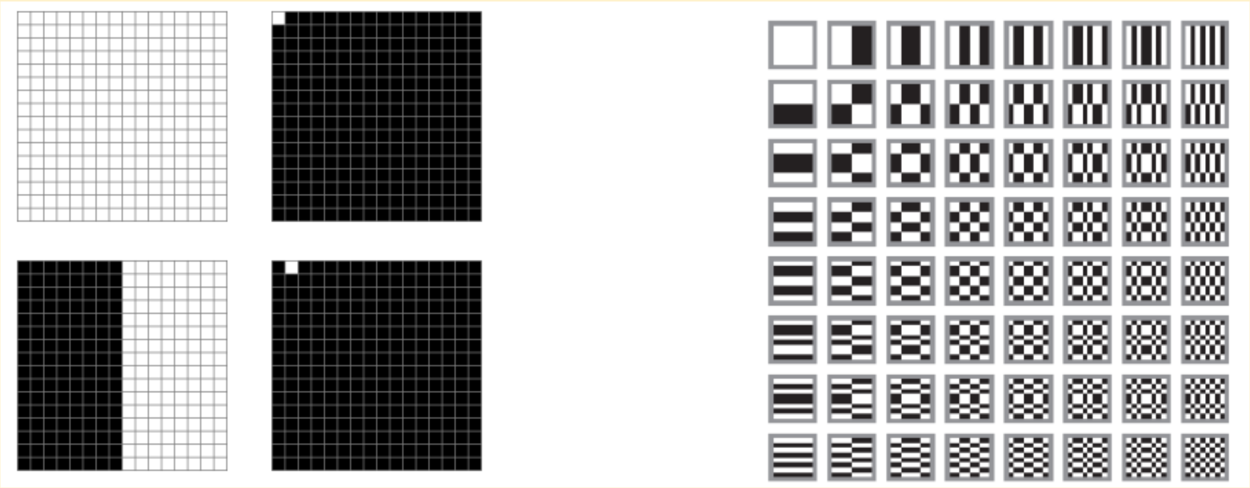
مذیت 2n نسبت به n اینه که انتظار پیوستگی در سیگنال اصلی که در اصل متناوب نیست بهتره و به جای مشاهده تغییر شدید، یک رفتار آینه‌ای و تغییر محدود داریم.

کاربردها

- **کاهش نویز**
  - **نویز جمع شونده ← حذف فرکانس‌های بالا**
  - **نویز متناوب ← حذف خطوط یا مثلا ستاره‌ها و به اضافه‌ها**

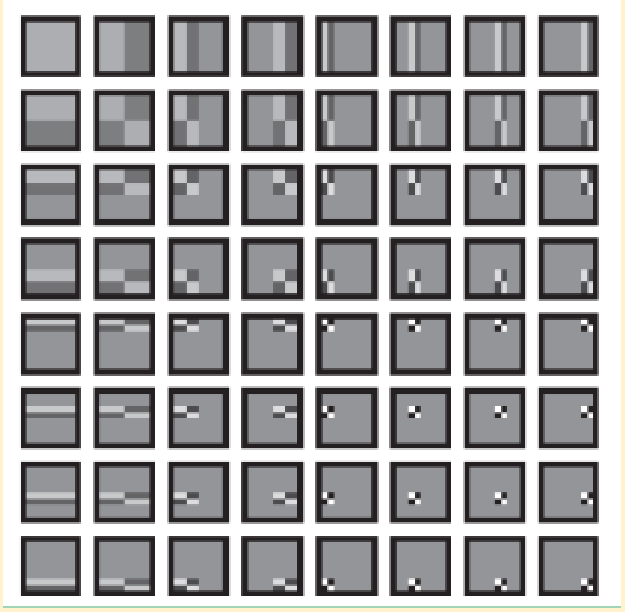
والش-هادامارت یا Walsh-Hadamart یا WHT یا HT

در این تبدیل مانند DCT هست اما مقادیر ۰ یا ۱ هستند و پیوسته نیست مقادیر.



تبدیل Haar یا HrT

در این تبدیل که تفاوت اصلیش اینه که قبلی ها همش مخالف ۰ بود سیگنالشون اما اینجا خیلی محلی عمل میکنه در خیلی از سیگنال‌هاش. در کل هم سیگنال سراسری داره هم محلی.



در یک تصویر بزرگ نگاه محلی اهمیت داره پس محدود شدن به سیگنال های کلی فایده داره مثلا رفتار متناوب در کل سیگنال باشه DCT بدرد میخوره اما همه جا نه ها.

تبدیل موجک یا Wavelet

در این تبدیل:

برخلاف تبدیل فوریه که توابع پایه آن توابع سینوسی و کسینوسی هستند و دامنه آن‌ها در کل بازه ثابت است، توابع موجک توابعی هستند که بیشتر انرژی آن‌ها در بازه کوچکی متمرکز شده است و به سرعت میرا می‌شوند

تبدیل موجک دارای خصوصیت محلی‌سازی بسیار خوبی است

علاوه بر این، در موجک از توابع چندمقیاسه برای بازنمایی سیگنال اصلی استفاده می‌شود

برای اطلاعات بیشتر در مورد تبدیل موجک و توابع مقیاس به اسلایدهای آقای دکتر محمدی مراجعه شود.

در ادامه به بررسی سایر مباحث طبق اسلایدهای دکتر کسایی خواهیم پرداخت و مطالب هر بخش اغلب بر اساس تدریس دکتر کسایی تهیه شده است و در غیر این صورت منبع آن ذکر خواهد شد:

تبدیل Slant یا ST

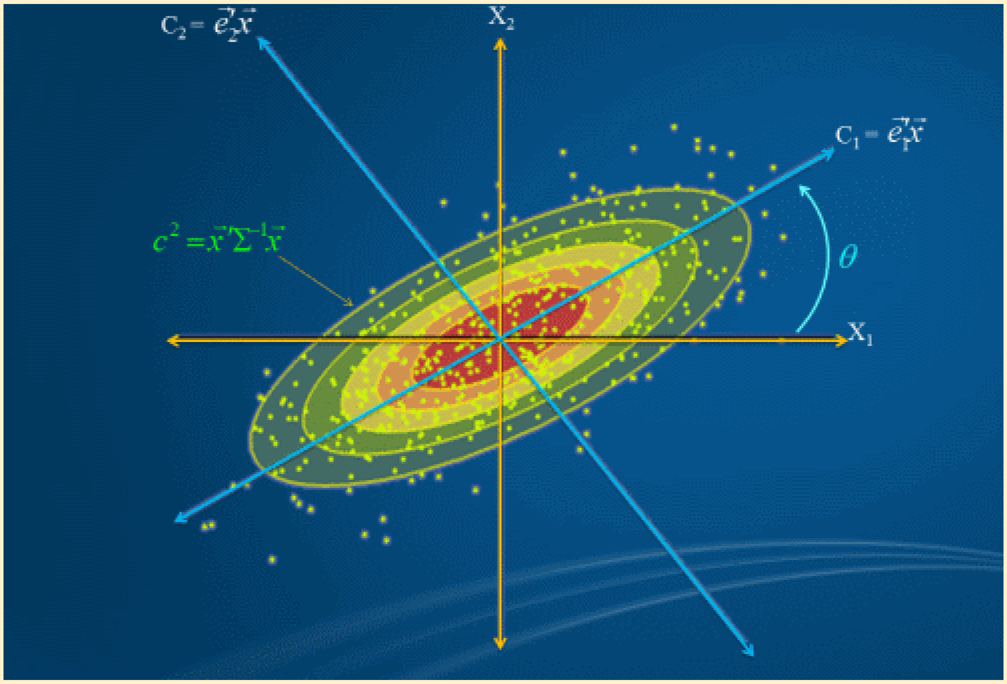
در این مدل یک تبدیل سریع داریم که کرنل آن به صورت بازگشتی قابل محاسبه است. خیلی سریع ازش رد شد.

تبدیل KLT یا همان PCA

در این مدل همان PCA هست.

معرفی PCA

تحلیل مؤلفه‌های اصلی (Principal Component Analysis - PCA) تبدیلی در فضای برداری است، که بیشتر برای کاهش ابعاد مجموعهٔ داده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.



تحلیل مؤلفه‌های اصلی در تعریف ریاضی[۲] یک تبدیل خطی متعامد است که داده را به دستگاه مختصات جدید می‌برد به‌طوری‌که بزرگترین واریانس داده بر روی اولین محور مختصات، دومین بزرگترین واریانس بر روی دومین محور مختصات قرار می‌گیرد و همین‌طور برای بقیه. تحلیل مؤلفه‌های اصلی می‌تواند برای کاهش ابعاد داده مورد استفاده قرار بگیرد، به این ترتیب مؤلفه‌هایی از مجموعه داده را که بیشترین تأثیر در واریانس را دارند حفظ می‌کند.

لینک خوب:

https://blog.faradars.org/%D8%AA%D8%AD%D9%84%DB%8C%D9%84-%D9%85%D9%88%D9%84%D9%81%D9%87-%D8%A7%D8%B3%D8%A7%D8%B3%DB%8C-pca-%D8%AF%D8%B1-%D9%BE%D8%A7%DB%8C%D8%AA%D9%88%D9%86/

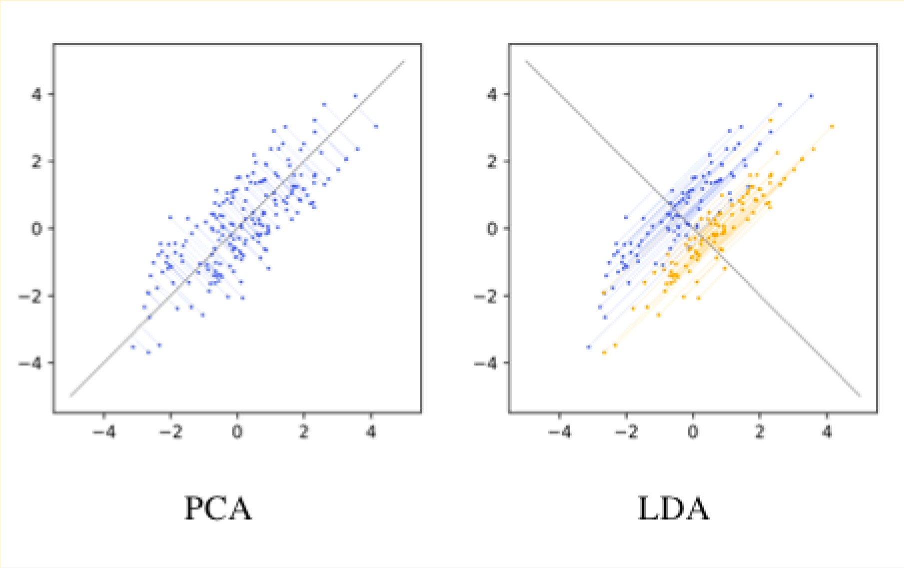
منبع:

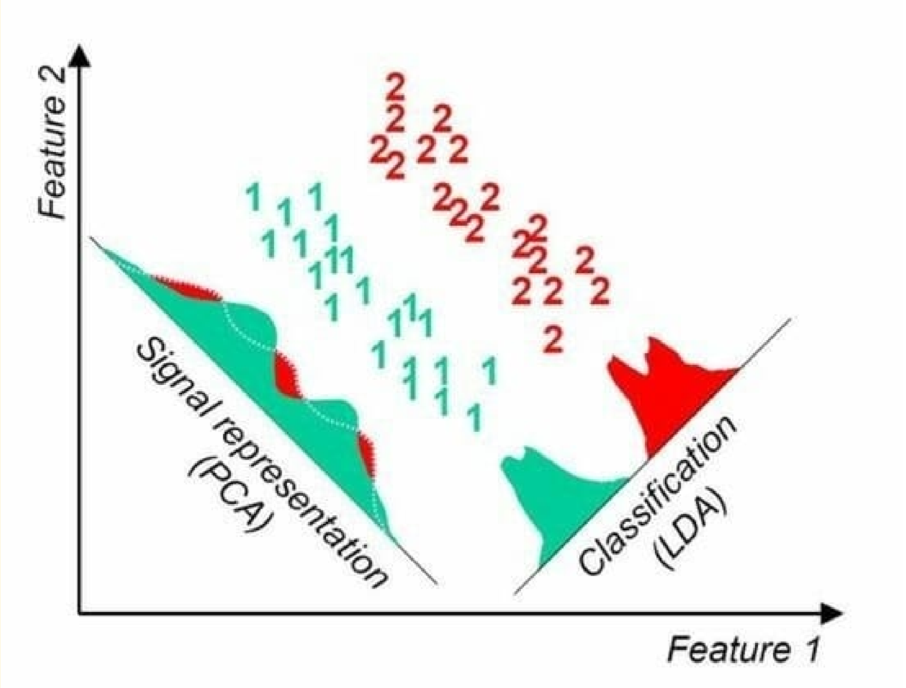
https://fa.wikipedia.org/wiki/%D8%AA%D8%AD%D9%84%DB%8C%D9%84_%D9%85%D8%A4%D9%84%D9%81%D9%87%E2%80%8C%D9%87%D8%A7%DB%8C_%D8%A7%D8%B5%D9%84%DB%8C

معرفی LDA

آنالیز تشخیصی خطی (به انگلیسی: Linear Discriminant Analysis، به طور مخفف LDA) روش آماری هست که از جمله در یادگیری ماشین و بازشناخت الگو برای پیدا کردن ترکیب خطی خصوصیاتی که به بهترین صورت دو یا چند کلاس از اشیا را از هم جدا می‌کند، استفاده می‌شود.

LDA ارتباط نزدیکی با تحلیل واریانس و تحلیل رگرسیون دارد که سعی دارند یک متغیر مستقل را به عنوان ترکیبی خطی از ویژگی‌های دیگر بیان کنند. این متغیر مستقل در LDA به شکل برچسب یک کلاس است.
همچنین LDA ارتباطی تناتنگ با تحلیل مؤلفه‌های اصلی PCA دارد. چرا که هر دو متد به دنبال ترکیبی خطی از متغیرهایی هستند که به بهترین نحو داده‌ها را توصیف می‌کنند. LDA همچنین سعی در مدلسازی تفاوت بین کلاس‌های مختلف داده‌ها دارد. از LDA زمانی استفاده می‌شود که اندازه‌های مشاهدات، مقادیر پیوسته باشند.
لینک خوب: [/https://blog.faradars.org/linear-discriminant-analysis-with-python](https://blog.faradars.org/linear-discriminant-analysis-with-python/)

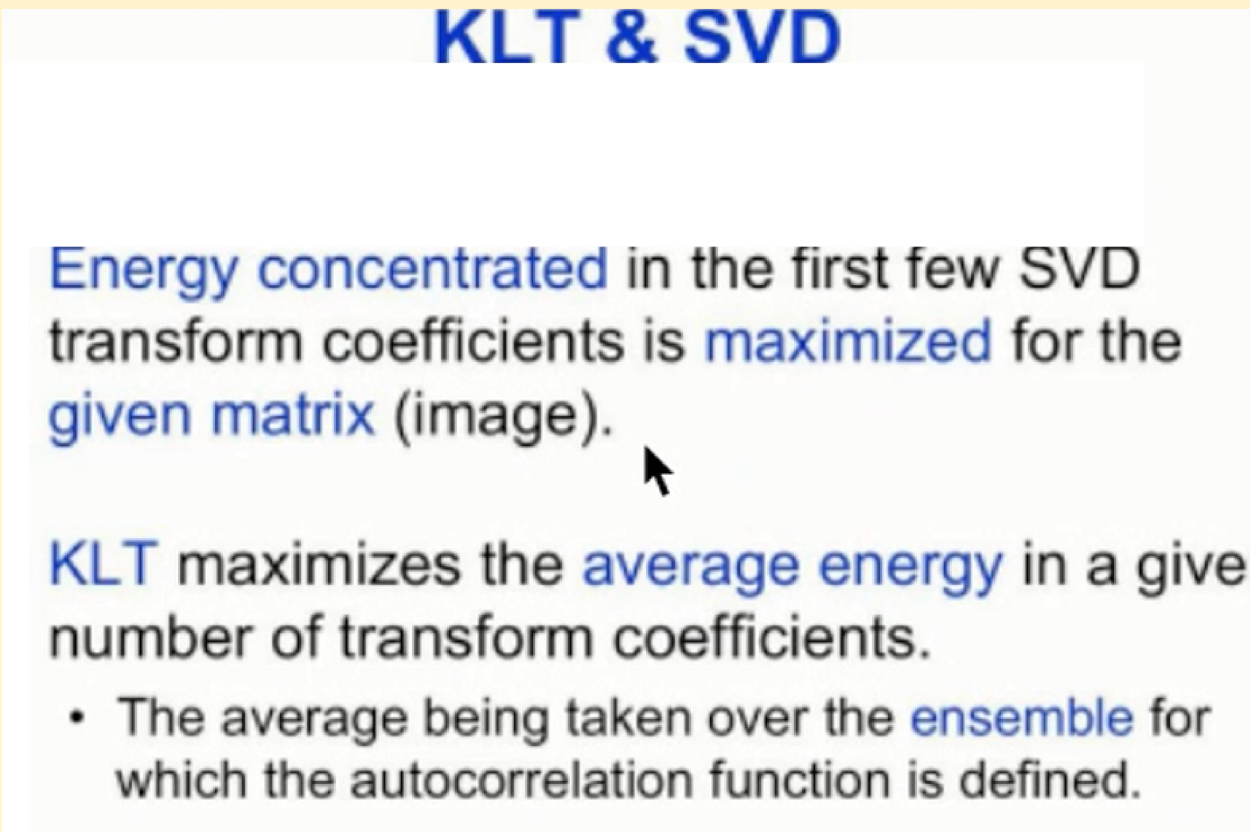




معرفی SVD

تجزیه مقادیر منفرد (به انگلیسی: Singular Value Decomposition) یا SVD
https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

لینک خوب:
https://stats.stackexchange.com/questions/134282/relationship-between-svd-and-pca-how-to-use-svd-to-perform-pca
https://blog.faradars.org/%D8%AA%D8%AC%D8%B2%DB%8C%D9%87-%D9%85%D9%82%D8%A7%D8%AF%DB%8C%D8%B1-%D9%85%D9%86%D9%81%D8%B1%D8%AF/



سایر مطالب

Zonal filter vs filter ⇒ multiplication vs conv